

# Задача Эйлера об эластиках

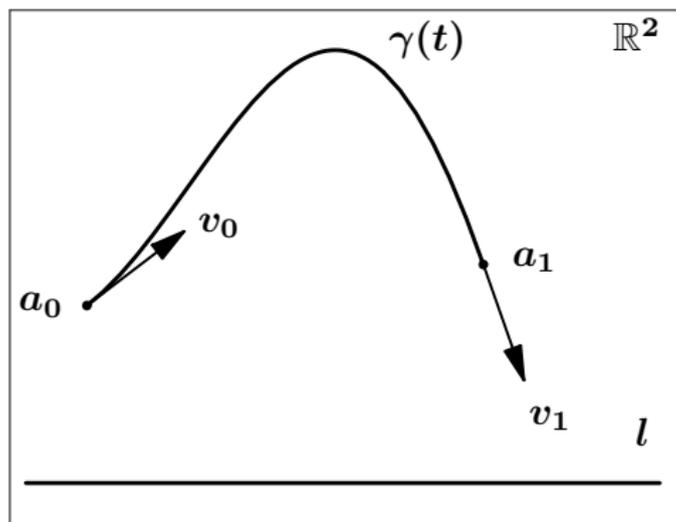
Ю.Л. Сачков

Исследовательский Центр Процессов Управления  
Институт Программных Систем РАН

Программные системы — Теория и приложения, 2006

- 1 Постановка и история задачи
- 2 Задача оптимального управления
- 3 Экстремальные траектории
- 4 Оптимальность экстремальных траекторий
- 5 Устойчивость эластик
- 6 Итоги и планы

# Стационарные конфигурации упругого стержня



**Дано:**  $l > 0$ ,  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $v_0 \in T_{a_0}\mathbb{R}^2$ ,  $v_1 \in T_{a_1}\mathbb{R}^2$ ,  $|v_0| = |v_1| = 1$ .

**Найти:**  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ :

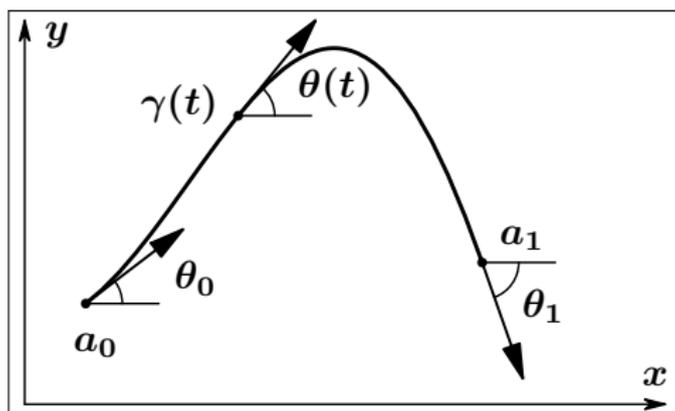
$\gamma(0) = a_0$ ,  $\gamma(t_1) = a_1$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v_0$ ,  $\dot{\gamma}(t_1) = v_1$ .  $|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1 \Rightarrow t_1 = l$

**Упругая энергия**  $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} k^2 dt \rightarrow \min$ ,  $k(t)$  — кривизна  $\gamma(t)$ .

# История задачи об эластиках

1691– 1742	Я., И., Д. Бернулли	Начало: упругая энергия
1744	Леонард Эйлер	Задача вариационного исчисления Уравнение Эйлера-Лагранжа Сведение к квадратурам Типы решений (эластики)
1880	Л. Заалшютц	Эллиптические функции
1906	Макс Борн	Устойчивость эластик
1986	А. Артур, Дж. Уолш	Эластики в задаче о
1993	В. Джарджевич	качении сферы по плоскости
1993	Р. Брокетт, Л. Даи	Эластики в CP (2, 3, 5) задаче
1994	Д. Мамфорд	Эластики в компьютерном видении

...



- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in S^1$ ,
- $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, t_1]$ ,
- $a_0 = (x_0, y_0)$ ,  $a_1 = (x_1, y_1)$ ,
- $v_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ ,  $v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ .

# Задача оптимального управления

$$\dot{x} = \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_{\theta}^1, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \quad t_1 \text{ фиксировано.}$$

$$k^2 = \dot{\theta}^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

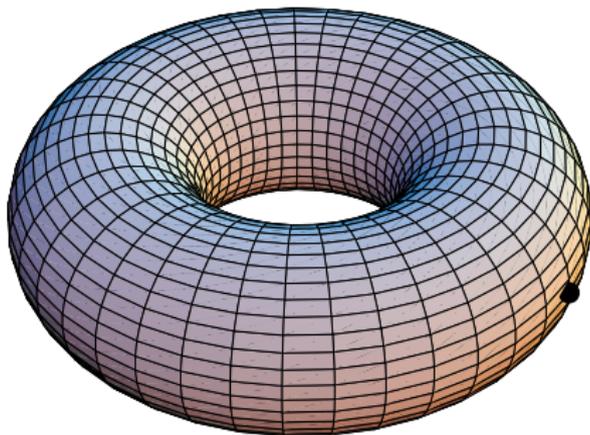
Допустимые управления  $u(t)$  измеримые ограниченные,  
траектории  $q(t)$  липшицевы

# Непрерывные симметрии и нормализация условий задачи

- Параллельные переносы в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$
- Повороты в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow \theta_0 = 0$
- Гомотетии в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow t_1 = 1$

$$q_0 = (0, 0, 0), t_1 = 1$$

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{(x, y, \theta) \mid x^2 + y^2 < 1 \ \forall \theta \in S^1 \text{ или } (x, y, \theta) = (1, 0, 0)\}.$$



Далее:  $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$

$$\dot{q} = X_2(q) + uX_1(q), \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R} \text{ неограничено}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min,$$

- Общая теорема существования:  $u(t) \in L_2$
  - Переход к задаче быстродействия и компактификация пространства управлений:  $u(t) \in L_\infty$
- ⇒ применим принцип максимума Понтрягина

# Принцип максимума Понтрягина в инвариантной форме

$$\dot{q} = X_2(q) + uX_1(q), \quad q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R}, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min$$

- $T_q M = \text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)), \quad X_3 = [X_1, X_2]$
- $T_q^* M = \{(h_1, h_2, h_3)\}, \quad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^* M$
- Гамильтоновы векторные поля  $\vec{h}_i \in \text{Vec}(T^* M)$
- $h_u^\nu = \langle \lambda, X_2 + uX_1 \rangle + \frac{\nu}{2} u^2 = h_2(\lambda) + u h_1(\lambda) + \frac{\nu}{2} u^2$

## Теорема (Принцип максимума Понтрягина)

$u(t)$  и  $q(t)$  оптимальны  $\Rightarrow \exists \lambda_t \in T_{q(t)}^* M, \nu \leq 0$ :

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \vec{h}_2(\lambda_t) + u(t)\vec{h}_1(\lambda_t),$$

$$h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_u^\nu(\lambda_t),$$

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad t \in [0, 1].$$

# Аномальные экстремальные траектории

$$\nu = 0 \Rightarrow u(t) \equiv 0$$

$$\theta \equiv 0, \quad x = t, \quad y \equiv 0,$$

$$J = 0 = \text{min} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  аномальные экстремальные траектории

оптимальны при  $t \in [0, t_1]$

В точку  $(t_1, 0, 0)$  приходит **единственная** экстремальная траектория.

# Гамильтонова система в нормальном случае

$\nu = -1 \Rightarrow$  **неединственность** экстремальных траекторий

Гамильтонова система:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -h_3, & \dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{h}_2 &= h_1 h_3, & \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{h}_3 &= -h_1 h_2, & \dot{\theta} &= h_1 \end{aligned}$$

$$h_1^2 + h_3^2 \equiv \text{const} \Rightarrow h_1 = -r \cos \beta, \quad h_2 = -r \sin \beta$$

Уравнение маятника:

$$\ddot{\beta} = -r \sin \beta$$

# Нормальные экстремальные траектории

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -r \sin(\theta - \gamma), & r, \gamma &= \text{const}, \\ \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{y} &= \sin \theta.\end{aligned}$$

Система интегрируема в **эллиптических функциях**.

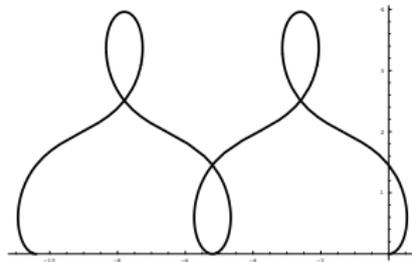
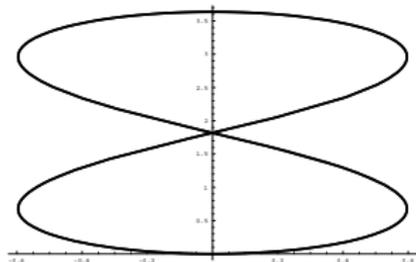
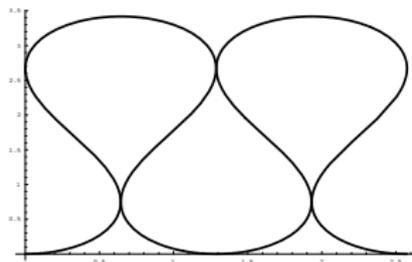
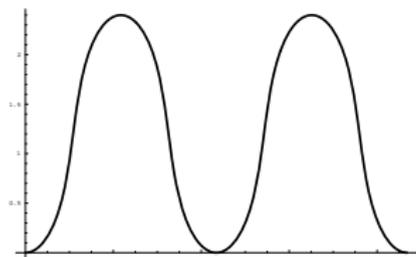
$\theta(t), x(t), y(t)$  выражены через функции Якоби  $\text{cn}, \text{sn}, \text{dn}, E$ .

## Энергия маятника

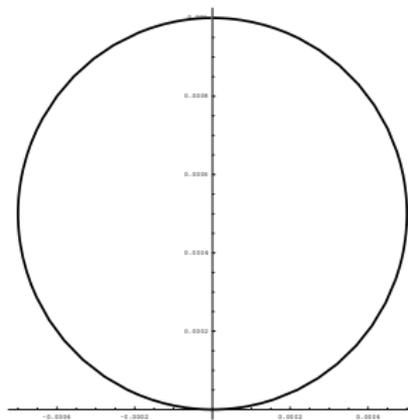
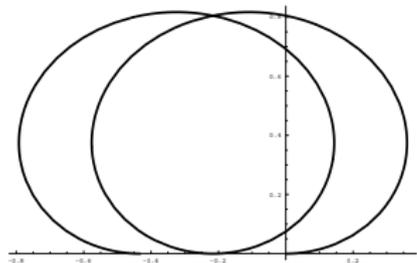
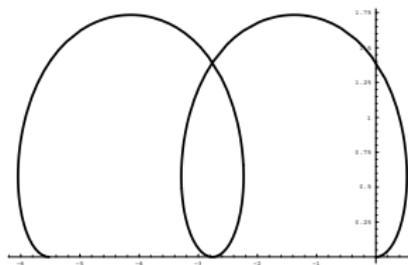
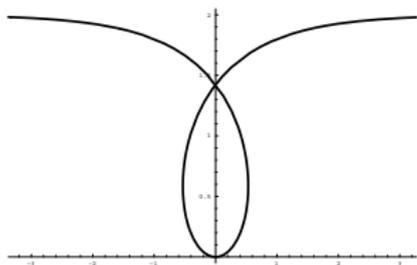
$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - r \cos(\theta - \gamma) \equiv \text{const} \in [-r, +\infty)$$

- $E = -r \neq 0 \Rightarrow$  прямые
- $E \in (-r, r), r \neq 0 \Rightarrow$  инфлекссионные эластики
- $E = r \neq 0, \theta - \gamma = \pi \Rightarrow$  прямые
- $E = r \neq 0, \theta - \gamma \neq \pi \Rightarrow$  критические эластики
- $E > r \neq 0 \Rightarrow$  неинфлекссионные эластики
- $r = 0 \Rightarrow$  прямые и окружности

# Инфлексионные эластики



# Эластики без точек перегиба



$q(t)$  **локально** оптимальна:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \tilde{q}: \quad \|\tilde{q} - q\| < \varepsilon, \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leq J(\tilde{q})$$

Устойчивая эластика  $(x(t), y(t))$

$q(t)$  **глобально** оптимальна:

$$\forall \tilde{q}: \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leq J(\tilde{q})$$

Эластика  $(x(t), y(t))$  минимальной упругой энергии

## Теорема (Усиленное условие Лежандра)

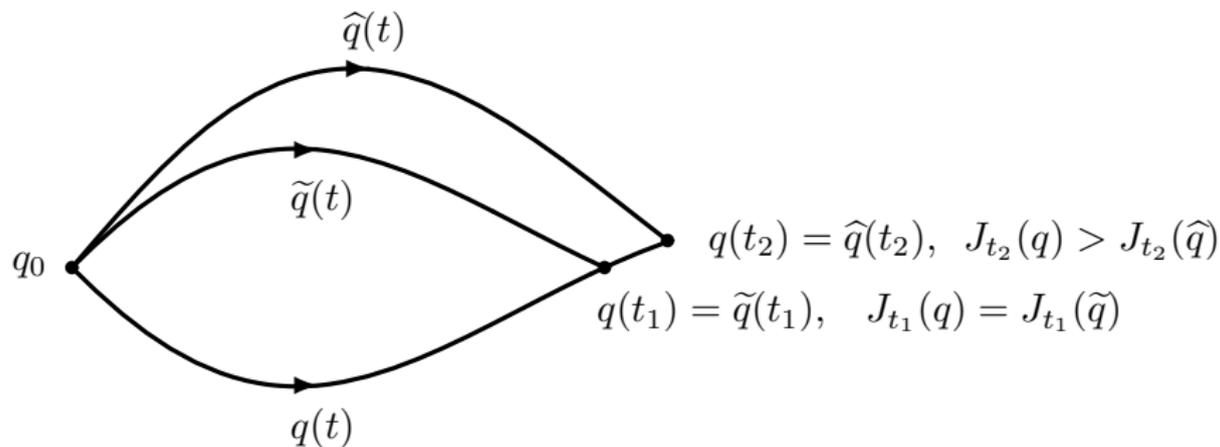
$q(t)$  регулярна  $\Rightarrow$  малые дуги  $q(t)$  локально оптимальны.

Время разреза:

$$t_{\text{cut}}(q) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ оптимальна } \}.$$

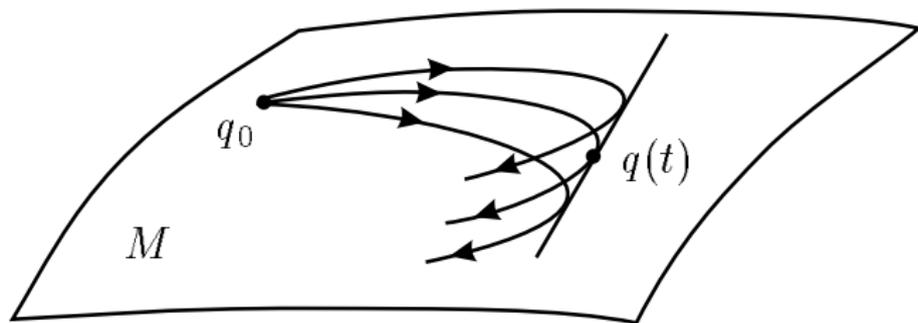
# Причины потери оптимальности: Точка Максвелла

$$\exists \tilde{q}(t) \neq q(t) : \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1), \quad J(q) = J(\tilde{q})$$



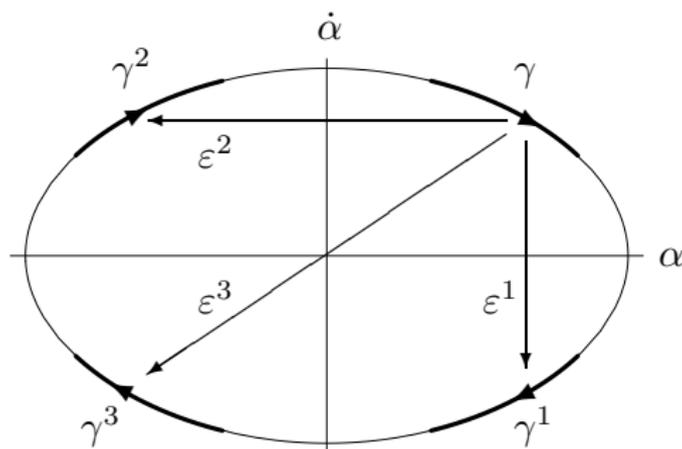
# Причины потери оптимальности: Сопряженная точка

$q(t_1) \in$  огибающей семейства экстремалей



$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\text{Max}}, t_{\text{conj}})$$

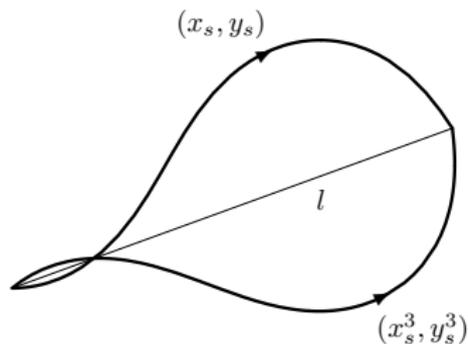
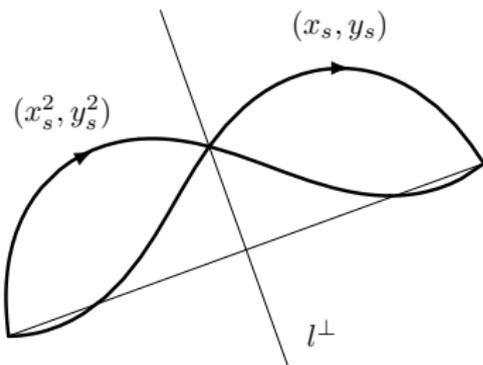
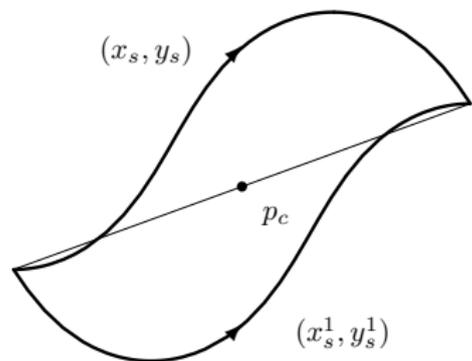
# Отражения в фазовой плоскости маятника $\ddot{\alpha} = -r \sin \alpha$



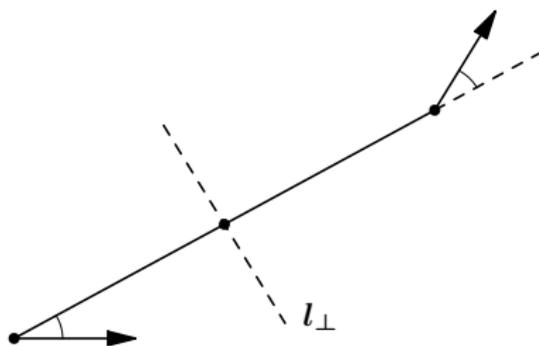
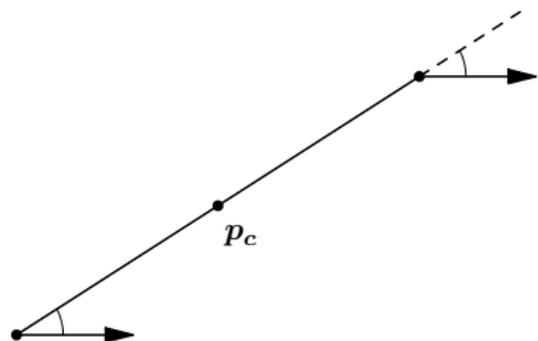
Группа симметрий прямоугольника  $D_2 = \{Id, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$

	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$
$\varepsilon^1$	Id	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$
$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	Id	$\varepsilon^1$
$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^1$	Id

# Действие отражений $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ на элаستيку



# Неподвижные точки отражений $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$



Неподвижные точки отражений  $\varepsilon^i$ :

$$t = t_{\varepsilon^i}^n, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Верхняя оценка времени разреза:

$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\varepsilon^1}^1, t_{\varepsilon^2}^1)$$

$$\text{Exp}_{t_1} : T_{q_0}^* M \rightarrow M, \quad \lambda_0 \mapsto q = q(t_1) = \pi \circ e^{t\vec{h}}(\lambda_0)$$

$q$  — сопряженная точка  $\iff q$  — критическая точка  $\text{Exp}_{t_1}$

$$\text{Exp}_{t_1}(h_1, h_2, h_3) = (x, y, \theta)$$

$$\frac{\partial(x, y, \theta)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} = 0$$

- Нет точек перегиба  $\Rightarrow$  нет сопряженных точек
- Инфлекссионный случай  $\Rightarrow t_{\text{conj}}^n \in [t_{\varepsilon_1}^n, t_{\varepsilon_2}^n]$

# Локальная оптимальность нормальных экстремальных траекторий

$q(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$  нормальная экстремальная траектория

## Теорема (Условие Якоби)

- $(0, t_1]$  не содержит сопряженных точек  $\Rightarrow q(t)$  локально оптимальна;
- $(0, t_1)$  содержит сопряженные точки  $\Rightarrow q(t)$  не является локально оптимальной.

Локальная оптимальность теряется в **первой сопряженной точке**

$t_{\text{conj}}^1 \in (0, +\infty]$  первая сопряженная точка

- $t_1 < t_{\text{conj}}^1 \Rightarrow$  устойчивость
- $t_1 > t_{\text{conj}}^1 \Rightarrow$  неустойчивость
- прямые, окружности, неинфлексионные эластики **устойчивы**

Потеря устойчивости в **первой сопряженной точке**

- $t_1 \leq \frac{1}{2}$  периода маятника  $\Rightarrow$  устойчивость
- $t_1 \geq \frac{3}{2}$  периода маятника  $\Rightarrow$  неустойчивость

В частности:

- нет точек перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость
- 1 или 2 точки перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость или неустойчивость
- 3 точки перегиба  $\Rightarrow$  неустойчивость

- Глобальная оптимальность экстремальных траекторий
- Время разреза  $t_{\text{cut}} = ?$
- Оптимальный синтез в задаче Эйлера об эластиках
- Сопряженные точки и точки разреза в нильпотентной  $(2, 3, 5)$  субримановой задаче
- Задача о качении сферы по плоскости

# Задача Эйлера об эластиках

- Задача оптимального управления
- Экстремальные траектории
- Оптимальность экстремальных траекторий
- Устойчивость эйлеровых эластик