Современная математика. Фундаментальные направления. Том 26 (2007). С. 5–59

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ НА ГРУППАХ ЛИ

© 2007 г. **Ю. Л. САЧКОВ**

Аннотация. Работа представляет собой записки лекций по вводному курсу теории управления на группах Ли, прочитанных в Международной высшей школе научных исследований (Триест, Италия, 2003 и 2006 гг., и Университете г. Руан (Франция, 2006 г.). Рассматриваются задачи управляемости и оптимального управления на группах Ли. Общая теория сопровождается конкретными примерами. Курс рассчитан на студентов старших курсов; знание теории управления и теории групп Ли не предполагается.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Мотивация 5
2. Группы Ли и алгебры Ли 6
3. Левоинвариантные управляемые системы 15
4. Техника расширения для левоинвариантных систем 22
5. Индуцированные системы на однородных пространствах 26
6. Условия управляемости для специальных классов систем и групп Ли 29
7. Принцип максимума Понтрягина для инвариантных задач оптимального управления на группах Ли 37
8. Примеры инвариантных задач оптимального управления на группах Ли 41
Список литературы 58

1. Мотивация

1.1. Билинейные системы. При исследовании управляемости билинейной системы

$$\dot{x} = Ax + uBx, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где A и B — постоянные $n \times n$ матрицы, естественно перейти от системы (1.1) для векторов к аналогичной системе для матриц:

$$\dot{X} = AX + uBX, \qquad X \quad n \times n \text{ матрица}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Это очень естественный переход: напомним, что при исследовании линейного ОДУ $\dot{x} = Ax$ часто переходят к матричному ОДУ $\dot{X} = AX$, где X — матрица Коши для линейного ОДУ.

Имеется ясная и важная связь между свойствами управляемости билинейной системы (1.1) и матричной системы (1.2):

«система (1.2) управляема $\quad\Rightarrow\quad$ система (1.1) управляема»

Далее мы уточним это утверждение и удалим кавычки. Но смысл этой импликации ясен: если мы можем управлять матрицами, то тем более можем управлять векторами. Важно то, что динамика матричной системы проецируется в динамику билинейной системы: любой столбец $x(t)$ матрицы $X(t)$, удовлетворяющей матричной системе (1.2), сам удовлетворяет билинейной системе (1.1).

Можно подумать, что матричные системы (1.2) сложнее билинейных (1.1), но это не так: матричные системы возникают на матричных группах (линейных группах Ли), в то время как билинейные — просто на гладких подмногообразиях в $\mathbb{R}^n$ (однородных пространствах линейных групп Ли). И исследование управляемости матричных систем оказывается более простой задачей, т.к.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 05-01-00703-а.

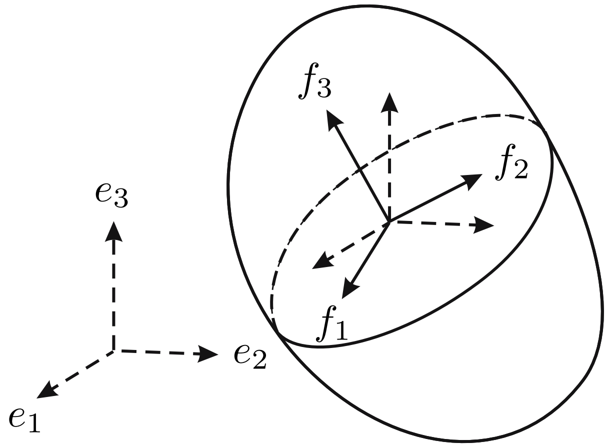

Рис. 1. Неподвижный и подвижный реперы

для них групповая структура доставляет мощную дополнительную технику. Все эти вопросы будут разъяснены в нашем курсе.

1.2. Вращения твердого тела. Некоторые важные управляемые системы в механике, физике, геометрии естественно возникают на группах.

Рассмотрим вращения твердого тела в $\mathbb{R}^3$ вокруг неподвижной точки (например, вращения космического спутника вокруг центра масс). Для того чтобы описать движение тела, выберем неподвижный ортонормированный репер e_1, e_2, e_3 в пространстве и подвижный ортонормированный репер f_1, f_2, f_3 в теле, см. рис. 1.

Тогда матрица ориентации

$$X \ : \ (e_1, e_2, e_3) \mapsto (f_1, f_2, f_3)$$

есть 3×3 ортогональная матрица с единичным определителем. Более того, легко видеть, что матрица $\dot{X}X^{-1} = \Omega$ кососимметрична (угловая скорость тела). Поэтому получаем уравнение движения

$$\dot{X} = \Omega X.$$

Если предположить, что мы можем управлять матрицей Ω, то предыдущая система есть матричная управляемая система, подобная системе (1.2). При исследовании таких систем возникает много вопросов, и один из первый среди них — каково пространство состояний таких систем:

$$X \in ?$$

Мы ответим на этот вопрос в следующем разделе.

2. Группы Ли и алгебры Ли

2.1. Линейные группы Ли. Наиболее важные примеры групп Ли доставляют линейные группы Ли, т.е. группы линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение. В фиксированном базисе $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$ оператор X имеет матрицу $X = (x_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, которую мы будем отождествлять с самим оператором. Таким образом, мы будем рассматривать группы, состоящие из матриц.

Обозначим линейное пространство всех $n \times n$ матриц с действительными элементами как

$$M(n, \mathbb{R}) = \{X = (x_{ij}) \mid x_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, \dots, n\}.$$

Для краткости будем обычно обозначать это пространство как $M(n)$. Элементы матриц x_{ij} задают координаты на пространстве $M(n) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Пример 2.1 (Общая линейная группа)**.** *Общая линейная группа* состоит из всех $n \times n$ обратимых матриц:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n) = \{X \in M(n) \mid \det X \neq 0\}.$$

Легко проверяются следующие свойства множества $\mathrm{GL}(n)$.

(1) В силу непрерывности определителя $\det : M(n) \to \mathbb{R}$, множество $\mathrm{GL}(n)$ есть открытое множество, поэтому гладкое подмногообразие линейного пространства $M(n)$.

(2) Далее, $\mathrm{GL}(n)$ есть группа относительно матричного произведения. Действительно, если $X, Y \in \mathrm{GL}(n)$, то произведение $XY \in \mathrm{GL}(n)$. Далее, единичная матрица $\mathrm{Id} = (\delta_{ij})$ (где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, символ Кронекера) принадлежит $\mathrm{GL}(n)$. Наконец, для любой невырожденной матрицы X обратная матрица X^{-1} также невырождена.

(3) Более того, групповые операции в $\mathrm{GL}(n)$ гладкие:

$$(X, Y) \mapsto XY \qquad (XY)_{ij} \text{ многочлены от } X_{ij}, Y_{ij},$$

$$X \mapsto X^{-1} \qquad (X^{-1})_{ij} \text{ рациональные функции от } X_{ij}.$$

Определение 2.1. Множество G называется *группой Ли*, если:

(1) G — гладкое многообразие,
(2) G — группа, и
(3) групповые операции в G гладкие.

В приведенном выше примере было показано, что $\mathrm{GL}(n)$ есть группа Ли.

Определение 2.2. Группа Ли $G \subset \mathrm{GL}(n)$ называется *линейной группой Ли.*

Имеется следующее достаточное условие того, что некоторое множество матриц образует группу Ли.

Теорема 2.1. *Если G есть замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(n)$, то G есть линейная группа Ли.*

Доказательство. См., например, [49]. □

Иными словами, для того, чтобы убедиться, что некоторое множество матриц $G \subset M(n)$ образует линейную группу Ли, достаточно проверить выполнение следующих трех условий:

(1) $G \subset \mathrm{GL}(n)$,
(2) G есть группа относительно матричного произведения, и
(3) G топологически замкнуто в $\mathrm{GL}(n)$ (т.е. $G = \mathrm{GL}(n) \cap S$, где S — некоторое замкнутое подмножество в $M(n)$).

Рассмотрим теперь несколько важных примеров линейных групп Ли помимо самой большой из них, $\mathrm{GL}(n)$. Во всех этих примерах условия теоремы 2.1 легко проверяются.

Пример 2.2 (Специальная линейная группа)**.** *Специальная линейная группа* состоит из $n \times n$ матриц с единичным определителем:

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(n) = \{X \in M(n) \mid \det X = 1\}.$$

Такие матрицы соответствуют линейным операторам $v \mapsto Xv$, сохраняющим стандартный объем в $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.3 (Ортогональная группа)**.** *Ортогональная группа* образована $n \times n$ ортогональными матрицами:

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in M(n) \mid XX^{\mathrm{T}} = \mathrm{Id}\},$$

где X^{T} обозначает транспонирование матрицы X. Ортогональные преобразования $v \mapsto Xv$ сохраняют евклидову структуру в $\mathbb{R}^n$.

В силу того, что $1 = \det(XX^{\mathrm{T}}) = \det^2 X$, ортогональные матрицы имеют определитель $\det X = \pm 1$.

Пример 2.4 (Специальная ортогональная группа)**.** Ортогональные матрицы с единичным определителем образуют *специальную ортогональную группу*:

$$\mathrm{SO}(n) = \{X \in M(n) \mid XX^{\mathrm{T}} = \mathrm{Id},\ \det X = 1\}.$$

Специальные ортогональные преобразования $v \mapsto Xv$ сохраняют как евклидову структуру, так и ориентацию в $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.5 (Аффинная группа). *Аффинная группа* определяется следующим образом:

$$\mathrm{Aff}(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} Y & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1) \mid Y \in \mathrm{GL}(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{GL}(n+1).$$

Такие матрицы соответствуют обратимым аффинным преобразованиям в $\mathbb{R}^n$ вида $v \mapsto Yv + b$, т.е. линейное преобразование Y плюс трансляция b.

Пример 2.6 (Евклидова группа). *Евклидова группа* есть следующая подгруппа аффинной группы:

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} Y & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1) \mid Y \in \mathrm{SO}(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathrm{GL}(n+1).$$

Такие матрицы параметризуют сохраняющие ориентацию аффинные изометрии $v \mapsto Yv + b$.

Пример 2.7 (Треугольная группа). И последний пример в нашей серии групп, образованных действительными матрицами. *Треугольная группа* состоит из всех обратимых треугольных матриц:

$$\mathrm{T}(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n) \right\} = \{X = (x_{ij}) \in M(n) \mid x_{ij} = 0,\ i > j,\ x_{ii} \neq 0\}.$$

Это — матрицы обратимых линейных операторов $v \mapsto Xv$, сохраняющих флаг подпространств $\mathbb{R}e_1 \subset \mathrm{span}(e_1, e_2) \subset \cdots \subset \mathrm{span}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$.

Переходим к комплексным матрицам. Обозначим пространство всех $n \times n$ матриц с комплексными элементами как

$$M(n, \mathbb{C}) = \{Z = (z_{jk}) \mid z_{jk} \in \mathbb{C},\ j, k = 1, \dots, n\}.$$

В силу того, что каждый элемент разлагается на действительную и мнимую части:

$$z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}, \qquad x_{jk},\ y_{jk} \in \mathbb{R},$$

комплексные матрица имеют аналогичное разложение:

$$Z = X + iY, \qquad X = (x_{jk}),\ Y = (y_{jk}) \in M(n, \mathbb{R}).$$

Действительные координаты x_{jk}, y_{jk} превращают $M(n, \mathbb{C})$ в $\mathbb{R}^{2n^2}$.

Овеществление комплексной матрицы определяется следующим образом. Любой комплексной матрице порядка n соответствует действительная матрица порядка $2n$:

$$Z \sim \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}), \qquad Z = X + iY \in M(n, \mathbb{C}).$$

Матрица $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ есть просто матрица вещественного линейного оператора в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, соответствующего оператору Z в базисе над полем действительных чисел $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$. Естественно, что овеществление сохраняет произведение матриц: если

$$Z_1 = X_1 + iY_1 \sim \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix}, \qquad Z_2 = X_2 + iY_2 \sim \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix},$$

то

$$Z_1 Z_2 = X_1X_2 - Y_1Y_2 + i(Y_1X_2 + X_1Y_2) \sim \begin{pmatrix} X_1X_2 - Y_1Y_2 & -X_1Y_2 - Y_1X_2 \\ X_1Y_2 + Y_1X_2 & X_1X_2 - Y_1Y_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} X_1 & -Y_1 \\ Y_1 & X_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_2 & -Y_2 \\ Y_2 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Овеществление задает вложение $M(n, \mathbb{C}) \subset M(2n, \mathbb{R})$.

Пример 2.8 (Комплексная общая линейная группа). *Комплексная общая линейная группа* состоит из всех комплексных $n \times n$ обратимых матриц:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) &= \{Z \in M(n,\mathbb{C}) \mid \det Z \neq 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n,\mathbb{R}) \mid \det^2 X + \det^2 Y \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Справедливо предложение, аналогичное теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Если G есть замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, то G есть линейная группа Ли.*

Пример 2.9 (Комплексная специальная линейная группа). *Комплексная специальная линейная группа* образована всеми комплексными $n \times n$ матрицами с единичным определителем:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) &= \{Z \in M(n,\mathbb{C}) \mid \det Z = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n,\mathbb{R}) \mid \det(X + iY) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Пример 2.10 (Унитарная группа). Важный пример линейной группы Ли доставляет *унитарная группа*, состоящая из всех $n \times n$ унитарных матриц:

$$\mathrm{U}(n) = \{Z \in M(n,\mathbb{C}) \mid \bar{Z}^{\mathrm{T}} Z = \mathrm{Id}\}.$$

(Здесь $\bar{Z}$ обозначает комплексно сопряженную матрицу к Z.) Такие матрицы соответствуют линейным преобразованиям, сохраняющим унитарную структуру в $\mathbb{C}^n$. Вычислим овеществление унитарной матрицы.

Имеем

$$Z = X + iY, \qquad \bar{Z}^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} - iY^{\mathrm{T}},$$

поэтому

$$\bar{Z}^{\mathrm{T}} Z = (X^{\mathrm{T}} - iY^{\mathrm{T}})(X + iY) = (X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y) + i(X^{\mathrm{T}}Y - Y^{\mathrm{T}}X) = \mathrm{Id} + i \cdot 0.$$

Следовательно, овеществление унитарной группы имеет вид

$$\mathrm{U}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n,\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y = \mathrm{Id},\ X^{\mathrm{T}}Y - Y^{\mathrm{T}}X = 0 \right\}.$$

Вычислим определитель унитарной матрицы:

$$1 = \det(\bar{Z}^{\mathrm{T}} Z) = \overline{\det Z} \cdot \det Z = |\det Z|^2,$$

поэтому

$$\det Z = e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Пример 2.11 (Специальная унитарная группа). Еще один важный пример группы, образованной комплексными матрицами — *специальная унитарная группа*:

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{Z \in M(n,\mathbb{C}) \mid \bar{Z}^{\mathrm{T}} Z = \mathrm{Id},\ \det Z = 1\} = \\ = \left\{ \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in M(2n,\mathbb{R}) \mid X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y = \mathrm{Id},\ X^{\mathrm{T}}Y - Y^{\mathrm{T}}X = 0,\ \det(X + iY) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

2.2. Алгебра Ли группы Ли.

Пример 2.12 ($T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n)$). Рассмотрим касательное пространство к общей линейной группе в единице:

$$T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n) = \left\{ \dot{X}(0) \mid X(t) \in \mathrm{GL}(n),\ X(0) = \mathrm{Id} \right\}.$$

Вычислим явно это пространство. Так как вектор скорости $\dot{X}(t) = (\dot{x}_{ij}(t))$ есть $n \times n$ матрица, получаем

$$\dot{X}(0) = (\dot{x}_{ij}(0)) = A \in M(n).$$

Поэтому

$$T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n) \subset M(n).$$

Для того чтобы показать, что это включение в действительности является равенством, выберем произвольную матрицу $A \in M(n)$. Кривая $X(t) = \mathrm{Id} + tA$ принадлежит группе $\mathrm{GL}(n)$ при $|t| < \varepsilon$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$. Более того, $X(0) = \mathrm{Id}$ и $\dot{X}(0) = A$. Следовательно,

$$T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n) = M(n).$$

Касательное пространство $T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n)$ является линейным пространством. Более того, оно наделено дополнительной операцией, матричным *коммутатором*:

$$[A, B] = AB - BA \in M(n), \qquad A,\ B \in M(n).$$

Отметим, что эта операция обладает следующими свойствами:

(1) билинейность,
(2) кососимметричность: $[B, A] = -[A, B]$,
(3) *тождество Якоби*:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Определение 2.3. Линейное пространство L с бинарной операцией $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$, которая:

(1) билинейна,
(2) кососимметрична и
(3) удовлетворяет тождеству Якоби,

называется *алгеброй Ли*.

Пространство $M(n)$ с матричным коммутатором есть алгебра Ли. Чтобы подчеркнуть связь этой алгебры Ли с группой Ли $\mathrm{GL}(n)$, эту алгебру Ли обозначают как $\mathrm{gl}(n)$. Итак,

$$T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(n) = \mathrm{gl}(n).$$

Эта конструкция имеет обобщение фундаментальной важности.

Определение 2.4. Касательное пространство к группе Ли G в единичном элементе называется *алгеброй Ли группы Ли* G:

$$L = T_{\mathrm{Id}}G.$$

Вычислим алгебры Ли групп Ли, рассмотренных выше.

Пример 2.13 (Алгебра Ли группы $\mathrm{SL}(n)$)**.** Алгебра Ли специальной линейной группы обозначается как $\mathrm{sl}(n)$. Имеем

$$\mathrm{sl}(n) = T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SL}(n) = \{\dot{X}(0) \mid X(t) \in \mathrm{SL}(n),\ X(0) = \mathrm{Id}\}.$$

Возьмем кривую $X(t) = \mathrm{Id} + t\dot{X}(0) + o(t) \in \mathrm{SL}(n)$, тогда

$$1 = \det X(t) = \det(\mathrm{Id} + t\dot{X}(0) + o(t)) = 1 + t\,\mathrm{tr}\,\dot{X}(0) + o(t), \qquad t \to 0,$$

поэтому $\mathrm{tr}\,\dot{X}(0) = 0$.

Следовательно,

$$\mathrm{sl}(n) = \{A \in M(n) \mid \mathrm{tr}\,A = 0\},$$

бесследовые матрицы. Точнее, мы доказали только включение $\subset$. Обратное включение мы оставляем читателю в качестве упражнения; это можно сделать, сравнивая размерности линейных пространств. (Такое же замечание справедливо для аналогичных вычислений в приводимых ниже примерах.)

Пример 2.14 (Алгебра Ли группы $\mathrm{SO}(n)$)**.** Эта алгебра Ли обозначается как

$$\mathrm{so}(n) = T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SO}(n) = \{\dot{X}(0) \mid X(t) \in \mathrm{SO}(n),\ X(0) = \mathrm{Id}\}.$$

Имеем $X(t)X^{\mathrm{T}}(t) \equiv \mathrm{Id}$, поэтому

$$0 = \dot{X}(0)\underbrace{X^{\mathrm{T}}(0)}_{\mathrm{Id}} + \underbrace{X(0)}_{\mathrm{Id}}\dot{X}^{\mathrm{T}}(0) = \dot{X}(0) + \dot{X}^{\mathrm{T}}(0).$$

Обозначая $A = \dot{X}(0)$, получаем $A + A^{\mathrm{T}} = 0$ и

$$\mathrm{so}(n) = \{A \in M(n) \mid A + A^{\mathrm{T}} = 0\},$$

кососимметрические матрицы.

Подобным образом вычисляются алгебры Ли в следующих трех примерах.

Пример 2.15 (Алгебра Ли группы $\mathrm{Aff}(n)$).

$$\mathrm{aff}(n) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{Aff}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{gl}(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Пример 2.16 (Алгебра Ли группы $\mathrm{E}(n)$).

$$\mathrm{e}(n) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{so}(n),\ b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Пример 2.17 (Алгебра Ли группы $\mathrm{T}(n)$).

$$\mathrm{t}(n) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{T}(n) = \{A = (a_{ij}) \in M(n) \mid a_{ij} = 0,\ i > j\},$$

треугольные матрицы.

Наконец, вычислим алгебры Ли унитарной и специальной унитарной групп.

Пример 2.18 (Алгебра Ли группы $\mathrm{U}(n)$).

$$\mathrm{u}(n) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{U}(n),$$

и мы действуем так же, как для $\mathrm{SO}(n)$. Для кривой $Z(t) \in \mathrm{U}(n)$, $Z(0) = \mathrm{Id}$, имеем $Z(t)\bar{Z}^{\mathrm{T}}(t) \equiv \mathrm{Id}$. Поэтому

$$0 = \dot{Z}(0) \underbrace{\bar{Z}^{\mathrm{T}}(0)}_{\mathrm{Id}} + \underbrace{Z(0)}_{\mathrm{Id}} \dot{\bar{Z}}^{\mathrm{T}}(0).$$

Обозначая $A = \dot{Z}(0)$, получаем $A + \bar{A}^{\mathrm{T}} = 0$, косоэрмитова матрица. Следовательно,

$$\mathrm{u}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^{\mathrm{T}} = 0\}.$$

Пример 2.19 (Алгебра Ли группы $\mathrm{SU}(n)$).

$$\mathrm{su}(n) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{SU}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^{\mathrm{T}} = 0,\ \mathrm{tr}\, A = 0\}.$$

Подведем итог: мы рассмотрели переход от группы Ли G к соответствующему линейному объекту — алгебре Ли L группы Ли G. Ответ на естественный вопрос о возможности обратного перехода дается (для линейных групп Ли) матричной экспонентой.

2.3. Матричная экспонента. Прежде чем обратиться к матричным управляемым системам, рассмотрим матричное ОДУ:

$$\dot{X} = XA, \tag{2.1}$$

для заданной матрицы $A \in M(n)$. В случае $n = 1$ решения ОДУ

$$\dot{x} = xa$$

даются экспонентой:

$$x(t) = x(0)e^{at}, \quad e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \cdots .$$

Для произвольного натуральногоn можно действовать аналогичным образом и определить для матрицы $A \in M(n)$ ее *экспоненту* с помощью того же ряда:

$$\exp(A) = e^A = \mathrm{Id} + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \cdots .$$

Этот матричный ряд сходится абсолютно, поэтому его можно дифференцировать почленно:

$$\left(e^{At}\right)' = \left(\mathrm{Id} + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots\right)' = A + \frac{A^2t}{1!} + \dots + \frac{A^nt^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^{At}A.$$

Итак, матричная экспонента $X(t) = e^{At}$ есть решение задачи Коши

$$\dot{X} = XA, \qquad X(0) = \mathrm{Id},$$

а все решения матричного уравнения (2.1) имеют вид

$$X(t) = X(0)e^{At}.$$

Заметим, что для произвольной матрицы $A \in \mathrm{gl}(n)$ ее экспонента $\exp(A) \in \mathrm{GL}(n)$ т.к. $\det \exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A) \neq 0$. Итак, построено гладкое отображение

$$\exp\,:\,\mathrm{gl}(n) \to \mathrm{GL}(n).$$

Мы обобщим эту конструкцию в следующем пункте.

2.4. Левоинвариантные векторные поля. Мы видели, что для произвольной матрицы $A \in \mathrm{gl}(n)$, задача Коши

$$\dot X = XA, \quad X(0) = X_0, \qquad X \in \mathrm{GL}(n),$$

имеет (единственное) решение вида

$$X(t) = X_0 \exp(tA).$$

Что можно сказать об аналогичной задаче для произвольной (линейной) группы Ли G:

$$\dot X = XA, \qquad X \in G\ ?$$

Пример 2.20. Рассмотрим, например, задачу Коши для специальной линейной группы:

$$\dot X = XA, \quad X(0) = \mathrm{Id}, \qquad X \in \mathrm{SL}(n). \tag{2.2}$$

В силу единственности, решения этого ОДУ должны задаваться, как и выше, матричной экспонентой; но вопрос в том, принадлежит ли она данной группе Ли:

$$X(t) = \exp(tA) \in \mathrm{SL}(n)\ ?$$

Очевидно, что в общем случае ответ отрицательный. Действительно, если $X(t) = \exp(tA) \in \mathrm{SL}(n)$, то

$$A = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tA) \in T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SL}(n) = \mathrm{sl}(n).$$

Поэтому если $A \notin \mathrm{sl}(n)$, то ОДУ (2.2) некорректно определено, т.е. векторное поле XA не касается группы Ли $\mathrm{SL}(n)$.

Как устроено касательное пространство к группе Ли G в ее точке X ? Простой ответ на этот вопрос дается в следующем утверждении.

Предложение 2.1. *Пусть G есть группа Ли, L — ее алгебра Ли, и пусть $X \in G$. Тогда*

$$T_X G = X T_{\mathrm{Id}} G = XL = \{XA \mid A \in L\}.$$

Доказательство. Вычислим касательное пространство

$$T_X G = \{\dot X(0) \mid X(t) \in G,\ X(0) = X\}.$$

По любой гладкой кривой $X(t)$, выходящей из точки X, легко построить кривую, выходящую из единицы:

$$Y(t) = X^{-1}X(t), \qquad Y(0) = X^{-1}X = \mathrm{Id}\,.$$

Тогда

$$\dot Y(0) = X^{-1}\dot X(0) \in L.$$

Обозначая $A = \dot Y(0) \in L$, получим

$$\dot X(0) = XA, \qquad A \in L.$$

Поэтому $T_X G \subset XL$. Так как эти линейные пространства имеют одинаковые размерности, заключаем, что

$$T_X G = XL.$$

□

Итак, умножение слева на X переводит касательное пространство L в единице в касательное пространство XL в точке X.

Поэтому для любого элемента

$$A \in L,$$

вектор

$$V(X) = XA \in T_X G, \qquad X \in G,$$

т.е. векторное поле $V(X)$ касается группы Ли G. Поэтому ОДУ

$$\dot{X} = XA, \qquad X \in G, \tag{2.3}$$

корректно определено и имеет решения

$$X(t) = X(0)\exp(At) \in G.$$

Отметим следующее важное свойство уравнения (2.3): если кривая $X(t)$ является траекторией поля $V(X) = XA$, то ее левый сдвиг $YX(t)$ есть также траектория этого уравнения для любого $Y \in G$. Действительно:

$$X(t) = X(0)\exp(tA),$$

поэтому

$$Y(t) = YX(t) = YX(0)\exp(tA) = Y(0)\exp(tA).$$

Определение 2.5. Векторные поля вида

$$V(X) = XA, \quad X \in G, \qquad A \in L,$$

называются *левоинвариантными векторными полями* на линейной группе Ли G.

Возьмем два левоинвариантных векторных поля на группе Ли G:

$$\begin{aligned}
&A,\ B \in L, \\
&V(X) = XA, \quad W(X) = XB, \qquad X \in G.
\end{aligned}$$

Возникает естественный вопрос: чему равна скобка Ли таких векторных полей? В силу левоинвариантности полей V и W, ясно, что поле $[V, W]$ должно быть левоинвариантным. Для того, чтобы вычислить это поле, напомним определение скобки Ли векторных полей.

Определение 2.6. Пусть V и W суть гладкие векторные поля на гладком многообразии M. *Скобка Ли* (или *коммутатор*) полей V, W есть такое векторное поле $[V, W] \in \operatorname{Vec} M$, что

$$[V, W](X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(\sqrt{t}), \qquad X \in M,$$

где кривая γ определяется следующим образом:

$$\gamma(t) = e^{-tW} \circ e^{-tV} \circ e^{tW} \circ e^{tV}(X),$$

см. рис. 2.

Здесь e^{tV} обозначает поток векторного поля V:

$$\frac{d}{dt} e^{tV}(X) = V(e^{tV}(X)), \qquad \left. e^{tV}\right|_{t=0}(X) = X,$$

а $\operatorname{Vec} M$ есть пространство всех гладких векторных полей на гладком многообразии M.

Вычислим скобку Ли левоинвариантных векторных полей.

Предложение 2.2. *Пусть G есть линейная группа Ли, L — ее алгебра Ли, и пусть $A, B \in L$. Пусть $V(X) = XA$ и $W(X) = XB$ — левоинвариантные векторные поля на G. Тогда*

$$[V, W](X) = [XA, XB] = X[A, B] = X(AB - BA), \qquad X \in G.$$

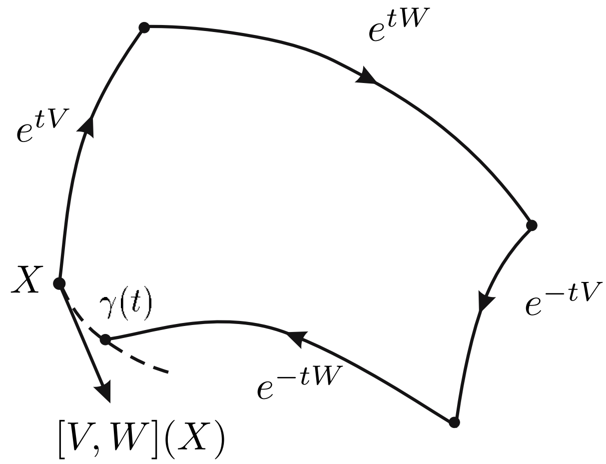

Рис. 2. Скобка Ли векторных полей V, W

Доказательство. Потоки левоинвариантных векторных полей задаются матричной экспонентой:

$$e^{tV}(X) = X\exp(tA), \qquad e^{tW}(X) = X\exp(tB).$$

Вычислим члены малого порядка для кривой γ из определения 2.6:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= X\exp(tA)\exp(tB)\exp(-tA)\exp(-tB) \\
&= X\left(\mathrm{Id} + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots\right)\left(\mathrm{Id} + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + \cdots\right) \\
&\qquad \left(\mathrm{Id} - tA + \frac{t^2}{2}A^2 - \cdots\right)\left(\mathrm{Id} - tB + \frac{t^2}{2}B^2 - \cdots\right) \\
&= X\left(\mathrm{Id} + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots\right) \\
&\qquad \left(\mathrm{Id} - t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots\right) \\
&= X(\mathrm{Id} + t^2[A,B] + \cdots),
\end{aligned}$$

поэтому

$$\gamma(\sqrt{t}) = X(\mathrm{Id} + t[A,B] + \cdots),$$

заметим, что это — гладкая кривая при $t = 0$, и

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(\sqrt{t}) = X[A,B].$$

Согласно определению 2.6, это — скобка Ли $[XA, XB]$. $\square$

Следствие 2.1. *Левоинвариантные векторные поля на группе Ли G образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли $L = T_{\mathrm{Id}}G$. Изоморфизм задается следующим образом:*

$$\textit{левоинвариантное векторное поле } XA \in \operatorname{Vec} G \qquad \leftrightarrow \qquad A \in L.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять эти два представления алгебры Ли группы Ли G:

(1) $L = T_{\mathrm{Id}}G$, и
(2) $L = \{$левоинвариантные векторные поля на $G\}$.

3. Левоинвариантные управляемые системы

3.1. Определения.

Пусть G есть группа Ли, а L — ее алгебра Ли.

Определение 3.1. *Левоинвариантной управляемой системой* Γ на группе Ли G называется произвольное множество левоинвариантных векторных полей на G, т.е. любое подмножество

$$\Gamma \subset L. \tag{3.1}$$

Пример 3.1 (Аффинные по управлениям левоинвариантные системы)**.** Отметим специальный класс левоинвариантных систем, важный для приложений — *аффинные по управлениям системы*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}, \tag{3.2}$$

где A, B_1, …, B_m — некоторые элементы L. Если пространство управлений U совпадает с $\mathbb{R}^m$, то система (3.2) есть аффинное подпространство в L.

Замечание. В этих лекциях мы записываем левоинвариантную управляемую систему в виде (3.1) или (3.2), т.е. как множество векторных полей, *полисистему*. В *классических обозначениях*, аффинные по управлениям системы (3.2) записываются в следующем виде:

$$\dot{X} = XA + \sum_{i=1}^{m} u_i X B_i, \qquad u = (u_1, \dots, u_m) \in U, \quad X \in G. \tag{3.3}$$

Полисистему (3.1) можно записать в таких классических обозначениях, выбирая параметризацию множества Γ.

Определение 3.2. *Траектория* левоинвариантной системы Γ на G есть такая непрерывная кривая $X(t)$ в G, заданная на отрезке $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$, что существует разбиение

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

и левоинвариантные векторные поля

$$A_1, \dots, A_N \in \Gamma$$

такие что ограничение кривой $X(t)$ на каждый интервал (t_{i-1}, t_i) дифференцируемо и

$$\dot{X}(t) = X(t) A_i \text{ при } t \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

В классических обозначениях, это соответствует кусочно-постоянным допустимым управлениям. При исследовании глобальной управляемости на неограниченном временном отрезке можно ограничиться этим классом допустимых управлений.

Определение 3.3. Для любого $T \geq 0$ и любого X в G, *множеством достижимости за время* T левоинвариантной системы $\Gamma \subset L$ из точки X называется множество $\mathcal{A}_\Gamma(X, T)$ всех точек, достижимых из X в точности за T единиц времени:

$$\mathcal{A}_\Gamma(X, T) = \{X(T) \mid X(\cdot) \text{ траектория системы } \Gamma,\ X(0) = X\}.$$

Множество достижимости за время не больше $T \geq 0$ определяется как

$$\mathcal{A}_\Gamma(X, \leqslant T) = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{A}_\Gamma(X, t).$$

Множество достижимости системы Γ из точки $X \in G$ есть множество $\mathcal{A}_\Gamma(X)$ всех конечных точек $X(T)$, $T \geq 0$, всех траекторий Γ, начинающихся в точке X:

$$\mathcal{A}_\Gamma(X) = \{X(T) \mid X(\cdot) \text{ траектория системы } \Gamma,\ X(0) = X,\ T \geq 0\} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{A}_\Gamma(X, T).$$

Если это не будет приводить к неопределенности, мы будем далее обозначать множества достижимости $\mathcal{A}_\Gamma(X, T)$ и $\mathcal{A}_\Gamma(X)$ как $\mathcal{A}(X, T)$ и $\mathcal{A}(X)$, соответственно.

Определение 3.4. Система $\Gamma \subset L$ называется *управляемой,* если для любой пары точек X_0 и X_1 в G, точка X_1 достижима из X_0 вдоль траектории системы Γ за неотрицательное время:

$$X_1 \in \mathcal{A}(X_0) \text{ для всех } X_0,\ X_1 \in G,$$

или, иными словами, если

$$\mathcal{A}(X) = G \text{ для всех } X \in G.$$

В литературе по теории управления, это понятие соответствует *глобальной*, или *полной управляемости*. Впрочем, для левоинвариантных систем эти свойства эквивалентны *локальной управляемости* в единице, см. далее теорему 3.5.

3.2. Правоинвариантные управляемые системы. Аналогично левоинвариантным векторным полям $\dot{X} = XA$, можно рассматривать *правоинвариантные векторные поля* вида $\dot{Y} = BY$.

Инверсия

$$i : G \to G, \qquad i(X) = X^{-1} = Y,$$

преобразует левоинвариантные векторные поля в правоинвариантные. Действительно, пусть $X(t)$ — траектория левоинвариантного уравнения $\dot{X} = XA$. Вычислим ОДУ для $Y(t) = X^{-1}(t)$. Так как $Y(t)X(t) = \mathrm{Id}$, имеем $\dot{Y}(t)X(t) + Y(t)\dot{X}(t) = 0$, поэтому

$$\dot{Y}(t) = -Y(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) = -Y(t)X(t)AY(t) = -AY(t).$$

Следовательно,

$$\dot{X} = XA \quad \Leftrightarrow \quad \dot{Y} = -AY, \qquad Y = X^{-1}.$$

Но $X(t) = X_0 e^{tA}$, поэтому $Y(t) = e^{-tA}Y_0$.

Отметим, что аналогично предложению 2.1, легко показать, что $T_X G = LX$, и алгебра Ли $L = T_{\mathrm{Id}}G$ группы Ли G может быть отождествлена с алгеброй Ли правоинвариантных векторных полей $\{AX \mid A \in L\}$ на G.

Упражнение 3.1. Докажите, что скобка Ли правоинвариантных векторных полей вычисляется следующим образом:

$$[AX, BX] = [B, A]X.$$

Определение 3.5. *Правоинвариантная управляемая система* на группе Ли G есть произвольное множество правоинвариантных векторных полей на G.

Определение 3.6. Аффинная по управлениям правоинвариантная система на группе Ли G имеет вид

$$\dot{Y} = AY + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i Y, \qquad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad Y \in G. \tag{3.4}$$

Инверсия $X = Y^{-1}$ переводит правоинвариантную систему (3.4) в левоинвариантную систему

$$\dot{X} = -XA - \sum_{i=1}^{m} u_i X B_i, \qquad u \in U, \quad X \in G.$$

Подводя итог, можно отметить, что все задачи для правоинвариантных систем сводятся инверсией к исследованию левоинвариантных систем.

3.3. Простейшие свойства орбит и множеств достижимости. Пусть G — линейная группа Ли, а L — ее алгебра Ли, т.е. пространство левоинвариантных векторных полей на G.

Лемма 3.1. *Пусть $A \in L$ и $X_0 \in G$. Тогда задача Коши*

$$\dot{X} = XA, \qquad X(t_0) = X_0,$$

имеет решение $X(t) = X_0 \exp((t - t_0)A)$.

С помощью этой очевидной леммы можно получить представление конечной точки траектории в виде произведения экспонент.

Лемма 3.2. *Пусть $X(t)$, $t \in [0,T]$, есть траектория левоинвариантной системы $\Gamma \subset L$ и $X(0) = X_0$. Тогда существуют такие $N \in \mathbb{N}$ и*

$$\tau_1, \dots, \tau_N > 0, \qquad A_1, \dots A_N \in \Gamma,$$

что

$$X(T) = X_0 \exp(\tau_1 A_1) \cdots \exp(\tau_N A_N), \quad \tau_1 + \dots + \tau_N = T.$$

Доказательство. По определению траектории существуют такие $N \in \mathbb{N}$ и

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \qquad A_1, \dots, A_N \in \Gamma,$$

что $X(t)$ непрерывна и

$$t \in (t_{i-1}, t_i) \quad \Rightarrow \quad \dot{X}(t) = X(t) A_i.$$

Рассмотрим первый интервал:

$$t \in (0, t_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = X(t) A_1, \quad X(0) = X_0.$$

Тогда

$$X(t) = X_0 \exp(A_1 t), \qquad X(t_1) = X_0 \exp(A_1 t_1).$$

Далее,

$$t \in (t_1, t_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = X(t) A_2, \quad X(t_1) = X_0 \exp(A_1 t_1).$$

Поэтому

$$X(t) = X_0 \exp(t_1 A_1) \exp((t - t_1) A_2),$$
$$X(t_2) = X_0 \exp(A_1 t_1) \exp((t_2 - t_1) A_2) = X_0 \exp(A_1 \tau_1) \exp(\tau_2 A_2), \qquad \tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2 - t_1.$$

Продолжая далее таким же образом, получаем искомое представление:

$$X(t_N) = X(T) = X_0 \exp(\tau_1 A_1) \cdots \exp(\tau_N A_N),$$
$$\tau_N = t_N - t_{N-1}, \quad \dots, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \quad \tau_1 = t_1, \quad \tau_N + \dots + \tau_1 = t_N = T.$$

□

Теперь мы можем получить описание множеств достижимости и вывести их элементарные свойства.

Лемма 3.3. *Пусть $\Gamma \subset L$ — левоинвариантная система, а X — произвольная точка G. Тогда*

(1) $\mathcal{A}_\Gamma(X) = \{X \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \mid A_i \in \Gamma,\ t_i > 0,\ N \geq 0\}$;
(2) $\mathcal{A}_\Gamma(X) = X \mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id})$;
(3) $\mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id})$ есть подполугруппа G;
(4) $\mathcal{A}_\Gamma(X)$ есть линейно связное подмножество G.

Доказательство. Пункт (1) следует непосредственно из леммы 3.2, а пункт (2) следует из пункта (1).

(3) Так как

$$\mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id}) = \{\exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \mid A_i \in \Gamma,\ t_i > 0,\ N \geq 0\},$$

для любых $X_1,\ X_2 \in \mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id})$, произведение $X_1 X_2 \in \mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id})$.

(4) Любую точку в $\mathcal{A}_\Gamma(X)$ можно соединить с начальной точкой X траекторией $X(t)$. □

Определение 3.7. *Орбитой системы* Γ, проходящей через точку $X \in G$, называется следующее подмножество группы Ли

$$\mathcal{O}_\Gamma(X) = \{X \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \mid A_i \in \Gamma,\ t_i \in \mathbb{R},\ N \geq 0\}, \tag{3.5}$$

сравните с описанием множества достижимости $\mathcal{A}_\Gamma(X)$ в пункте (1) леммы 3.3.

Очевидно, что

$$\mathcal{A}_\Gamma(X) \subset \mathcal{O}_\Gamma(X).$$

В орбите разрешено движение как вперед, так и назад во времени, в то время как во множестве достижимости допустимо только движение вперед, см. рис. 3, 4. Орбиты имеют более простую структуру, чем множества достижимости.

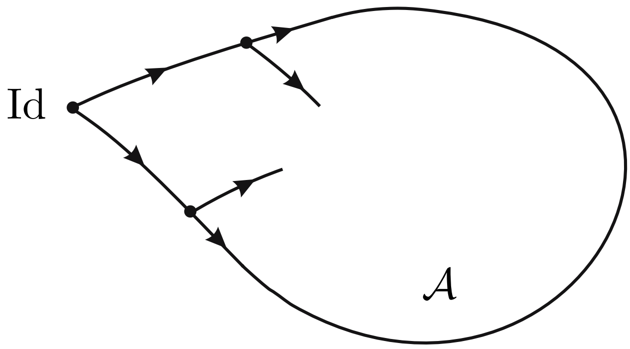

Рис. 3. Множество достижимости $\mathcal{A}$

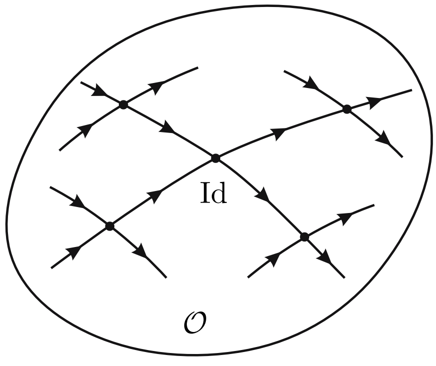

Рис. 4. Орбита $\mathcal{O}$

Лемма 3.4. *Пусть* $\Gamma \subset L$ *— левоинвариантная система, а* X *— произвольная точка* G. *Тогда*

(1) $\mathcal{O}_\Gamma(X) = X\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$*;*
(2) $\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$ *есть связная подгруппа Ли группы Ли* G *с алгеброй Ли* $\mathrm{Lie}(\Gamma)$.

Здесь и далее мы обозначаем через $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ алгебру Ли, порожденную системой Γ, т.е. наименьшую подалгебру Ли в L, содержащую Γ.

Доказательство. Пункт (1) следует из (3.5).

(2) Во-первых, орбита $\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$ связна т.к. любая ее точка может быть соединена с единицей непрерывной кривой согласно определению орбиты.

Далее, легко видеть, что $\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$ есть подгруппа G. Если $X,\ Y \in \mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$, то $XY \in \mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$ как произведение экспонент. Если

$$X = \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \in \mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id}),$$

то

$$X^{-1} = \exp(-t_N A_N) \cdots \exp(-t_1 A_1) \in \mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id}).$$

Наконец, $\mathrm{Id} \in \mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$.

Из общей Теоремы об орбите (см. [22], [1]) следует, что $\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id}) \subset G$ есть гладкое подмногообразие с касательным пространством $T_{\mathrm{Id}}\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id}) = \mathrm{Lie}(\Gamma)$.

Тогда орбита $\mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id})$ есть подгруппа Ли группы Ли G с алгеброй Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$, см. [49]. $\square$

Предложение 3.1. *Левоинвариантная система* Γ *управляема тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id}) = G$.

Доказательство. По определению, Γ управляема тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_\Gamma(X) = G$ для любого $X \in G$. Так как $\mathcal{A}_\Gamma(X) = X\mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id})$, управляемость равносильна равенству $\mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id}) = G$. $\square$

Поэтому мы будем далее использовать следующие краткие обозначения для множества достижимости и орбиты из единицы:

$$\mathcal{A}_\Gamma(\mathrm{Id}) = \mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{A}, \qquad \mathcal{O}_\Gamma(\mathrm{Id}) = \mathcal{O}_\Gamma = \mathcal{O}.$$

Для любого подмножества l линейного пространства V, будем обозначать через $\mathrm{span}(l)$ линейное подпространство V, порожденное l, и через $\mathrm{co}(l)$ положительный выпуклый конус, порожденный множеством l.

Топологическое замыкание и внутренность множества S будут обозначаться как $\mathrm{cl}\, S$ и $\mathrm{int}\, S$ соответственно.

3.4. Нормальная достижимость. Если точка $Y \in G$ достижима из точки $X \in G$, то существуют такие $A_1, \dots, A_N \in \Gamma$ и $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N_+$, что

$$Y = X \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N).$$

Мы обозначаем

$$\mathbb{R}^N_+ = \{(s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N \mid s_i > 0,\ i = 1, \dots, N\}.$$

То есть точка Y принадлежит образу отображения

$$F \ : \ (s_1, \dots, s_N) \mapsto X \exp(s_1 A_1) \cdots \exp(s_N A_N), \qquad s = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N_+.$$

Следующее более сильное свойство оказывается важным для исследования топологических свойств множеств достижимости и управляемости.

Определение 3.8. Точка $Y \in G$ называется *нормально достижимой* из точки $X \in G$ вдоль Γ, если существуют такие $A_1, \dots, A_N$ в Γ и $t \in \mathbb{R}^N_+$, что отображение

$$F \, : \, \mathbb{R}^N \to G, \qquad F(s_1, \dots, s_N) = X \exp(s_1 A_1) \cdots \exp(s_N A_N)$$

удовлетворяет следующим условиям:

(i) $F(t) = Y$.
(ii) $\operatorname{rank} D_t F = \dim G$.

Иными словами, точка Y есть регулярное значение ограничения отображения F на малую окрестность точки t.

Говорят, что точка Y нормально достижима из X вдоль $A_1, \dots, A_N$.

Лемма 3.5. *Если точка $Y \in G$ нормально достижима из $X \in G$ вдоль Γ, то $Y \in \operatorname{int} \mathcal{A}_\Gamma(X)$.*

Доказательство. По теореме о неявной функции, отображение F открыто вблизи t. То есть существует такая окрестность $t \in V \subset \mathbb{R}^N_+$, что ограничение $F|_V$ отображает открытые множества в открытые. Тогда множество $F(V)$ открыто. С другой стороны, для любого $s = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N_+$ точка $F(s)$ принадлежит $\mathcal{A}_\Gamma(X)$. Поэтому $F(V) \subset \mathcal{A}_\Gamma(X)$ есть окрестность точки $Y = F(t)$. $\square$

Теорема 3.1 (Кренер)**.** *Пусть $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$. Тогда:*

(1) *В любой окрестности V единицы $\mathrm{Id} \in G$ существуют точки, нормально достижимые из Id вдоль Γ;*
(2) *Следовательно, для любой окрестности $V \ni \mathrm{Id}$ пересечение $\operatorname{int} \mathcal{A} \cap V$ непусто;*
(3) *В частности, внутренность $\mathcal{A}$ непуста.*

Доказательство. Докажем пункт (1) т.к. из него следуют пункты (2) и (3).

Обозначим $n = \dim L = \dim \operatorname{Lie}(\Gamma)$. Если $n = 0$, то доказывать нечего. Предположим, что $n \geq 1$ и зафиксируем любую окрестность V единицы Id.

Существует ненулевой элемент $A_1 \in \Gamma$, в противном случае $\dim \operatorname{Lie}(\Gamma) = 0$. Рассмотрим отображение

$$F_1 \ : \ s_1 \mapsto \exp(s_1 A_1), \qquad 0 < s_1 < \varepsilon_1,$$

для достаточно малого положительного ε_1. Имеем $\left.\dfrac{d F_1}{d s_1}\right|_{s_1 = 0} = A_1 \neq 0$, следовательно, $\operatorname{rank} D_{s_1} F_1 = 1$ для малых s_1. Кривая

$$M_1 = \{F_1(s_1) \mid 0 < s_1 < \varepsilon_1\}$$

есть гладкое одномерное многообразие, содержащееся в окрестности V для достаточно малых положительных ε_1. Если $n = 1$, то любая точка $X_1 \in M_1$ нормально достижима из Id вдоль A_1.

Если $n > 1$, то существуют элемент $A_2 \in \Gamma$ и точка $X_1 \in M_1$, сколь угодно близкая к единице, для которых

$$X_1 A_2 \notin T_{X_1} M_1.$$

В противном случае $\operatorname{Lie}(\Gamma)(X_1) \subset T_{X_1} M_1$ для любого $X_1 \in M_1$, и $\dim \operatorname{Lie}(\Gamma) \leqslant \dim M_1 = 1$, противоречие. Имеем

$$X_1 = \exp(t_1^1 A_1) \text{ для некоторого } t_1^1 > 0.$$

Рассмотрим отображение

$$F_2 \ : \ (s_1, s_2) \mapsto \exp((t_1^1 + s_1) A_1) \exp(s_2 A_2), \qquad 0 < s_i < \varepsilon_i.$$

Для малых $s > 0$ имеем $\operatorname{rank} D_s F_2 = 2$, поэтому множество

$$M_2 = \{F_2(s_1, s_2) \mid 0 < s_i < \varepsilon_i, \ i = 1, 2\}$$

есть гладкое двумерное многообразие, принадлежащее V для достаточно малых положительных ε_1 и ε_2. Если $n = 2$, то теорема доказана, т.к. в этом случае любая точка M_2 нормально достижима из Id вдоль A_1 и A_2.

Если $n > 2$, продолжаем в том же духе. Существуют $A_3 \in \Gamma$ и $X_2 \in M_2$, сколь угодно близкое к Id, для которых

$$X_2 A_3 \notin T_{X_2} M_2.$$

В противном случае $\operatorname{Lie}(\Gamma)(X_2) \subset T_{X_2} M_2$ для любого $X_2 \in M_2$, и $\dim \operatorname{Lie}(\Gamma) \leqslant 2$, противоречие. Имеем

$$X_2 = \exp(t_1^2 A_1) \exp(t_2^2 A_2) \text{ для некоторого } t_i^2 > 0.$$

Рассмотрим отображение

$$F_3 \ : \ (s_1, s_2, s_3) \mapsto \exp((t_1^2 + s_1) A_1) \exp((t_2^2 + s_2) A_2) \exp(s_3 A_3), \qquad 0 < s_i < \varepsilon_i.$$

В силу того, что векторное поле A_3 не касается многообразия M_2 в точке X_2, дифференциал $D_s F_3$ имеет ранг 3 для малых $s > 0$. Поэтому

$$M_3 = \{F_3(s_1, s_2, s_3) \mid 0 < s_i < \varepsilon_i, \ i = 1, 2, 3\}$$

есть гладкое трехмерное многообразие, принадлежащее V для достаточно малых положительных ε_i. В случае $n = 3$ теорема доказана, иначе продолжаем по индукции.

В результате индуктивной конструкции находим такие элемент $A_n \in \Gamma$ и точку

$$X_{n-1} = \exp(t_1^{n-1} A_1) \cdots \exp(t_{n-1}^{n-1} A_{n-1}) \in M_{n-1},$$

достаточно близкую к Id, что

$$X_{n-1} A_n \notin T_{X_{n-1}} M_{n-1}.$$

Тогда отображение

$$F_n : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto \exp((t_1^{n-1} + s_1) A_1) \cdots \exp((t_{n-1}^{n-1} + s_{n-1}) A_{n-1}) \exp(s_n A_n), \quad 0 < s_i < \varepsilon_i,$$

есть погружение для малых $s > 0$. Следовательно, любая точка $X_n \in M_n = \operatorname{Im} F_n$ нормально достижима из Id. Более того, X_n можно выбрать сколь угодно близким к Id. □

Определение 3.9. Система $\Gamma \subset L$ имеет *полный ранг* (или удовлетворяет *ранговому условию*), если

$$\operatorname{Lie}(\Gamma) = L.$$

Предложение 3.2. *Пусть* $\Gamma \subset L$. *Тогда:*

(1) $\operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathcal{A} \neq \emptyset$*;*
(2) *Более того,* $\mathcal{A} \subset \operatorname{cl} \operatorname{int}_{\mathcal{O}} \mathcal{A}$.

Мы обозначаем через $\operatorname{int}_{\mathcal{O}} S$ внутренность подмножества S орбиты $\mathcal{O}$ в топологии $\mathcal{O}$.

Доказательство. (a) Предположим сначала, что система Γ имеет полный ранг: $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$, тогда орбита $\mathcal{O} \subset G$ есть открытое подмножество, и внутренность относительно $\mathcal{O}$ совпадает с внутренностью в G. По теореме Кренера, $\operatorname{int} \mathcal{A} \neq \emptyset$, и пункт (1) этого предложения доказан.

Докажем пункт (2). Выберем любой элемент $X \in \mathcal{A}$ и любую его окрестность $V \ni X$. Тогда открытое множество VX^{-1} есть окрестность единицы. По теореме Кренера существует точка $Y \in VX^{-1} \cap \operatorname{int} \mathcal{A}$, поэтому $YX \in V$. Далее, так как $Y \in \operatorname{int} \mathcal{A}$, существует окрестность $W \ni Y$, $W \subset \mathcal{A}$. Тогда открытое множество WX есть окрестность точки YX, более того, $WX \subset \mathcal{A}$. Наконец, $YX \in \operatorname{int} \mathcal{A} \cap V$. Следовательно, любая окрестность V точки X содержит точки из $\operatorname{int} \mathcal{A}$, поэтому $X \in \operatorname{cl} \operatorname{int} \mathcal{A}$.

(b) Если $\operatorname{Lie}(\Gamma) \neq L$, рассмотрим ограничение системы Γ на орбиту $\mathcal{O}$, подгруппу Ли G с алгеброй Ли $\operatorname{Lie}(\Gamma)$. Система Γ имеет полный ранг на $\mathcal{O}$, поэтому утверждение в случае (b) следует из случая (a). □

3.5. Общие условия управляемости. Пусть G — линейная группа Ли, L — ее алгебра Ли, а $\Gamma \subset L$ — левоинвариантная система на G. В этом пункте будут доказаны некоторые простые условия управляемости Γ на G.

Теорема 3.2 (Условие связности)**.** *Если $\Gamma \subset L$ управляема на G, то группа Ли G связна.*

Доказательство. Множество достижимости $\mathcal{A}$ есть связное подмножество G. □

Пример 3.2. Группа Ли $\mathrm{GL}(n)$ несвязна т.к. она состоит из двух связных $\mathrm{GL}_+(n)$ и $\mathrm{GL}_-(n)$, где

$$\mathrm{GL}_\pm(n) = \{X \in M(n) \mid \operatorname{sign}(\det X) = \pm 1\}.$$

Поэтому не существует управляемых систем на $\mathrm{GL}(n)$, однако естественно исследовать управляемость на ее компоненте связности единицы $\mathrm{GL}_+(n)$.

Пример 3.3. Аналогично, ортогональная группа $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup \mathrm{O}_-(n)$ несвязна, где $\mathrm{O}_-(n) = \{X \in \mathrm{O}(n) \mid \det X = -1\}$. Поэтому не существует управляемых систем на $\mathrm{O}(n)$; однако можно изучать управляемость на $\mathrm{SO}(n)$.

Теорема 3.3 (Ранговое условие)**.** *Пусть $\Gamma \subset L$.*

(1) *Если Γ управляема, то $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.*
(2) $\operatorname{int} \mathcal{A} \neq \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Доказательство. (1) Если Γ управляема, то $\mathcal{A} = G$, тем более $\mathcal{O} = G$, поэтому $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

(2) По теореме Кренера, если $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, то $\operatorname{int} \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Обратно, пусть $\mathrm{Lie}(\Gamma) \neq L$. Тогда $\dim \mathcal{O} = \dim \mathrm{Lie}(\Gamma) < \dim L = \dim G$. Поэтому $\operatorname{int} \mathcal{O} = \emptyset$, тем более $\operatorname{int} \mathcal{A} = \emptyset$. □

Теорема 3.4 (Групповой критерий)**.** *Система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *G связна,*
(2) *$\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$,*
(3) *множество достижимости $\mathcal{A}$ есть подгруппа G.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Если $\mathcal{A} \subset G$ есть подгруппа, то для любого элемента $X \in \mathcal{A}$, обратный элемент X^{-1} также принадлежит $\mathcal{A}$. Напомним представление множества достижимости и орбиты, проходящих через единицу:

$$\mathcal{A} = \{\exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \mid t_i \geq 0,\ A_i \in \Gamma\},$$
$$\mathcal{O} = \{\exp(\pm t_1 A_1) \cdots \exp(\pm t_N A_N) \mid t_i \geq 0,\ A_i \in \Gamma\}.$$

Для любой экспоненты $\exp(t_i A_i) \in \mathcal{A}$, обратный элемент

$$(\exp(t_i A_i))^{-1} = \exp(-t_i A_i) \in \mathcal{A},$$

поэтому множество достижимости $\mathcal{A}$ совпадает с орбитой $\mathcal{O}$. Но $\mathcal{O} \subset G$ есть связная подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$. Тогда получаем $\mathcal{O} = G$, см. [49]. Следовательно, $\mathcal{A} = \mathcal{O} = G$. □

Определение 3.10. Управляемая система называется *локально управляемой* в точке X, если

$$X \in \operatorname{int} \mathcal{A}(X).$$

Теорема 3.5 (Критерий локальной управляемости)**.** *Система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *G связна,*
(2) *Γ локально управляема в единице.*

Заметим, что единичный элемент всегда содержится во множестве достижимости, и могут быть два случая: либо $\mathrm{Id} \in \operatorname{int} \mathcal{A}$, либо $\mathrm{Id} \in \partial \mathcal{A}$. В первом случае система управляема, а во втором — нет.

Докажем теорему 3.5.

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Существует такая окрестность $V \ni \mathrm{Id}$, что $V \subset \mathcal{A}$. Рассмотрим степени этой окрестности: $V^n \subset \mathcal{A}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но группа Ли G связна, поэтому порождается любой окрестности единицы [49]:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n = G.$$

Тогда $\mathcal{A} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n = G$, поэтому $\mathcal{A} = G$. □

Теорема 3.6 (Критерий замкнутости)**.** *Система $\Gamma \subset L$ управляема на группе Ли G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$,
(2) $\mathrm{cl}\,\mathcal{A} = G$.

Доказательство. необходимость очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим систему в обратном времени

$$-\Gamma = \{-A \mid A \in \Gamma\}.$$

Траектории системы $-\Gamma$ суть траектории исходной системы Γ, проходимые в противоположном направлении, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{-\Gamma} &= \{\exp(-t_1A_1)\cdots\exp(-t_NA_N) \mid t_i \geq 0,\ A_i \in \Gamma\} \\ &= \left\{(\exp(t_NA_N)\cdots\exp(t_1A_1))^{-1} \mid t_i \geq 0,\ A_i \in \Gamma\right\} = \mathcal{A}_\Gamma^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $\mathrm{Lie}(-\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma) = L$, получаем $\mathrm{int}\,\mathcal{A}_{-\Gamma} \neq \emptyset$, поэтому существует открытое подмножество $V \subset \mathcal{A}_{-\Gamma}$. Далее, согласно условиям данной теоремы, $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma = G$, поэтому существует точка $X \in \mathcal{A}_\Gamma \cap V \neq \emptyset$. Имеем $X \in V \subset \mathcal{A}_{-\Gamma} = \mathcal{A}_\Gamma^{-1}$, поэтому открытое множество $V^{-1} \subset \mathcal{A}_\Gamma$ является окрестностью обратного элемента X^{-1}. Следовательно, открытое множество $V^{-1}X \subset \mathcal{A}_\Gamma$. Но $\mathrm{Id} = X^{-1}X \in V^{-1}X \subset \mathcal{A}_\Gamma$, поэтому $\mathrm{Id} \in \mathrm{int}\,\mathcal{A}_\Gamma$, и система Γ управляема по теореме 3.5. □

Предыдущая теорема имеет важные и далеко идущие последствия. Она означает, что при исследовании управляемости систем полного ранга можно заменить множество достижимости $\mathcal{A}$ его замыканием $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}$. Эта идея порождает мощную технику расширения, описанную в следующем разделе.

4. Техника расширения для левоинвариантных систем

4.1. Насыщение.

Определение 4.1. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset L$. Система Γ_1 называется *эквивалентной* системе Γ_2, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, если

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_1} = \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_2}.$$

Легко видеть, что не только множество достижимости $\mathcal{A}$, но и его замыкание есть полугруппа.

Лемма 4.1. *Пусть $\Gamma \subset L$. Тогда $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma$ есть подполугруппа G.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma$. Тогда существуют такие последовательности

$$\{X_n\},\ \{Y_n\} \subset \mathcal{A}_\Gamma,\ \text{что}\ X_n \to X,\ Y_n \to Y\ \text{при}\ n \to \infty.$$

Тогда

$$\{X_nY_n\} \subset \mathcal{A}_\Gamma\ \text{и}\ X_nY_n \to XY\ \text{при}\ n \to \infty.$$

□

Лемма 4.2. *Если $\Gamma_1 \sim \Gamma$ и $\Gamma_2 \sim \Gamma$, то $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \sim \Gamma$.*

Доказательство. Имеем $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_1} = \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_2} = \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma$. Включение

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma \subset \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \tag{4.1}$$

очевидно ввиду цепочки $\mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma = \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_1} \subset \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}$.

Докажем включение

$$\mathcal{A}_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \subset \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma. \tag{4.2}$$

Возьмем произвольный элемент

$$X = \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \in \mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}, \qquad t_i \geq 0, \quad A_i \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Имеем

$$\exp(t_i A_i) \in \mathcal{A}_{\Gamma_1} \cup \mathcal{A}_{\Gamma_2} \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma,$$

поэтому из леммы 4.1 следует, что $X \in \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$. Поэтому включение (4.2) доказано, и $\operatorname{cl} \mathcal{A}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$. Ввиду включения (4.1), получаем $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \sim \Gamma$. □

Предыдущая лемма позволяет объединять эквивалентные системы. Тогда естественно рассмотреть объединение всех систем, эквивалентных данной.

Определение 4.2. *Насыщением* левоинвариантной системы $\Gamma \subset L$ называется следующая система:

$$\operatorname{Sat}(\Gamma) = \cup\{\Gamma' \subset L \mid \Gamma' \sim \Gamma\}.$$

Предложение 4.1. (1) $\operatorname{Sat}(\Gamma) \sim \Gamma$.
(2) $\operatorname{Sat}(\Gamma) = \{A \in L \mid \exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma\}$.

Пункт (1) означает, что насыщение системы Γ есть максимальная левоинвариантная система на G, эквивалентная Γ, а пункт (2) описывает $\operatorname{Sat}(\Gamma)$ как своего рода касательный объект к $\operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$ в единице.

Доказательство. (1) Очевидно, что $\Gamma \sim \Gamma$, поэтому $\Gamma \subset \operatorname{Sat}(\Gamma)$, так что $\operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_{\operatorname{Sat}(\Gamma)}$. Для доказательства включения

$$\mathcal{A}_{\operatorname{Sat}(\Gamma)} \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma, \tag{4.3}$$

возьмем любой элемент

$$X = \exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \in \mathcal{A}_{\operatorname{Sat}(\Gamma)}, \qquad t_i > 0, \quad A_i \in \operatorname{Sat}(\Gamma).$$

Каждый элемент A_i содержится в некоторой системе $\Gamma_i \sim \Gamma$, поэтому $\exp(t_i A_i) \in \mathcal{A}_{\Gamma_i} \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$. В силу полугруппового свойства, $\operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma \ni X$. Включение (4.3) и пункт (1) доказаны.

(2) Обозначим систему

$$\widehat{\Gamma} = \{A \in L \mid \exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma\}.$$

Сначала докажем включение

$$\widehat{\Gamma} \subset \operatorname{Sat}(\Gamma). \tag{4.4}$$

Покажем, что $\widehat{\Gamma} \sim \Gamma$. Рассмотрим представление

$$\mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} = \{\exp(t_1 A_1) \cdots \exp(t_N A_N) \mid t_i > 0, \ A_i \in \widehat{\Gamma}\}.$$

Так как все $\exp(t_i A_i) \in \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$, получаем, что $\mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$. Более того, в силу $\Gamma \subset \widehat{\Gamma}$, имеем $\mathcal{A}_\Gamma \subset \mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}}$. Тогда $\operatorname{cl} \mathcal{A}_{\widehat{\Gamma}} = \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$, поэтому $\widehat{\Gamma} \sim \Gamma$. Включение (4.4) доказано.

Для того, чтобы доказать обратное включение

$$\operatorname{Sat}(\Gamma) \subset \widehat{\Gamma}, \tag{4.5}$$

возьмем любой элемент $A \in \operatorname{Sat}(\Gamma)$. Тогда $A \in \Gamma' \sim \Gamma$. Поэтому $\exp(tA) \in \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$, т.е. $A \in \widehat{\Gamma}$. Включение (4.5) доказано. Учитывая включение (4.4), получаем необходимое равенство: $\operatorname{Sat}(\Gamma) = \widehat{\Gamma}$. □

Замечание. К сожалению, насыщение не является касательным объектом к $\operatorname{cl} \mathcal{A}$, отвечающим за управляемость: может быть $\operatorname{Sat}(\Gamma) = L$, на при этом Γ не является управляемой.

Пример 4.1 (Иррациональная обмотка тора)**.** Тор есть двумерная абелева группа Ли:

$$G = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 = \{(x \mod 1, y \mod 1)\}.$$

Ее алгебра Ли есть

$$L = T_{\mathrm{Id}} \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим следующую инвариантную систему на G:

$$\Gamma = \{A\}, \qquad A = (1, r), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Множество достижимости есть иррациональная обмотка тора:

$$\mathcal{A} = \exp(\mathbb{R}_+ A) = \{(x \mod 1, rx \mod 1) \mid x \geq 0\} \neq \mathbb{T}^2,$$
$$\operatorname{cl} \mathcal{A} = \mathbb{T}^2.$$

Поэтому

$$\Gamma \sim L = \operatorname{Sat}(\Gamma),$$

хотя Γ не является управляемой на $\mathbb{T}^2$. Причина очевидна — нарушается ранговое условие:

$$\operatorname{Lie}(\Gamma) = \mathbb{R}A \neq L.$$

4.2. Насыщение Ли для инвариантных систем. За управляемость Γ отвечает следующий согласованный со структурой алгебры Ли касательный объект к $\operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma$.

Определение 4.3. *Насыщение Ли* левоинвариантной системы определяется следующим образом:

$$\operatorname{LS}(\Gamma) = \operatorname{Lie}(\Gamma) \cap \operatorname{Sat}(\Gamma).$$

Следующее описание насыщения Ли вытекает непосредственно из предложения 4.1.

Следствие 4.1. $\operatorname{LS}(\Gamma) = \{A \in \operatorname{Lie}(\Gamma) \mid \exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \operatorname{cl} \mathcal{A}_\Gamma\}$.

Теорема 4.1 (Критерий насыщения Ли)**.** *Левоинвариантная система $\Gamma \subset L$ тогда и только тогда управляема на связной группе Ли G, когда* $\operatorname{LS}(\Gamma) = L$.

Доказательство. Необходимость следует из определения насыщения Ли.

Достаточность. Предположим, что $\operatorname{LS}(\Gamma) = L$. Связная группа Ли G порождена однопараметрическими полугруппами $\{\exp(tA) \mid A \in L,\ t \geq 0\}$ как полугруппа; поэтому из равенства $\operatorname{Sat}(\Gamma) = L$ следует, что $\operatorname{cl}(\mathcal{A}) = G$. С учетом рангового условия $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$, система Γ управляема по теореме 3.6. □

В следующем утверждении собраны основные свойства насыщения Ли.

Теорема 4.2. (1) $\operatorname{LS}(\Gamma)$ *есть замкнутый выпуклый положительный конус в L, то есть*

(1a) $\operatorname{LS}(\Gamma)$ *топологически замкнуто*:

$$\operatorname{cl}(\operatorname{LS}(\Gamma)) = \operatorname{LS}(\Gamma),$$

(1b) $\operatorname{LS}(\Gamma)$ *выпукло*:

$$A, B \in \operatorname{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow\ \alpha A + (1-\alpha)B \in \operatorname{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha \in [0,1],$$

(1c) $\operatorname{LS}(\Gamma)$ *образует положительный конус*:

$$A \in \operatorname{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow\ \alpha A \in \operatorname{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha \geq 0.$$

Поэтому

$$A, B \in \operatorname{LS}(\Gamma) \ \Rightarrow\ \alpha A + \beta B \in \operatorname{LS}(\Gamma) \quad \forall\ \alpha, \beta \geq 0.$$

(2) *Для любых $\pm A,\ B \in \operatorname{LS}(\Gamma)$ и любых $s \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(s \operatorname{ad} A)B = B + (s \operatorname{ad} A)B + \frac{(s \operatorname{ad} A)^2}{2!}B + \ldots + \frac{(s \operatorname{ad} A)^n}{n!}B + \cdots \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

(3) *Если $\pm A, \pm B \in \operatorname{LS}(\Gamma)$, то $\pm[A,B] \in \operatorname{LS}(\Gamma)$.*

(4) *Если $A \in \operatorname{LS}(\Gamma)$ и если однопараметрическая подгруппа $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$ периодична (т.е. компактна), то $-A \in \operatorname{LS}(\Gamma)$.*

(5) *Более того, если $A \in \operatorname{LS}(\Gamma)$ и однопараметрическая подгруппа $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$ квазипериодична:*

$$\exp(\mathbb{R}_- A) \subset \operatorname{cl} \exp(\mathbb{R}_+ A), \tag{4.6}$$

то $-A \in \operatorname{LS}(\Gamma)$.

Мы обозначаем через $\operatorname{ad} A$ присоединенный оператор, соответствующий элементу $A \in L$:

$$\operatorname{ad} A\,:\, L \to L, \qquad \operatorname{ad} A\ :\ B \mapsto [A,B].$$

Доказательство. (1a) Возьмем сходящуюся последовательность $\mathrm{LS}(\Gamma) \ni A_n \to A \in L$. Так как линейное пространство $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ замкнуто, имеем

$$A_n \in \mathrm{Lie}(\Gamma) \quad \Rightarrow \quad A \in \mathrm{Lie}(\Gamma).$$

Затем доказываем, что множество $\mathrm{Sat}(\Gamma)$ также замкнуто: так как $A_n \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$, имеем

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{A} \ni \exp(tA_n) \to \exp(tA) \in \mathrm{cl}\,\mathcal{A}, \qquad t \geq 0,$$

и $A \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Поэтому $A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, и $\mathrm{LS}(\Gamma)$ топологически замкнуто.

(1b) Возьмем любые $A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, $\alpha \in [0,1]$, и рассмотрим выпуклую комбинацию $C = \alpha A + \beta B$, $\beta = 1 - \alpha$. Справедлива следующая общая формула:

$$\exp(tC) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{\alpha}{n} tA\right) \exp\left(\frac{\beta}{n} tB\right)\right)^n,$$

см., например [49], поэтому $C \in \mathrm{Sat}(\Gamma)$, и $\mathrm{Sat}(\Gamma)$ выпукло. Так как линейное пространство $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ выпукло, заключаем, что $\mathrm{LS}(\Gamma)$ также выпукло.

(1c) Несложно убедиться, что $\mathrm{LS}(\Gamma)$ есть конус. Возьмем любые $A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, $\alpha > 0$. Тогда $\exp(t\alpha A) \in \mathrm{cl}\,\mathcal{A}$, $t \geq 0$, т.е. $\alpha A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$.

Для того, чтобы доказать (2), предположим, что $\pm A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Обозначим элемент

$$B_s = \exp(s \,\mathrm{ad}\, A)B, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Легко видеть, что этот элемент допускает следующее представление:

$$B_s = \exp(sA) B \exp(-sA). \tag{4.8}$$

Действительно, обе кривые (4.7) и (4.8) суть решения задачи Коши

$$B_0 = B, \qquad \frac{d}{d\,s} B_s = [A, B_s].$$

Далее, из (4.7) очевидно, что $B_s \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$. Из представления (4.8) следует, что

$$\exp(tB_s) = \exp(sA)\exp(tB)\exp(-sA) \in \mathrm{cl}(\mathcal{A}_\Gamma)$$

для любых $t \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$; поэтому $B_s \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Теперь легко доказать пункт (3): если $\pm A, \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, то $\pm e^{t\,\mathrm{ad}\,A}B, \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, поэтому

$$\pm[A,B] = \pm \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\,\mathrm{ad}\,A}B - B}{t} \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

(4) следует из цепочки

$$\{\exp(tA) \mid t \geq 0\} = \{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma,$$

которая справедлива для любого $A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ с периодической однопараметрической группой.

Наконец, докажем более сильное свойство (4). Из квазипериодичности (4.6) следует, что

$$\exp(-tA) = \exp(t(-A)) \in \mathrm{cl}\exp(\mathbb{R}_+ A) \subset \mathrm{cl}\,\mathcal{A}_\Gamma$$

для любого $t \geq 0$, поэтому $-A \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. □

Обычно довольно сложно явно построить насыщение Ли левоинвариантной системы. Поэтому теоремы 4.1 и 4.2 применяются как достаточные условия управляемости с помощью следующей процедуры. Начиная с исходной системы Γ, строится вполне упорядоченное возрастающее семейство расширений $\{\Gamma_\alpha\}$ системы Γ, то есть

$$\Gamma_0 = \Gamma, \qquad \Gamma_\alpha \subset \Gamma_\beta \text{ при } \alpha < \beta.$$

Правила расширения доставляет теорема 4.2:

(1) по системе Γ_α строится $\Gamma_\beta = \mathrm{cl}(\mathrm{co}(\Gamma_\alpha))$;
(2) для $\pm A, B \in \Gamma_\alpha$ строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup e^{\mathbb{R}\,\mathrm{ad}\,A}B$;
(3) для $\pm A, \pm B \in \Gamma_\alpha$ строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}[A,B]$;
(4, 5) для $A \in \Gamma_\alpha$ с периодической или квазипериодической однопараметрической группой строится $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \cup \mathbb{R}A$.

Теорема 4.2 гарантирует, что все расширения Γ_α принадлежат $\mathrm{LS}(\Gamma)$. Если на некотором шаге α получено соотношение $\Gamma_\alpha = L$, то $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$, и система Γ управляема по теореме 4.1.

5. Индуцированные системы на однородных пространствах

Пример 5.1 (Билинейные системы)**.** Рассмотрим следующую правоинвариантную систему на $\mathrm{GL}_+(n)$:

$$\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{gl}(n).$$

В классических обозначениях эта система записывается как

$$\dot{X} = AX + uBX, \qquad X \in \mathrm{GL}_+(n), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Введем также следующую билинейную систему:

$$\dot{x} = Ax + uBx, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Начало координат исключается из $\mathbb{R}^n$ так как все линейные поля обращаются в нуль в начале координат, поэтому оно является положением равновесия для билинейных систем.

Если $X(t)$ есть траектория правоинвариантной системы (5.1) с начальным условием $X(0) = \mathrm{Id}$, то кривая $x(t) = X(t)x_0$ есть траектория билинейной системы (5.2) с начальным условием $x(0) = x_0$.

Пусть правоинвариантная система (5.1) управляема на $\mathrm{GL}_+(n)$. Легко видеть, что тогда билинейная система (5.2) управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Действительно, возьмем любые две точки $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Существует такая матрица $X_1 \in \mathrm{GL}_+(n)$, что $X_1x_0 = x_1$. В силу управляемости Γ, существует такая траектория $X(t)$ правоинвариантной системы, что $X(0) = \mathrm{Id}$, $X(T) = X_1$ для некоторого $T \geq 0$. Тогда траектория $x(t) = X(t)x_0$ билинейной системы соединяет x_0 с x_1:

$$x(0) = X(0)x_0 = \mathrm{Id}\, x_0 = x_0, \qquad x(T) = X(T)x_0 = X_1x_0 = x_1.$$

Мы показали, что если правоинвариантная система (5.1) управляема на $\mathrm{GL}_+(n)$, то билинейная система (5.2) управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

В предыдущем рассуждении было три ключевых момента.

(1) Группа Ли $G = \mathrm{GL}_+(n)$ действует на многообразии $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то есть любой элемент $X \in G$ задает отображение

$$X\, :\, M \to M, \qquad X\ :\ x \mapsto Xx.$$

(2) G действует транзитивно на M:

$$\forall\ x_0,\ x_1 \in M \quad \exists\ X \in G \text{ такой, что } Xx_0 = x_1.$$

(3) Билинейная система (5.2) индуцирована правоинвариантной системой (5.1): если $X(t)$ — траектория системы (5.1), то $X(t)x$ — траектория системы (5.2).

Эта конструкция обобщается следующим образом.

Определение 5.1. Группа Ли G *действует на гладком многообразии* M, если существует гладкое отображение

$$\theta\, :\, G \times M \to M,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\theta(YX, x) = \theta(Y, \theta(X, x))$ для любых $X, Y \in G$ и любого $x \in M$;
(2) $\theta(\mathrm{Id}, x) = x$ для любого $x \in M$.

Определение 5.2. Группа Ли G действует *транзитивно* на M, если для любых $x_0, x_1 \in M$ существует такой элемент $X \in G$, что $\theta(X, x_0) = x_1$. Многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли, называется *однородным пространством* этой группы Ли.

Определение 5.3. Пусть $A \in L$. Векторное поле $\theta_*A \in \operatorname{Vec} M$, *индуцированное* действием θ, определяется следующим образом:

$$(\theta_*A)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta(\exp(tA), x), \quad x \in M.$$

Пример 5.2. Группа Ли $\mathrm{GL}_+(n)$ действует транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ следующим образом:

$$\theta(X, x) = Xx, \qquad X \in \mathrm{GL}_+(n), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Для правоинвариантного векторного поля $V(X) = AX$, его траектория через единицу есть $e^{Vt}(\mathrm{Id}) = \exp(At)$, поэтому

$$(\theta_* V)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta(e^{Vt}(\mathrm{Id}), x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(At)x = Ax.$$

Определение 5.4. Пусть $\Gamma \subset L$ есть правоинвариантная система. Система

$$\begin{aligned}
&\theta_*\Gamma \subset \operatorname{Vec} M, \\
&(\theta_*\Gamma)(x) = \{(\theta_* A)(x) \mid A \in \Gamma\}, \qquad x \in M,
\end{aligned}$$

называется *индуцированной системой* на M.

Пример 5.3. Пусть $\Gamma = \{A + uB \mid u \in \mathbb{R}\} \subset L$ есть правоинвариантная система на линейной группе Ли $G \subset \mathrm{GL}(n)$. В классических обозначениях Γ записывается как

$$\dot{X} = AX + uBX, \qquad X \in G, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Имеем $\theta_*(AX) = Ax$, $\theta_*(BX) = Bx$, поэтому $\theta_*(AX + uBX) = Ax + uBx$. Следовательно, индуцированная система $\theta_*\Gamma$ билинейна:

$$\dot{x} = Ax + uBx, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Лемма 5.1. *Если $X(t)$ есть траектория правоинвариантной системы Γ, то $x(t) = \theta(X(t), x_0)$ есть траектория индуцированной системы $\theta_*\Gamma$ для любого $x_0 \in M$.*

Доказательство. Можно ограничиться случаем, когда вся траектория $X(t)$ удовлетворяет одному уравнению $\dot{X} = AX(t)$, $A \in \Gamma$, так как произвольная траектория системы Γ есть конкатенация таких кусков. Тогда $X(t) = \exp(At)X_0$ и $x(t) = \theta(\exp(At)X_0, x_0)$. Теперь необходимое уравнение получается дифференцированием:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\theta(\exp(At)X_0, x_0) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \theta(\exp(A(t+\varepsilon))X_0, x_0) \\
&= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \theta(\exp(A\varepsilon), \underbrace{\theta(\exp(At)X_0, x_0)}_{x(t)}) = (\theta_* A)(x(t)).
\end{aligned}$$

□

Теорема 5.1. *Пусть θ есть транзитивное действие группы Ли G на многообразии M, пусть $\Gamma \subset L$ есть правоинвариантная система на G, и пусть $\theta_*\Gamma \subset \operatorname{Vec} M$ есть индуцированная система на M.*

(1) *Если Γ управляема на G, то $\theta_*\Gamma$ управляема на M.*
(2) *Более того, если полугруппа $\mathcal{A}_\Gamma$ действует транзитивно на M, то $\theta_*\Gamma$ управляема на M.*

Доказательство. Пункт (1) следует из (2), поэтому докажем (2). Возьмем любые две точки $x_0, x_1 \in M$. Транзитивность действия $\mathcal{A}_\Gamma$ на M означает, что существует такое $X \in \mathcal{A}_\Gamma$, что $\theta(X, x_0) = x_1$. Далее, включение $X \in \mathcal{A}_\Gamma$ означает, что некоторая траектория $X(t)$ системы Γ переводит Id в X: $X(0) = \mathrm{Id}$, $X(T) = X$, $T \geq 0$. Тогда кривая $x(t) = \theta(X(t), x_0)$ есть траектория системы $\theta_*\Gamma$, переводящая x_0 в x_1:

$$x(0) = \theta(\mathrm{Id}, x_0) = x_0, \qquad x(T) = \theta(X, x_0) = x_1.$$

□

Важные приложения теоремы 5.1 связаны с линейным действием линейных групп Ли $G \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом случае индуцированные системы билинейные, или, более общо, аффинные.

Пример 5.4 ($G = \mathrm{GL}_+(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)**.** Имеем

$$\theta(X,x) = Xx, \quad \Gamma = \left\{A + \sum_{i=1}^m u_i B_i\right\} \subset \mathrm{gl}(n),$$

$$\theta_*\Gamma \ : \ \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Если $\mathcal{A} = \mathrm{GL}_+(n)$ или $\mathcal{A} = \mathrm{SL}(n)$, то билинейная система $\theta_*\Gamma$ управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Множество достижимости может быть еще меньше, например, в случае $\mathcal{A} = \mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}_+ \,\mathrm{Id}$ билинейная система $\theta_*\Gamma$ остается управляемой.

Замечание. Линейные группы Ли, действующие транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ или S^n описаны, см. [14–17, 34, 43].

Пример 5.5 ($G = \mathrm{SL}(n)$, $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)**.** Аналогично,

$$\theta(X,x) = Xx, \quad \Gamma = \left\{A + \sum_{i=1}^m u_i B_i\right\} \subset \mathrm{sl}(n),$$

$$\theta_*\Gamma \ : \ \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Если $\mathcal{A}$ транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то билинейная система $\theta_*\Gamma$ управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Пример 5.6 ($G = \mathrm{SO}(n)$, $M = S^{n-1}$)**.**

$$\theta(X,x) = Xx, \quad \Gamma = \left\{A + \sum_{i=1}^m u_i B_i\right\} \subset \mathrm{so}(n),$$

$$\theta_*\Gamma \ : \ \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \qquad x \in S^{n-1}.$$

Пример 5.7 ($G = \mathrm{U}(n)$ или $\mathrm{SU}(n)$, $M = S^{2n-1}$)**.**

$$\theta(Z,z) = Zz, \quad \Gamma = \left\{A + \sum_{i=1}^m u_i B_i\right\} \subset \mathrm{u}(n) \text{ или } \mathrm{su}(n),$$

$$\theta_*\Gamma \ : \ \dot{z} = Az + \sum_{i=1}^m u_i B_i z, \qquad z \in S^{2n-1}.$$

Пример 5.8 ($G = \mathrm{Aff}_+(n)$, $M = \mathbb{R}^n$)**.** Компонента связности единицы в аффинной группе

$$\mathrm{Aff}_+(n) = \left\{\begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{GL}(n+1)$$

действует транзитивно на пространстве

$$M = \mathbb{R}^n = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

следующим образом:

$$\theta\left(\begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xx + y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим правоинвариантную систему на G:

$$\Gamma = \left\{C_0 + \sum_{i=1}^m u_i C_i\right\}, \qquad C_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{aff}(n).$$

Индуцированные векторные поля аффинные:

$$\theta_* \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 0 \end{pmatrix},$$

и индуцированная система имеет вид

$$\theta_*\Gamma \ : \ \dot{x} = A_0 x + b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i (A_i x + b_i), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, при $b_0 = 0$, $A_1 = \dots = A_m = 0$ получаем *линейную систему*

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_i \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Упражнение 5.1. Покажите, что при выполнении *условия Калмана*:

$$\operatorname{span}(b_1, \dots, b_m;\ A_0 b_1, \dots, A_0 b_m;\ \dots;\ A_0^{n-1} b_1, \dots, A_0^{n-1} b_m) = \mathbb{R}^n,$$

линейная система (5.3) управляема на $\mathbb{R}^n$.

Пример 5.9 ($G = \mathrm{E}(n)$, $M = \mathbb{R}^n$)**.** Этот случай вполне аналогичен случаю $\mathrm{Aff}_+(n)$.

В этом разделе мы построили теорию индуцированных систем для правоинвариантных систем в связи с важным классом билинейных систем $\dot{x} = Ax + uBx$, где $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ есть вектор-столбец. Очевидно, что теория индуцированных систем для левоинвариантных систем ничем не отличается; в этом случае индуцированная система имеет вид $\dot{y} = yA + uyB$, где $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ есть вектор-строка.

6. Условия управляемости для специальных классов систем и групп Ли

6.1. Симметричные системы. Возвращаемся к изложению для левоинвариантных систем $\Gamma \subset L$ на группе Ли G.

Определение 6.1. Система $\Gamma \subset L$ называется *симметричной,* если

$$\Gamma = -\Gamma,$$

т.е. весте с каждым элементом A эта система содержит также противоположный по знаку элемент $-A$.

В случае симметричной системы для каждого допустимого направления движения A, возможно также движение в противоположном направлении.

Лемма 6.1. *Пусть* $\Gamma = -\Gamma$. *Тогда* $\mathcal{A} = \mathcal{O}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{O} = \left\{ \exp(\pm t_1 A_1) \cdots \exp(\pm t_N A_N) \mid t_i > 0,\ A_i \in \Gamma \right\}.$$

Но все элементы $-A_i \in \Gamma$, поэтому $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. □

Таким образом, исследование управляемости симметричных систем Γ сводится к проверке рангового условия.

Теорема 6.1. *Симметричная левоинвариантная система* $\Gamma \subset L$ *управляема на связной группе Ли* G *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Lie}(\Gamma) = L$.

Доказательство. Необходимость есть общий факт. Достаточность следует из того, что для системы полного ранга на связной группе Ли орбита совпадает со всей группой Ли. □

Пример 6.1 (Линейные по управлениям системы)**.** *Линейная по управлениям система*

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i A_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\}$$

симметрична, если множество управляющих параметров U симметрично относительно начала координат: $U = -U$; в частности, если $U = \mathbb{R}^m$:

$$\Gamma = \operatorname{span}(A_1, \dots, A_m) \subset L.$$

Такая система управляема на связной группе Ли G тогда и только тогда, когда $\operatorname{Lie}(A_1, \dots, A_m) = L$.

Пример 6.2 (Симметричная билинейная система)**.** Пусть $A_1, \dots, A_m \in \mathrm{gl}(n)$. Рассмотрим соответствующую симметричную билинейную систему:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i A_i x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Обозначим $\mathrm{Lie}(A_1, \dots, A_m) = L$, и пусть $G \subset \mathrm{GL}(n)$ есть связная подгруппа Ли, соответствующая алгебре Ли L. Если G действует транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (или S^{n-1}), тогда билинейная система (6.1) управляема на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (соответственно на S^{n-1}).

6.2. Компактные группы Ли. В этом пункте рассматривается случай, когда группа Ли есть *компактное* топологическое пространство. Например, группы Ли $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ компактны и связны.

Следующий простой факт играет ключевую роль для задачи управляемости на компактных группах Ли.

Лемма 6.2. *Пусть группа Ли G компактна, и пусть A принадлежит алгебре Ли L. Тогда однопараметрическая подгруппа $\exp(\mathbb{R}A)$ квазипериодична:*

$$\exp(\mathbb{R}_- A) \subset \mathrm{cl} \exp(\mathbb{R}_+ A).$$

Доказательство. Обозначим $X = \exp(tA)$ для произвольного фиксированного $t > 0$. Мы должны доказать, что

$$\exp(-tA) = X^{-1} \in \mathrm{cl} \exp(\mathbb{R}_+ A).$$

Последовательность $\{X^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет сходящуюся подпоследовательность в компактной группе Ли G:

$$X^{n_k} \to Y \in G \text{ при } k \to \infty, \qquad n_{k+1} > n_k.$$

Тогда

$$X^{n_{k+1} - n_k - 1} = X^{n_{k+1}} X^{-n_k} X^{-1} \to Y Y^{-1} X^{-1} = X^{-1} \text{ при } k \to \infty.$$

Но $n_{k+1} - n_k - 1 \geq 0$, поэтому $X^{-1} \in \mathrm{cl} \exp(\mathbb{R}_+ A)$. □

Следствие 6.1. *Пусть G компактна, и пусть $\Gamma \subset L$. Тогда $\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma)$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{LS}(\Gamma)$ есть алгебра Ли. Если $A, B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, то $\pm A$, $\pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$ по лемме 6.2. Поэтому $\alpha A + \beta B \in \mathrm{LS}(\Gamma)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, так как $\mathrm{LS}(\Gamma)$ есть конус. Боле того, $\pm[A, B] \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому $\mathrm{LS}(\Gamma)$ есть подалгебра Ли в L.

Учитывая цепочку $\Gamma \subset \mathrm{LS}(\Gamma) \subset \mathrm{Lie}(\Gamma)$, заключаем, что $\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{Lie}(\Gamma)$. □

Теорема 6.2. *Левоинвариантная система $\Gamma \subset L$ тогда и только тогда управляема на компактной связной группе Ли G, когда $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.*

Доказательство. Вытекает из следствия 6.1. □

Пример 6.3 ($\mathrm{SO}(3)$)**.** Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$, множество всех 3×3 вещественных ортогональных матриц с единичным определителем. Группа Ли G компактна и связна. Ее алгебра Ли $L = \mathrm{so}(3)$ есть пространство всех 3×3 вещественных кососимметрических матриц.

Возьмем любые линейно независимые матрицы $A_1, A_2 \in \mathrm{so}(3)$ и рассмотрим правоинвариантную систему $\Gamma = \{A_1, A_2\}$. Заметим, что матрицы A_1, A_2, и $[A_1, A_2]$ порождают как линейное пространство всю алгебру Ли $\mathrm{so}(3)$. По теореме 6.2, система Γ управляема. То есть любое вращение в $\mathrm{SO}(3)$ может быть записано в виде произведения экспонент

$$\exp(t_1 A_{i_1}) \cdots \exp(t_N A_{i_N}), \quad t_j \geq 0, \ i_j \in \{1, 2\}, \ N \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Правоинвариантная система со скалярным управлением

$$\dot{X} = (A_1 + u A_2) X, \quad u \in U \subset \mathbb{R}, \ X \in \mathrm{SO}(3) \tag{6.3}$$

также управляема (для любого пространства управлений U, содержащего более одного элемента).

Следовательно, индуцированная билинейная система

$$\dot{x} = A_1 x + u A_2 x, \qquad x \in S^2, \quad u \in U$$

управляема на сфере S^2.

Пример 6.4 ($\mathrm{SO}(n)$)**.** Приведенные выше рассуждения обобщаются для группы $G = \mathrm{SO}(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$. В этом случае алгебра Ли L группы Ли G есть множество всех $n \times n$ кососимметрических матриц $\mathrm{so}(n)$.

Возьмем матрицы $A_1 = \sum_{i=1}^{n-2}(E_{i,i+1} - E_{i+1,i})$ и $A_2 = E_{n-1,n} - E_{n,n-1}$. Мы обозначаем через E_{ij} $n \times n$ матрицу с единицей в i-ой строке и j-ом столбце и нулевыми остальными элементами.

Легко видеть, что $\mathrm{Lie}(A_1, A_2) = \mathrm{so}(n)$. Поэтому, хотя группа $\mathrm{SO}(n)$ имеет размерность $\frac{1}{2}n(n-1)$, система с одним управлением

$$\dot{X} = (A_1 + uA_2)X, \quad X \in \mathrm{SO}(n), \ u \in U \subset \mathbb{R},$$

управляема (если пространство управлений U содержит по меньшей мере две различные точки).

Отметим, что множество таких пар (A_1, A_2), что $\mathrm{Lie}(A_1, A_2) = L$, образует открытое всюду плотное множества в $L \times L$ (это справедливо для любой полупростой алгебры Ли, см. [47]). Поэтому матрицы A_1 и A_2 можно заменить почти любой парой в $L \times L$.

Пример 6.5 ($\mathrm{SU}(2)$)**.** Для группы Ли $G = \mathrm{SU}(2)$, ее алгебра Ли представляется следующим образом:

$$L = \mathrm{su}(2) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для любых линейно независимых $A_1, A_2 \in L$, имеем $[A_1, A_2] \notin \mathrm{span}(A_1, A_2)$, поэтому $\mathrm{Lie}(A_1, A_2) = L$. Тогда система $\Gamma = \{A_1 + uA_2 \mid u \in U\}$ (где U содержит более одного элемента) управляема на $G = \mathrm{SU}(2)$. Следовательно, индуцированная билинейная система

$$\dot{z} = A_1 z + uA_2 z, \qquad z \in S^3, \quad u \in \mathbb{R}$$

управляема на сфере S^3.

6.3. Полупростые группы Ли.

Определение 6.2. Подпространство $I \subset L$ называется *идеалом* алгебры Ли L, если

$$[I, L] \subset I.$$

Определение 6.3. Алгебра Ли L называется *простой,* если она не абелева и не содержит собственных (т.е. отличных от $\{0\}$ и L) идеалов.

Определение 6.4. Алгебра Ли L называется *полупростой,* если она не содержит ненулевых абелевых идеалов.

Полупростая алгебра Ли распадается в прямую сумму своих простых идеалов.

Определение 6.5. Группа Ли G называется *простой* (соотв. *полупростой,*) если ее алгебра Ли L проста (соотв. полупроста).

Группы Ли $\mathrm{SL}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$ просты; группы Ли $\mathrm{SO}(n)$, $n \neq 4$, просты, а $\mathrm{SO}(4)$ полупроста.

Мы рассмотрим задачу управляемости в случае $\mathrm{SL}(n)$ т.к. другие две группы компактны, и для них управляемость равносильна ранговому условию.

Начнем с примера неуправляемой системы полного ранга.

Пример 6.6. Пусть $G = \mathrm{SL}(2)$ и $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{sl}(2)$. Здесь A и B — бесследовые матрицы вида

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{12} > 0, \quad a_{21} > 0,$$
$$B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad b \neq 0.$$

Покажем сначала, что

$$\mathrm{Lie}(A, B) = L = \mathrm{sl}(2). \tag{6.4}$$

Так как $\dim \mathrm{sl}(2) = 3$, достаточно получить всего один элемент в $\mathrm{Lie}(A, B)$, линейно независимый с A и B. Вычислим коммутатор:

$$[A, B] = 2b \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

теперь очевидно, что

$$\operatorname{span}(A, B, [A, B]) = \operatorname{sl}(2).$$

Равенство (6.4) доказано, т.е. система Γ имеет полный ранг.

Чтобы показать, что Γ неуправляема на $\mathrm{SL}(2)$, докажем, что билинейная система $\theta_*\Gamma$ неуправляема на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Индуцированная система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + uBx, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{6.5}$$

Легко видеть, что поле Bx касается осей координат $\{x_1 = 0\}$ и $\{x_2 = 0\}$. С другой стороны, поле Ax направлено внутрь первого квадранта $\mathbb{R}^2_+ = \{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ на его границе. Следовательно, $\mathbb{R}^2_+$ есть инвариантное множество билинейной системы (6.5). Поэтому индуцированная система $\theta_*\Gamma$ неуправляема но однородном пространстве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, и правоинвариантная система Γ неуправляема на группе Ли $\mathrm{SL}(2)$.

Задача управляемости на $\mathrm{SL}(n)$ значительно сложнее, чем на компактных группах Ли. По существу, вся техника насыщения Ли была развита в основном для исследования управляемости на $\mathrm{SL}(n)$. В этом случае нет простого критерия управляемости, но имеются хорошие достаточные условия управляемости.

Теорема 6.3. *Пусть $G = \mathrm{SL}(n)$ и $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{sl}(n)$. Предположим, что матрицы $A = (a_{ij})$ и B удовлетворяют условиям:*

(1) $a_{1n}a_{n1} < 0$;
(2) *матрица A неразложима;*
(3) $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$;
(4) $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$;
(5) $b_i - b_j \neq b_k - b_m$ *при* $(i,j) \neq (k,m)$.

Тогда система Γ управляема на группе Ли $\mathrm{SL}(n)$.

$n \times n$ матрица A называется *разложимой,* если существует такая матрица перестановки базисных векторов P, что

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

где A_3 есть $k \times k$ матрица с $0 < k < n$. В противном случае матрица A называется *неразложимой.* Неразложимые матрицы — это в точности матрицы, не имеющие нетривиальных инвариантных координатных подпространств.

Докажем теорему 6.3 (только в случае $n = 2$: в общем случае доказательство длиннее, но использует, по существу, те же идеи [20]).

Доказательство. В случае $n = 2$ имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad a_{12}a_{21} < 0,$$

$$B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad b > 0.$$

Без потери общности можно считать, что

$$a_{12} > 0, \quad a_{21} < 0,$$

в случае обратных знаков доказательство аналогично.

Покажем, что

$$\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{sl}(2) = \operatorname{span}(E_{22} - E_{11}, E_{12}, E_{21}). \tag{6.6}$$

Во-первых,

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \ni \frac{A + uB}{|u|} \to_{u \to \pm\infty} \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma),$$

поэтому

$$A,\ \pm B \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

Следовательно,

$$A_t = \exp(t \operatorname{ad} B)A \in \mathrm{LS}(\Gamma), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Вычислим матрицу присоединенного оператора

$$\operatorname{ad} B : \operatorname{sl}(2) \to \operatorname{sl}(2), \qquad B = -b(E_{11} - E_{22}),$$

в базисе (6.6). Имеем

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{ad} B)(E_{11} - E_{22}) = 0,\\
&(\operatorname{ad} B)E_{12} = -2bE_{12},\\
&(\operatorname{ad} B)E_{21} = 2bE_{21}.
\end{aligned}$$

Поэтому присоединенный оператор имеет диагональную матрицу

$$\operatorname{ad} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix},$$

и его экспонента легко вычисляется:

$$\exp(t \operatorname{ad} B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-2bt) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2bt) \end{pmatrix}.$$

Далее, в базисе (6.6)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \qquad A_t = \exp(t \operatorname{ad} B) A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \exp(-2bt)a_{12} \\ \exp(2bt)a_{21} \end{pmatrix} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Так как $\pm B = \mp b(E_{11} - E_{22}) \in \operatorname{LS}(\Gamma)$, заключаем, что $\pm(E_{11} - E_{22}) \in \operatorname{LS}(\Gamma)$, и можно убить первую координату матрицы A_t:

$$A_t^1 = A_t - a_{11}(E_{11} - E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-2bt)a_{12} \\ \exp(2bt)a_{21} \end{pmatrix} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Продолжаем:

$$\operatorname{LS}(\Gamma) \ni \exp(2bt)A_t^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ \exp(4bt)a_{21} \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to -\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{a_{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = E_{12} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Аналогично,

$$\operatorname{LS}(\Gamma) \ni \exp(-2bt)A_t^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-4bt)a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{21} \end{pmatrix} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Тогда

$$\frac{1}{|a_{21}|} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{21} \end{pmatrix} = -E_{21} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Подводя итоги, получаем

$$E_{12} - E_{21} \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Но этот элемент порождает периодическую однопараметрическую группу:

$$\exp(t(E_{12} - E_{21})) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\pm(E_{12} - E_{21}) \in \operatorname{LS}(\Gamma).$$

Напомним, что также $\pm(E_{11}-E_{22}) \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Следовательно,

$$\pm[E_{12}-E_{21}, E_{11}-E_{22}] = \mp 2(E_{12}+E_{21}) \in \mathrm{LS}(\Gamma).$$

Получаем

$$\pm E_{12},\ \pm E_{21}, \pm(E_{11}-E_{22}) \in \mathrm{LS}(\Gamma),$$

откуда $\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{sl}(2)$, и система Γ управляема на $\mathrm{SL}(2)$. □

Имеются обобщения предыдущей теоремы на случай комплексного спектра матрицы B, а также для общих полупростых групп Ли G [10, 23, 24].

6.4. Разрешимые группы Ли. Для алгебры Ли L ее *производный ряд* определяется как следующая убывающая цепочка подалгебр:

$$L \supset L^{(1)} = [L, L] \supset L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] \supset \cdots .$$

Определение 6.6. Алгебра Ли L называется *разрешимой,* если ее производный ряд стабилизируется на нуле:

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \cdots \supset L^{(N)} = \{0\}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Группа Ли с разрешимой алгеброй Ли называется *разрешимой*.

Пример 6.7. Группы Ли $\mathrm{T}(n)$ и $\mathrm{E}(2)$ разрешимы.

Имеется общий критерий управляемости для правоинвариантных систем на связных односвязных разрешимых группах Ли (напомним, что топологическое пространство M называется *односвязным,* если любую замкнутую кривую в M можно непрерывно стянуть в точку).

Теорема 6.4. *Пусть G есть связная односвязная разрешимая группа Ли. Правоинвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(1) $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$ *и*

(2) Γ *не содержится ни в каком полупространстве в L, ограниченном подалгеброй.*

Если G неодносвязна, то условия (1), (2) *остаются достаточными для управляемости* Γ.

Докажем только простую часть этого критерия — необходимость. Достаточность есть очень нетривиальный факт, его доказательство можно найти в работе [27].

А необходимость в теореме 6.4 может быть выведена из следующего необходимого условия управляемости для общих (не обязательно разрешимых) односвязных групп Ли.

Теорема 6.5. *Пусть G есть связная односвязная группа Ли, и пусть $\Gamma \subset L$. Если Γ содержится в полупространстве в L, ограниченном подалгеброй, то Γ неуправляема на G.*

Доказательство. Предположим, что Γ содержится в полупространстве $\Pi \subset L$, ограниченном подалгеброй $l \subset L$, $\dim l = \dim L - 1$. Имеем $\Pi = \mathbb{R}_+ A + l$ для некоторого $A \in L$. Существует подгруппа Ли $H \subset G$ с алгеброй Ли l. Так как G односвязна и $\dim H = \dim G - 1$, подгруппа H замкнута в G. Тогда фактор-пространство

$$G/H = \{XH \mid X \in G\}$$

есть гладкое многообразие. Более того,

$$\dim G/H = \dim G - \dim H = 1.$$

Далее, в силу односвязности G ее фактор G/H также односвязен. Подводя итоги,

$$G/H = \mathbb{R}.$$

Фактор G/H есть однородное пространство группы Ли G: транзитивное действие есть

$$\theta : G \times G/H \to G/H, \qquad \theta(Y, XH) = YXH.$$

Для того, чтобы доказать неуправляемость Γ на G, покажем, что индуцированная система $\theta_*\Gamma$ неуправляема на однородном пространстве G/H.

Обозначим проекцию

$$\pi : G \to G/H, \qquad \pi(X) = XH.$$

Для любого $C \in l$ имеем

$$\theta_* C|_{\pi(\mathrm{Id})} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta(\exp(tC), H) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \underbrace{\exp(tC)}_{\in H} \cdot H$$
$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(H) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\mathrm{Id}) = 0,$$

т.е.

$$\theta_* l|_{\pi(\mathrm{Id})} = 0.$$

Так как $\Gamma \subset \Pi = \mathbb{R}_+ A + l$, имеем

$$\theta_* \Gamma|_{\pi(\mathrm{Id})} \subset \theta_*(\mathbb{R}_+ A + l)|_{\pi(\mathrm{Id})} = \theta_*(\mathbb{R}_+ A)|_{\pi(\mathrm{Id})} = \mathbb{R}_+ \, \theta_* A|_{\pi(\mathrm{Id})}.$$

Поэтому допустимые скорости индуцированной системы $\theta_*\Gamma$ в точке $\pi(\mathrm{Id}) \in \mathbb{R}$ принадлежат лучу. Следовательно, $\theta_*\Gamma$ неуправляема на $\mathbb{R} = G/H$, а Γ неуправляема на G. □

В дополнение к теореме 6.4 желательно иметь условие управляемости с легко проверяемыми условиями. Приведем такое условие для подкласса разрешимых групп Ли.

Определение 6.7. Разрешимая алгебра Ли называется *вполне разрешимой,* если все присоединенные операторы $\operatorname{ad} A$, $A \in L$, имеют только вещественные собственные значения.

Пример 6.8. Треугольная алгебра $\mathrm{t}(n)$ вполне разрешима.

Определение 6.8. Алгебра Ли называется *нильпотентной,* если все присоединенные операторы $\operatorname{ad} A$, $A \in L$, имеют только нулевое собственное значение.

Пример 6.9. Группа Ли

$$T_0(n) = \{X = (x_{ij}) \mid x_{ij} = 0 \ \forall i > j, \ x_{ii} = 1 \ \forall i\}$$

нильпотентна.

Любая нильпотентная алгебра Ли вполне разрешима. Алгебра Ли $\mathrm{e}(2)$ евклидовой группы плоскости разрешима, но не вполне разрешима.

Теорема 6.6. *Пусть G есть вполне разрешимая связная односвязная группа Ли, и пусть*

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \mid u_i \in \mathbb{R} \right\} \subset L.$$

Система Γ управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_m) = L$.

Доказательство. Достаточность. Имеем

$$\mathrm{LS}(\Gamma) \ni \frac{A + u_i B}{|u_i|} \xrightarrow[u \to \pm\infty]{} \pm B_i \in \mathrm{LS}(\Gamma),$$

поэтому

$$\mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_m) \subset \mathrm{LS}(\Gamma).$$

Если $\mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_m) = L$, то $\mathrm{LS}(\Gamma) = L$, и Γ управляема.

Доказательство необходимости основано на следующем общем факте: во вполне разрешимой алгебре Ли L любая подалгебра $l_1 \subset L$, $l_1 \neq L$, содержится в такой подалгебре $l_2 \supset l_1$, что $\dim l_2 = \dim l_1 + 1$, см. [37].

Пусть $\mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_m) = l_1 \neq L$. Тогда существует подалгебра коразмерности один l_2 в L, содержащая l_1:

$$l_1 \subset l_2 \subset L, \qquad \dim l_2 = \dim L - 1.$$

Система Γ содержится в большей системе:

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i \right\} \subset A + \mathrm{Lie}(B_1, \ldots, B_m) = A + l_1 \subset \mathbb{R}_+ A + l_2.$$

(1) Если $A \notin l_2$, то $\Pi = \mathbb{R}_+ A + l_2$ есть полупространство, ограниченное подалгеброй l_2 и содержащее Γ. Поэтому Γ неуправляема.

(2) Если же $A \in l_2$, то $\mathbb{R}_+ A + l_2 = l_2$ есть подалгебра, содержащая Γ. Тогда система Γ имеет неполный ранг, поэтому неуправляема. □

6.5. Полупрямые произведения групп Ли.

Определение 6.9. Пусть группа Ли K линейно действует на линейном пространстве V. *Полупрямое произведение* V и K есть группа Ли, определяемая как множество

$$G = V \ltimes K = \{(v, k) \mid v \in V,\ k \in K\}$$

с гладкой структурой декартова произведения и групповой операцией

$$(v_1, k_1) \cdot (v_2, k_2) = (v_1 + k_1 v_2, k_1 k_2).$$

Пример 6.10. Евклидова группа $\mathrm{E}(n)$ есть полупрямое произведение $\mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n)$, это очевидно так как

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} X & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n+1) \mid X \in \mathrm{SO}(n),\ y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

и

$$\begin{pmatrix} X_1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 X_2 & X_1 y_2 + y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующий критерий управляемости для полупрямых произведений можно рассматривать как обобщение критерия управляемости для компактных групп Ли (теорема 6.2).

Теорема 6.7. *Пусть K есть компактная связная группа Ли, линейно действующая на линейном пространстве V, и пусть $G = V \ltimes K$. Предположим, что действие группы K не имеет ненулевых неподвижных точек в V. Инвариантная система $\Gamma \subset L$ управляема на G тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Lie}(\Gamma) = L$.

Пример 6.11. Группа $\mathrm{SO}(n)$ не имеет ненулевых неподвижных точек в $\mathbb{R}^n$, поэтому инвариантная система $\Gamma \subset \mathrm{e}(n)$ управляема на $\mathrm{E}(n) = \mathbb{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n)$ тогда и только тогда, когда Γ имеет полный ранг.

Мы докажем теорему 6.7 в простейшем случае $G = \mathrm{E}(2)$, $\Gamma = A + \mathbb{R}B$. Доказательство в общем случае, а также обобщение на случай, когда K имеет ненулевые неподвижные точки в V можно найти в работе [13].

Пусть $G = \mathrm{E}(2)$, $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{e}(2)$. Имеем

$$\mathrm{e}(2) = \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3), \qquad e_1 = E_{12} - E_{21},\ e_2 = E_{13},\ e_3 = E_{23}.$$

Таблица умножения в $L = \mathrm{e}(2)$ имеет вид:

$$[e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = 0, \tag{6.7}$$

поэтому производный ряд есть

$$L = \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3) \supset L^{(1)} = \mathrm{span}(e_2, e_3) \supset L^{(2)} = \{0\},$$

следовательно, $\mathrm{e}(2)$ разрешима. Далее, $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, e_1) = \{0, \pm i\} \not\subset \mathbb{R}$, поэтому $\mathrm{e}(2)$ не является вполне разрешимой. Из таблицы умножения (6.7) легко следует, что $\mathrm{span}(e_2, e_3)$ есть единственная двумерная подалгебра в $\mathrm{e}(2)$.

Приведем критерий управляемости на $\mathrm{E}(2)$.

Теорема 6.8. *Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{e}(2)$ управляема на $G = \mathrm{E}(2)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) *A, B линейно независимы и*
(2) $\{A,\ B\} \not\subset \mathrm{span}(e_2, e_3)$.

Доказательство. Необходимость. Если A, B линейно зависимы или $\{A, B\} \subset \mathrm{span}(e_2, e_3)$, то $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathrm{Lie}(A, B) \neq L$, поэтому Γ неуправляема.

Достаточность. Пусть A, B линейно независимы и $\{A,\ B\} \not\subset \mathrm{span}(e_2, e_3)$. Тогда существуют такие линейно независимые элементы $A_u = A + uB$ и $A_v = A + vB$, что $A_u, A_v \notin \mathrm{span}(e_2, e_3)$. Для элемента

$$A_u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \qquad \alpha_1 \neq 0,$$

однопараметрическая подгруппа

$$\exp(sA_u) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 s) & \sin(\alpha_1 s) & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin(\alpha_1 s) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(1-\cos(\alpha_1 s)) \\ -\sin(\alpha_1 s) & \cos(\alpha_1 s) & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\cos(\alpha_1 s)-1) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\sin(\alpha_1 s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

периодична. Так как $A_u \in \Gamma$, то $\pm A_u \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Аналогично, $\pm A_v \in \mathrm{LS}(\Gamma)$. Поэтому подпространство $l = \mathrm{Lie}(A_u, A_v) \subset \mathrm{LS}(\Gamma)$. Но l не содержится в $\mathrm{span}(e_2, e_3)$ — единственной двумерной подалгебре в $\mathrm{e}(2)$. Поэтому $l = \mathrm{e}(2)$, $\mathrm{LS}(\Gamma) = \mathrm{e}(2) = L$, и Γ управляема на $\mathrm{E}(2)$. □

Теперь мы в состоянии доказать теорему 6.7 в простейшем случае.

Следствие 6.2. *Система $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset \mathrm{e}(2)$ управляема на $\mathrm{E}(2)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathrm{e}(2)$.*

Доказательство. Необходимость рангового условия есть общий факт. С другой стороны, если $\mathrm{Lie}(\Gamma) = \mathrm{e}(2)$, то условия (1), (2) теоремы 6.8 выполнены, поэтому Γ управляема на $\mathrm{E}(2)$. □

7. Принцип максимума Понтрягина для инвариантных задач оптимального управления на группах Ли

Теперь мы обратимся к *задачам оптимального управления* вида

$$\dot q = f(q,u), \qquad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t), u(t))\,dt \to \min.$$

Здесь M есть гладкое многообразие, $f(q,u)$ и $\varphi(q,u)$ гладкие, а допустимые управления $u(t)$ измеримые локально ограниченные.

Чтобы сформулировать фундаментальное необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина [4] напомним некоторые начальные понятия гамильтонова формализма но кокасательном расслоении.

7.1. Гамильтоновы системы на T^*M.

Пусть M есть гладкое n-мерное многообразие. Для любой точки $q \in M$, касательное пространство T_qM имеет сопряженное пространство — кокасательное пространство $T_q^*M = (T_qM)^*$. Несвязное объединение всех кокасательных пространств есть кокасательное расслоение $T^*M = \bigcup_{q\in M} T_q^*M$, это — гладкое многообразие размерности $2n$. Для того, чтобы построить локальные координаты на T^*M, выберем любые локальные координаты $(x_1, \dots, x_n)$ на M. Тогда $dx_{1q}, \dots, dx_{nq}$ являются базисными линейными формами из T_q^*M, и любой ковектор $\lambda \in T_q^*M$ имеет разложение вида $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dx_{iq}$. Набор из $2n$ функций $(p_1, \dots, p_n; x_1, \dots, x_n)$ задает локальные координаты, называемые *каноническими координатами* на кокасательном расслоении T^*M.

Каноническая проекция $\pi : T^*M \to M$ переводит ковектор $\lambda \in T_q^*M$ в точку базы $q \in M$.

Тавтологическая 1-форма $s \in \Lambda^1(T^*M)$ определяется следующим образом. Возьмем любую точку $\lambda \in T^*M$, $\pi(\lambda) = q$, и любой касательный вектор $\xi \in T_\lambda(T^*M)$. Тогда

$$\langle s_\lambda, \xi \rangle = \langle \lambda, \pi_* \xi \rangle.$$

Симплектическая форма $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$ определяется как дифференциал

$$\sigma = ds.$$

Любая гладкая функция $h \in C^\infty(T^*M)$ называется *гамильтонианом*. Соответствующее *гамильтоново векторное поле* $\vec h \in \mathrm{Vec}(T^*M)$ вводится следующим образом. Дифференциал dh есть 1-форма на T^*M. С другой стороны, для любого векторного поля $V \in \mathrm{Vec}(T^*M)$ можно определить 1-форму $\sigma(V, \cdot\,) = i_V\sigma \in \Lambda^1(T^*M)$. Гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану h, определяется как векторное поле $\vec h \in \mathrm{Vec}(T^*M)$, для которого

$$dh = -i_{\vec h}\sigma.$$

Пример 7.1. В канонических координатах $(p_1,\dots,p_n;x_1,\dots,x_n)$ на T^*M имеем:

$$s = p\,dx = \sum_{i=1}^n p_i\,dx_i, \quad \sigma = dp\wedge dx = \sum_{i=1}^n dp_i\wedge dx_i.$$

Для гамильтониана $h = h(p,x)\in C^\infty(T^*M)$ гамильтонова система уравнений $\dot\lambda = \vec h(\lambda)$ записывается в канонических координатах в виде

$$\dot p = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \dot x = \frac{\partial h}{\partial p}.$$

7.2. Принцип максимума Понтрягина на гладких многообразиях. Рассмотрим задачу оптимального управления вида

$$\dot q = f(q,u), \qquad q\in M, \quad u\in U\subset\mathbb{R}^m, \tag{7.1}$$

$$q(0)=q_0, \qquad q(t_1)=q_1, \qquad t_1 \text{ фиксировано или свободно}, \tag{7.2}$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} \varphi(q(t),u(t))\,dt \to \min. \tag{7.3}$$

Пусть $\lambda\in T^*M$ есть ковектор, $\nu\in\mathbb{R}$ — числовой параметр, а $u\in U$ — управляющий параметр. Введем семейство гамильтонианов

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle\lambda, f(q,u)\rangle + \nu\varphi(q,u).$$

Теорема 7.1 (ПМП на гладких многообразиях). *Пусть $\tilde u(t)$, $t\in[0,t_1]$, есть оптимальное управление в задаче* (7.1)–(7.3) *с фиксированным временем t_1. Тогда существуют липшицева кривая $\lambda_t\in T^*_{\tilde q(t)}M$, $t\in[0,t_1]$, и число $\nu\in\mathbb{R}$, для которых:*

$$\dot\lambda_t = \overrightarrow{h^\nu_{\tilde u(t)}}(\lambda_t), \tag{7.4}$$

$$h^\nu_{\tilde u(t)}(\lambda_t) = \max_{u\in U} h_u^\nu(\lambda_t), \tag{7.5}$$

$$(\lambda_t,\nu)\not\equiv(0,0), \qquad t\in[0,t_1], \tag{7.6}$$

$$\nu\leqslant 0. \tag{7.7}$$

Замечание. Для задачи (7.1)–(7.3) со свободным терминальным временем t_1 необходимые условия оптимальности имеют вид (7.4)–(7.7) плюс дополнительное равенство $h^\nu_{\tilde u(t)}(\lambda(t))\equiv 0$.

Доказательство принципа максимума Понтрягина на многообразиях можно найти в книге [1].

7.3. Гамильтоновы системы на T^*G. Отметим, что в общем случае кокасательное расслоение T^*M гладкого многообразия M нетривиально, т.е. не может быть представлено как прямое произведение $E\times M$ линейного пространства E и M. Однако кокасательное расслоение T^*G группы Ли G имеет естественную тривиализацию. Мы воспользуемся этой тривиализацией, чтобы записать гамильтонову систему ПМП для задач оптимального управления на группах Ли.

Пусть E есть линейное пространство размерности $\dim E = \dim M = n$.

Определение 7.1. *Тривиализация* кокасательного расслоения T^*M есть такой диффеоморфизм $\Phi : E\times M\to T^*M$, что:

(1) $\Phi(e,q)\in T_q^*M, \qquad e\in E, \quad q\in M$,
(2) $\Phi(\,\cdot\,,q) : E\to T_q^*M$ линейный изоморфизм для любого $q\in M$.

В любой точке (e,q) тривиализованного кокасательного расслоения $E\times M\cong T^*M$ имеем следующие отождествления касательного и кокасательного пространств:

$$T_{(e,q)}(E\times M)\cong T_eE\oplus T_qM\cong E\times T_qM,$$
$$T^*_{(e,q)}(E\times M)\cong T_e^*E\oplus T_q^*M\cong E^*\times T_q^*M.$$

Соответственно любой касательный и кокасательный вектор может быть разложен на вертикальную и горизонтальную части:

$$V = V_v + V_h, \qquad V \in T_{(e,q)}(E \times M), \quad V_v \in E, \quad V_h \in T_q M,$$
$$\omega = \omega_v + \omega_h, \qquad \omega \in T^*_{(e,q)}(E \times M), \quad \omega_v \in E^*, \quad \omega_h \in T^*_q M.$$

Для группы Ли G кокасательное расслоение T^*G имеет следующую естественную тривиализацию:

$$\Phi\,:\,L^* \times G \to T^*G, \qquad (a, X) \mapsto \bar{a}_X, \quad a \in L^*, \quad X \in G.$$

Здесь L^* есть сопряженное пространство алгебры Ли $L = T_{\mathrm{Id}}G$, и $\bar{a} \in \Lambda^1(G)$ есть левоинвариантная 1-форма на G, полученная левыми сдвигами из ковектора $a = \bar{a}_{\mathrm{Id}} \in L^*$:

$$\langle \bar{a}_X, XA \rangle = \langle a, A \rangle, \qquad a \in L^*, \quad A \in L, \quad X \in G.$$

Теперь вычислим обратный перенос тавтологической 1-формы s, симплектической 2-формы σ, и гамильтонова векторного поля $\vec{h}$ на тривиализованное кокасательное расслоение $L^* \times G \cong T^*G$.

Начнем с тавтологической 1-формы $\widehat{\Phi}s \in \Lambda^1(L^* \times G)$. Возьмем любую точку $(a, X) \in L^* \times G$ и касательный вектор $(\xi, XA) \in L^* \oplus T_X G$. Тогда

$$\begin{aligned} \Big\langle (\widehat{\Phi}s)_{(a,X)}, (\xi, XA) \Big\rangle &= \big\langle s_{\bar{a}_X}, \Phi_{*(a,X)}(\xi, XA) \big\rangle = \big\langle \bar{a}_X, \pi_* \Phi_{*(a,X)}(\xi, XA) \big\rangle \\ &= \langle \bar{a}_X, XA \rangle = \langle a, A \rangle\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Далее, вычислим симплектическую 2-форму $\widehat{\Phi}\sigma \in \Lambda^2(L^* \times G)$. Для любых касательных векторов $(\xi, XA), (\eta, XB) \in L^* \oplus T_X G$ имеем

$$(\widehat{\Phi}\sigma)_{(a,X)}((\xi, XA), (\eta, XB))$$

так как $\widehat{\Phi}\sigma = \widehat{\Phi}ds = d\widehat{\Phi}s$

$$= (d\widehat{\Phi}s)_{(a,X)}((\xi, XA), (\eta, XB))$$

т.к. $d\omega(V, W) = V\langle \omega, W \rangle - W\langle \omega, V \rangle - \langle \omega, [V, W] \rangle$

$$\begin{aligned} &= (\xi, XA)\langle \widehat{\Phi}s_{(a,X)}, (\eta, XB) \rangle - (\eta, XB)\langle \widehat{\Phi}s_{(a,X)}, (\xi, XA) \rangle \\ &\quad - \langle \widehat{\Phi}s_{(a,X)}, [(\xi, XA), (\eta, XB)] \rangle \end{aligned}$$

принимая во внимание формулу (7.8) для $\widehat{\Phi}s$

$$\begin{aligned} &= (\xi, A)\langle a, B \rangle - (\eta, B)\langle a, A \rangle - \langle a, [A, B] \rangle \\ &= \langle \xi, B \rangle - \langle \eta, A \rangle - \langle a, [A, B] \rangle. \end{aligned}$$

Наконец, возьмем гамильтониан вида $h = h(a)$, не зависящий от $X \in G$, это форма гамильтониана ПМП для левоинвариантных задач оптимального управления на группе Ли G. Разложим искомое гамильтоново векторное поле $\vec{h} \in \mathrm{Vec}(L^* \times G)$ на вертикальную и горизонтальную части:

$$\vec{h}(a, X) = (\xi, XA) \in L^* \oplus T_X G, \qquad a \in L^*, \quad X \in G.$$

Применим тождество $dh = -\widehat{\Phi}\sigma(\vec{h}, \,\cdot\,)$ к произвольному касательному вектору $(\eta, XB) \in L^* \oplus T_X G$. В силу того, что гамильтониан h не зависит от X, можно обозначить

$$dh = \frac{\partial\, h}{\partial\, a} \in (L^*)^* = L.$$

Учитывая формулу (7.8) для $\widehat{\Phi}\sigma$, получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial\, h}{\partial\, a}, (\eta, XB) \right\rangle &= \langle dh, (\eta, XB) \rangle = -\widehat{\Phi}\sigma_{(a,X)}((\xi, XA), (\eta, XB)) \\ &= -\langle \xi, B \rangle + \langle \eta, A \rangle + \langle a, [A, B] \rangle. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Полагая $B = 0$ в (7.9), вычислим вертикальную часть вектора $\vec{h}$:

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial a}, (\eta, 0) \right\rangle = \left\langle \eta, \frac{\partial h}{\partial a} \right\rangle = \langle \eta, A \rangle \qquad \forall \eta \in L^*,$$

поэтому $A = \dfrac{\partial h}{\partial a}$.

Теперь положим $\eta = 0$ в (7.9) и отыщем горизонтальную часть вектора $\vec{h}$:

$$0 = \langle dh, (0, XB) \rangle = -\langle \xi, B \rangle + \langle a, [A, B] \rangle,$$

поэтому

$$\langle \xi, B \rangle = \langle a, [A, B] \rangle = \langle (\operatorname{ad} A)^* a, B \rangle \qquad \forall B \in L.$$

Следовательно, $\xi = (\operatorname{ad} A)^* a = \left(\operatorname{ad} \dfrac{\partial h}{\partial a}\right)^* a$.

Подведем итог: гамильтонова система на $T^*G \cong L^* \times G$ для левоинвариантного гамильтониана $h = h(a)$, $a \in L^*$, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{a} = \left(\operatorname{ad} \dfrac{\partial h}{\partial a}\right)^* a, & a \in L^*, \\ \dot{X} = X \dfrac{\partial h}{\partial a}, & X \in G. \end{cases} \tag{7.10}$$

7.4. Гамильтоновы системы в случае компактной группы Ли. В случае компактной группы Ли G гамильтонова система (7.10) упрощается.

Пусть $G \subset \mathrm{GL}(N)$ — компактная группа Ли. В этом случае несложно показать, что фактически $G \subset \mathrm{O}(N)$. То есть существует такое скалярное произведение $g(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на $\mathbb{R}^N$, что

$$g(Xu, Xv) = g(u, v) \qquad \forall X \in G, \quad \forall u,\ v \in \mathbb{R}^N.$$

Действительно, начнем с произвольного скалярного произведения $\tilde{g}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ на $\mathbb{R}^N$, и выберем любые левоинвариантные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda^1(G)$, линейно независимые в каждой точке G. Тогда искомое скалярное произведение g можно построить следующим образом:

$$g(u, v) = \int\limits_G \tilde{g}(Xu, Xv)\, \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Поэтому в дальнейшем мы считаем, что $G \subset \mathrm{O}(N)$, поэтому $L \subset \mathrm{so}(N)$. Но в алгебре Ли $\mathrm{so}(N)$ имеется свое инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle A, B \rangle = -\operatorname{tr}(AB).$$

Если записывать кососимметрические матрицы в виде

$$A = (A_{ij}), \quad B = (B_{ij}), \qquad A_{ij} = -A_{ji}, \quad B_{ij} = -B_{ji},$$

то

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} B_{ij}.$$

Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ инвариантно в смысле следующего тождества:

$$\left\langle e^{t \operatorname{ad} C} A, e^{t \operatorname{ad} C} B \right\rangle = \langle A, B \rangle \qquad \forall A,\ B,\ C \in \mathrm{so}(N), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.11}$$

Иными словами, оператор $e^{t \operatorname{ad} C} : \mathrm{so}(N) \to \mathrm{so}(N)$ ортогонален. Это тождество легко доказывается в силу того, что $e^{t \operatorname{ad} C} A = e^{tC} A e^{-tC}$ и

$$\begin{aligned} \left\langle e^{t \operatorname{ad} C} A, e^{t \operatorname{ad} C} B \right\rangle &= -\operatorname{tr}(e^{tC} A e^{-tC} e^{tC} B e^{-tC}) = -\operatorname{tr}(e^{tC} A B e^{-tC}) \\ &= -\operatorname{tr}(AB) = \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

учитывая инвариантность следа.

Дифференцируя тождество (7.11) по t при $t = 0$, получаем инфинитезимальную версию свойства инвариантности:

$$\langle \operatorname{ad} C(A), B\rangle + \langle A, \operatorname{ad} C(B)\rangle = 0 \qquad \forall A,\ B,\ C \in \mathrm{so}(N),$$

т.е. оператор $\operatorname{ad} C\,:\,\mathrm{so}(N) \to \mathrm{so}(N)$ кососимметричен.

Следовательно, в алгебре Ли $L \subset \mathrm{so}(N)$ существует инвариантное скалярное произведение. Это позволяет отождествить алгебру Ли L с ее сопряженным пространством L^*:

$$A \leftrightarrow \tilde{A} = \langle A, \cdot\rangle, \qquad A \in L, \quad \tilde{A} \in L^*.$$

После этого отождествления оператор $\left(\operatorname{ad} \dfrac{\partial h}{\partial a}\right)^*\,:\, L^* \to L^*$ определен на L. Зафиксируем $A \in L$ и вычислим действие оператора $(\operatorname{ad} A)^*\,:\, L \to L$. Для любых $B, C \in L$ имеем

$$\begin{aligned}\langle(\operatorname{ad} A)^*\tilde{B}, C\rangle &= \langle \tilde{B}, (\operatorname{ad} A)C\rangle = \langle B, (\operatorname{ad} A)C\rangle = -\langle(\operatorname{ad} A)B, C\rangle \\ &= -\langle\widetilde{(\operatorname{ad} A)}B, C\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому $(\operatorname{ad} A)^*\tilde{B} = -\widetilde{\operatorname{ad} A(B)}$, так что оператор $(\operatorname{ad} A)^*\,:\, L \to L$ совпадает с оператором $-\operatorname{ad} A$.

В частности, оператор $\left(\operatorname{ad} \dfrac{\partial h}{\partial a}\right)^*\,:\, L^* \to L^*$ отождествляется с оператором $-\operatorname{ad} \dfrac{\partial h}{\partial a}\,:\, L \to L$. Поэтому для компактной группы Ли G вертикальная часть гамильтоновой системы задана на алгебре Ли L:

$$\begin{cases}\dot{a} = -\left(\operatorname{ad} \dfrac{\partial h}{\partial a}\right) a = \left[a, \dfrac{\partial h}{\partial a}\right], & a \in L,\\[2ex] \dot{X} = X \dfrac{\partial h}{\partial a}, & X \in G.\end{cases} \tag{7.12}$$

Далее мы воспользуемся выражениями (7.10), (7.12) для гамильтоновых систем при исследовании инвариантных задач оптимального управления на группах Ли.

8. Примеры инвариантных задач оптимального управления на группах Ли

8.1. Риманова задача на компактной группе Ли. Пусть G — компактная связная группа Ли. Инвариантное скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ на алгебре Ли L задает левоинвариантную субриманову структуру на G:

$$\langle XA, XB\rangle_X = \langle A, B\rangle, \qquad A,\ B \in L, \quad X \in G, \quad XA,\ XB \in T_X G.$$

Поэтому в каждом касательном пространстве $T_X G$ задано скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_X$. Для любой липшицевой кривой

$$X\,:\,[0, t_1] \to M$$

ее риманова длина определяется как интеграл от скорости:

$$l = \int_0^{t_1} |\dot{X}(t)|\,dt, \qquad |\dot{X}| = \sqrt{\langle \dot{X}, \dot{X}\rangle}.$$

Задача ставится следующим образом: для заданной пары точек $X_0, X_1 \in G$, найти кратчайшую кривую в G, соединяющую X_0 и X_1.

Соответствующая задача оптимального управления имеет вид:

$$\dot{X} = Xu, \qquad X \in G, \quad u \in L, \tag{8.1}$$

$$X(0) = X_0, \quad X(t_1) = X_1, \tag{8.2}$$

$$X_0,\ X_1 \in G \quad \text{фиксировано}, \tag{8.3}$$

$$l(u) = \int_0^{t_1} |u(t)|\,dt \to \min. \tag{8.4}$$

Во-первых, отметим, что инвариантная система (8.1) управляема так как $\Gamma = L$ имеет полный ранг и симметрична, а G связна.

По неравенству Коши-Буняковского,

$$(l(u))^2 = \left(\int_0^{t_1} |u(t)|\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^{t_1} |u(t)|^2\,dt \cdot t_1,$$

более того, равенство имеет место только при $|u(t)| \equiv \text{const}$. Следовательно, риманова задача $l \to \min$ эквивалентна задаче

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} |u(t)|^2\,dt \to \min\,. \tag{8.5}$$

Функционал J удобнее в исследовании чем l так как J гладок и его экстремальные траектории автоматически имеют постоянную скорость. Будем рассматривать задачу с функционалом J: (8.1)–(8.3), (8.5).

Далее, из теоремы Филиппова [1] следует существование оптимальных управлений в задаче (8.1)–(8.3), (8.5), а потому и в исходной задаче (8.1)–(8.4).

Гамильтониан ПМП для задачи $J \to \min$ имеет вид:

$$h_u^\nu(a, X) = \langle \bar{a}_X, Xu\rangle + \frac{\nu}{2}|u|^2 = \langle a, u\rangle + \frac{\nu}{2}|u|^2 = h_u^\nu(a).$$

Применим принцип максимума. Если пара $(u(t), X(t))$ оптимальна, $t \in [0, t_1]$, то существует такая кривая $a(t) \in L$ и число $\nu \leqslant 0$, что:

(1) $(a(t), \nu) \neq 0$,

(2) $\begin{cases} \dot{a} = \left[a, \dfrac{\partial h}{\partial a}\right] = [a, u], \\ \dot{X} = X\dfrac{\partial h}{\partial a} = Xu. \end{cases}$

(3) $h_{u(t)}^\nu(a(t)) = \max\limits_{u \in L} h_u^\nu(a(t))$.

В силу компактности группы G, мы записываем гамильтонову систему (2) в виде (7.12).

Сначала рассмотрим *анормальный случай*: $\nu = 0$. Из условия максимума

$$h_u^0(a) = \langle a, u\rangle \to \max_{u \in L}$$

следует, что $a(t) \equiv 0$. Это противоречит принципу максимума т.к. пара (ν, a) должна быть отличной от нуля. Поэтому не существует анормальных экстремальных траекторий.

Теперь рассмотрим *нормальный случай*: $\nu < 0$. Отметим, что условия ПМП (1)–(3) сохраняются при умножении (a, ν) на положительные числа, поэтому можно считать, что $\nu = -1$. Их условия максимума

$$h_u^{-1}(a) = \langle a, u\rangle - \frac{1}{2}|u|^2 \to \max_{u \in L}$$

получаем $u(t) \equiv a(t)$. Гамильтонова система (2) для такого управления имеет вид

$$\begin{cases} \dot{a} = [a, a] = 0, \\ \dot{X} = Xa. \end{cases}$$

Поэтому оптимальные траектории суть левые сдвиги однопараметрических подгрупп в M:

$$X(t) = X_0 e^{ta}, \qquad a \in L.$$

Мы показали, что для любых $X_0, X_1 \in G$ и любых $t_1 > 0$ существует такое $a \in L$, что

$$X_1 = X_0 e^{at_1}.$$

В частности, для случая $X_0 = \mathrm{Id}$, $t_1 = 1$, заключаем, что любая точка $X_1 \in G$ может быть представлена в виде

$$X_1 = e^a, \qquad a \in L.$$

То есть любой элемент X_1в связной компактной группе Ли G имеет логарифм a в алгебре Ли L.

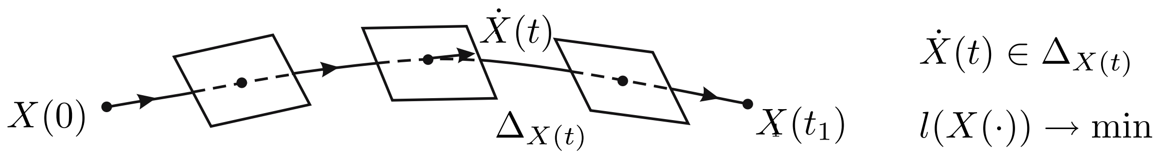

Рис. 5. Субриманова задача

8.2. Субриманова задача на $\mathrm{SO}(3)$**.** Рассмотрим случай $G = \mathrm{SO}(3)$, но модифицируем предыдущую задачу. Как и раньше, мы должны найти кратчайшую кривую между точками X_0, X_1 в группе Ли G. Но теперь допустимые скорости $\dot X$ несвободны: они должны касаться левоинвариантного распределения (коранга 1) на G. То есть мы задаем левоинвариантное поле касательных гиперплоскостей на G, и $\dot X(t)$ должен касаться гиперплоскости, приложенной в точке $X(t)$. Задача отыскания кратчайших кривых, касающихся данного распределения $\Delta_X \subset T_X G$, называется *субримановой задачей*:

$$\begin{aligned}
&\dot X(t) \in \Delta_{X(t)}, \qquad t \in [0, t_1],\\
&X(0) = X_0, \qquad X(t_1) = X_1,\\
&l(X(\cdot)) \to \min,
\end{aligned}$$

см. рис. 5.

Чтобы сформулировать эту задачу как задачу оптимального управления, выберем такой элемент $b \in L$, $|b| = 1$, что $\Delta_{\mathrm{Id}} = b^{\perp} = \{u \in L \mid \langle u, b\rangle = 0\}$. Обозначим $U = b^{\perp}$. Тогда $\Delta_X = XU$, и ограничение $\dot X \in \Delta_X$ можно переписать в виде $\dot X = Xu$, $u \in U$.

Для твердого тела, вращающегося в $\mathbb{R}^3$ с матрицей ориентации $X \in \mathrm{SO}(3)$, это ограничение на скорости означает, что в твердом теле фиксируется ось b и разрешаются вращения тела вокруг любой оси u, ортогональной b.

Задача оптимального управления ставится следующим образом.

$$\begin{aligned}
&\dot X = Xu, \qquad X \in G, \quad u \in U,\\
&X(0) = X_0, \quad X(t_1) = X_1,\\
&X_0,\ X_1 \in G \text{ фиксированы},\\
&l(u) = \int_0^{t_1} |u(t)|\, dt \to \min .
\end{aligned}$$

Управляемость: имеем $\Gamma = b^{\perp} = \mathrm{span}(a_1, a_2)$ для некоторых линейно независимых $a_1, a_2 \in \mathrm{so}(3)$. Так как $[a_1, a_2] \notin \mathrm{span}(a_1, a_2)$, то система Γ имеет полный ранг, поэтому управляема на $\mathrm{SO}(3)$.

Так же как в римановой задаче, задача минимизации длины эквивалентна задаче

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} |u(t)|^2\, dt \to \min,$$

и теорема Филиппова гарантирует существование оптимальных управлений.

Гамильтониан принципа максимума такой же, как в предыдущей задаче:

$$h_u^{\nu}(a) = \langle a, u\rangle + \frac{\nu}{2}|u|^2.$$

Рассмотрим сначала анормальный случай: $\nu = 0$. Условие максимума ПМП имеет вид

$$h_u^0(a) = \langle a, u\rangle \to \max_{u \perp b}. \tag{8.6}$$

Введем разложение

$$a = a_{\|} + a_{\perp}, \qquad a_{\|} \parallel b, \quad a_{\perp} \perp b. \tag{8.7}$$

Тогда условие максимума (8.6) переписывается как

$$h_u^0(a) = \langle a_{\perp}, u\rangle \to \max_{u \perp b},$$

откуда $a_\perp = 0$, т.е.

$$a(t) = \alpha(t) b, \qquad \alpha(t) \neq 0.$$

Вертикальная часть гамильтоновой системы (7.12) для нашей задачи дает равенство

$$\dot\alpha b = \dot a = \left[a, \frac{\partial h}{\partial a}\right] = [a, u] = \alpha[b, u]. \tag{8.8}$$

Далее, в силу инвариантности скалярного произведения в so(3),

$$\langle b, [b, u]\rangle = -\langle [b, b], u\rangle = 0.$$

Поэтому

$$[b, u] \perp b \quad \Rightarrow \quad \dot\alpha b \perp b \quad \Rightarrow \quad \dot\alpha = 0.$$

Тогда из равенства (8.8) следует, что $\alpha[b, u] = 0$, поэтому $[b, u] = 0$. Но такое равенство в so(3) означает, что $u \parallel b$. Так как $u \perp b$, получаем $u \equiv 0$ для анормального оптимального управления. Тогда горизонтальная часть гамильтоновой системы (7.12) принимает вид $\dot X = X \dfrac{\partial h}{\partial a} = Xu = 0$. То есть, $X \equiv \mathrm{const}$, анормальные траектории постоянны и дают только тривиальные решения в нашей задаче.

Теперь рассмотрим нормальный случай: $\nu = -1$. В силу разложения (8.7), условие максимума ПМП принимает форму

$$h_u^{-1}(a) = \langle a_\perp, u\rangle - \frac{1}{2}|u|^2 \to \max_{u \perp b},$$

поэтому нормальные оптимальные управления равны

$$u = a_\perp = a - \langle b, a\rangle b.$$

Вертикальная часть гамильтоновой системы ПМП принимает форму

$$\dot a = [a, u] = [a, a - \langle b, a\rangle b] = \langle b, a\rangle [b, a]. \tag{8.9}$$

Легко видеть, что это уравнение имеет интеграл $\langle b, a\rangle \equiv \mathrm{const}$:

$$\langle b, a\rangle^{\cdot} = \langle b, \dot a\rangle = \underbrace{\langle b, [b, a]\rangle}_{=0} \langle b, a\rangle = 0.$$

Поэтому уравнение (8.9) можно переписать в виде

$$\dot a = \langle b, a_0\rangle [b, a] = \mathrm{ad}(\langle b, a_0\rangle b) a \qquad a_0 = a(0),$$

что немедленно интегрируется:

$$a(t) = e^{t\,\mathrm{ad}(\langle b, a_0\rangle b)} a_0.$$

Теперь рассмотрим горизонтальную часть гамильтоновой системы ПМП:

$$\begin{aligned} \dot X &= Xu = X(a - \langle b, a_0\rangle b) = X\left(e^{t\,\mathrm{ad}(\langle b, a_0\rangle b)} a_0 - \langle b, a_0\rangle b\right) \\ &= X e^{t\,\mathrm{ad}(\langle b, a_0\rangle b)} \left(a_0 - \langle b, a_0\rangle b\right). \end{aligned}$$

Используя обозначение

$$c = \langle b, a_0\rangle b, \qquad d = a_0 - \langle b, a_0\rangle b,$$

получаем уравнение

$$\dot X = X e^{t\,\mathrm{ad}\,c} d = X e^{tc} d\, e^{-tc},$$

то есть

$$\dot X e^{tc} = X e^{tc} d.$$

После замены переменных $Y = Xe^{tc}$ получаем уравнение

$$\dot Y = \dot X e^{tc} + X e^{tc} c = X e^{tc}(d + c) = Y(d + c),$$

которое имеет решение

$$Y(t) = Y(0) e^{t(d+c)}.$$

Наконец,

$$X(t) = Y(t) e^{-tc} = Y(0) e^{t(d+c)} e^{-tc} = X(0) e^{ta_0} e^{-t\langle b, a_0\rangle b}.$$

Подведем итоги: мы показали, что все оптимальные траектории в субримановой задаче на SO(3) являются произведениями двух однопараметрических подгрупп.

8.3. Субриманова задача на группе Гейзенберга. *Группа Гейзенберга* определяется следующим образом:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Эта группа диффеоморфна $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$, потому некомпактна.

Ее алгебра Ли есть

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}(e_1,\ e_2,\ e_3),$$

где используются обозначения

$$e_1 = E_{12}, \quad e_2 = E_{23}, \quad e_3 = E_{13}. \tag{8.10}$$

Таблица умножения в этом базисе имеет вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0,$$

поэтому

$$\mathrm{ad}\, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}\, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}\, e_3 = 0.$$

Следовательно, любой присоединенный оператор

$$\mathrm{ad}\, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \sum_{i=1}^{3} A_i e_i \in L, \tag{8.11}$$

имеет нулевой спектр. Поэтому группа Гейзенберга G нильпотентна.

В сопряженном пространстве к алгебре Гейзенберга L можно выберем базис, двойственный к базису (8.10):

$$L^* = \mathrm{span}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \qquad \langle \omega_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Будем записывать элементы алгебры Ли как векторы-столбцы

$$L \ni A = \sum_{i=1}^{3} A_i e_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

а элементы сопряженного пространства как векторы-строки:

$$L^* \ni a = \sum_{i=1}^{3} a_i \omega_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Для линейного оператора $C : L \to L$, сопряженный к нему $C^* : L^* \to L^*$ действует как

$$\langle C^* a, A \rangle = \langle a, CA \rangle = \begin{pmatrix} & a & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ A \\ \\ \end{pmatrix},$$

произведение вектора-строки, квадратной матрицы и вектора-столбца. Поэтому

$$C^* a = \begin{pmatrix} & a & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим левоинвариантную субриманову задачу га группе Гейзенберга, заданную ортонормированным репером (e_1, e_2). Плоскость

$$\Delta_{\mathrm{Id}} = \mathrm{span}(e_1, e_2) \subset L$$

порождает левоинвариантное распределение

$$\Delta_X = \operatorname{span}(Xe_1, Xe_2) \subset T_X G.$$

Далее, скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{Id}}$ в Δ_{Id}, определенное равенством

$$\langle e_i, e_j\rangle_{\mathrm{Id}} = \delta_{ij}, \qquad i,\ j = 1,\ 2,$$

порождает левоинвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ в Δ_X следующим образом:

$$\langle Xe_i, Xe_j\rangle_X = \delta_{ij}, \qquad i,\ j = 1,\ 2.$$

Распределение $\Delta_X \subset T_X G$ вместе со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ в Δ_X задают левоинвариантную субриманову структуру на группе Ли G.

Изучим соответствующую субриманову задачу:

$$\begin{aligned}
&\dot X \in \Delta_X,\\
&X(0) = X_0, \qquad X(t_1) = X_1,\\
&l(X(\cdot)) = \int_0^{t_1} |\dot X|\, dt = \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot X, \dot X\rangle}\, dt \to \min .
\end{aligned}$$

Соответствующая управляемая система имеет вид

$$\dot X = u_1 X e_1 + u_2 X e_2, \qquad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{8.12}$$

Так как

$$|\dot X| = |u_1 X e_1 + u_2 X e_2| = |u_1 e_1 + u_2 e_2| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

функционал субримановой длины принимает вид

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min . \tag{8.13}$$

Исследуем задачу оптимального управления (8.12), (8.13).

Управляемость: имеем $\Gamma = \operatorname{span}(e_1, e_2) \subset L$. Так как $[e_1, e_2] = e_3$, система Γ имеет полный ранг. Более того, Γ симметрична, а G связна, поэтому Γ управляема.

Как и выше, переходим к функционалу

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min .$$

Из теоремы Филиппова следует существование оптимальных управлений.

Гамильтониан принципа максимума имеет вид

$$\begin{aligned}
h_u^\nu(a, X) &= \langle \bar a_X, u_1 X e_1 + u_2 X e_2\rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2)\\
&= \langle a, u_1 e_1 + u_2 e_2\rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) = u_1 a_1 + u_2 a_2 + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) = h_u^\nu(a).
\end{aligned}$$

Группа Гейзенберга некомпактна, поэтому $a \in L^*$, и гамильтонова система принципа максимума имеет вид (7.10). Сначала рассмотрим вертикальную часть

$$\dot a = \left(\operatorname{ad} \frac{\partial h}{\partial a}\right)^* a, \qquad a \in L^*. \tag{8.14}$$

Имеем

$$\frac{\partial h}{\partial a} = u_1 e_1 + u_2 e_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in L.$$

Учитывая равенство (8.11), получаем

$$\operatorname{ad}\frac{\partial h}{\partial a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому вертикальная часть (8.14) гамильтоновой системы принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot a_1 & \dot a_2 & \dot a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3u_2 & a_3u_1 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\dot a_1 = -a_3u_2,$$
$$\dot a_2 = a_3u_1,$$
$$\dot a_3 = 0.$$

Рассмотрим анормальный случай: $\nu = 0$. Из условия максимума ПМП

$$h_u^0(a) = u_1a_1 + u_2a_2 \to \max_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2}$$

заключаем, что $a_1 = a_2 = 0$, поэтому $a_3 \neq 0$. Тогда из гамильтоновой системы получаем

$$\dot a_1 = -a_3u_2 \equiv 0,$$
$$\dot a_2 = a_3u_1 \equiv 0,$$

откуда получаем оптимальные управления $u_1 = u_2 \equiv 0$. Тогда горизонтальная часть гамильтоновой системы

$$\dot X = X\frac{\partial h}{\partial a} = X(u_1e_1 + u_2e_2)$$

дает $X \equiv X_0$. Поэтому непостоянных анормальных оптимальных траекторий не существует.

В нормальном случае $\nu = -1$ из условия максимума

$$h_u^{-1}(a) = u_1a_1 + u_2a_2 - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \to \max_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2}$$

следует, что $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$. Поэтому нормальная гамильтонова система принципа максимума имеет следующий вид:

$$\dot a_1 = -a_3a_2,$$
$$\dot a_2 = a_3a_1,$$
$$\dot a_3 = 0,$$
$$\dot X = X(a_1e_1 + a_2e_2).$$

Легко видеть, что эта система имеет первый интеграл $a_1^2 + a_2^2 \equiv \mathrm{const}$ так как

$$(a_1^2 + a_2^2)^{\cdot} = 2a_1(-a_3a_2) + 2a_2a_3a_1 = 0.$$

Поэтому удобно перейти в полярные координаты

$$a_1 = r\cos\theta, \qquad a_2 = r\sin\theta,$$

в которых вертикальная часть гамильтоновой системы принимает форму

$$\dot r = 0,$$
$$\dot\theta = a_3,$$
$$\dot a_3 = 0.$$

Теперь вертикальная подсистема мгновенно интегрируется:

$$\theta = \theta_0 + a_3t,$$
$$a_1 = r\cos(\theta_0 + a_3t),$$
$$a_2 = r\sin(\theta_0 + a_3t).$$

Перепишем горизонтальную подсистему как

$$\begin{pmatrix} 0 & \dot{x} & \dot{z} \\ 0 & 0 & \dot{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & xa_2 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$\dot{x} = a_1,$$
$$\dot{y} = a_2,$$
$$\dot{z} = xa_2.$$

В силу левоинвариантности задачи можно ограничиться траекториями, выходящими из единицы: $X(0) = X_0 = \mathrm{Id}$, т.е.

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

Рассмотрим сначала случай $a_3 = 0$. Тогда

$$x = \int_0^t r\cos\theta_0\,dt = tr\cos\theta_0,$$

$$y = \int_0^t r\sin\theta_0\,dt = tr\sin\theta_0,$$

$$z = \int_0^t tr^2\cos\theta_0\sin\theta_0\,dt = \frac{t^2}{2}r^2\cos\theta_0\sin\theta_0.$$

Если же $a_3 \neq 0$, то

$$x = \int_0^t r\cos(\theta_0 + a_3t)\,dt = \frac{r}{a_3}(\sin(\theta_0 + a_3t) - \sin\theta_0),$$

$$y = \int_0^t r\sin(\theta_0 + a_3t)\,dt = \frac{r}{a_3}(\cos\theta_0 - \cos(\theta_0 + a_3t)),$$

$$z = \int_0^t \frac{r}{a_3}(\sin(\theta_0 + a_3t) - \sin\theta_0)r\sin(\theta_0 + a_3t) =$$
$$= \frac{r^2}{a_3}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2(\theta_0 + a_3t)) - \sin 2\theta_0}{4a_3} + \frac{\sin\theta_0}{a_3}(\cos(\theta_0 + a_3t) - \cos\theta_0)\right).$$

Если $a_3 = 0$, то проекции экстремальных траекторий $X(t)$ на плоскость (x, y) суть прямые линии, поэтому все траектории $X(t)$, $t \in [0, +\infty)$ оптимальны.

Если же $a_3 \neq 0$, то такие проекции являются дугами окружностей. Можно показать, что эти дуги оптимальны вплоть до первого полного оборота: $X(t)$, $t \in [0, 2\pi/|a_3|]$.

Мы нашли решения задачи минимизации

$$\int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x} + \dot{y}}\,dt \to \min$$

вдоль плоских липшицевых кривых $(x(t), y(t))$ при граничных условиях

$$(x, y, z)(0) = (x_0, y_0, z_0), \qquad (x, y, z)(t_1) = (x_1, y_1, z_1),$$

где

$$z(t) = \int x\,dy$$

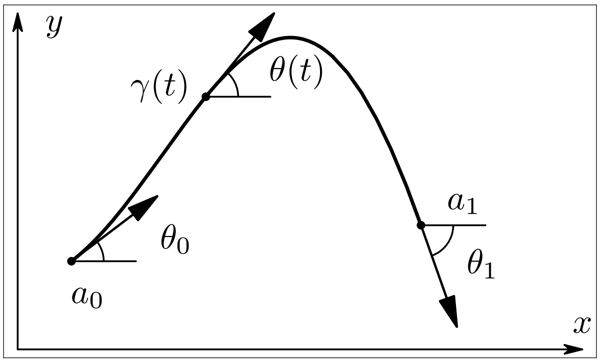

Рис. 6. Задача Эйлера об эластиках

есть алгебраическая площадь области на плоскости (x, y), ограниченной кривой $(x(t), y(t))$, осью y, и прямой, перпендикулярной этой оси.

Эту задачу можно геометрически сформулировать следующим образом. Для заданных двух точек (x_0, y_0), (x_1, y_1), плоской кривой γ_0, соединяющей (x_1, y_1) с (x_0, y_0), и числа $S = z_1 - z_0$, требуется отыскать такую плоскую кривую γ, соединяющую (x_0, y_0) с (x_1, y_1), чтобы область, ограниченная γ и γ_0, имела алгебраическую площадь S, и чтобы γ была кратчайшей из всех возможных кривых. Это — одна из древних задач на минимум, известная как задача Дидоны, она восходит к IX веку до н.э. [35].

8.4. Задача Эйлера об эластиках. Теперь рассмотрим задачу, изученную впервые Л.Эйлером в 1744 г. [3].

Пусть даны две точки $a_0 = (x_0, y_0)$, $a_1 = (x_1, y_1)$ на плоскости и два единичных вектора v_0, v_1, $|v_0| = |v_1| = 1$, приложенных соответственно в этих точках. Требуется определить форму упругого стержня с фиксированными концами a_0, a_1 и фиксированными касательными v_0, v_1 в этих концах.

Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, t_1]$, есть натуральная параметризация упругого стержня, где t_1 — его длина, предполагаемая заданной. Пусть $\theta(t)$ есть угол между вектором скорости $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ и положительным направлением оси x, см. рис. 6.

Тогда задача об эластиках ставится следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \cos\theta, \\
&\dot{y} = \sin\theta, \\
&\dot{\theta} = u, \\
&(x, y, \theta)(0) = (x_0, y_0, \theta_0), \qquad (x, y, \theta)(t_1) = (x_1, y_1, \theta_1),
\end{aligned}$$

где $v_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, $v_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$. Упругая энергия стержня измеряется интегралом

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} k^2\, dt \to \min,$$

где k — кривизна стержня. Для натурально параметризованной кривой кривизна, с точностью до знака, равна угловой скорости, поэтому $k^2 = \dot{\theta}^2 = u^2$, откуда получаем функционал качества для задачи оптимального управления:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2\, dt \to \min.$$

Эта задача имеет очевидные симметрии — параллельные переносы и повороты на плоскости (x, y). Поэтому естественно ожидать, что она может быть сформулирована как инвариантная задача на евклидовой группе $\mathrm{E}(2)$. Действительно, пространство состояний управляемой системы есть

$$G = \mathrm{E}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \theta \in S^1 \right\}.$$

Далее, динамика системы записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot X = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin\theta\, u & -\cos\theta\, u & \cos\theta \\ \cos\theta\, u & -\sin\theta\, u & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -u & 1 \\ u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Алгебра Ли евклидовой группы есть

$$L = \mathrm{e}(2) = \operatorname{span}(\underbrace{E_{21} - E_{12}}_{e_1}, \underbrace{E_{13}}_{e_2}, \underbrace{E_{23}}_{e_3}).$$

Поэтому задача об эластиках левоинвариантна:

$$\begin{aligned} &\dot X = X(e_2 + u e_1), \qquad u \in \mathbb{R}, \quad X \in G, \\ &X(0) = X_0, \quad X(t_1) = X_1, \\ &J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2\, dt \to \min. \end{aligned}$$

Таблица умножения в $\mathrm{e}(2)$ была вычислена выше, см. (6.7):

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = -e_2, \qquad [e_2, e_3] = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ad} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{ad} e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

$$\operatorname{ad} e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.16}$$

Выберем двойственный базис в сопряженном пространстве к алгебре Ли:

$$L^* = \operatorname{span}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \qquad \langle \omega_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

и запишем элементы алгебры Ли как векторы-столбцы

$$L \ni A = \sum_{i=1}^{3} A_i e_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

а элементы двойственного пространства как векторы-строки:

$$L^* \ni a = \sum_{i=1}^{3} a_i \omega_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Управляемость. Система $\Gamma = e_2 + \mathbb{R} e_1 \subset L$ управляема на $G = \mathrm{E}(2)$ по теореме 6.8.

Найдем экстремальные траектории. Гамильтониан принципа максимума имеет вид

$$h_u^\nu(a) = \langle a, e_2 + u e_1 \rangle + \frac{\nu}{2} u^2, \qquad a \in L^*, \quad u, \nu \in \mathbb{R}.$$

Поэтому $\dfrac{\partial h}{\partial a} = e_2 + ue_1$, а ввиду (8.15), (8.16)

$$\operatorname{ad} \frac{\partial h}{\partial a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u \\ -1 & u & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, гамильтонова система (7.10) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot a_1 &= -a_3, & \dot x &= \cos\theta, \\ \dot a_2 &= ua_3, & \dot y &= \sin\theta, \\ \dot a_3 &= -ua_2, & \dot\theta &= u. \end{aligned}$$

В анормальном случае $\nu = 0$, и из условия максимума

$$h_u^0(a) = a_2 + ua_1 \to \max_{u\in\mathbb{R}}$$

получаем $a_1(t) \equiv 0$. Тогда вертикальная подсистема принимает форму

$$\begin{aligned} \dot a_1 &= 0 = -a_3, \\ \dot a_2 &= ua_3 = 0, \\ \dot a_3 &= 0 = -ua_2. \end{aligned}$$

Имеем $a_1 = a_3 \equiv 0$, поэтому $a_2 \equiv \mathrm{const} \neq 0$ и $u \equiv 0$. Отметим, что это — *особое управление*, т.е. оно не определяется непосредственно условием максимума ПМП. Проинтегрируем горизонтальную подсистему:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0, \\ x &= t\cos\theta_0, \\ y &= t\sin\theta_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим нормальный случай: $\nu = -1$,

$$h_u^{-1}(a) = a_2 + ua_1 - \frac{1}{2}u^2 \to \max_{u\in\mathbb{R}},$$

откуда $u = a_1$. Поэтому вертикальная подсистема принимает форму

$$\begin{aligned} \dot a_1 &= -a_3, \\ \dot a_2 &= a_1a_3, \\ \dot a_3 &= -a_1a_2. \end{aligned}$$

Учитывая первый интеграл $a_2^2 + a_3^2 \equiv \mathrm{const}$, переходим в полярные координаты:

$$a_2 = r\cos\alpha, \qquad a_3 = r\sin\alpha.$$

Вертикальная подсистема упрощается:

$$\begin{aligned} \dot r &= 0, \\ \dot\alpha &= -a_1, \\ \dot a_1 &= -r\sin\alpha. \end{aligned}$$

Угол α удовлетворяет уравнению математического маятника $\ddot\alpha = r\sin\alpha$. Далее, $\dot\theta = u = a_1 = -\dot\alpha$, поэтому $\theta = \beta - \alpha$, $\beta = \mathrm{const}$. Наконец, угол θ удовлетворяет уравнению $\ddot\theta = -r\sin(\theta - \gamma)$, $\gamma = \beta + \pi = \mathrm{const}$, и мы получаем следующую замкнутую систему для оптимальных траекторий:

$$\begin{aligned} \dot x &= \cos\theta, \\ \dot y &= \sin\theta, \\ \ddot\theta &= -r\sin(\theta - \gamma), \qquad r,\ \gamma = \mathrm{const}. \end{aligned}$$

Если $r = 0$, то $\theta = \theta_0 + t\dot\theta_0$, и *эйлеровы эластики*, т.е. оптимальные кривые $(x(t), y(t))$, те же, что и в субримановой задаче на группе Гейзенберга — прямые и окружности.

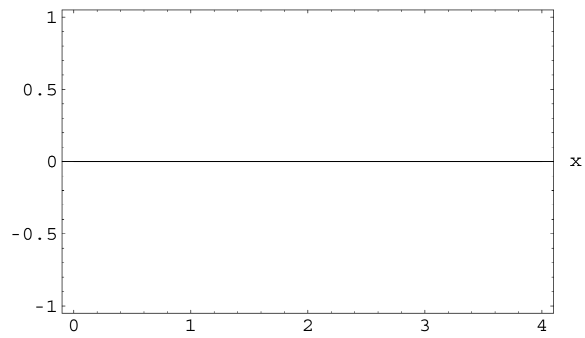

Рис. 7. $E = -1$

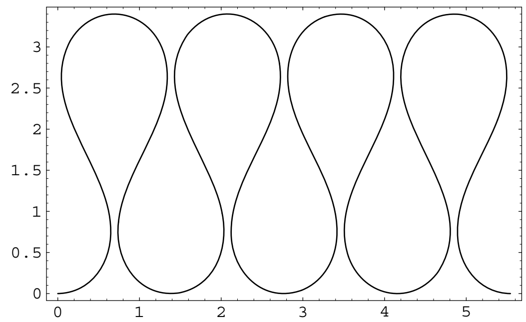

Рис. 8. $E \in (-1, 1)$

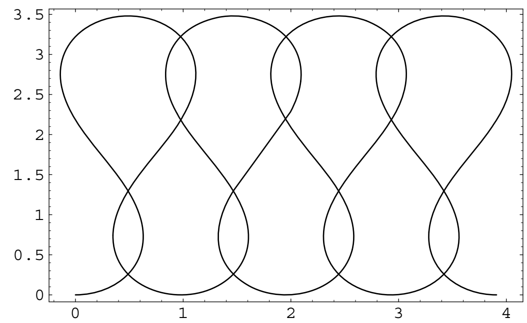

Рис. 9. $E \in (-1, 1)$

Пусть $r > 0$. Используя гомотетии плоскости (x, y), получаем $r = 1$, а с помощью вращений этой плоскости имеем $\gamma = 0$. Тогда угол θ удовлетворяет стандартному уравнению математического маятника $\ddot{\theta} = -\sin\theta$, т.е.

$$\dot{\theta} = c,$$
$$\dot{c} = -\sin\theta.$$

Здесь c — кривизна эйлеровой эластики. Различные качественные типы решений уравнения маятника зависят от значений энергии маятника

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos\theta \in [-1, +\infty).$$

Возможны следующие случаи:

(1) $E = -1$,
(2) $E \in (-1, 1)$,
(3a) $E = 1$, $\theta \neq \pm\pi$,
(3b) $E = 1$, $\theta = \pm\pi$,
(4) $E \in (1, +\infty)$.

Известно, что уравнение математического маятника интегрируемо в функциях Якоби [26]. Можно показать, что уравнения для эластик также интегрируемы в функциях Якоби, и возможны следующие качественные типы эластик:

(1) прямая, рис. 7,
(2) инфлексионные эластики, рис. 8–11,
(3a) критическая эластика, рис. 12,
(3b) прямая, рис. 13,
(4) неинфлексионные эластики, рис. 14–15,
(5) $r = 0 \quad \Rightarrow \quad$ окружности, рис. 16, и прямые.

Детальное исследование оптимальности эйлеровых эластик проведено в работе [42].

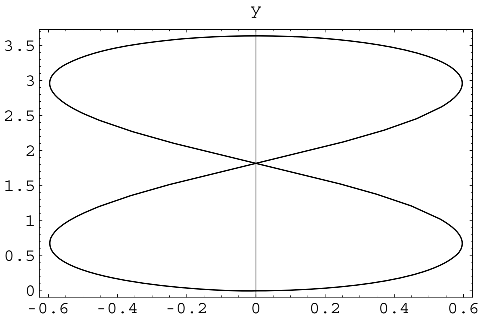

Рис. 10. $E \in (-1, 1)$

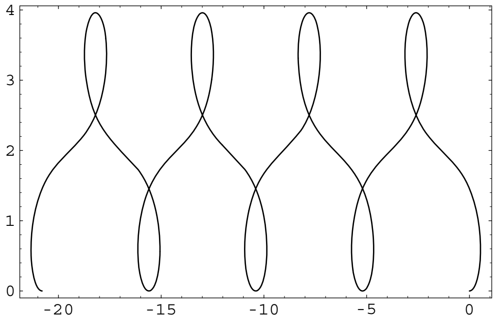

Рис. 11. $E \in (-1, 1)$

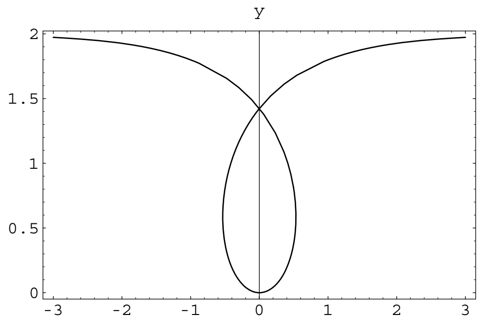

Рис. 12. $E = 1$, $\theta \neq \pi$

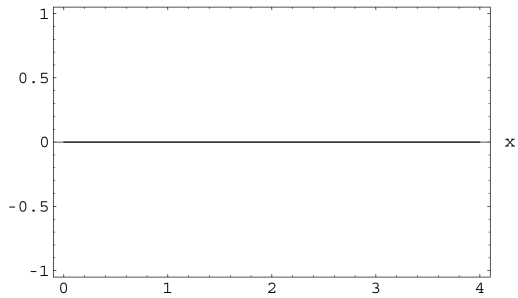

Рис. 13. $E = 1$, $\theta = \pi$

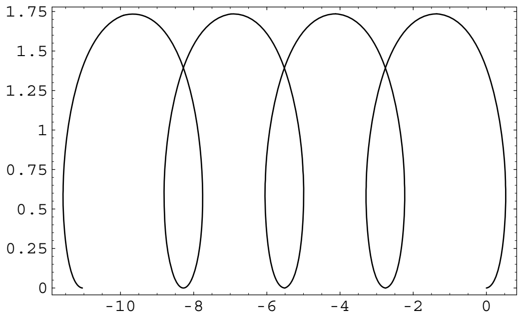

Рис. 14. $E \in (1, +\infty)$

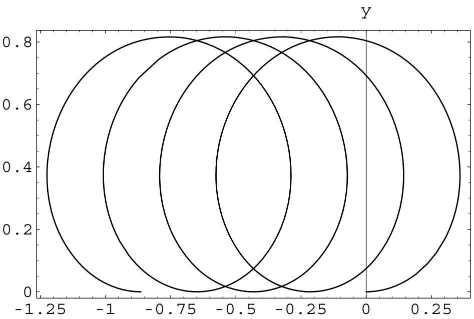

Рис. 15. $E \in (1, +\infty)$

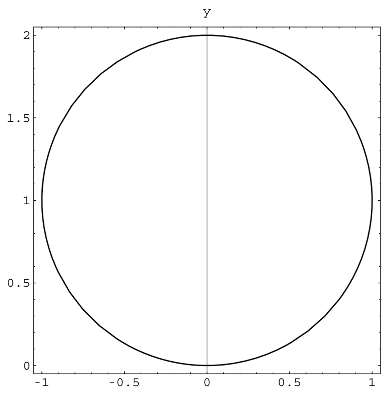

Рис. 16. $r = 0$

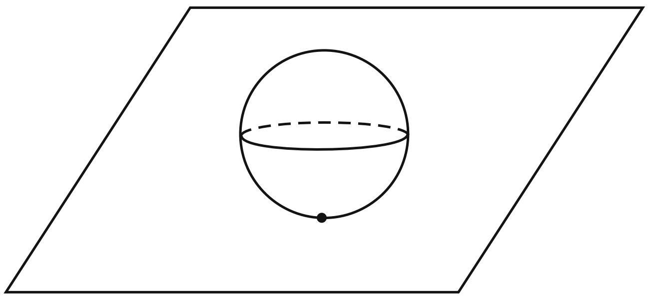

Рис. 17. Катящаяся сфера

8.5. Задача о качении сферы по плоскости. Рассмотрим единичную двумерную сферу, катящуюся по горизонтальной двумерной плоскости без прокручивания и проскальзывания, см. рис. 17. При заданных начальной и конечной касательных конфигурациях сферы и плоскости, задача состоит в том, чтобы прокатить сферу из первой конфигурации во вторую так, чтобы кривая на плоскости, прочерченная точкой контакта, была кратчайшей.

Зафиксируем такой ортонормированный репер (e_1, e_2, e_3) в $\mathbb{R}^3$, чтобы плоскость была натянута на e_1, e_2, а вектор e_3 был направлен вверх (в полупространство, содержащее сферу). Вдобавок выберем ортонормированный репер (f_1, f_2, f_3) , закрепленный в сфере. Ориентация сферы в пространстве задается матрицей ориентации

$$R \,:\, (e_1, e_2, e_3) \mapsto (f_1, f_2, f_3), \qquad R \in \mathrm{SO}(3),$$

а положение точки контакта сферы с плоскостью задается ее координатами (x, y) на плоскости, соответствующими реперу (e_1, e_2). Тогда состояние системы задается набором

$$X = (R, x, y) \in \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^2.$$

Начальное и конечное состояния фиксированы:

$$X(0) = X_0, \qquad X(t_1) = X_1,$$

а функционал качества есть

$$l = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \to \min .$$

Более того, несложно показать, что динамика системы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = u_1, \\ &\dot{y} = u_2, \\ &\dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первые два уравнения означают, что точка контакта (x, y) двигается в плоскости с произвольной скоростью (u_1, u_2), а третье уравнение означает, что угловая скорость катящейся сферы горизонтальна и перпендикулярна вектору (u_1, u_2), см. подробности в книге [22].

Состояние X можно задать одной 6×6 матрицей

$$X = \begin{pmatrix} R & 0 \\ & \begin{matrix} 1 & 0 & x \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

обозначим через G группу Ли всех таких матриц для всех $R \in \mathrm{SO}(3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тогда динамика системы принимает следующую левоинвариантную форму:

$$\begin{aligned}\dot X &= \begin{pmatrix} \dot R & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & \dot x \\ 0 & 0 & \dot y \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то есть

$$\dot X = X(u_1(E_{31} - E_{13} + E_{46}) + u_2(E_{32} - E_{23} + E_{56})), \quad X \in G, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Алгебра Ли этой группы Ли G есть

$$L = \mathrm{span}(\underbrace{E_{32} - E_{23}}_{e_1}, \underbrace{E_{13} - E_{31}}_{e_2}, \underbrace{E_{21} - E_{12}}_{e_3}, \underbrace{E_{46}}_{e_4}, \underbrace{E_{56}}_{e_5}),$$

с таблицей умножения, унаследованной из $\mathrm{so}(3)$:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2, \quad \mathrm{ad}\, e_4 = \mathrm{ad}\, e_5 = 0. \tag{8.17}$$

Ненулевые присоединенные операторы имеют вид:

$$\mathrm{ad}\, e_1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}\, e_2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

$$\mathrm{ad}\, e_3 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.19}$$

Как обычно, выберем двойственный базис в сопряженном пространстве к алгебре Ли:

$$L^* = \mathrm{span}(\omega_1, \dots, \omega_5), \qquad \langle \omega_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,\ j = 1, \dots, 5,$$

запишем элементы алгебры Ли как векторы-столбцы:

$$L \ni A = \sum_{i=1}^{5} A_i e_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_5 \end{pmatrix},$$

а элементы сопряженного пространства как векторы-строки:

$$L^* \ni a = \sum_{i=1}^{5} a_i \omega_i = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_5 \end{pmatrix}.$$

Исследуем задачу оптимального управления для сферы на плоскости:

$$
\begin{aligned}
&\dot X = X(u_1(e_4 - e_2) + u_2(e_5 + e_1)), \qquad X \in G, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\\
&X(0) = X_0, \qquad X(t_1) = X_1,\\
&J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) \to \min,
\end{aligned}
$$

заметим, что, как обычно, мы заменяем функционал l на J.

Управляемость: из правил умножения (8.17) следует, что управляемая система имеет полный ранг. Так как она симметрична, а G связна, делаем вывод об управляемости.

Существование оптимальных управлений следует из теоремы Филиппова.

Гамильтониан принципа максимума имеет вид

$$
h_u^\nu(a) = \langle a, u_1(e_4 - e_2) + u_2(e_5 + e_1)\rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2),
$$

тогда

$$
\frac{\partial h}{\partial a} = u_1(e_4 - e_2) + u_2(e_5 + e_1),
$$

и из (8.17), (8.18), (8.19) заключаем, что

$$
\operatorname{ad}\frac{\partial h}{\partial a} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Поэтому вертикальная подсистема принципа максимума имеет вид

$$
\begin{pmatrix} \dot a_1 & \dot a_2 & \dot a_3 & \dot a_4 & \dot a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Итак, полная гамильтонова система принципа максимума принимает форму:

$$
\begin{aligned}
&\dot a_1 = u_1 a_3, && \dot x = u_1,\\
&\dot a_2 = u_2 a_3, && \dot y = u_2,\\
&\dot a_3 = -u_1 a_1 - u_2 a_2, &&\\
&\dot a_4 = \dot a_5 = 0, && \dot R = R\begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим сначала анормальный случай, $\nu = 0$. Тогда

$$
h_u^0(a) = u_1(a_4 - a_2) + u_2(a_5 + a_1) \to \max_{(u_1,u_2)} \in \mathbb{R}^2,
$$

откуда $a_4 - a_2 \equiv 0$, $a_5 + a_1 \equiv 0$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -a_5 \equiv \mathrm{const},\\
a_2 &= a_4 \equiv \mathrm{const},\\
\dot a_1 &= 0 = u_1 a_3,\\
\dot a_2 &= 0 = u_2 a_3.
\end{aligned}
$$

Но непостоянные экстремальные кривые функционала J удовлетворяют тождеству $u_1^2 + u_2^2 \equiv \mathrm{const} \neq 0$, поэтому $a_3 = 0$. Наконец,

$$
\dot a_3 = 0 = -u_1 a_1 - u_2 a_2.
$$

Тогда оптимальные анормальные управления (u_1, u_2) постоянны, соответствующая линия (x, y) — прямая, а матрица ориентации равна

$$R(t) = R_0 \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & -u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь переходим к нормальному случаю, $\nu = -1$. Тогда

$$h_u^{-1}(a) = u_1(a_4 - a_2) + u_2(a_5 + a_1) - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \to \max_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2},$$

откуда

$$u_1 = a_4 - a_2, \qquad u_2 = a_5 + a_1.$$

Для этих управлений вертикальная подсистема гамильтоновой системы принципа максимума принимает форму

$$\begin{aligned} \dot a_1 &= (a_4 - a_2)a_3, \\ \dot a_2 &= (a_5 + a_1)a_3, \\ \dot a_3 &= -(a_4 - a_2)a_1 - (a_5 + a_1)a_2, \\ \dot a_4 &= \dot a_5 = 0. \end{aligned}$$

Введем переменные

$$\begin{aligned} b_1 &= a_4 - a_2 = u_1, \\ b_2 &= a_5 + a_1 = u_2, \\ b_3 &= a_3, \end{aligned}$$

тогда приведенная выше система сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \dot b_1 &= -b_2 b_3, \\ \dot b_2 &= b_1 b_3, \\ \dot b_3 &= a_5 b_1 - a_4 b_2. \end{aligned}$$

Эта система имеет первый интеграл $b_1^2 + b_2^2 \equiv \mathrm{const}$, который можно положить равным 1 в силу однородности системы. Переходим в полярные координаты

$$\begin{aligned} b_1 &= \cos\theta, & a_4 &= r\cos\varphi, \\ b_2 &= \sin\theta, & a_5 &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \dot\theta &= b_3, \\ \dot b_3 &= r\sin(\varphi - \theta), \end{aligned}$$

то есть угол θ удовлетворяет уравнению маятника

$$\ddot\theta = -r\sin(\theta - \varphi).$$

Координаты точки контакта удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot x &= u_1 = b_1 = \cos\theta, \\ \dot y &= u_2 = b_2 = \sin\theta. \end{aligned}$$

Получен замечательный результат: точка контакта оптимально катящейся сферы вычерчивает эйлеровы эластики!

Описание эволюции соответствующей матрицы ориентации $R(t)$ можно найти в книге [22].

Замечания о библиографии

Библиография содержит ссылки нескольких видов:

(1) учебники по теории управления [1,4,22], субримановой геометрии [35], неголономной динамике [2], дифференциальной геометрии и группам Ли [49],
(2) работы по управляемости инвариантных систем на группах Ли [10–13,19–21,23–25,27–29, 37–40,44–48], включая обзор на эту тему [5],
(3) статьи по оптимальному управлению для инвариантных систем на группах Ли [6–9,18,30–33,36,41,42],
(4) другие работы, цитированные в этих лекциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
2. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы и геометрия распределений// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1986. — Динамические системы–7, 8.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961.
5. *Сачков Ю. Л.* Управляемость инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах// Совр. мат. прилож. Тематические обзоры. — М.: ВИНИТИ, 1998. — *59*. — Динамические системы–8. `http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/public.html`
6. *Сачков Ю. Л.* Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 9. — С. 63–90.
7. *Сачков Ю. Л.* Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 2. — С. 95–116.
8. *Сачков Ю. Л.* Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 4. — С. 123–150.
9. *Сачков Ю. Л.* Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 6. — С. 111–160.
10. *El Assoudi R., Gauthier J.-P., Kupka I.* On subsemigroups of semisimple Lie groups// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1996. — *13*, № 1. — С. 117–133.
11. *Ayala Bravo V.* Controllability of nilpotent systems// In: Geometry in nonlinear control and differential inclusions. — Warszawa: Banach Center Publications, 1995. — *32*. — С. 35–46.
12. *Bonnard B.* Contrôllabilité des systèmes bilinéaires// Math. Syst. Theory. — 1981. — *15*. — С. 79–92.
13. *Bonnard B., Jurdjevic V., Kupka I., Sallet G.* Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products of Lie groups// Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — *271*, № 2. — С. 525–535.
14. *Boothby W.* A transitivity problem from control theory// J. Differ. Equat. — 1975. — *17*. — С. 296–307.
15. *Boothby W., Wilson E. N.* Determination of the transitivity of bilinear systems// SIAM J. Control. — 1979. — *17*. — С. 212–221.
16. *Borel A.* Some remarks about transformation groups transitive on spheres and tori// Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — *55*. — С. 580–586.
17. *Borel A.* Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1950. — *230*. — С. 1378–1380.
18. *Boscain U., Chambrion T., Gauthier J.-P.* On the $K+P$ problem for a three-level quantum system: Optimality implies resonance// J. Dynam. Control Systems. — 2002. — *8*. — С. 547–572.
19. *Brockett R. W.* System theory on group manifolds and coset spaces// SIAM J. Control. — 1972. — *10*. — С. 265–284.
20. *Gauthier J.-P., Bornard G.* Contrôlabilité des systèmes bilinèaires// SIAM J. Control Optim. — 1982. — *20*, № 3. — С. 377–384.
21. *Hilgert J., Hofmann K. H., Lawson J. D.* Controllability of systems on a nilpotent Lie group// Beiträge Algebra Geom. — 1985. — *20*. — С. 185–190.
22. *Jurdjevic V.* Geometric control theory. — Cambridge Univ. Press, 1997.
23. *Jurdjevic V., Kupka I.* Control systems subordinated to a group action: Accessibility// J. Differ. Equat. — 1981. — *39*. — С. 186–211.
24. *Jurdjevic V., Kupka I.* Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces// Ann. Inst. Fourier. — 1981. — *31*, № 4. — С. 151–179.
25. *Jurdjevic V., Sussmann H.* Control systems on Lie groups// J. Differ. Equat. — 1972. — *12*. — С. 313–329.

26. *Lawden D. F.* Elliptic functions and applications. — Springer-Verlag, 1980.
27. *Lawson J. D.* Maximal subsemigroups of Lie groups that are total// Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1985. — *30*. — C. 479–501.
28. *Mittenhuber D.* Controllability of solvable Lie algebras// J. Dynam. Control Systems. — 2000. — *6*, № 3. — C. 453–459.
29. *Mittenhuber D.* Controllability of systems on solvable Lie groups: the generic case// J. Dynam. Control Systems. — 2001. — *7*, № 1. — C. 61–75.
30. *Monroy-Pérez F.* Non-Euclidean Dubins problem// J. Dynam. Control Systems. — 1998. — *4*, № 2. — C. 249–272.
31. *Monroy-Pérez F., Anzaldo-Meneses A.* Optimal control on the Heisenberg group// J. Dynam. Control Systems. — 1999. — *5*, No 4. — C. 473–499.
32. *Monroy-Pérez F., Anzaldo-Meneses A.* Optimal control on nilpotent Lie groups// J. Dynam. Control Systems. — 2002. — *8*, № 4. — C. 487–504.
33. *Monroy-Pérez F., Anzaldo-Meneses A.* The step-2 nilpotent $(n, n(n+1)/2)$ sub-Riemannian geometry// J. Dynam. Control Systems. — 2006. — *12*, № 2. — C. 185–216.
34. *Montgomery D., Samelson H.* Transformation groups of spheres// Ann. Math. — 1943. — *44*. — C. 454–470.
35. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. — Amer. Math. Soc., 2002.
36. *Myasnichenko O.* Nilpotent $(3, 6)$ sub-Riemannian problem// J. Dynam. Control Systems. — 2002. — *8*, № 4. — C. 573–597.
37. *Sachkov Yu. L.* Controllability of hypersurface and solvable invariant systems// J. Dynam. Control Systems. — 1996. — *2*, № 1. — C. 55–67.
38. *Sachkov Yu. L.* Controllability of right-invariant systems on solvable Lie groups// J. Dynam. Control Systems. — 1997. — *3*, № 4. — C. 531–564.
39. *Sachkov Yu. L.* On invariant orthants of bilinear systems// J. Dynam. Control Systems. — 1998. — *4*, № 1. — C. 137–147.
40. *Sachkov Yu. L.* Classification of controllable systems on low-dimensional solvable Lie groups// J. Dynam. Control Systems. — 2000. — *6*, № 2. — C. 159–217.
41. *Sachkov Yu. L.* Symmetries of flat rank two distributions and sub-Riemannian structures// Trans. Amer. Math. Soc. — 2004. — *356*, № 2, — C. 457–494.
42. *Sachkov Yu. L.* Maxwell strata in Euler's elastic problem// (в печати).
43. *Samelson H.* Topology of Lie groups// Bull. Amer. Math. Soc. — 1952. — *58*. — C. 2–37.
44. *San Martin L. A. B.* Invariant control sets on flag manifolds// Math. Control Signal Systems. — 1993. — *6*. — C. 41–61.
45. *San Martin L. A. B., do Rocio O. G., Santana A. J.* Invariant cones and convex sets for bilinear control systems and parabolic type of semigroups// J. Dynam. Control Systems. — 2006. — *12*. — C. 419–432.
46. *San Martin L. A. B., Tonelli P. A.* Semigroup actions on homogeneous spaces// Semigroup Forum. — 1994. — *14*. — C. 1–30.
47. *Silva Leite F., Crouch P.* Controllability on classical Lie groups// Math. Control Signal Systems. — 1988. — *1*. — C. 31–42.
48. *Troncoso R. M. M.* Regular elements and global controllability in $\mathrm{SL}(d, R)$// J. Dynam. Control Systems. — 2004. — *10*, № 1. — C. 29–54.
49. *Warner F. W.* Foundations of differentiable manifolds and Lie groups// Glenview, Ill.: Scott, Foresman, 1971.

Юрий Леонидович Сачков
Институт программных систем РАН
Переславль-Залесский, Россия
E-mail: sachkov@sys.botik.ru