Восстановление контура на основе вариационного принципа

Ю.Л.Сачков
Институт Программных Систем РАН
Переславль-Залесский 152020, Россия
E-mail: sachkov@sys.botik.ru

28 апреля 2009 г.

Аннотация

Описан подход к решению задачи о восстановлении контура на основе следующего вариационного принципа: контур $(x(t), y(t))$ должен минимизировать длину в пространстве (x, y, θ), где θ — угол наклона кривой $(x(t), y(t))$.

1 Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим гладкую кривую на плоскости

$$\begin{aligned} &AB = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}, \\ &A = (x(a), y(a)), \qquad B = (x(b), y(b)). \end{aligned}$$

Предположим, что часть этой кривой

$$\begin{aligned} &CD = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [c, d]\}, \\ &C = (x(c), y(c)), \qquad D = (x(d), y(d)), \\ &a < c < d < b, \end{aligned}$$

скрыта от наблюдения или повреждена, см. Рис. 1. Требуется восстановить кривую CD некоторым естественным образом.

В работах [1] [2] рассматривается следующий способ восстановления кривой CD. Построим касательную T_C к кривой AC в точке C и касательную T_D в точке D, см. Рис. 2. Обозначим через θ_c, θ_d углы наклона

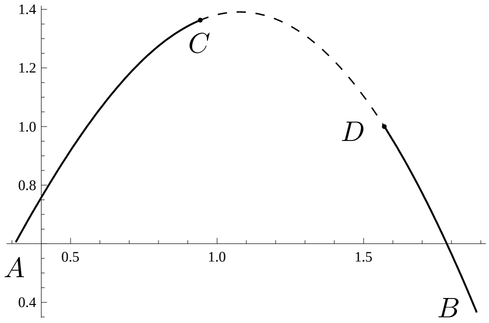

Рис. 1: Исходная кривая AB с поврежденной дугой CD

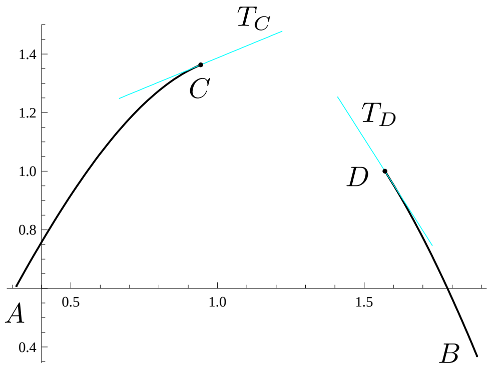

Рис. 2: Граничные условия для восстановления дуги CD

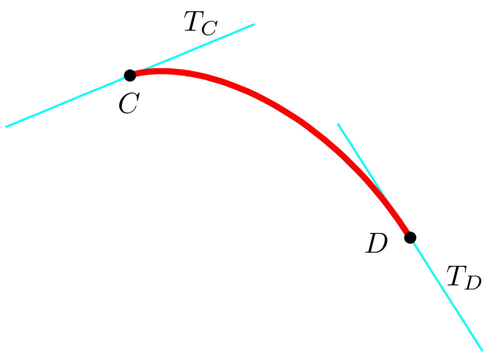

Рис. 3: Новая кривая CD

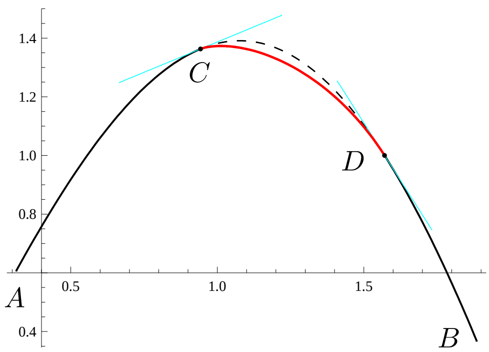

Рис. 4: Исходная кривая AB с поврежденной и новой дугами CD

этих касательных:

$$\operatorname{tg}(\theta_c) = \left.\frac{d\,y}{d\,x}\right|_C = \frac{\dot{y}(c)}{\dot{x}(c)}, \qquad \operatorname{tg}(\theta_d) = \left.\frac{d\,y}{d\,x}\right|_D = \frac{\dot{y}(d)}{\dot{x}(d)}.$$

Искомая кривая

$$\widetilde{CD} = \{(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \mid t \in [c, d]\}$$

должна выходить из точки C с углом наклона θ_c:

$$(\tilde{x}(c), \tilde{y}(c)) = C, \qquad \left.\frac{d\,\tilde{y}}{d\,\tilde{x}}\right|_C = \frac{\dot{\tilde{y}}(c)}{\dot{\tilde{x}}(c)} = \operatorname{tg}(\theta_c), \tag{1}$$

приходить в точку D с углом наклона θ_d:

$$(\tilde{x}(d), \tilde{y}(d)) = D, \qquad \left.\frac{d\,\tilde{y}}{d\,\tilde{x}}\right|_D = \frac{\dot{\tilde{y}}(d)}{\dot{\tilde{x}}(d)} = \operatorname{tg}(\theta_d), \tag{2}$$

и иметь кратчайшую длину в пространстве (x, y, θ):

$$\int_c^d \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 + \dot{\tilde{\theta}}^2}\, dt = \min, \tag{3}$$

см. Рис. 3. Условия (1), (2) означают гладкое сопряжение новой кривой $\widetilde{CD}$ с известными участками AC и DB исходной кривой. Условие (3) формализует условие естественности новой кривой $\widetilde{CD}$: при ее поиске штрафуются большие отклонения как по координатам (x, y), так и по углу наклона θ. Исходная и восстановленная кривая показаны на Рис. 4.

Задача (1), (2), (3) формализуется как следующая задача оптимального управления:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = u\cos\theta,\\
&\dot{y} = u\sin\theta,\\
&\dot{\theta} = v,\\
&(x(c), y(c)) = C, \quad \theta(c) = \theta_c,\\
&(x(d), y(d)) = D, \quad \theta(d) = \theta_d,\\
&\int_c^d \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2}\, dt = \int_c^d \sqrt{u^2 + v^2}\, dt \to \min.
\end{aligned}$$

В работах [3], [4] эта задача была сведена к решению систем алгебраических уравнений в эллиптических функциях. В системе Mathematica [5] написана программа для решения этих систем уравнений.

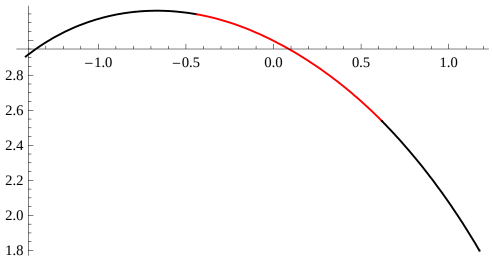

Рис. 5: Восстановленная кривая

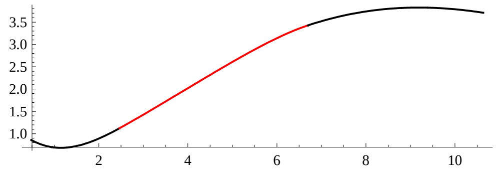

Рис. 6: Восстановленная кривая

Еще два примера кривых, восстановленных по описанному методу, приведены на рис. 5, 6.

В разделе 2 показаны решения этой задачи для некоторых явно заданных граничных условий, а в разделе 3 — решения для случайно выбранных граничных условий. В большинстве случаев решение дается гладкой кривой $(x(t), y(t))$, однако иногда она имеет точки возврата. Такие решения показаны в разделе 4, эти случаи требуют дополнительного исследования.

Вопрос: насколько описанный подход и полученные решения применимы в задачах восстановления изображений (отдельных контуров и их семейств) ?

2 Решения с заданными граничными условиями

Рис. 7: $(x_1, y_1, \theta_1) = (2, 0, 0)$

Рис. 8: $(x_1, y_1, \theta_1) = (2, 0, \pi/8)$

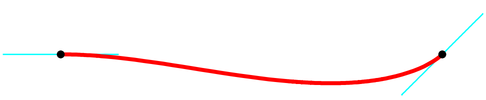

Рис. 9: $(x_1, y_1, \theta_1) = (2, 0, \pi/4)$

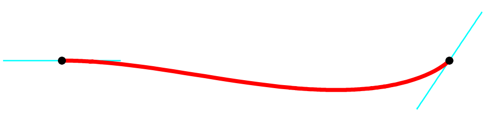

Рис. 10: $(x_1, y_1, \theta_1) = (2, 0, 5\pi/16)$

Рис. 11: $(x_1, y_1, \theta_1) = (0, 2, 0)$; повернута на $\pi/2$

Рис. 12: $(x_1, y_1, \theta_1) = (0, 2, \pi/4)$; повернута на $\pi/2$

Рис. 13: $(x_1, y_1, \theta_1) = (0, 1.5, \pi/4)$; повернута на $\pi/2$

Рис. 14: $(x_1, y_1, \theta_1) = (0, 1.5, \pi/8)$; повернута на $\pi/2$

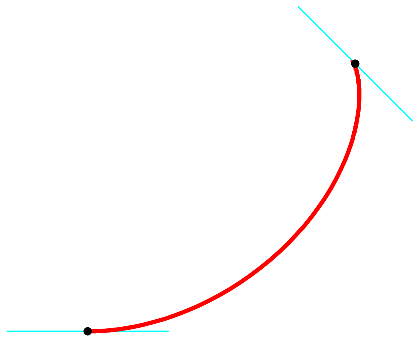

Рис. 15: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 1, 3\pi/4)$

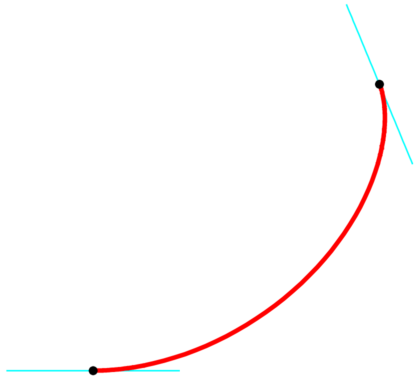

Рис. 16: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 1, 5\pi/8)$

Рис. 17: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 1, \pi/2)$

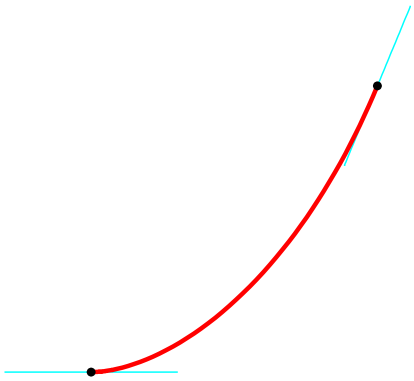

Рис. 18: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 1, 3\pi/8)$

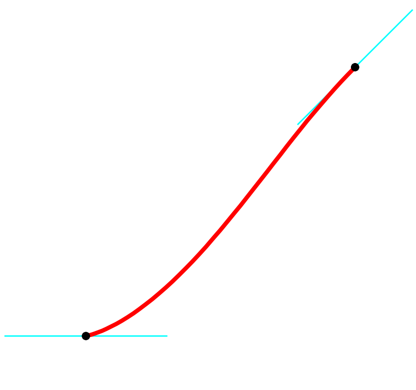

Рис. 19: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 1, \pi/4)$

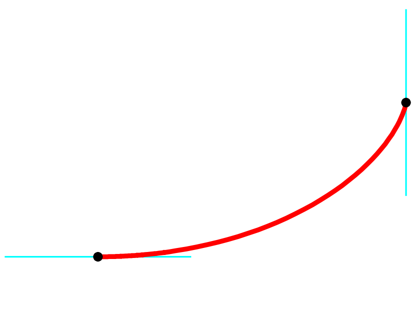

Рис. 20: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 0.5, \pi/2)$

3 Решения со случайными граничными условиями

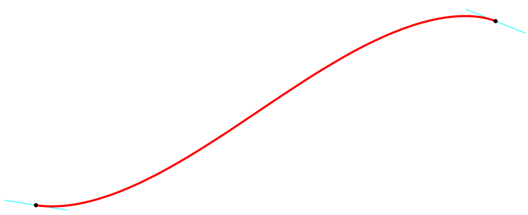

Рис. 21:

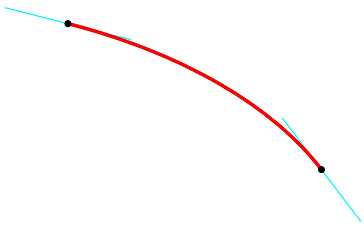

Рис. 22:

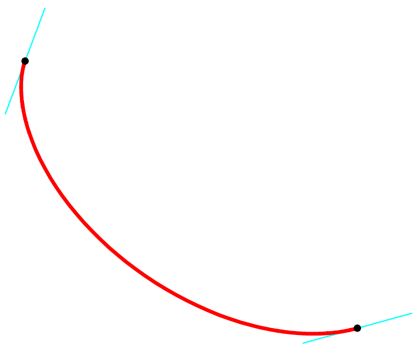

Рис. 23:

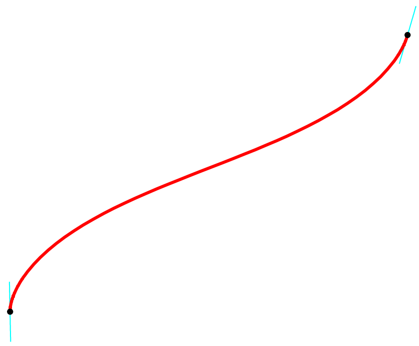

Рис. 24:

Рис. 25:

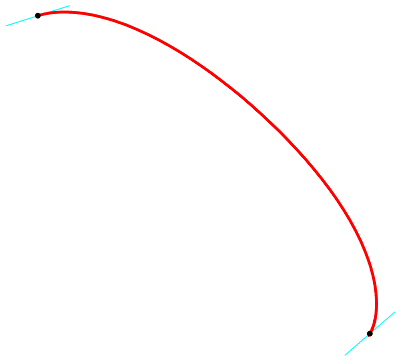

Рис. 26:

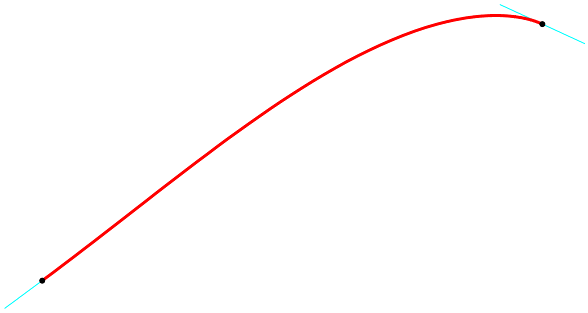

Рис. 27:

Рис. 28:

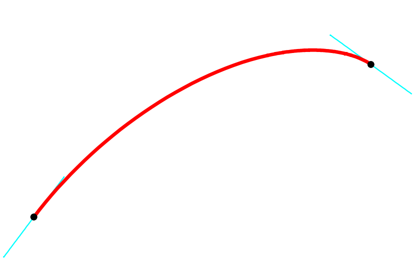

Рис. 29:

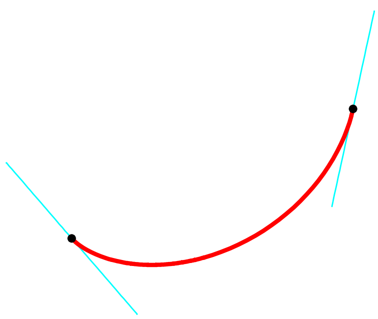

Рис. 30:

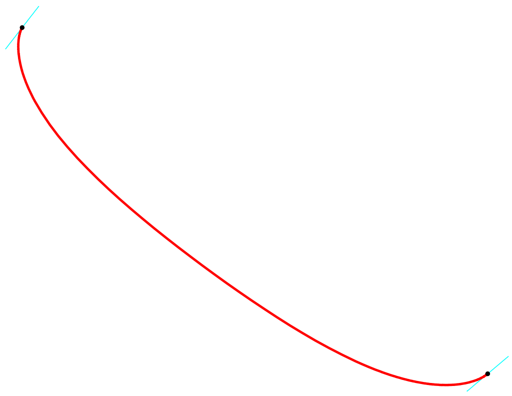

Рис. 31:

Рис. 32:

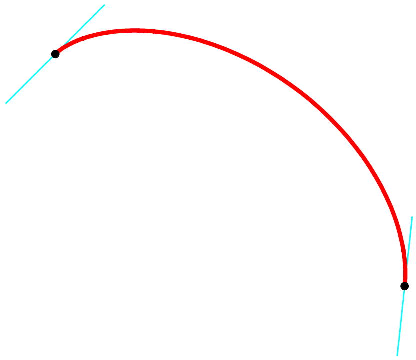

Рис. 33:

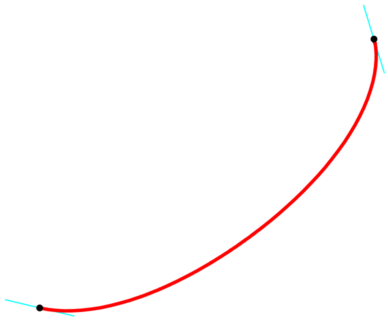

Рис. 34:

4 Негладкие решения

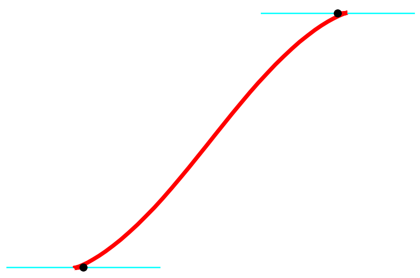

Рис. 35: $(x_1, y_1, \theta_1) = (1, 1, 0)$

Рис. 36: $(x_1, y_1, \theta_1) = (2, 0, \pi/2)$

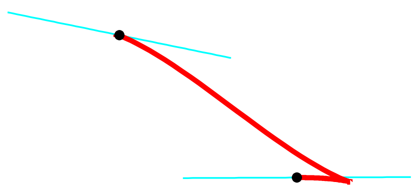

Рис. 37:

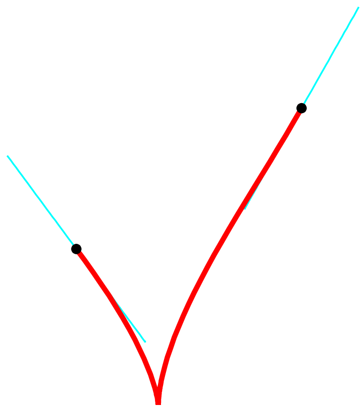

Рис. 38:

Список литературы

[1] J.Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, *J. Physiology - Paris* 97 (2003), 265–309.

[2] G. Citti, A. Sarti, A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space, *J. Math. Imaging Vis.* 24: 307–326, 2006.

[3] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, accepted, available at arXiv:0807.4731v1, 29 July 2008.

[4] Yu. L. Sachkov, Cut time and optimal synthesis in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, `http://arxiv.org/abs/0903.0727v1`, направлена на публикацию.

[5] S. Wolfram, *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley, Reading, MA 1991.