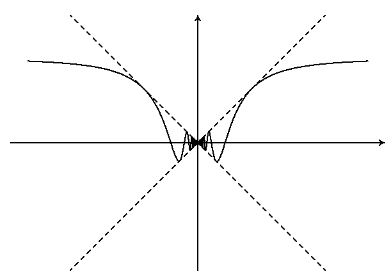
Ю. Л. Сачков Е. Ф. Сачкова

Пределы последовательностей и функций.

Бесконечно малые

Методическое пособие



Переславль-Залесский 2002 г.

Методическое пособие написано на основе курса математического анализа, который авторы ведут в течение ряда лет в Университете города Переславля (специальность "Прикладная математика и информатика").

Пособие содержит: теоретические сведения (определения, теоремы), описание приемов решения задач, примеры типовых задач с подробными решениями (около 40), задачи для решения в классе и дома (более 320). Большинство задач заимствовано из известных задачников и учебников [1]–[5], [7]–[10], часть задач составлена авторами.

Пособие может использоваться для практических занятий по теме "Пределы" в курсе математического анализа для студентов университетов и технических вузов по специальности "Прикладная математика".

Жили вятские мужики плохо, но этого не знали ... И думали, что живут хорошо, не хуже других.

В. Крупин (XX в. н.э.) "Живая вода"[1]

Вместе все вещи были беспредельные и по множеству и по малости. Ведь и малое было беспредельным. И когда все [вещи] были вместе, ничто не было различимо из-за малости, потому что все наполнял эфир и воздух, оба беспредельные: ведь в общей совокупности они самые большие как по количеству, так и по величине.
И [о том], что в первоначалах нет ни наималейшего, ни наибольшего, он говорит [следующее]: "И у малого ведь нет ... и мала". Ибо если все во всем и все из всего выделяется, то из того, что считается наименьшим, выделится еще меньшее, а то, что считают наибольшим, выделится из большего, чем оно.

Анаксагор (V в. до н.э.) Из комментария Симпликия к "Физике" Аристотеля[2]

... достаточно объяснить ... бесконечное через несравнимое, другими словами, достаточно представить себе величины, несравненно большие или меньшие, чем наши. Это даст сколько угодно порядков несравнимых, поскольку то, что несравненно меньше, бесполезно принимать в расчет по сравнению с тем, что несравненно больше его. Так, частица магнетической материи, проходящая через стекло, несравнима с песчинкой, а эта песчинка с земным шаром, а этот шар с небосводом.

Г.В. Лейбниц. Из письма к П. Вариньону от 2 февраля 1702 г.[2]

Предел (матем.) Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой ее не предположить ... таким образом, разность между такой величиной и ее пределом абсолютно неопределима ...

Ж. Даламбер (1765). Из "Энциклопедии" Д. Дидро[2]

[1]Цитируется по [6]
[2]Цитируется по [11]

Содержание

1 Числовая последовательность и ее предел

Цель: Знакомство с понятием последовательности и ее свойствами. Освоение понятия предела последовательности, способов вычисления простых пределов.

План

1. Числовая последовательность и и ее свойства: ограниченность и монотонность.
2. Предел последовательности и его свойства. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.
3. Вычисление предела рациональных последовательностей и некоторых других последовательностей типа $\frac{\infty}{\infty}$.

1.1 Числовая последовательность и ее свойства

1.1.1 Понятие числовой последовательности

Числовое множество, элементы которого занумерованы натуральными числами $1,\ 2,\ \ldots,\ n, \ldots$, называется *числовой последовательностью*:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \ldots\ .$$

Вся последовательность в целом обозначается символом $\{x_n\}$, при этом x_n называется *общим членом* этой последовательности. Числа, образующие последовательность, называются ее элементами или членами. Например, арифметическая прогрессия

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + d, \quad x_3 = a + 2d, \quad \ldots, \quad x_n = a + d(n-1), \quad \ldots$$

и геометрическая прогрессия

$$x_1 = b, \quad x_2 = bq, \quad x_3 = bq^2, \quad \ldots, \quad x_n = bq^{n-1}, \quad \ldots,$$

являются числовыми последовательностями.

Можно сказать, что последовательность — это функция натурального аргумента, т.е. функция, область определения которой — множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$.

Пример 1. 1. Написать первые пять членов последовательности:

$$x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Решение. Последовательно подставляем числа $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в формулу общего члена:

$$n = 1: \qquad x_1 = 1 + (-1)^1 \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0,$$

$$n = 2: \qquad x_2 = 1 + (-1)^2 \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

и так далее:

$$n = 3: \qquad x_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$n = 4: \qquad x_4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$n = 5: \qquad x_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Ответ. $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}$.

Пример 1. 2. Написать формулу общего члена последовательности:

$$1, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{1}{16}, \ \dots \ .$$

Решение. Замечаем закономерность: знаменатели дробей являются точными квадратами:

$$1 = 1^2, \quad 4 = 2^2, \quad 9 = 3^2, \quad 16 = 4^2.$$

Подчиняясь этой закономерности, следующие члены последовательности должны иметь вид

$$\frac{1}{5^2}, \quad \frac{1}{6^2}, \quad \frac{1}{7^2}, \dots \ .$$

Поэтому общий член последовательности должен выражаться формулой

$$\frac{1}{n^2}.$$

Ответ. $\frac{1}{n^2}$.

1. 1. Написать первые пять членов последовательности:

а) $x_n = \frac{1}{n}$,

б) $x_n = 1 - 2n$,

в) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$,

г) $x_n = 3 \cdot 2^n$,

д) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$,

е) $x_n = (-1)^n$,

ж) $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$,

з) $x_n = \dfrac{1}{n!}$.

1. 2. Написать формулу общего члена последовательности:

а) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{27},\ \dfrac{1}{81},\ \ldots,$

б) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots,$

в) $0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,$

г) $1\ ,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120, \ldots,$

д) $-2,\ 4,\ -6,\ 8, \ldots\ .$

1.1.2 Свойства числовой последовательности

Ограниченность Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если все ее элементы ограничены по модулю некоторым числом M:

$$|x_n| \leqslant M, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ .$$

Пример 1. 3. Установить, является ли последовательность ограниченной:

$$\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \ldots,\ \sin n,\ \ldots\ .$$

Решение. Так как синус — ограниченная функция:

$$|\sin x| \leqslant 1 \text{ при любых } x \in \mathbb{R},$$

то и члены последовательности ограничены по модулю:

$$|\sin n| \leqslant 1 \text{ при любых } n \in \mathbb{N}.$$

Ответ. Последовательность ограничена.

Пример 1.4. Установить, является ли последовательность ограниченной:

$$x_n = n^2 - 1.$$

Решение. Так как элементы последовательности — значения функции $f(x) = x^2 - 1$, неограниченно возрастающей при увеличении x, возникает гипотеза: последовательность неограничена (сверху). Докажем это.

Предположим, от противного, что наша последовательность ограничена сверху, то есть для некоторого $M > 0$

$$n^2 - 1 \leqslant M \text{ при всех } n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$n \leqslant \sqrt{M+1} \text{ при всех } n \in \mathbb{N},$$

что, очевидно, неверно: например,

$$n = M + 1 > \sqrt{M+1} \text{ для любого } M > 0.$$

Итак, наше предположение оказалось неверным, то есть последовательность неограничена.

Ответ. Последовательность неограничена.

1.3. Установить, являются ли следующие последовательности ограниченными:

а) $\left\{\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)\right\}$,

б) $2,\ -4,\ 6,\ -8,\ 10,\ -12, \ldots$,

в) $2,\ 1/2,\ 2,\ 1/2, \ldots$,

г) $1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots$,

д) $1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8, \ldots$,

е) $1,\ 1/2,\ 2,\ 1/3,\ 3,\ 1/4,\ 4, \ldots$,

ж) $\left\{3n^2 - 10n - 14\right\}$.

Монотонность Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*неубывающей*), если каждый ее следующий член больше (не меньше) предыдущего:

$$x_{n+1} > x_n \quad (x_{n+1} \geq x_n), \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \dots\ ,$$

и *убывающей* (*невозрастающей*), если каждый ее следующий член меньше (не больше) предыдущего:

$$x_{n+1} < x_n \quad (x_{n+1} \leqslant x_n), \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \dots\ .$$

Последовательности всех этих четырех типов называются *монотонными*.

Пример 1. 5. Является ли последовательность монотонной:

$$x_n = \frac{1}{2n}.$$

Решение. Для исследования монотонности последовательности x_n обычно изучают знак разности $x_{n+1} - x_n$ или сравнивают отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ с единицей (если $x_n > 0$).

Способ I. Рассмотрим разность двух подряд идущих элементов последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

То есть

$$x_{n+1} < x_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

последовательность убывает.

Способ II. Рассмотрим отношение двух подряд идущих элементов:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{1}{2(n+1)}}{\dfrac{1}{2n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Так как

$$x_n > 0 \text{ при всех } n \in \mathbb{N},$$

то

$$x_{n+1} < x_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

то есть последовательность убывает.

Ответ. Последовательность убывающая.

1. 4. Монотонна ли последовательность:

а) $x_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$,

б) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$,

в) $1,\ 1,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/3, \ldots,\ 1/n,\ 1/n, \ldots$,

г) $x_n = \dfrac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{Z}$,

д) $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a: $[1{,}3] = [1] = 1$, $[-0{,}5] = [-1] = -1$.

1.2 Предел числовой последовательности

1.2.1 Определение предела

Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность и a — некоторое число. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a (или число a является *пределом* последовательности $\{x_n\}$), если элементы x_n отличаются от a на сколь угодно малую величину ε, начиная с достаточно большого номера n:

для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

или

$$x_n \to a \quad \text{при } n \to \infty.$$

Определение предела хорошо разъясняет Р. Курант [8]:

> "Определение предполагает своего рода дискуссию между двумя лицами A и B. A выдвигает требование: заданная величина a должна быть приближена числами x_n так, чтобы ошибка не превышала границы $\varepsilon = \varepsilon_1$; B отвечает на это требование указанием, что существует такое целое $N = N_1$, что все члены x_n, следующие за x_{N_1}, удовлетворяют этому условию. Тогда A становится более требовательным и предлагает новую, меньшую границу $\varepsilon = \varepsilon_2$; B снова встречает это требование подбором некоторого, может быть значительно большего, целого числа $N = N_2$, обладающего аналогичным свойством, и т.д. *Если B может удовлетворить A независимо от того, какую малую границу назначает A, то мы имеем дело с положением, которое кратко выражается соотношением: $x_n \to a$.*"

Пример 1. 6. Пусть
$$x_n = \frac{n}{n+1}.$$
Доказать, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$
определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что
$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N.$$
Найти N для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

Решение. Вычислим в нашем случае величину $|x_n - 1|$, т.е. расстояние от элемента последовательности до предполагаемого предела:
$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$
А затем напишем требуемое неравенство
$$|x_n - 1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$
и постараемся подобрать, для любого фиксированного ε, такой номер $N(\varepsilon)$, после которого это неравенство выполняется.

Начнем с $\varepsilon = 0{,}1$. (Лицо A: "число 1 нужно приблизить с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}1$".) Неравенство
$$\frac{1}{n+1} < 0{,}1$$
т.е.
$$n + 1 > 10$$
выполнено при
$$n > 9,$$
т.е. можно взять
$$N(0{,}1) = 9.$$
(Лицо B: "точность $\varepsilon_1 = 0{,}1$ достигается после $N_1 = 9$".)

Далее, пусть $\varepsilon = 0{,}01$ (лицо A: "требуемая точность $\varepsilon_2 = 0{,}01$"). Имеем неравенство
$$\frac{1}{n+1} < 0{,}01$$
т.е.
$$n + 1 > 100,$$
которое выполнено при
$$n > 99,$$
т.е. подходит
$$N(0{,}01) = 99.$$

(Лицо B: "точность $\varepsilon_2 = 0{,}01$ достигается после $N_2 = 99$".)

Аналогично находим

$$N(0{,}001) = 999.$$

(Точность $\varepsilon_3 = 0{,}01$ достигается после $N_3 = 999$.)

Видно, что с уменьшением точности приближения ε номер, начиная с которого эта точность удовлетворяется, увеличивается. Но главное — что этот номер всегда может быть найден (по крайней мере мы нашли $N(\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001$).

Нужно убедиться, что $N(\varepsilon)$ можно найти для любого $\varepsilon > 0$. Итак, мы должны удовлетворить неравенству

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

то есть

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Это неравенство выполняется, начиная с любого номера

$$N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Например, можно взять

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right],$$

где $[x]$ — это целая часть числа x.

Для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли номер $N(\varepsilon)$, после которого точность ε удовлетворяется:

$$|x_n - 1| < \varepsilon \text{ при } n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right].$$

(Мы молчаливо предполагали, что $\varepsilon < 1$. Для $\varepsilon \geq 1$ требуемое неравенство выполняется всегда, т.е. можно взять $N(\varepsilon) = 1$.)

Это означает, по определению предела последовательности, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

1.2.2 Теоремы о пределах

Предел и арифметические операции Переход к пределу перестановочен с арифметическими операциями: предел суммы равен сумме пределов и т.д.

Теорема 1. *Если существуют* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot x_n) = C\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Ca,$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b,$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\cdot b,$

(4) *Если* $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}.$

Теорема о двух милиционерах

Теорема 2. *Пусть элементы последовательностей x_n, y_n, z_n упорядочены:*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Если при этом верхняя и нижняя последовательности ("милиционеры") сходятся, причем к одному и тому же пределу:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то и средняя последовательность ("нарушитель") сходится к тому же пределу:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

1.2.3 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность x_n называется *бесконечно малой*, если она стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Изучение всех сходящихся последовательностей сводится к изучению бесконечно малых, так как

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0, \qquad y_n = x_n - a.$$

Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если она стремится к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

то есть для любого $M > 0$ существует номер $N = N(M) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|x_n| > M \text{ при всех } n > N.$$

Мы увидим позже (см. раздел 2.3), что изучение бесконечно больших последовательностей в некотором смысле тоже сводится к изучению бесконечно малых.

1. 5. Доказать, что $x_n = \dfrac{1}{n}$ есть бесконечно малая, указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$. Найти N для $\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}001$; $0{,}0001$.

1. 6. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n}$ является бесконечно большой, определив для всякого $M > 0$ число $N(M)$ такое, что $|x_n| > M$ при $n > N$. Найти N для $M = 10$; 100; 1000; 10.000.

1. 7. Доказать по определению, что следующие последовательности являются бесконечно малыми:

а) $x_n = \dfrac{1}{n+1}$,

б) $x_n = \dfrac{1}{n^{1/3}}$,

в) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. 8. Доказать по определению, что следующие последовательности являются бесконечно большими:

а) $x_n = n^3$,

б) $x_n = 2^n$,

в) $x_n = n!$

1.2.4 Вычисление предела рациональной последовательности

В этом разделе мы рассмотрим *рациональные последовательности*, т.е. последовательности вида

$$x_n = \frac{P(n)}{Q(n)},$$

где $P(n)$ и $Q(n)$ — многочлены от переменной n. Пределы таких последовательностей вычисляются делением числителя и знаменателя на максимальную степень n.

Пример 1. 7. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0{,}001n^4 - 100n^3 + 1}.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на максимальную степень переменной, n^4:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1000}{n}+3\dfrac{1}{n^2}}{0{,}001-\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1000}{n}+3\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(0{,}001-\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}3\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}0{,}001-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}}=$$

$$=\frac{0+0}{0{,}001-0+0}=0.$$

Ответ. 0.

1. 9. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

1.2.5 Некоторые пределы других типов

Некоторые пределы последовательностей вида $\dfrac{a_n}{b_n}$, где a_n и b_n — бесконечно большие (неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$), вычисляются приемом, использованным в предыдущем пункте: делением числителя и знаменателя на главную бесконечно большую часть.

Пример 1. 8. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}.$$

Решение. Здесь главной частью, очевидно, является $(n+1)!$, на него и поделим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!}}{\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Ответ. 1.

1.10. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

Пример 1.9. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Решение. Иными словами, требуется доказать, что бесконечно большая 2^n растет быстрее чем n. Для этого оценим сначала 2^n снизу. Используем формулу бинома Ньютона:

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n\cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 1 + \ldots + 1 > \frac{n(n-1)}{2}.$$

Поэтому элементы нашей последовательности можно оценить снизу и сверху:

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}.$$

Но верхняя последовательность бесконечно мала и имеет тот же предел, что и нижняя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0.$$

По теореме о 2-х милиционерах, наша последовательность сходится к тому же пределу:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0,$$

что и требовалось доказать.

1.11. Доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Из результатов двух предыдущих задач следует, что бесконечно большая n стремится к бесконечности медленнее, чем бесконечно большая 2^n, которая, в свою очередь, растет медленнее, чем $n!$. Итак, мы установили следующую "иерархию" бесконечно больших последовательностей:

$$n < 2^n < n! \quad \text{при достаточно больших } n.$$

1.3 Домашнее задание

1.12. Выписать пять первых членов последовательности

$$x_n = \frac{3n+5}{2n-3}.$$

1.13. Написать формулу общего члена последовательности:

а) $-3,\ \frac{5}{3},\ \frac{-7}{5},\ \frac{9}{7}, \ldots,$

б) $0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots,$

в) $1,\ 2,\ 1/3,\ 4,\ 1/5,\ 6,\ 1/7, \ldots$.

1.14. Является ли последовательность монотонной и ограниченной:

$$x_n = \frac{n}{5^n}.$$

1.15. Докажите, что последовательности являются возрастающими и ограниченными:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n},$

б) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$

в) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$.

(Предел второй последовательности равен числу Эйлера $e \approx 2{,}718$, предел третьей последовательности равен 2. Чему равен предел первой последовательности?)

1.16. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$,

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$,

е) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}), \qquad |q| < 1$,

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n} \right)$.

1.17. Доказать равенство:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0, \qquad a > 1,\ k \in \mathbb{Z}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0, \qquad |q| < 1$.

1.18. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2n}} \right)$.

1.19. Докажите, что

а) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.20. Мяч, упав с высоты h, подскакивает на высоту qh, где q — постоянный коэффициент, $0 < q < 1$. Найти время, за которое он окажется покоящимся на земле, и путь, который он к этому времени пролетит. (Напомним, что высота h и время падения t связаны формулой $h = gt^2/2$, где $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения.)

2 Предел функции

Цель: знакомство с понятием предела функции. Вычисление простых пределов, не дающих неопределенностей. Освоение "диагностики", т.е. установление типа предела.

План

1. Предел функции и непрерывность.
2. Теоремы о пределах.
3. Основные соотношения для бесконечно больших функций.

2.1 Предел функции и непрерывность

Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен числу b, если число b может быть приближено функцией $f(x)$ сколь угодно точно, когда x достаточно мало отличается от a:

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - a| < \delta.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

или

$$f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

Предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ есть локальная характеристика поведения функции $f(x)$ в окрестности точки a.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Любая *основная элементарная функция*:

$$\begin{gathered} \mathrm{const}, \quad x^{\alpha}, \quad a^{x}, \quad \log_a x, \\ \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x, \\ \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x \end{gathered}$$

непрерывна всюду, где определена.

2.1. Вычислить следующие пределы (используя непрерывность основных элементарных функций):

а) $\lim\limits_{x\to a} C,\ C = \mathrm{const}$,

б) $\lim\limits_{x\to a} x$,

в) $\lim\limits_{x\to a} x^n$,

г) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3}$,

д) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \cos x$,

е) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \operatorname{tg} x$,

ж) $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin x$,

з) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} x$,

и) $\lim\limits_{x\to -1} 10^x$,

й) $\lim\limits_{x\to e} \ln x$.

Элементарные функции, т.е. функции, полученные из основных элементарных конечным числом арифметических операций и композиций, непрерывны в любой точке своей области определения.

Пример 2.1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2+1}{\lg x}.$$

Решение. Функция $\dfrac{x^2+1}{\lg x}$ элементарна. Она определена при $x > 0$, $x \neq 1$, поэтому непрерывна при этих значениях аргумента. Значит, ее предел при $x \to 10$ равен значению функции в точке $x = 10$:

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2+1}{\lg x} = \frac{10^2+1}{\lg 10} = 101.$$

Ответ. 101.

2.2. Найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$,

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos 2x)$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[10]{x^2+x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \ln(2+\sin x)$.

2.2 Теоремы о пределах

2.2.1 Предел и арифметические операции

Предел функции (как и последовательности) перестановочен с арифметическими операциями.

Теорема 3. *Если существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то*

(1) $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = CA$,

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\pm B$,

(3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\cdot B$,

(4) *Если* $B\neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Естественно, теорема справедлива для непрерывных функций, при этом $A = f(a)$, $B = g(a)$.

2.2.2 Предел композиции

Если внешняя функция непрерывна, а внутренняя имеет предел, то знак предела можно вносить "под внешнюю функцию":

Теорема 4. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x = a$ *и существует* $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, *то*

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f\left(\lim_{t\to t_0} x(t)\right) = f(a).$$

Пример 2. 2. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Решение. Внешняя функция $\sqrt[3]{x}$ непрерывна, а внутренняя имеет предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(8+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right) = 8.$$

Поэтому предел сложной функции равен значению внешней функции на пределе внутренней:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Ответ. 2.

2. 3. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

В отличие от пределов последовательностей (в которых всегда $n \to \infty$), при изучении пределов функций надо обращать внимание на то, к чему стремится аргумент x под пределом.

2. 4. Найти пределы и проанализировать результаты:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{1-x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x}$,

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{1-x}$.

2.3 Основные соотношения для бесконечно больших и бесконечно малых функций

Напомним некоторые примеры бесконечно больших функций:

$$x^n \ (x\to\infty), \qquad a^x,\ a>1\ (x\to+\infty), \qquad \log_a x,\ a>1\ (x\to+\infty),$$

а также основные правила работы с бесконечно большими и бесконечно малыми функциями:

„$\dfrac{A}{0} = \infty$”:

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A \neq 0, \\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0, \\ f_2(x) \neq 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

"$\dfrac{A}{\infty} = 0$":

$$\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A, & & \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0, \\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty & & \end{array}$$

"$A + \infty = \infty$":

$$\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A, & & \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x)) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty & & \end{array}$$

"$+\infty + (+\infty) = +\infty$":

$$\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = +\infty, & & \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x)) = +\infty, \\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = +\infty & & \end{array}$$

"$A \cdot \infty = \infty$":

$$\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \infty, & & \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A \neq 0 & & \end{array}$$

"ограниченная $\cdot$ бесконечно малая $=$ бесконечно малая":

$$\begin{array}{lcl} |f_1(x)| < A, & & \\ & \Rightarrow & \lim\limits_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = 0. \\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0 & & \end{array}$$

Пример 2. 3. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \sin \frac{4}{x^2} \right).$$

Решение. Пределы дробей вычисляются по правилу "$\dfrac{1}{\infty} = 0$":

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Так как синус — непрерывная функция, то по теореме о пределе композиции имеем

$$\lim_{x\to\infty} \sin \frac{4}{x^2} = \sin \left(\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} \right) = \sin 0 = 0.$$

А после этого применяем теорему о пределе суммы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\sin\frac{4}{x^2}\right)=2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\sin\frac{4}{x^2}=2-0+0=2.$$

Коротко, со ссылками на используемые теоремы, решение можно записать так:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\sin\frac{4}{x^2}\right) && \underset{\text{пред. суммы}}{=}\\
&=2-\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}_{=0}+\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{4}{x^2}\right) && \underset{\frac{1}{\infty},\ \text{пред. композ.}}{=}\\
&=2-0+\sin\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}\right)}_{=0} && \underset{\frac{1}{\infty}}{=}\\
&=2+\sin 0=2.
\end{aligned}$$

Ответ. 2.

2. 5. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{6}{x^6}}{\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^8}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+2)}{\ln(x^{10}+x^2)}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x\cdot\lg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x^2}}+\arccos x\right)$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)$.

2.4 Домашнее задание: "Диагностика"

Рекомендации. Начиная вычислять предел, обратите внимание на точку, в которой вычисляется предел, на поведение функции в этой точке; при вычислении предела под знаком "=" подписывайте ссылку на ту теорему, на основании которой делаете переход.

2. 6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{3}{2}\ln\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to -1+0}\arcsin^2\dfrac{1-x}{2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

2. 7. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+1}{x^4+8}}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\lg(x^2+1)}\right)$.

2. 8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,

б) $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg}x$,

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{ctg}x$,

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1+x}{x+2}$,

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{n^4}+\dfrac{5}{n^5}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}$,

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+1}\sqrt{x^2+1}$,

з) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x+x)$,

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}n+\sqrt{n}\right)$, й) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x+\cos x}$.

2.9.* Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, если $a > b > 0$.

****

2.10. Пусть $|f_1(x)| > a > 0$, $f_2(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)f_2(x) = \infty$.

2.11. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A$ и не существует $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$. Существуют ли следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))$,

б) $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)f_2(x)$.

2.12. Пусть функции $f(x)$ и $x(t)$ непрерывны. Чему равен предел $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t))$? Ответ обоснуйте.

2.13. Являются ли элементарными функции:

а) $|x|$,

б) $\operatorname{sgn} x$,

в) $x^3 \operatorname{sgn} x$.

2.14.* Непрерывны ли функции:

а) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (см. график этой функции на стр. 77).

б) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

в) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

2.15. Покажите, что если функция $f(x)$ непрерывна, то и функция $|f(x)|$ непрерывна, но обратное утверждение неверно.

3 Раскрытие простейших неопределенностей

Цель: раскрытие неопределенностей типа

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty.$$

Метод: тождественные преобразования функций с целью применить теоремы о непрерывности, основные соотношения для бесконечно больших.

План

1. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$: деление числителя и знаменателя на максимальную степень переменной x.
2. Вычисление пределов типа $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$: сокращение дроби с помощью теоремы Безу.
3. Вычисление пределов от функций, содержащих иррациональности: введение новой переменной для получения рационального выражения.
4. Вычисление пределов от иррациональных функций, имеющих неопределенность типа $\infty - \infty$: домножение на сопряженный множитель.

Неопределенности Говорят, что предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет *неопределенность*:

$$\textit{типа}\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \text{если}\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty\ \text{и}\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

и

$$\textit{типа}\ \ \frac{0}{0},\ \text{если}\ \lim_{x\to a} f(x) = 0\ \text{и}\ \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$, где $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, имеет *неопределенность типа* $\infty - \infty$. Более точно, неопределенность $\infty - \infty$ получается, если функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к бесконечности одного знака:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

или хотя бы один из этих пределов равен "бесконечности без знака" (т.е. ∞ но не $+\infty$ или $-\infty$). Если же

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \mp\infty,$$

то

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \pm\infty,$$

и никакой неопределенности нет.

3.1 Пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$

Стандартный прием разрешения неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ в рациональных функциях $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — это деление числителя и знаменателя дроби на максимальную степень переменной x (этот прием мы уже применяли к последовательностям в разделе 1.2.4).

Пример 3.1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Решение. Диагностика предела:

$$\lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}(x^2+1) = \infty.$$

Имеем неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, поэтому делим числитель и знаменатель на максимальную степень, x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}.$$

Теперь пределы в числителе и знаменателе легко вычисляются:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 = 1,$$

а затем и предел всей дроби:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ответ. 0.

3. 1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\dots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}$, $\qquad a_n,\ b_m \neq 0$.

3.2 Пределы $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ типа $\frac{0}{0}$

Неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ в рациональных функциях $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно разрешить сокращая числитель и знаменатель на общий множитель, обращающийся в нуль в предельной точке. По теореме Безу, если $P(a)=Q(a)=0$ (что мы и имеем в случае неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$), то оба многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на $x-a$. После сокращения на этот множитель (быть может, в некоторой степени, если корень a кратный), неопределенность разрешается.

Пример 3. 2. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$$

Решение. Диагностика предела:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+1)=0,$$
$$\lim_{x\to 1}(x^3-x)=0,$$

то есть имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Раскладываем числитель и знаменатель на множители:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2,$$
$$x^3-x=x(x-1)(x+1).$$

Теперь наш предел можно вычислить, сокращая на общий множитель $x-1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x(x+1)}=$$

как видим, неопределенность благополучно разрешилась:

$$=\frac{0}{2}=0.$$

Ответ. 0.

3. 2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

3.3 Вычисление пределов иррациональных функций, имеющие неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

Неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ в функциях, содержащих иррациональности, часто можно разрешить, выбирая одну из иррациональностей в качестве новой переменной так, чтобы под пределом функция от новой переменной стала рациональной. Другой возможный прием — умножение числителя и знаменателя дроби на сопряженный множитель с последующим сокращением на обращающийся в нуль сомножитель.

Пример 3. 3. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}.$$

Решение. Как обычно, проведем сначала диагностику предела:

$$\lim_{x\to 81}(3-\sqrt[4]{x})=0,$$
$$\lim_{x\to 81}(9-\sqrt{x})=0,$$

то есть имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Способ I. Введем новую переменную

$$y = \sqrt[4]{x} \to 3 \text{ при } x \to 81.$$

В этой переменной предел записывается как

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{y\to 3} \frac{3-y}{9-y^2} =$$

получили рациональную функцию от y, сокращаем на общий множитель:

$$= \lim_{y\to 3} \frac{3-y}{(3-y)(3+y)} = \lim_{y\to 3} \frac{1}{3+y} = \frac{1}{6}.$$

Способ II. Домножаем числитель и знаменатель на сопряженный (к числителю) множитель $3+\sqrt[4]{x}$:

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 81} \frac{(3-\sqrt[4]{x})(3+\sqrt[4]{x})}{(9-\sqrt{x})(3+\sqrt[4]{x})} = \lim_{x\to 81} \frac{9-\sqrt{x}}{(9-\sqrt{x})(3+\sqrt[4]{x})} =$$

сокращаем на общий множитель и, как видим, неопределенность исчезает:

$$= \lim_{x\to 81} \frac{1}{3+\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{6}.$$

Способ III. Разложим на множители знаменатель:

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{(3-\sqrt[4]{x})\,(3+\sqrt[4]{x})}$$

появился общий множитель, на который можно сократить:

$$= \lim_{x\to 81} \frac{1}{3+\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{6}.$$

Способ IV. Введем новую переменную:

$$z = 3-\sqrt[4]{x} \to 0 \text{ при } x \to 81.$$

После замены получаем

$$\lim_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{6z-z^2} =$$

опять получили рациональную функцию от z, и на общий множитель можно сократить:

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{6-z} = \frac{1}{6}.$$

Как видно из этого примера, часто один предел можно вычислять разными способами (и получать при этом одинаковые ответы).

Ответ. $1/6$.

3. 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $\quad m,\ n\in\mathbb{N}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$ с иррациональностями можно разрешать уже известным нам приемом — делением числителя и знаменателя на максимальную степень переменной.

Пример 3. 4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}.$$

Решение. Поделим на максимальную степень, n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}}{1+\dfrac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ. 1.

3. 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

3.4 Пределы иррациональных функций, имеющие неопределенность типа $\infty - \infty$

Неопределенности типа $\infty-\infty$ часто можно разрешить, преобразуя функции и сводя их к пределам типов $\dfrac{1}{\infty}$, $\dfrac{\infty}{1}$ или неопределенностям типов $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

Пример 3. 5. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right).$$

Решение. Диагностика:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-7}=+\infty,$$

поэтому имеем неопределенность типа $\infty-\infty$.

Умножим и поделим на сопряженный множитель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}\right)}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+7)-(x^2-7)}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{14}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$

диагностика: получили предел типа $\dfrac{A}{\infty}$

$$=0.$$

Ответ. 0.

3. 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$.

3.5 Домашнее задание

Рекомендации. При решении упражнений обращайте внимание на диагностику (тип предела или неопределенности).

3. 6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

3. 7. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$,

б) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\dots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

3. 8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ (производная x^n).

3. 9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$,

в) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{m}{n}}-a^{\frac{m}{n}}}{x-a}$, $a>0$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ (производная $x^{\frac{m}{n}}$).

3. 10. Вычислить предел:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

****

3. 11. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x и $P(a)=Q(a)=0$. Какие возможные значения имеет выражение $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$? Докажите, что если $P'(a)\neq 0$, $Q'(a)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P'(a)}{Q'(a)}.$$

Эта формула — частный случай *правила Лопиталя* для разрешения неопределенностей типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Мы будем изучать правило Лопиталя в нашем курсе позже.

3. 12. Доказать, что функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\dots+c_0+\alpha(x),\quad \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to\infty,$$

тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned}
&c_n=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n},\\
&c_{n-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-c_nx^n}{x^{n-1}},\\
&\dots\\
&c_0=\lim_{x\to\infty}f(x)-(c_nx^n+\dots+c_1x).
\end{aligned}$$

(При $n=1$ прямая $y=c_1x+c_0$ называется *асимптотой* графика функции $f(x)$, а при произвольном n кривая $y=c_nx^n+\dots+c_0$ называется *обобщенной асимптотой*.)

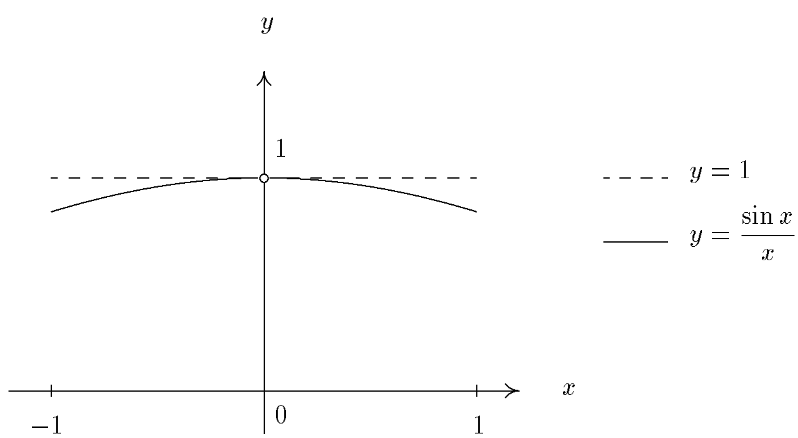
4 Первый и второй замечательные пределы

Цель: вычисление пределов с помощью "архитектурных преобразований" функций и замены переменной с целью сведения к двум замечательным пределам. Вычисление пределов для Таблицы эквивалентности.

4.1 Первый замечательный предел

Прием: вычисление пределов сведением к *первому замечательному пределу*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$

Заметим, что первый замечательный предел имеет неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ (это — простейший трансцендентный предел такого типа).

Пример 4. 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Решение. Диагностика: $\dfrac{0}{0}$.

Преобразуем предел, чтобы свести его к первому замечательному:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Ответ. 1.

4.1. Вычислить пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$,

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$,

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$,

г) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$,

д) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$,

е) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$,

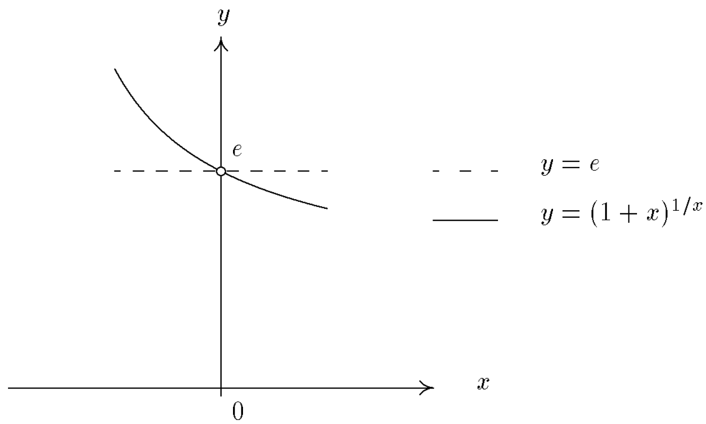
ж) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

4.2 Второй замечательный предел

Прием: вычисление пределов сведением ко *второму замечательному пределу*:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Заметим, что второй замечательный предел имеет неопределенность типа 1^∞, подробнее с такими неопределенностями мы познакомимся позже, см. стр. 63, 68.



$(1+x)^{1/x} \to e$ при $x \to 0$

Пример 4. 2. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x.$$

Решение. Диагностика: неопределенность типа 1^∞.

Вводим новую переменную

$$t = -x \to \infty \text{ при } x \to \infty,$$

и выполняем замену в нашем пределе:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-1} =$$

$$= \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{-1} =$$

а теперь используем второй замечательный предел

$$= e^{-1}.$$

Ответ. $1/e$.

4. 2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

Пример 4. 3. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Решение. Диагностика: $\dfrac{0}{0}$. Сводим ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

Ответ. 1.

Пример 4. 4. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Решение. Диагностика: $\dfrac{0}{0}$. Возьмем числитель в качестве новой переменной:

$$t=e^x-1,$$

заметим, что

$$t\to 0 \text{ при } x\to 0.$$

Выразим также старую переменную через новую:

$$x=\ln(t+1).$$

Теперь можно перейти к новой переменной в нашем пределе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=$$

используем предыдущий пример

$$=1.$$

Ответ. 1.

4. 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln x)$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a-1}{ax}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^\alpha-a^\alpha}{x}$ (производная x^α),

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ (производная $\ln x$),

з) * $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

4.3 Домашнее задание

4. 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 3x$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$,

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$,

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin a}{x}$ (производная $\sin x$),

з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+x)-\cos a}{x}$ (производная $\cos x$), и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{\alpha+x} - a^{\alpha}}{x}$ (производная a^x).

4. 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$.

4. 6. Вычислить пределы и проанализировать ответ:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

4. 7. Какие из следующих функций являются бесконечно большими при $x \to 1$, какие ограниченными, какие неограниченными:

а) $y = \dfrac{1}{x-1} \sin^2 \dfrac{\pi}{x-1}$,

б) $y = \dfrac{1}{x-1} \left(\sin \dfrac{\pi}{x-1} + 2\right)$,

в) $y = \dfrac{\sin \pi(x-1)}{x-1}$,

г) $y = \dfrac{\sin \pi(x-1)}{x-1} \cos \dfrac{\pi}{x-1}$.

5 Эквивалентные бесконечно малые

Цель: изучение локального поведения бесконечно малых функций с помощью сравнения с другими, более простыми, бесконечно малыми.

План

1. Таблица эквивалентных бесконечно малых в нуле.
2. Теоремы о пределах эквивалентных функций.
3. Вычисление пределов:
   (а) непосредственное использование Таблицы;
   (б) обобщение Таблицы для линейных бесконечно малых (линейная замена переменной); вычисление пределов с ее помощью и помощью теорем о пределах эквивалентных функций.
   (в) обобщение Таблицы для произвольных бесконечно малых (нелинейная замена переменной), вычисление пределов с ее помощью и помощью теорем о пределах эквивалентных функций.

5.1 Таблица эквивалентных бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$. Если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *эквивалентны* при $x \to a$ и пишут

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to a.$$

Если же

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет порядок малости выше чем $\beta(x)$ при $x \to a$. В этом случае

$$\alpha(x) = \beta(x) \cdot \gamma(x), \text{ где } \gamma(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

В этом пункте будем рассматривать бесконечно малые при $x \to 0$.

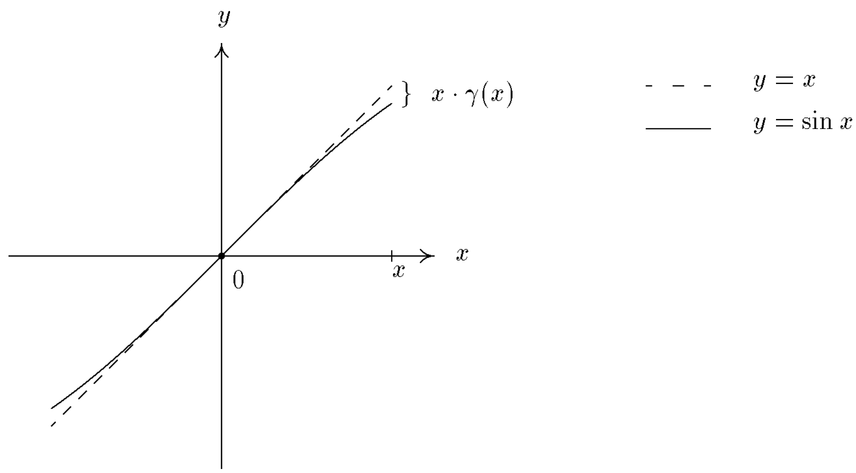
Используя результаты раздела 4, составим *Таблицу эквивалентности* для некоторых функций при $x \to 0$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$

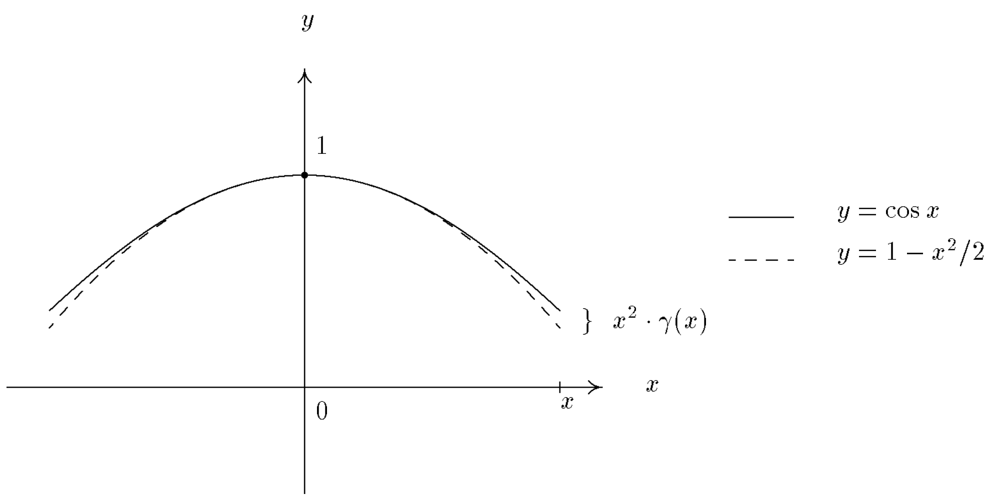
	Сравнение	Эквивалентность	Равенство
1	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\sin x \sim x$	$\sin x = x + x\gamma(x)$
2	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2/2} = 1$	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\gamma(x)$
3	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + x\gamma(x)$
4	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$	$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$	$\log_a(1+x) = \dfrac{x}{\ln a} + x\gamma(x)$
5	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$	$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + x\gamma(x)$
6	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$	$a^x - 1 \sim x\ln a$	$a^x = 1 + x\ln a + x\gamma(x)$
7	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a-1}{ax} = 1$	$(1+x)^a - 1 \sim ax$	$(1+x)^a = 1 + ax + x\gamma(x)$
8	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x/2} = 1$	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$	$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + x\gamma(x)$
9	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + x\gamma(x)$
10	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$	$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + x\gamma(x)$
11	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$	$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + x\gamma(x)$

5.2 Эквивалентность бесконечно малых в картинках

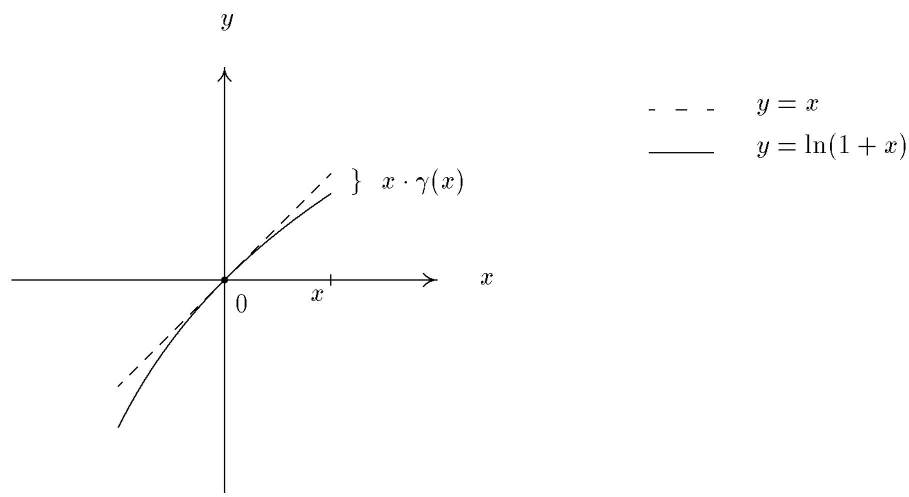
В этом разделе соотношения 1, 2, 3, 5, 8, 9 Таблицы эквивалентных бесконечно малых проиллюстрированы графиками.



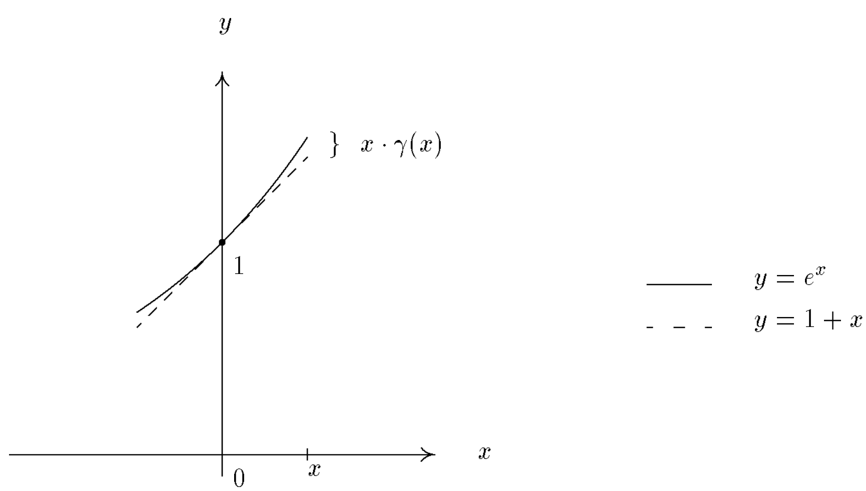
$\sin x \sim x$ при $x \to 0$



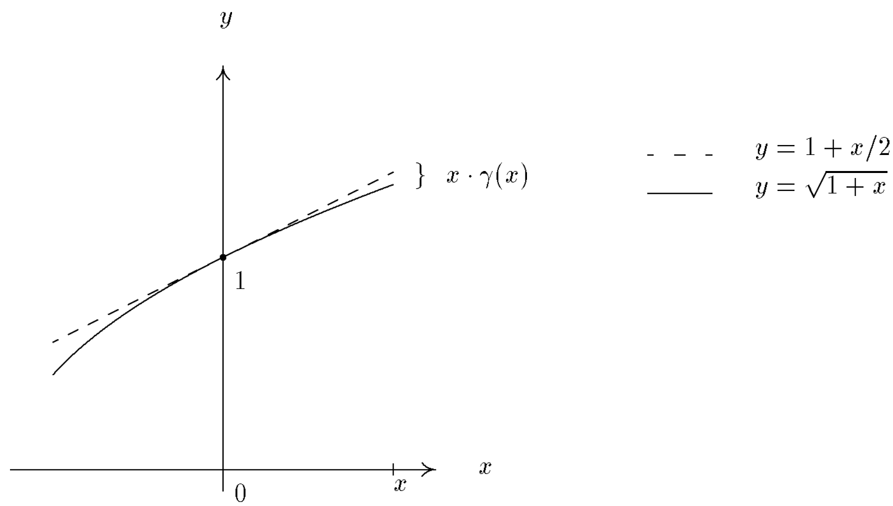
$1 - \cos x \sim x^2/2$ при $x \to 0$



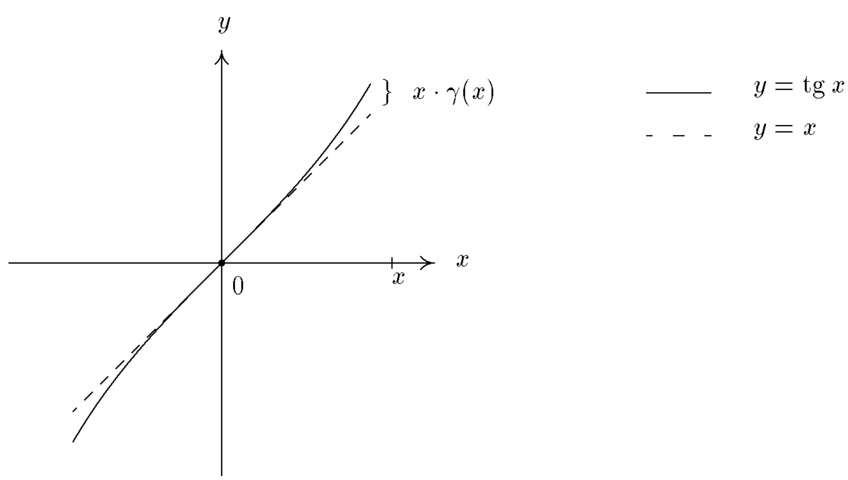
$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$



$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$



$\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$ при $x \to 0$



$\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$

5.3 Теоремы о пределах эквивалентных функций

При вычислении пределов бесконечно малые можно заменять на эквивалентные в произведениях и частных.

Пусть $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$, а $f(x)$ — произвольная функция.

Теорема 5. *Если* $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ *при* $x \to a$, *то*

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot \alpha_1(x)) = \lim_{x \to a}(f(x) \cdot \alpha_2(x)).$$

Теорема 6. *Если* $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ *при* $x \to a$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha_2(x)}.$$

Из этих двух теорем следует часто использующееся утверждение.

Теорема 7. *Если* $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ *и* $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ *при* $x \to a$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Во всех теоремах пределы в правой и левой частях существуют или не существуют одновременно.

Внимание: в суммах и разностях заменять бесконечно малые на эквивалентные, вообще говоря, нельзя!

5.4 Вычисление пределов с помощью Таблицы

5.4.1 Непосредственное использование Таблицы

Некоторые пределы вычисляются прямым применением рубрики "Эквивалентность" Таблицы.

Пример 5.1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Используем табличный предел No. 7 при $a = \dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/n}-1}{x/n} = 1,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/n}-1}{x} = \frac{1}{n} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/n}-1}{x/n} = \frac{1}{n}.$$

Ответ. $1/n$.

5.1. Вычислить пределы, используя Таблицу:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

5. 2. Доказать, что $\operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

5.4.2 Обобщение Таблицы для линейных бесконечно малых

При вычислении пределов можно применять линейные замены переменных:

$$\lim_{t\to t_0} f(kt+b) = \lim_{x\to x_0} f(x). \qquad \text{(замена } x = kt+b\text{)}$$

Здесь $x_0 = kt_0+b$, так что $x = kt+b \to x_0$ при $t \to t_0$. Например, растяжение аргумента:

$$\lim_{t\to 0} f(kt) = \lim_{x\to 0} f(x). \qquad \text{(замена } x = kt \to 0 \text{ при } t \to 0\text{)},$$

сдвиг аргумента в 0:

$$\lim_{t\to 0} f(t-b) = \lim_{x\to 0} f(x). \qquad \text{(замена } x = t-b \to 0 \text{ при } t \to b\text{)}.$$

Аналогично, можно делать линейные замены в соотношениях эквивалентности: если $x(t) = kt+b$, $k \neq 0$, и

$$x = x(t) \to 0 \text{ при } t \to t_0,$$

то

$$f(x) \sim g(x),\ x \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x(t)) \sim g(x(t)),\ t \to t_0.$$

Пример 5. 2. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}.$$

Решение. Диагностика: $\dfrac{0}{0}$. Так как $y = kx \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\ln(1+y) \sim y \text{ при } y \to 0,$$

то

$$\ln(1+kx) \sim kx \text{ при } x \to 0.$$

Поэтому, переходя к эквивалентной бесконечно малой в числителе дроби (Теорема 7), сразу вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{x} = \lim_{x\to 0} k = k.$$

Ответ. k.

5. 3. Вычислите табличные пределы, используя более простые пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ с помощью табличного предела No. 3,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ с помощью табличного предела No. 5.

5. 4. Вычислить предел, используя Таблицу для бесконечно малых kx и Теоремы 5–7.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{3^x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $\quad m,\ n\in\mathbb{N}$.

5. 5. Вычислить предел, сделав "сдвиг" в 0:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\lg x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a^x-a}{x-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$,

5.4.3 Обобщение Таблицы для произвольных бесконечно малых

В пределах и соотношениях эквивалентности можно применять не только линейные ($x = kt + b$), но и нелинейные замены ($x = \varphi(t)$):

$$\lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

замена переменной в пределе;

$$f(x) \sim g(x),\ x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(\varphi(t)) \sim g(\varphi(t)),\ t \to t_0,$$

замена переменной в соотношении эквивалентности,

где $x_0 = \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t)$, так что $x = \varphi(t) \to x_0$ при $t \to t_0$. Строго говоря, при выполнении замены $x = \varphi(t)$ необходимо требовать, чтобы в любой окрестности точки $t = t_0$ функция $\varphi(t)$ не принимала значения x_0 при $t \neq t_0$, но обычно это условие выполняется.

Пример 5. 3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)},$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$ и $\alpha(x) \neq 0$ в выколотой окрестности точки $x = 0$.

Решение. Выполняем замену $y = \alpha(x)$ в первом замечательном пределе.

Ответ. 1.

Пример 5. 4. Используя рубрику "эквивалентность" Таблицы и Теоремы 5–7, вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1}.$$

Решение. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Выполняем замены переменных в табличном соотношении эквивалентности:

$$\sqrt[3]{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{3}x^3 \qquad\qquad (\text{замена } y = x^2)$$

$$\sqrt{3x^2+1}-1 \sim \frac{1}{2}3x^2 \qquad\qquad (\text{замена } y = 3x^2),$$

после чего вычисляем предел, заменяя бесконечно малые на эквивалентные:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{\frac{3}{2}x^2} = \frac{2}{9}.$$

Ответ. 2/9.

5. 6. Вычислить предел, сделав инверсию $t = \dfrac{1}{x}$ (перевести ∞ в 0):

$$\lim_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right).$$

5. 7. Используя рубрику "эквивалентность" и Теоремы 5–7, вычислить пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$,

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \sin\frac{x}{2}}$.

5.5 Домашнее задание

5. 8. Доказать Теоремы 5–7.

5. 9. Вычислить пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$,

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$,

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$,

г) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,\ n\in\mathbb{N}$.

5. 10. Вычислить пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\log_3 x-1}{x-3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$,

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $\quad m,\ n\in\mathbb{N}$.

5.11. Пусть $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, и m — натуральное число. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

5.12. Доказать, что $\operatorname{sh}x\sim x,\quad x\to 0$.

5.13. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

6 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших

Цель: сравнение бесконечно малых со степенными бесконечно малыми с целью упрощения вычисления пределов (фактически, с целью сведения к пределу от рациональной функции); сравнение бесконечно больших со степенными бесконечно большими с той же целью.

План

1. Выделение главной степенной части бесконечно малой в нуле с помощью рубрики "эквивалентность" Таблицы.

   Как следствие — порядок малости бесконечно малой, эскиз графика бесконечно малой в окрестности нуля.

2. Выделение главной степенной части бесконечно малой в нуле с помощью рубрики "равенство" Таблицы.

   Как следствие — порядок малости бесконечно малой.

   Постепенное ведение o-малых (сначала без символа, а потом с ним).

3. Главные степенные части и порядки роста бесконечно больших.

   Как следствие — асимптотическое поведение функции на бесконечности.

4. Степенно-показательные неопределенности: 1^∞, 0^0, ∞^0.
5. Односторонние пределы.
6. Характерные ошибки

6.1 Сравнение бесконечно малых

6.1.1 Главная степенная часть и порядок малости бесконечно малой: рубрика "Эквивалентность" Таблицы

Как мы знаем, часто удобно описать локальное поведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ (при $x \to 0$) с помощью эквивалентной ей и более простой бесконечно малой $\beta(x)$:

$$\beta(x) \sim \alpha(x),\ x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Если более простая бесконечно малая является степенной функцией:

$$\beta(x) = Cx^r,$$

то $\beta = Cx^r$ называется *главной степенной частью* бесконечно малой α. При этом степень r называется *порядком малости* бесконечно малой α.

Например, все три функции $\sqrt{x}$, x, x^2 бесконечно малы, т.е. стремятся к нулю при $x \to 0$. Как сравнить их между собой? Аналитически,

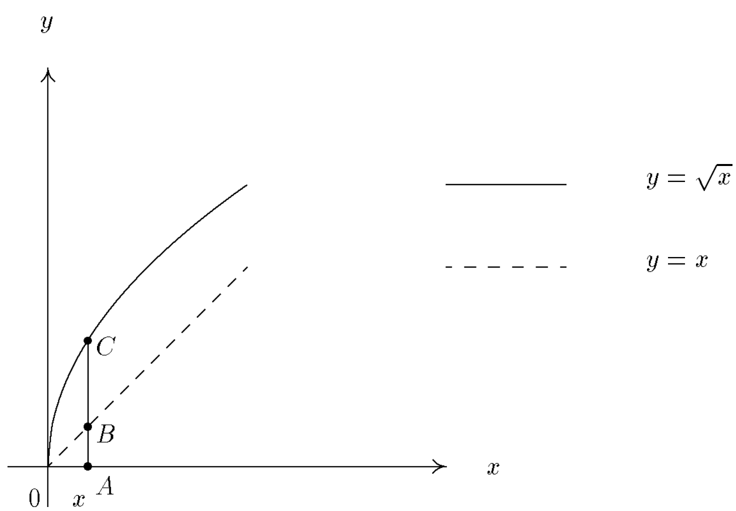
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0,$$

то есть

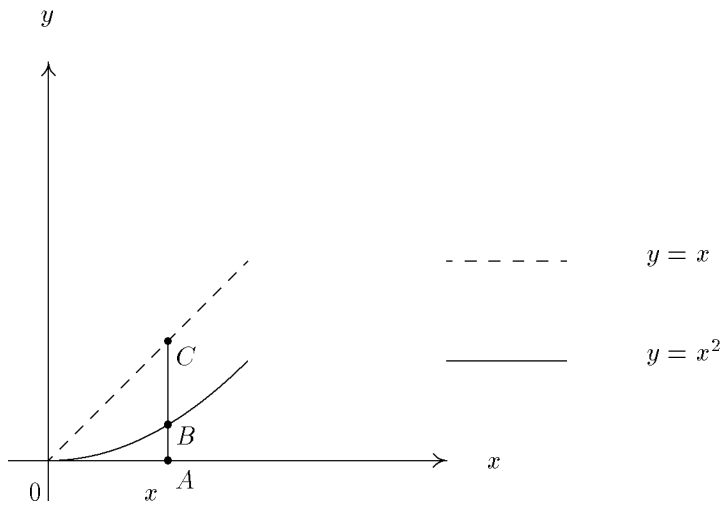
$$\sqrt{x} \gg x \quad \text{и} \quad x \gg x^2 \quad \text{при } x \to 0.$$

Геометрически, на рисунках ниже отношение длин отрезков $|AB|$ и $|AC|$ может быть сделано сколь угодно малым:

$$\frac{|AB|}{|AC|} \to 0 \text{ при } x \to 0.$$



$\sqrt{x} \gg x$ при $x \to 0$



$x \gg x^2$ при $x \to 0$

Это и означает, что x^2 стремится к нулю быстрее (т.е. имеет порядок малости выше) чем x, которая, в свою очередь, стремится к нулю быстрее чем $\sqrt{x}$. Порядки малости степенных функций $\sqrt{x}$, x, x^2 равны соответственно их степеням $\dfrac{1}{2} < 1 < 2$.

Пример 6.1. Найти главную степенную часть и порядок малости в нуле многочлена
$$\alpha(x) = x^3 + 1000x^2.$$

Решение. Какое из двух слагаемых x^3 и $1000x^2$ дает главный вклад в многочлен $\alpha(x)$? Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$, то основной вклад в бесконечно малую $\alpha(x)$ дает слагаемое меньшей степени
$$\beta(x) = 1000x^2.$$

Действительно,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 1000x^2}{1000x^2} =$$

поделим на x^2
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 1000}{1000} = 1.$$

Итак, β является главной степенной частью в нуле бесконечно малой $\alpha(x)$, а порядок малости α равен степени β, то есть 2.

Ответ. $\beta = 1000x^2$, $r = 2$.

Заметим, что в нуле у многочлена всегда главную роль играют меньшие степени.

Пример 6. 2. Найти главную степенную часть и порядок малости в нуле бесконечно малых функций (рубрика Таблицы "эквивалентность"):

а) $\alpha(x) = x\sin 3x$,

б) $\alpha(x) = \dfrac{\arcsin x^5}{x^7+1}$.

Решение. а) Найдем степенную бесконечно малую, эквивалентную данной, с помощью Таблицы. Так как

$$\sin 3x \sim 3x, \quad x \to 0 \qquad \text{(замена } y = 3x, \quad \sin y \sim y, \quad y \to 0),$$

то

$$\alpha(x) = x\sin 3x \sim x \cdot 3x = 3x^2 = \beta(x),$$
$$r = 2.$$

б) Преобразуем числитель аналогично предыдущему пункту:

$$\arcsin x^5 \sim x^5 \quad x \to 0 \qquad \text{(замена } y = x^5, \quad \arcsin y \sim y, \quad y \to 0).$$

В знаменателе имеем не бесконечно малую:

$$\lim_{x\to 0}(x^7+1) = 1,$$

то есть

$$x^7 + 1 \sim 1, \quad x \to 0.$$

Теперь можем найти главную степенную часть всей дроби:

$$\alpha(x) = \frac{\arcsin x^5}{x^7+1} \sim \frac{x^5}{1} = x^5 = \beta(x).$$

Порядок малости α равен степени 5.

Ответ. а) $\beta(x) = 3x^2$, $r = 2$; б) $\beta(x) = x^5$, $r = 5$.

6. 1. Найти главную степенную часть и порядок малости в нуле бесконечно малых функций:

а) $\alpha(x) = 200x^5 + 15x^4 - 0{,}1x$, б) $\alpha(x) = x^2 \cos x$,

в) $\alpha(x) = \left(\sqrt[4]{1+x^2} - 1\right) \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$,

г) $\alpha(x) = (2^x - 1) \ln(1 + \sin 5x)$,

д) $\alpha(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$,

е) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$,

ж) $\alpha(x) = \ln \cos x$,

з) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$,

и) $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$,

й) $\alpha(x) = 3x^{1/3} + 50x^{3/5} + 100x^{7/75}$.

Если при $x \to 0$ мы сравниваем бесконечно малые со степенями x^r, то при $x \to a$ эталонными бесконечно малыми являются $(x-a)^r$. То есть *главной степенной частью* бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to a$ называется эквивалентная ей бесконечно малая вида $\beta(x) = C(x-a)^r$.

6. 2. Выделить главную степенную часть бесконечно малой $\alpha(x)$ в точке $x = 1$:

а) $\alpha(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 3$,

б) $\alpha(x) = (x^6 - x^4 - x^2 + 1) \operatorname{tg} \pi x$.

6.1.2 Главная степенная часть и порядок малости бесконечно малой: рубрика "Равенство" Таблицы

В этом пункте мы научимся правильно пользоваться рубрикой "Равенство" Таблицы.

Пусть в Таблице дано равенство

$$f(x) = x + x\gamma(x), \qquad x \to 0.$$

Тогда в этом равенстве можно сделать замену переменной: если

$$x = \alpha(t) \to 0 \text{ при } t \to a,$$

то

$$f(\alpha(t)) = \alpha(t) + \alpha(t)\gamma(\alpha(t)) = \alpha(t) + \alpha(t)\gamma_1(t),$$

где

$$\gamma_1(t) = \gamma(\alpha(t)) \to 0 \text{ при } t \to a.$$

При этом нужно потребовать, чтобы $\alpha(t) \neq 0$ при t близких к a и не равных a.

Пример 6. 3. Представить бесконечно малую функцию в виде суммы эквивалентной и бесконечно малой более высокого порядка:

$$\alpha(t) = \sin t^2, \qquad t \to 0.$$

Решение. Используем равенство из Таблицы:

$$\sin x = x + x\gamma(x), \quad x \to 0.$$

Сведем наш случай к табличному заменой $x = t^2$, заметим, что $x = t^2 \to 0$, при $t \to 0$. Итак,

$$\sin t^2 = t^2 + t^2\gamma(t^2),$$

причем $\gamma(t^2) \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому, вводя новое обозначение для этой бесконечно малой $\gamma_1(t) = \gamma(t^2)$, окончательно получаем

$$\sin t^2 = t^2 + t^2\gamma_1(t), \qquad \gamma_1(t) \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Ответ. $t^2 + t^2\gamma_1(t)$.

При преобразовании бесконечно малых *нельзя* переходить к эквивалентным в сумме и разности (в отличие от произведения и частного):

$$\alpha_1(x) \sim \beta_1(x),\ \alpha_2(x) \sim \beta_2(x) \quad \not\Rightarrow \quad \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \beta_1(x) + \beta_2(x).$$

Например, $\sin t^2 - t^2 \not\sim t^2 - t^2 = 0$. Для преобразования суммы и разности бесконечно малых надо использовать рубрику "Равенство" обобщенной Таблицы:

$$\alpha_1(x) = \beta_1(x) + \beta_1(x)\gamma_1(x), \quad \alpha_2(x) = \beta_2(x) + \beta_2(x)\gamma_2(x) \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad \alpha_1(x) + \alpha_2(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x) + \beta_1(x)\gamma_1(x) + \beta_2(x)\gamma_2(x),$$

где

$$\gamma_1(x) \to 0, \quad \gamma_2(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Например: $\sin t^2 - t^2 = (t^2 + t^2\gamma(t)) - t^2 = t^2\gamma(t)$, $\gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Пример 6. 4. Определить порядок малости бесконечно малой функции в нуле:

$$\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4.$$

Решение. *Способ* I. Найдем сначала главную степенную часть первой функции:

$$3\sin^3 x = 3(x + x\gamma(x))^3 = 3(x^3 + 3x^3\gamma(x) + 3x^3\gamma^2(x) + x^3\gamma^3(x)) =$$
$$= 3x^3 + x^3(9\gamma(x) + 9\gamma^2(x) + 3\gamma^3(x)) =$$

обозначим бесконечно малую $\gamma_1(x) = 9\gamma(x) + 9\gamma^2(x) + 3\gamma^3(x)$

$$= 3x^3 + x^3\gamma_1(x),$$

где

$$\gamma_1(x) \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Теперь мы можем найти главную степенную часть всей заданной функции:

$$\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4 = 3x^3 + x^3\gamma_1(x) - x^4 = 3x^3 + x^3(\gamma_1(x) - x) =$$
$$= 3x^3 + x^3\gamma_2(x),$$

где

$$\gamma_2(x) = \gamma_1(x) - x \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Итак, главная степенная часть бесконечно малой $\alpha(x)$ есть $3x^3$, поэтому ее порядок малости равен 3.

Способ II. Главную степенную часть функции $3\sin^3 x$ можно найти проще:

$$\sin x \sim x, \qquad x \to 0,$$

поэтому

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin x \cdot \sin x \sim x \cdot x \cdot x = x^3, \qquad x \to 0,$$

значит,

$$\sin^3 x = x^3 + x^3\gamma(x), \qquad \gamma(x) \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Дальше действуем как в первом способе.

Ответ. $r = 3$.

6.3. Определить порядок малости следующих бесконечно малых в нуле:

а) $\beta(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$,

б) $\beta(x) = e^x - \cos x$,

в) $\beta(x) = e^{x^2} - \cos x$,

г) $\beta(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - 2\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$,

д) $\beta(x) = 2^x - \cos x$,

е) $\beta(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x \sin x}\right)$.

6. 4. Доказать, что $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет 2-й порядок малости относительно x при $x \to 0$:

а) $\alpha(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\beta(x) = 1 - x$,

б) $\alpha(x) = \sqrt{a^2 + x}$, $\beta(x) = a + \dfrac{1}{2a}x$, $a \neq 0$.

6.1.3 Вычисление пределов

Пример 6. 5. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x}.$$

Решение. Диагностика: $\dfrac{0}{0}$. Главную степенную часть числителя в нуле находим сразу по Таблице, рубрика "эквивалентность":

$$1 - \cos 4x \sim \frac{1}{2}(4x)^2 = 8x^2, \qquad x \to 0.$$

Знаменатель является суммой бесконечно малых, поэтому приходится применять равенство с бесконечно малыми высших порядков:

$$\begin{aligned} &2\sin^2 x \sim 2x^2, \qquad x \to 0,\\ &x \operatorname{tg} 7x \sim 7x^2, \qquad x \to 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &2\sin^2 x = 2x^2 + x^2\gamma_1(x),\\ &x \operatorname{tg} 7x = 7x^2 + x^2\gamma_2(x),\\ &2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x = (2x^2 + x^2\gamma_1(x)) + (7x^2 + x^2\gamma_2(x)) =\\ &\qquad 9x^2 + x^2\underbrace{(\gamma_1(x) + \gamma_2(x))}_{\gamma_3(x)} = 9x^2 + x^2\gamma_3(x), \end{aligned}$$

поэтому

$$2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x \sim 9x^2, \qquad x \to 0.$$

После этого предел мгновенно вычисляется:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{9x^2} = \frac{8}{9}.$$

Ответ. $\dfrac{8}{9}$.

Пример 6. 6. Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}.$$

Решение. Проведем сначала диагностику предела:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}=\infty,$$

то есть имеем неопределенность типа 1^∞. Стандартным тождественным преобразованием — введением экспоненты — получаем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\dfrac{3\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)}{x}}=$$

по теореме о композиции

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)}{x}}.$$

Для вычисления предела дроби в показателе заменяем бесконечно малые на эквивалентные:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x})^2}{x}=3.$$

Окончательно, исходный предел равен e^3.

Ответ. e^3.

6. 5. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6. 6. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$,

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

6.1.4 o-малые

То, что бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет порядок малости выше чем бесконечно малая $\beta(x)$ при $x \to a$ обычно записывают с помощью специального символа o-малое:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \to a.$$

Иными словами,

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) = \beta(x)\cdot\gamma(x),\ \gamma(x)\to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

С помощью этого символа запись решения многих задач упрощается.

Рассмотрим еще раз Пример 6.4.

Пример 6. 7. Определить порядок малости бесконечно малой функции в нуле:

$$\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x), \quad x\to 0,\\
\sin^3 x &= (x+o(x))^3 = x^3 + 3x^2 o(x) + 3x(o(x))^2 + (o(x))^3 =\\
&= x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) = x^3 + o(x^3),\\
3\sin^3 x &= 3x^3 + o(x^3),\\
x^4 &= o(x^3),\\
\alpha(x) &= 3x^3 + o(x^3) + o(x^3) = 3x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Ответ. $r = 3$.

6.2 Сравнение бесконечно больших

6.2.1 Главные степенные части и порядки роста бесконечно больших

Так же, как для бесконечно малых сравнивают скорости стремления к нулю, для бесконечно больших сравнивают скорости стремления к бесконечности. Бесконечно большие

$$A(x) \text{ и } B(x), \qquad \lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty} B(x) = \infty$$

называются *эквивалентными* друг другу, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

В качестве эталонных бесконечно больших при $x \to \infty$ берут степени x^r. Если бесконечно большая A эквивалентна некоторой степенной функции:

$$A(x) \sim Cx^r, \qquad x \to \infty,$$

то Cx^r называется *главной степенной частью*, а показатель r — *порядком роста* бесконечно большой A.

При x, стремящемся к конечному a, в качестве эталонных бесконечно больших берут степени $\dfrac{1}{(x-a)^r}$.

Пример 6. 8. Выделить главную степенную часть и найти порядок роста бесконечно большой:

$$A(x) = x^3 + 150x + 10, \qquad x \to \infty.$$

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

то главную роль на бесконечности играет наибольшая степень x^3. Покажем, что наш многочлен эквивалентен слагаемому наибольшей степени:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+150x+10}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{150}{x^2} + \frac{10}{x^3}\right)$$
$$= 1.$$

Поэтому главная степенная часть многочлена $A(x)$ равна x^3, а порядок роста равен 3.

Ответ. $B(x) = x^3$, $r = 3$.

6. 7. Выделить главную степенную часть и найти порядок роста бесконечно большой:

а) $A(x) = \dfrac{2}{3}x - 4x^4 + \dfrac{1}{5}x^5$,

б) $A(x) = 300x^{0,02} - 900x^{0,9} - 0,1x^{1,1} + x$.

6. 8. Докажите, что у суммы степеней главную роль на бесконечности играют большие степени: если

$$A(x) = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2} + \ldots + C_kx^{r_k}, \qquad \max\{r_i\} = r_1 > 0,$$

то

$$A(x) \sim C_1x^{r_1}, \qquad x \to \infty.$$

В частности, порядок роста многочлена на бесконечности равен его степени.

6. 9. Определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ при $x \to \infty$:

а) $A(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5} + |x|$,

б) $A(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,

в) $A(x) = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{7}{3}} + 1}$,

г) $A(x) = \dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$,

д) $A(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$.

6.2.2 Вычисление пределов

Вычисление многих пределов, включающих логарифмическую функцию, использует уже, по сути, знакомое нам соотношение эквивалентности.

Пример 6. 9. Доказать, что

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \to \infty.$$

Решение. Выполнить замену переменной $y = \dfrac{1}{x}$ в табличном соотношении $\ln(1 + y) \sim y$, $y \to 0$.

6. 10. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\dfrac{3x-1}{3x-6}$.

6.3 Односторонние пределы

Пример 6.10. Вычислить односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$,

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

Решение. Показательная функция по разному ведет себя на бесконечности разных знаков:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

поэтому данные односторонние пределы существенно отличаются друг от друга.

а) Диагностика предела:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^x) = \ln(1+0) = 0,$$

то есть имеем предел типа $\dfrac{0}{\infty} = 0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} = 0.$$

б) Диагностика:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^x) = \infty,$$

то есть предел типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, неопределенность. Найдем главную степенную часть числителя:

$$\ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = x + \ln(e^{-x}+1) = x + \gamma(x),$$
$$\gamma(x) = \ln(e^{-x}+1) \to 0 \text{ при } x\to+\infty.$$

А теперь можно вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\gamma(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1.$$

Ответ. а) 0; б) 1.

6.11. Вычислить односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to3\pm0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$,

б) $\lim\limits_{x\to\pm0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm0}\dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\frac{\pi}{2}}$.

6.4 Характерные ошибки

Диагностика. Наиболее характерная ошибка, встречающаяся при вычислении пределов, — это пропуск этапа диагностики, т.е. установления типа предела (в частности, неопределенности). Это приводит, например, к неуместному использованию Таблицы:

$$\ln(e^x+1) \not\sim e^x \text{ при } x \to 0, \text{ т.к. } e^x \not\to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Или это приводит к тому, что пытаются сравнивать бесконечно большие и бесконечно малые, например,

$$\frac{1}{\ln\cos x} \text{ и } x^r, \ r>0, \text{ при } x \to 0.$$

Пропуск диагностики приводит также к тому, что предел непрерывной в данной точке функции пытаются вычислять излишне сложной техникой, часто неуместной.

Замена бесконечно малых эквивалентными. Необходимо правильно использовать теоремы об эквивалентных. Например, если дана сумма или разность бесконечно малых функций, то заменять ее на эквивалентные бесконечно малые нужно с точностью до малых высших порядков:

$$\operatorname{tg} x - \sin x \not\sim x - x \text{ при } x \to 0 \quad (!!!).$$

Правильно так:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = x + x\gamma_1(x) - (x + x\gamma_2(x)) = x(\gamma_1(x) - \gamma_2(x)) = x\gamma_3(x),$$
$$\gamma_3(x) \to 0 \text{ при } x \to 0,$$

или, что то же самое,

$$\operatorname{tg} x - \sin x = x + o(x) - (x + o(x)) = o(x) + o(x) = o(x), \quad x \to 0.$$

Отметим, что в этом примере главную степенную часть бесконечно малой $\gamma_3(x)$ можно вычислить с помощью специального приема:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x(1-\cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}.$$

Регулярный способ нахождения главных степенных частей высших порядков дает формула Тейлора (обобщение нашей Таблицы), она будет изучаться в курсе позже.

Степенно-показательные неопределенности. Важно уметь распознавать неопределенности типа 0^0, ∞^0, и 1^∞. Это делается с помощью перехода к экспоненте:

$$u^v = e^{v\ln u}.$$

Например,
$$1^\infty \neq 1 \qquad (!!!)$$
Действительно:
$$1^\infty = e^{\infty\cdot\ln 1} = e^{\infty\cdot 0},$$
то есть имеем неопределенность $\infty \cdot 0$. Неопределенность 1^∞ характерна для степенно-показательных функций. Пример — это второй замечательный предел:
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ (\neq 1!).$$

Так же проводится диагностика других неопределенностей и их сведение к неопределенности $0\cdot\infty$:
$$0^0 = e^{0\cdot\ln 0} = e^{0\cdot\infty},$$
$$\infty^0 = e^{0\cdot\ln\infty} = e^{0\cdot\infty}.$$
С другой стороны, в следующих пределах никаких неопределенностей нет:
$$0^{+\infty} = e^{(+\infty)\cdot\ln 0} = e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0,$$
$$0^{-\infty} = e^{(-\infty)\cdot\ln 0} = e^{(-\infty)\cdot(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

6.5 Домашнее задание

6.12. Найти главные степенные части и порядки малости бесконечно малых при $x\to 0$:

а) $\alpha(x) = 2x - 3x^3 + x^5$,

б) $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$,

в) $\alpha(x) = x\ln(1+2x)$,

г) $\alpha(x) = \left(e^{x^2}-1\right)\ln(1+e^x)$,

д) $\alpha(x) = \left(\sqrt[5]{1+x}-1\right)^{10}\cos\pi x$,

е) $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$,

ж) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$.

6.13. Указать порядки малости следующих бесконечно малых в нуле. В задачах, где используется рубрика "Равенство" Таблицы, привести решение двумя способами: через $\gamma(x)$ и через $o(x)$.

а) $\alpha(x) = \arcsin\sqrt{4+x^2}-2$,

б) $\alpha(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x},$

в) $\alpha(x) = \sqrt{1 + x^2} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2},$

г) $\alpha(x) = e^{\sin x} - 1,$

д) $\alpha(x) = \dfrac{7x^{10}}{x^3 + 1},$

е) $\alpha(x) = 0,03x^{0,03} + 0,9x^{0,9} - 2,1x^{2,1} + x.$

6.14. Выделить главную степенную часть бесконечно малой $\alpha(x)$ в точке $x = 1$:

а) $\alpha(x) = x^3 - 3x + 2,$

б) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}},$

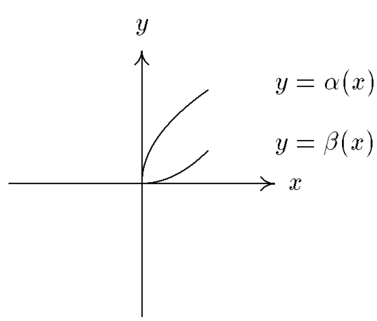
в) $\alpha(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - n.$

6.15. Доказать, что $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет 2-й порядок малости относительно x при $x \to 0$, если

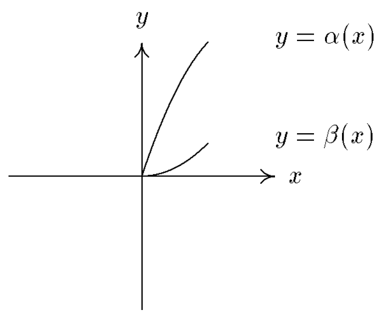
$$\alpha(x) = (1 + x)^n, \quad \beta(x) = 1 + nx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

6.16. Что можно сказать о порядках малости бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to 0$:

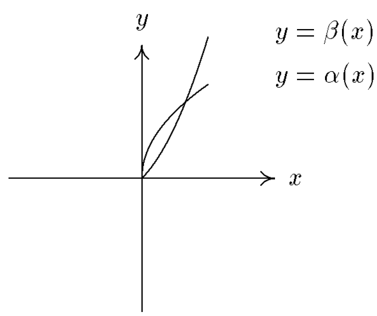
а)



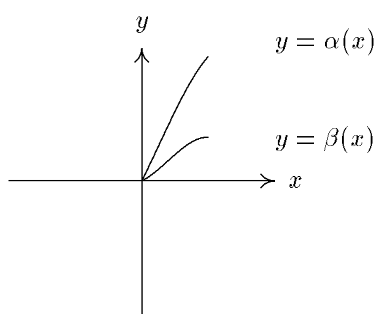
б)



в)



г)



6. 17. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{x}}{\sin 2x - \sin x} = 1.$$

6. 18. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}.$$

6. 19. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

6. 20. Доказать, что:

а) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}, \qquad x \to 0.$

б) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}, \qquad x \to +\infty.$

6. 21. Определить порядок функции $A(x)$ при $x \to \infty$, выделив главную степенную часть:

а) $A(x) = x^2 + 100x + 10000$,

б) $A(x) = x^{2/5} - x^{3/8} - x^{11/9} + x^{4/3}$,

в) $A(x) = \dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$,

г) $A(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$,

д) $A(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$,

е) $A(x) = \dfrac{x + 1}{x^4 + 1}$,

ж) $A(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$,

з) $A(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$.

6. 22. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{2x^2}$,

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3 + x}{7 + x} \right)^{\operatorname{cosec} \frac{2}{x}}$.

6. 23. Вычислить односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$,

б) $\lim\limits_{x\to1\pm0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

6. 24. Вычислить односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2-x+1\right)}{\ln\left(x^{10}+x+1\right)}$,

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$.

6. 25. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

б) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

6. 26. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0,$$

если $a>1,\ n>0$.

6. 27. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0,$$

если $a>1,\ \varepsilon>0$.

7 Приложения техники вычисления пределов

План

1. Непрерывность функции, заданной несколькими формулами.
2. Исследование точек разрыва функции.
3. Приложение Таблицы для приближенных вычислений.

7.1 Непрерывность

Исследование непрерывности функции в точке по определению сводится, в основном, к нахождению предела функции в этой точке.

Пример 7.1. Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 1, \\ ax^2-2, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Во-первых, функция $f(x)$ непрерывна при $x \neq 1$ при любом выборе a. Поэтому нужно подобрать a так, чтобы обеспечить непрерывность в точке $x = 1$. А именно, нужно обеспечить выполнение равенств

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = f(1).$$

Вычислим односторонние пределы и значение функции в точке $x = 1$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x-1) = 0, \\ &\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(ax^2-2) = a-2, \\ &f(1) = 0. \end{aligned}$$

Непрерывность функции в точке 1 равносильна равенству $a - 2 = 0$, из которого находим $a = 2$. Полученная функция

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 1, \\ 2x^2-2, & x > 1 \end{cases}$$

действительно непрерывна на всей числовой прямой (нарисуйте эскиз ее графика!).

Ответ. $a = 2$.

7. 1. Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$$

7.2 Исследование точек разрыва

Пример 7. 2. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию "по непрерывности":

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x.$$

Решение. Функция $f(x)$ элементарна и определена при $x \neq 0$, поэтому она заведомо непрерывна при $x \neq 0$. Найдем предел функции в нуле:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Итак, функция имеет конечный предел, но не определена при $x = 0$. То есть функция имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Доопределяя ее по непрерывности, получаем всюду непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

нарисуйте эскиз ее графика (чем он отличается от графика функции $\dfrac{\sin x}{x}$, изображенного на стр. 38 ?)

Ответ. $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

7. 2. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию по непрерывности:

а) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

б) $f(x) = \dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$,

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

7. 3. Исследовать точки разрыва следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}$,

б) $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

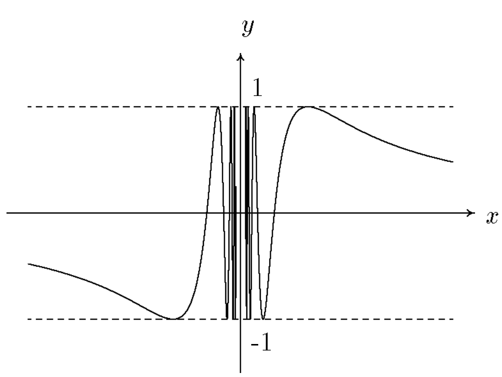
7. 4. Исследовать характер точек разрыва функции:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \leqslant x < 1, \\ x-1, & 1 < x \leqslant 4, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

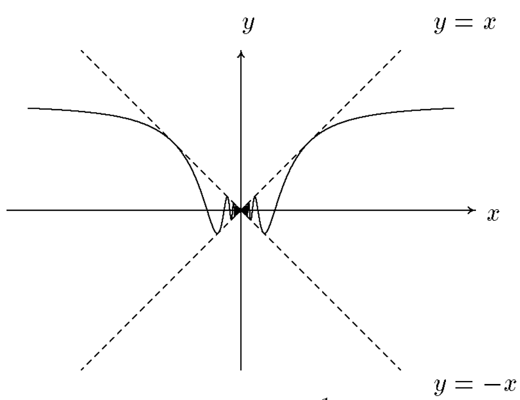
7. 5. Исследовать характер точек разрыва функций:

а) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$,

б) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.



$y = \sin \dfrac{1}{x}$



$$y = x\sin\frac{1}{x}$$

7.3 Приближенные вычисления

В основе метода приближенных вычислений лежит замена исходной функции на ей эквивалентную, более простую для вычислений. При этом относительная погрешность вычисления должна быть малой.

Сначала рассмотрим приближенные вычисления в окрестности $x = 0$. Предварительно преобразуем данную функцию так, чтобы можно было использовать Таблицу. Пусть

$$f(x) \sim Cx^r \text{ при } x \to 0, \qquad C \neq 0,$$

или, что то же самое,

$$f(x) = Cx^r + x^r\gamma(x), \qquad \gamma(x) \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

При x, достаточно близких к 0, можно приближенно заменить

$$f(x) \approx Cx^r,$$

при этом относительная погрешность мала:

$$\delta = \frac{x^r\gamma(x)}{Cx^r} = \frac{1}{C}\gamma(x) \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Теперь рассмотрим приближенные вычисления в окрестности $x = c$. Сделаем "сдвиг" в ноль: $x = (x-c)+c$, при этом $(x-c)$ достаточно малое число из окрестности $x = 0$. Задача сводится к предыдущей.

Пример 7. 3. Исходя из эквивалентности при $x \to 0$ функций

$$\sqrt{1+x}-1 \text{ и } \frac{x}{2},$$

вычислить приближенно $\sqrt{105}$.

Решение. Общий подход состоит в сведении задачи к вычислению значения функции в точке, близкой к "простой" точке:

$$f(x), \qquad |x| \text{ мало },$$

а значение функции $f(x)$ в точке 0 и ее поведение в окрестности этой точки известно. В нашем случае

$$\sqrt{105} = \sqrt{100 \cdot 1{,}05} = 10\sqrt{1{,}05}.$$

Ищем число

$$\sqrt{1{,}05} = \sqrt{1+0{,}05},$$

т.е. в данной задаче

$$f(x) = \sqrt{1+x}, \qquad x = 0{,}05.$$

Так как

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x \text{ при } x \to 0,$$

то

$$\sqrt{1+x}-1 \approx \frac{1}{2}x \text{ при малых } x.$$

Поэтому

$$\sqrt{1+0{,}05}-1 \approx \frac{1}{2}0{,}05 = 0{,}025.$$

Значит,

$$\sqrt{1+0{,}05} \approx 1{,}025,$$

то есть

$$\sqrt{105} \approx 10 \cdot 1{,}025 = 10{,}25.$$

Ответ. 10,25.

7. 6. Исходя из эквивалентности при $x \to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\dfrac{x}{2}$, вычислить приближенно:

а) $\sqrt{1632}$,

б) $\sqrt{0{,}021}$.

7. 7. Использовать эквивалентность $\ln(1+x)$ и x при $x \to 0$ для приближенного вычисления натуральных логарифмов следующих чисел:

а) 1,01;

б) 0,9.

7. 8. Приближенно вычислить:

а) $\dfrac{1}{1{,}03}$,

б) $(1{,}01)^5$.

7.4 Домашнее задание

7. 9. Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin x + b, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7. 10. Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию по непрерывности:

а) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$ (производная x^n при $x = 1$),

б) $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$,

в) $f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

7. 11. Исследовать точки разрыва следующих функций:

а) $f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

б) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$.

7.12. Исследовать характер точек разрыва функции:

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 4-2x, & 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, & 2,5\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

7.13. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{912}$,

б) $\sqrt{0{,}31}$,

в) $\ln 0{,}99$,

г) $\sqrt{25{,}3}$,

д) $(0{,}97)^4$.

7.14. Найдите приближенно числа:

а) $\cos 0{,}5$,

б) $\cos 0{,}1$,

в) $\sqrt{0{,}7}$,

г) $\sqrt{0{,}9}$

с помощью:

1) предела $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ (пункты а), б)) или $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}$ (пункты в), г)),

2) соотношения эквивалентности $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $x\to 0$ (пункты а), б)) или $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$, $x\to 0$ (пункты в), г)).

Учитывая "точные" значения:

а) $\cos 0{,}5=0{,}877582\ldots$,

б) $\cos 0{,}1=0{,}995025\ldots$,

в) $\sqrt{0{,}7}=0{,}8367\ldots$,

г) $\sqrt{0{,}9}=0{,}9487\ldots$,

сравните относительные погрешности приближенных вычислений способами 1) и 2). Результат проанализируйте.

Обратите внимание: для приближенных вычислений использовались формулы

$$\cos x \approx 1, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad x \to 0,$$
$$\sqrt{1+x} \approx 1, \qquad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \qquad x \to 0.$$

Если они не дают необходимой точности, можно получить более точные формулы:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \qquad x \to 0,$$
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}, \qquad x \to 0,$$

именно эти формулы использовались для нахождения "точных" значений выше. Такую приближенную формулу (любой заранее заданной точности в окрестности любой заданной точки) можно написать для любой элементарной функции, она называется *формулой Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \\ + \underbrace{\gamma(x)\cdot(x-a)^k}_{o((x-a)^k)}.$$

Здесь $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(k)}(a)$ — производные функции $f(x)$ в точке a порядка $1, 2, \dots, k$. Формула Тейлора — одна из важнейших в математическом анализе, мы будем изучать ее позже.

8 Образец варианта контрольной работы

Тема: Пределы последовательностей и функций

8. 1. Вычислить пределы следующих последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)$.

8. 2. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(3\operatorname{tg}x+8\sqrt{\sin 4x}\right)\cos x.$$

8. 3. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x^2-x-1}{4x^2-4x-3}.$$

8. 4. Найти главную степенную часть функции $y=f(x)$ при $x\to 0$; указать порядок малости функции $y=f(x)$; нарисовать эскиз графика функции в окрестности точки $x=0$:

$$f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

8. 5. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x^2\operatorname{arctg}2x}{\sin 5x^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}\sin^2 x}$.

9 Методические замечания

9.1 Значение темы

На взгляд авторов, цикл уроков по теме "Пределы последовательностей и функций" имеет важное постановочное значение для всего двухгодичного курса анализа (и других математических дисциплин) в университете.

Первое, что формируется в процессе работы, — это взгляд на функцию как на *целостный объект* с одной стороны, а с другой стороны, как на *динамический процесс* зависимости одной величины от другой (а не процесс поточечного вычерчивания графика). Эти качества функции выпукло демонстрирует числовая последовательность: бесконечный и динамический ($n \to \infty$) по своему внутреннему устройству объект, свойства которого как *целого* изучаются: ограниченность, монотонность, сходимость.

Динамический взгляд на функцию (x меняется как движущаяся точка и вместе с ней по некоторому правилу меняется y как другая движущаяся точка) позволяет легче и более естественно понять постановку задачи: имеет ли функция $y = f(x)$ *предел* при x, *стремящемся* к a. Это восприятие функции облегчает понимание формального ε - δ языка, бесконечно малых и бесконечно больших, их порядков.

Восприятие функции как целостного объекта и необходимость оперировать с функциями как "реалиями" с определенными свойствами помогает понять задачу сравнения бесконечно малых и бесконечно больших.

Осваивая начальные понятия анализа (предел, бесконечно малые, бесконечно большие, их порядки), мы формируем правильную точку зрения на функции, необходимую для курсов высшей математики в университете.

9.2 Содержание и методическое значение уроков

9.2.1 Вводный урок

Урок 1: Числовая последовательность и ее предел. Понятие последовательности, ее свойства (монотонность и непрерывность), предел последовательности, его вычисление для рациональных последовательностей.

9.2.2 Диагностический цикл

Урок 2: Предел функции. Урок постановочный, помогает освоить понятие предела функции и основные теоремы, с помощью которых вычисляются простейшие пределы. Цель урока — обучение диагностике предела: в какой точке рассматривается предел, как ведет себя функция в этой точке, какие теоремы применимы для вычисления предела (до появления неопределенностей).

Предел функции и непрерывность, теоремы о пределах, основные соотношения для бесконечно больших.

Урок 3: Раскрытие простейших неопределенностей. Развитие техники вычисления пределов, обучение диагностике, теперь неопределенностей типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$. Этот урок — естественное продолжение линии диагностики Урока 2.

Вычисление рациональных пределов типа $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, а также пределов иррациональностей.

Урок 4: Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов сведением к двум замечательным пределам. Диагностика и раскрытие неопределенностей типов $\frac{0}{0}$ и 1^{∞}. Вычисление пределов, необходимых для Таблицы эквивалентных бесконечно малых.

9.2.3 Центральный цикл: Эквивалентность

Урок 5: Эквивалентные бесконечно малые. Анализ серии пределов, полученных в Уроке 4. Построение Таблицы эквивалентных бесконечно малых, ее освоение. Разрешение неопределенностей и вообще вычисление пределов с помощью рубрики "эквивалентность" Таблицы. Теоремы о пределах эквивалентных функций. Вычисление пределов непосредственным использованием Таблицы, а также с помощью замены переменных + Таблицы.

Урок 6: Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Порядки малости и роста, главные степенные части бесконечно малых и бесконечно больших. Вычисление пределов с помощью рубрики "равенство" Таблицы. Работа с o-малыми, сначала без этого символа, а потом с ним. Локальное поведение функции, асимптотическое поведение функции на бесконечности. Степенно-показательные неопределенности. Односторонние пределы.

9.2.4 Заключительный цикл

Урок 7: Приложения техники вычисления пределов. Непрерывность функции, заданной несколькими формулами. Исследование точек разрыва функции. Приложение Таблицы для приближенных вычислений.

Урок 8: Образец варианта контрольной работы. Контрольная работа по теме "Пределы последовательностей и функций".

9.3 Особенности курса

При создании курса авторы стремились к тому, чтобы научить студентов (специальности Прикладная математика) осмысленно владеть основными понятиями, связанными с понятием предела, и обучить их эффективной технике вычисления пределов разной степени сложности, оставаясь в рамках программы по времени (примерно 8 занятий по 2 часа).

На этом пути авторов вдохновлял пример сборника И.А. Виноградовой, С.Н. Олехника, В.А. Садовничего [3]. В этом задачнике почти с самого начала вводится таблица тейлоровских разложений основных элементарных функций в нуле, и вычисление пределов сводится к этой таблице с помощью техники o-малых. Так можно быстро научиться вычислять сложные пределы, не прибегая ко многим искусственным и частным приемам (умножение на сопряженный множитель, подгонка под шаблонные пределы), а также к правилу Лопиталя.

Прямое использование такого подхода авторами для студентов - прикладных математиков оказалось не очень эффективным, т.к. оно требует высокого уровня математической культуры. Данный курс — попытка авторов применить указанный подход в более широкой аудитории.

Основным методом вычисления "сложных" пределов (т.е. пределов, содержащих неопределенности) было выбрано применение Таблицы эквивалентных бесконечно малых (по сути, формулы Тейлора порядка 1 для $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, a^x, $\log_a x$, $(1+x)^a$ и порядка 2 для $\cos x$). С помощью замен переменных (линейных и нелинейных) область применимости этой Таблицы существенно расширяется, а скорость вычислений заметно возрастает. При этом более простые из "сложных" пределов (произведения и частные бесконечно малых) берутся применением рубрики "эквивалентность" Таблицы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{2x\operatorname{tg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2},$$

а более сложные (суммы бесконечно малых) — с помощью рубрики "равенство" Таблицы:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x+\sin x^2-1}{\operatorname{arctg}\sin^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2-(1-\cos 3x)}{\operatorname{arctg}\sin^2 x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2\gamma_1(x)-\left(\dfrac{(3x)^2}{2}+x^2\gamma_2(x)\right)}{x^2+x^2\gamma_3(x)}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{7}{2}+\gamma_4(x)}{1+\gamma_3(x)}=-\frac{7}{2},\qquad \gamma_i\ \to 0 \text{ при } x\to 0.\end{aligned}$$

При этом понятие и символика o-малых вводятся на заключительном этапе (освоение этих понятий требует довольно много сил и времени). Первоначально вместо них мы оперируем с бесконечно малыми: пишем $x\cdot\gamma(x)$, $\gamma(x)\to 0$, вместо $o(x)$ и т.п. Это экономит время и не скрывает от студентов смысл происходящего при работе с бесконечно малыми разных порядков. Освоив эту технику, студенты без особого труда переходят к использованию символики o-малых.

Таким образом, наша главная цель с точки зрения вычисления пределов — освоение и применение Таблицы эквивалентных бесконечно малых.

После этого мы учимся вычислять разнообразные пределы, находить порядки малости и главные степенные части бесконечно малых. Завершается курс некоторыми приложениями пределов.

До этого мы подымаемся к нашей вершине: знакомимся с понятием предела, бесконечно малой и бесконечно большой, основными правилами работы с ними; учимся распознавать и вычислять "простые" пределы (берущиеся на основе непрерывности элементарных функций, с помощью арифметических свойств предела, простых теорем о бесконечно больших и бесконечно малых, иными словами, не содержащие неопределенностей). Мы научаемся проводить диагностику предела (определять его тип, например: непрерывная функция, $\frac{1}{\infty}$, или $\frac{0}{0}$). Наконец, с помощью двух замечательных пределов вычисляем пределы, дающие Таблицу эквивалентных бесконечно малых.

Мы стараемся не задерживаться на различных частных способах вычисления пределов, максимально быстро двигаясь к Таблице эквивалентных. Освоив Таблицу, мы в состоянии брать довольно сложные пределы. Например:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x} = e^{-1},$$

так как

$$\operatorname{ctg}(\pi x)\ln(1+\sin\pi x) \sim \operatorname{ctg}(\pi x)\sin\pi x = \cos\pi x \to -1 \text{ при } x\to 1.$$

Затрагиваются вопросы из дальнейшего курса анализа, которые можно обсудить уже при изучении пределов: попутно вычисляются пределы, дающие производные основных элементарных функций, рассматриваются асимптоты графиков функций, дается понятие о правиле Лопиталя и формуле Тейлора (см. алфавитный указатель на стр. 89).

В подготовительной части понятие предела довольно подробно разбирается для последовательности, с тем чтобы не останавливаться надолго на определении предела функции. Большое значение с самого начала придается диагностике типов пределов.

Всюду, где это помогает изложению, мы старались использовать геометрический язык и наглядные иллюстрации (см. рисунки на стр. 38, 40, 46–48, 56, 57, 70, 71, 94).

Отметим, что в данном пособии пределы вычисляются без использования производных (то есть без правила Лопиталя и формулы Тейлора), так как традиционно дифференциальное исчисление изучается в курсе анализа после теории пределов. Применение дифференциального исчисления существенно обогащает технику вычисления пределов (например, некоторые из пределов, вычисленных в данном пособии с помощью эквивалентных бесконечно малых, берутся проще по правилу Лопиталя). Однако большинство задач в пособии решается проще именно с помощью развитой здесь техники, этим во многом определялся подбор задач. При исследовании же сложных пределов обычно разумно сочетать разные приемы.

Большое внимание, уделяемое в пособии вопросам эквивалентности и порядкам бесконечно малых, вполне оправдывается при изучении формулы

Тейлора: ведь Таблица эквивалентных бесконечно малых — это простейший вариант формулы Тейлора для основных элементарных функций.

По мнению авторов, принятый в этом пособии внимательный взгляд на природу и свойства бесконечно малых соответствует их значению для математического анализа в целом — ведь название этой дисциплины можно расшифровать как математический анализ функций посредством исчисления *бесконечно малых*! Такая точка зрения оправдана также ролью бесконечно малых в истории математики: потенциальная и актуальная бесконечность, исчезающие величины и роговые углы в методе флюксий И. Ньютона, дифференциалы в дифференциальном исчислении Г.В. Лейбница, нестандартный анализ ... В остальном, утешением авторам служил первый эпиграф к данному пособию.

Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту пособия профессору А.М. Цирлину за внимание к их работе и многочисленные полезные замечания.

Список литературы

[1] Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* — М.: Наука, 1985.

[2] Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. *Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа.* — М.: Наука, 1993.

[3] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[4] Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1990.

[5] Зорич В.А. *Математический анализ, ч.1.* — М.: Наука, 1981.

[6] Кириллов А.А. *Что такое число?* — М.: Наука, 1993.

[7] Курант Р. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1.* — М.: Наука, 1967.

[8] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика?* — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

[9] Рудин У. *Основы математического анализа.* — М.: Мир, 1976.

[10] Шипачев В.С. *Сборник задач по высшей математике.* — М.: Высш. шк., 1993.

[11] *Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей. Пособие для студентов пед. ин-тов.* Под. ред. А.П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1977.

Алфавитный указатель

Ответы

1. Числовая последовательность и ее предел

1.1. а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; б) $-1, -3, -5, -7, -9$; в) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$; г) $6, 12, 24, 48, 96$; д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$; е) $-1, 1, -1, 1, -1$; ж) $1, 0, -1, 0, 1$; з) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$.

1.2. а) $\frac{1}{3^n}$; б) $\frac{n}{n+1}$; в) $\sin\frac{\pi(1-n)}{2}$; г) $n!$; д) $(-1)^n 2n$.

1.3. а) да; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) нет; ж) нет.

1.4. а) убывающая; б) невозрастающая; в) невозрастающая; г) убывающая при $k > 0$, возрастающая при $k < 0$, постоянная при $k = 0$; д) неубывающая.

1.9. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{15}{17}$; в) 3.

1.10. а) 1; б) 1; в) 0.

1.12. $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}$.

1.13. а) $(-1)^n\frac{2n+1}{2n-1}$; б) $1+(-1)^n$; в) $n^{(-1)^n}$.

1.14. убывающая и ограниченная.

1.16. а) ∞; б) 0; в) 0; г) $\frac{4}{3}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{1-q}$; ж) 1.

1.18. а) $1/4$; б) ∞.

1.20. $t = \sqrt{\frac{h}{g}}\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}$, $s = h\frac{1+q}{1-q}$.

2. Предел функции

2.1. а) C; б) a; в) a^n; г) $2\sqrt{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) $\frac{\pi}{4}$; и) $\frac{1}{10}$; й) 1.

2.2. а) 9; б) 2; в) 1; г) $\ln 3$.

2.3. 1.

2.4. а) -2; б) ∞; в) -1.

2.5. а) ∞; б) 0; в) $-\infty$; г) $+\infty$; д) $+\infty$.

2.6. а) $2+\log_2 5$; б) 0; в) $\frac{\pi^2}{4}$; г) $\frac{3}{4}$.

2.7. а) 0; б) 0.

2.8. а) $-\infty$; б) 0; в) $-\infty$; г) ∞; д) ∞; е) 0; ж) ∞; з) $+\infty$; и) $+\infty$; й) 0.

2.9. а) 1; б) a.

2.11. а) не существует; б) может существовать или не существовать.

2.12. $f(x(t_0))$.

2.13. а) элементарна; б) не элементарна; в) элементарна.

2.14. а) непрерывна; б) разрывна; в) непрерывна.

3. Раскрытие простейших неопределенностей

3.1. а) ∞; б) 100; в) 0 при $n < m$, $\dfrac{a_n}{b_n}$ при $n = m$, ∞ при $n > m$.

3.2. а) $-\dfrac{2}{5}$; б) ∞.

3.3. а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{n}{m}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3.4. а) 1; б) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3.5. а) $+\infty$; б) 2.

3.6. а) 1; б) $\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{2}{3}$.

3.7. а) 5^{-5}; б) $x + \dfrac{a}{2}$.

3.8. а) $-\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{4}$; в) na^{n-1}.

3.9. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{1}{144}$; в) $\dfrac{1}{4}$; г) $\dfrac{3}{2}$; д) $\dfrac{m}{n}a^{\frac{m-n}{n}}$.

3.10. $\dfrac{1}{2}(a+b)$.

4. Первый и второй замечательные пределы

4.1. а) 1; б) 1; в) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; г) $\dfrac{1}{3}$; д) $\dfrac{3}{4}$; е) $\dfrac{1}{2}$; ж) $-\dfrac{3}{2}$.

4.2. а) $\dfrac{1}{e}$; б) e^{mk}.

4.3. а) 2; б) 1; в) 1; г) e^6; д) 1; е) $\alpha a^{\alpha-1}$; ж) $\dfrac{1}{a}$; з) $e^{-\frac{1}{2}}$.

4.4. а) 5; б) $\dfrac{1}{3}$; в) 2; г) $\dfrac{1}{2}$; д) $\dfrac{1}{2}$; е) $\dfrac{2}{\pi}$; ж) $\cos a$; з) $-\sin a$; и) $a^\alpha \ln a$.

4.5. а) e^{2a}; б) 0; в) e^{-2}.

4.6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) 1.

4.7. а) неограниченная, не бесконечно большая; б) неограниченная, бесконечно большая; в) ограниченная, не бесконечно большая; г) ограниченная, не бесконечно большая.

5. Эквивалентные бесконечно малые

5.1. а) $\frac{2}{3}$; б) 1; в) 0.

5.3. а) $\log_a e$; б) $\ln a$;

5.4. а) $\ln a$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$.

5.5. а) $-\ln 10$; б) $a \ln a$; в) -2.

5.6. $\ln a$.

5.7. а) $\frac{1}{2}$; б) -6; в) $\frac{2}{3}$.

5.9. а) $a - b$; б) $\frac{3}{5}$; в) 3; г) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$.

5.10. а) $\frac{1}{3 \ln 3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{8}{7}$; д) $\frac{1}{e}$; е) $\frac{n}{m}$.

5.13. -2.

6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших

6.1. а) $-0,1x$, $r = 1$; б) x^2, $r = 2$; в) $\frac{1}{12}x^3$, $r = 3$; г) $x^2 5 \ln 2$, $r = 2$; д) $2x$, $r = 1$; е) $\frac{1}{2}x^3$, $r = 3$; ж) $-\frac{1}{2}x^2$, $r = 2$; з) $x^{2/3}$, $r = \frac{2}{3}$; и) $x^{1/2} \ln 3$, $r = \frac{1}{2}$; й) $3x^{1/3}$, $r = \frac{1}{3}$.

6.2. а) $10(x - 1)$; б) $8\pi(x - 1)^3$.

6.3. а) $r = \frac{1}{2}$; б) $r = 1$; в) $r = 2$; г) $r = \frac{2}{3}$; д) $r = 1$; е) $r = 1$.

6.5. а) $-\frac{1}{2}$; б) 1.

6.6. а) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{e}$; в) e; г) e^{-1}; д) $\frac{5}{12}$; е) -1.

6.7. а) $\frac{1}{5}x^5$, $r = 5$; б) $-0,1x^{1,1}$, $r = 1,1$.

6.9. а) $r = 1$; б) $r = \frac{1}{2}$; в) $r = \frac{1}{6}$; г) $r = 2$; д) $r = \frac{2}{3}$.

6.10. а) e; б) $\frac{5}{3}$.

6.11. а) $+1$, -1; б) $+\infty$, 0; в) 2, -2.

6.12. а) $2x$, $r=1$; б) $\frac{1}{2}x$, $r=1$; в) $2x^2$, $r=2$; г) $x^2\ln 2$, $r=2$; д) $\frac{1}{5^{10}}x^{10}$, $r=10$; е) $\frac{1}{2\sqrt{2}}x$, $r=1$; ж) $\frac{1}{3}x^{1/3}$, $r=\frac{1}{3}$.

6.13. а) $r=2$; б) $r=2$; в) $r=1$; г) $r=1$; д) $r=10$; е) $r=0,03$.

6.14. а) $3(x-1)^2$; б) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(x-1)^{1/3}$; в) $\frac{n(n+1)}{2}(x-1)$.

6.16. а) порядок $\alpha(x)$ меньше 1, порядок $\beta(x)$ больше 1; б) порядок $\alpha(x)$ равен 1, порядок $\beta(x)$ больше 1; в) порядок $\alpha(x)$ меньше 1, порядок $\beta(x)$ равен 1; г) порядки $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ равны 1.

6.18. $\frac{1}{2}$.

6.19. а) 1; б) $\sqrt{e}$.

6.21. а) x^2, $r=2$; б) $x^{4/3}$, $r=\frac{4}{3}$; в) $2x^2$, $r=2$; г) $x^{2/3}$, $r=\frac{2}{3}$; д) $x^{1/8}$, $r=\frac{1}{8}$; е) $\frac{1}{x^3}$, $r=-3$; ж) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $r=-\frac{1}{2}$; з) $\frac{1}{x^2}$, $r=-2$.

6.22. а) e^{-2}; б) e^{-2}.

6.23. а) 0; б) $\mp\frac{\pi}{2}$.

6.24. а) $\ln 8$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{2}$.

6.25. а) 1; б) 0.

7. Приложения техники вычисления пределов

7.1. $A=3$.

7.2. а) $x=0$— точка устранимого разрыва; $f(0)=\frac{1}{2}$; б) $x=-2$ — точка разрыва I-го рода; в) $x_1=0, x_2=1$ — точки разрыва II-го рода.

7.3. а) $x=2$ — точка разрыва I-го рода; б) $x=0$— точка устранимого разрыва; $x_1=-1, x_2=1$ — точки разрыва II-го рода.

7.4. $x=1$ — точка разрыва I-го рода.

7.5. а) точка разрыва II рода, б) устранимая точка разрыва.

7.6. а) 40,4; б) 0,145.

7.7. а) 0,01; б) -0,1.

7.8. а) 0,97; б) 1,05.

7.9. $b=\frac{\pi a}{2}$.

7.10. а) $x = 0$— точка устранимого разрыва; $f(0) = n$; б) $x = \dfrac{5}{3}$ — точка разрыва I-го рода; в) $x_1 = 2, x_2 = -2$ — точки разрыва II-го рода.

7.11. а) $x = 0$ — точка разрыва I-го рода; б) $x_1 = 0$ — точка устранимого разрыва; $x_2 = 1$ — точка устранимого разрыва; $x_3 = -1$ — точки разрыва II-го рода.

7.12. $x = 2,5$ — точка разрыва I-го рода.

7.13. а) 30,2; б) 0,558; в) $-0{,}01$; г) 5,03; д) 0,88.

7.14. а) 1) 1; $\delta = 13{,}9\%$; 2) 0,875; $\delta = 0{,}3\%$; б) 1) 1; $\delta = 0{,}5\%$; 2) 0,995; $\delta = 0{,}003\%$; в) 1) 1; $\delta = 19{,}5\%$; 2) 0,85; $\delta = 1{,}6\%$; г) 1) 1; $\delta = 5{,}4\%$; 2) 0,95; $\delta = 0{,}3\%$.

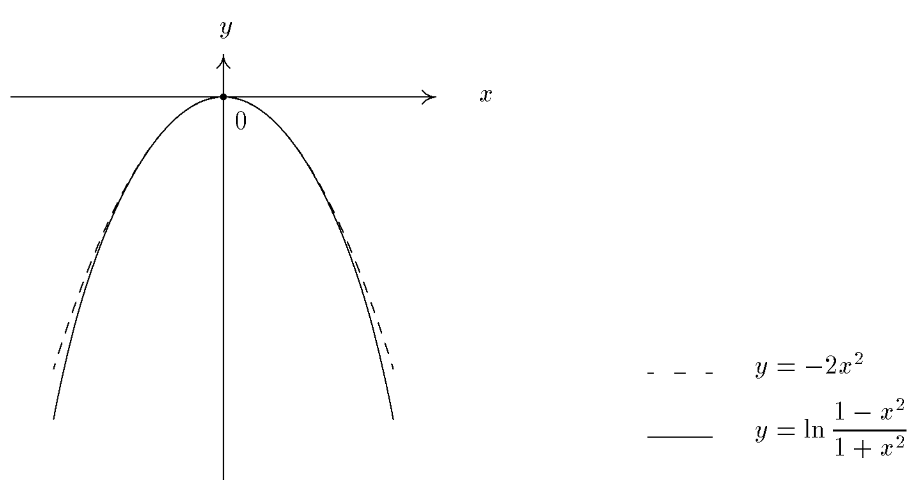
8. Образец варианта контрольной работы

8.1. а) $\dfrac{1}{5}$; б) $+\infty$.

8.2. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

8.3. $\dfrac{3}{8}$.

8.4. $\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \sim -2x^2$ при $x \to 0$; порядок малости 2.



8.5. а) $\dfrac{2}{5}$; б) 3.