Содержание

0 Рекомендации по освоению техники дифференцирования

0.1 Таблица производных основных элементарных функций

$C' = 0,$

$(x^a)' = ax^{a-1},$

$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ (\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin x}.$

$(a^x)' = a^x \ln a,\ (e^x)' = e^x.$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};\ (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x;\ (\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x;\ (\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\, x};\ (\mathrm{cth})' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\, x};$

0.2 Основные правила дифференцирования

$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}',\ (\mathbf{uv})' = \mathbf{u'v} + \mathbf{uv}',\ \left(\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \dfrac{\mathbf{u'v - uv'}}{\mathbf{v^2}},\ (\mathbf{Cu})' = \mathbf{Cu}'.$

Правило дифференцирования сложной функции:

$[\mathbf{f}(\mathrm{g}(\mathbf{x}))]' = \mathbf{f}'(\mathrm{g}(\mathbf{x}))\mathrm{g}'(\mathbf{x}).$

Правило дифференцирования степенно-показательной функции:

$\mathbf{u(x)^{v(x)} \equiv e^{v(x)\ln u(x)}}$, $\mathbf{(u(x) > 0,\ v(x) \not\equiv 1)}$;

$\left(\mathbf{u(x)^{v(x)}}\right)' = \left(\mathbf{e^{v(x)\ln u(x)}}\right)'$.

0.3 "Архитектура" сложных функций: некоторые упражнения

0.1. Дана функция $f(u) = u^3 - 1$. Найти: $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

Ответ: **0.1.** $f(1) = 0$; $f(a) = a^3 - 1$; $f(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a$; $f(a-1) = a^3 - 3a^2 + 3a + 2$; $2f(2a) = 16a^3 - 2$.

0.2. Дана функция $\varphi(t) = t^3 + 1$. Найти $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

Ответ: **0.2.** $\varphi(t^2) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t^6 + 2t^3 + 1$.

0.3. Дано: $y = z^2$; $z = x + 1$. Выразить y как функцию x.

Ответ: **0.3.** $y = (x+1)^2$.

0.4. Дано: $y = z^2$; $z = \sqrt[3]{(x+1)}$; $x = a^t$.
Выразить y как функцию t.

Ответ: **0.4.** $\sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

0.5. Дано: $y = \sin x$; $v = \lg y$; $u = \sqrt{1+v^2}$.
Выразить u как функцию x.

Ответ: **0.5.** $u = \sqrt{1 + (\lg\sin x)^2}$.

0.6. Следующие сложные функции представить с помощью цепочек, составленных из основных элементарных функций:

а) $y = \sin^3 x$;

б) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

в) $\lg\operatorname{tg} x$;

г) $\sin^3(2x+1)$;

д) $5^{(3x+1)^2}$.

Ответ: **0. 6.** а) $y = v^3,\ v = \sin x$; б) $y = \sqrt[3]{v},\ v = u^2,\ u = x + 1$; в) $y = \lg v,\ v = \operatorname{tg} x$;
г) $y = u^3,\ u = \sin v,\ v = 2x + 1$; д) $y = 5^u,\ u = v^2,\ v = 3x + 1$.

0. 7. $f(x) = x^3 - x$; $\varphi(x) = \sin 2x$. Найти:

а) $f\left[\varphi\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$;

б) $\varphi[f(1)]$;

в) $\varphi[f(2)]$;

г) $f[\varphi(x)]$;

д) $f[f(x)]$;

е) $f(f[f(1)])$;

ж) $\varphi[\varphi(x)]$.

Ответ: **0. 7.** а) $-\dfrac{3}{8}$; б) 0; в) $\sin 12$; г) $-\sin 2x \cos^2 2x$; д) $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$; е) 0; ж) $\sin(2 \sin 2x)$.

0.4 Примерный план вычисления поизводной и пример.

1. "Диагностика": анализ "конструкции" функции:

- является произведением (частным) некоторых функций;

- эти функции являются основными элементарными или сложными;

1.2

- если функция сложная, надо представить ее в виде цепочки основных элементарных функций;

- выписать соответствующие производные из Таблицы производных;

- выписать необходимые правила дифференцирования;

1.3

-обосновывая каждый шаг, вычислять производную: если функция есть произведение (частное) функций, то сначала по нужному правилу расставить "штрихи", затем их раскрывать, учитывая "диагностику" функции.

1.4 упростить ответ.

1 Введение: понятие производной

Цель: Знакомство с понятием производной.

План

1. Мгновенная скорость.
2. Приращение аргумента и приращение функции, главная степенная часть приращения функции.
3. Отношение приращения функции к приращению аргумента. Вычисление производной по определению.

1.1 Мгновенная скорость

1.1. Дано уравнение прямолинейного движения точки: $s = 5t + 6$. Определить среднюю скорость движения:а) за первые 6 сек., б) за промежуток времени от конца третьей до конца шестой секунды.

Ответ: **1.1.** а) 5 м/с; б) 5 м/с.

1.2. Свободно падающее тело движется по закону $s = gt^2/2$, где $g = 9{,}8$ м/с^2 есть ускорение силы тяжести. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 5$ с до $(t + \Delta t)$ с, полагая $\Delta t = 1$ с; 0,1 с; 0,05 с; 0,001 с; найти скорость падающего тела в конце пятой секунды, в конце десятой секунды. Получить формулу для скорости падающего тела для любого момента времени t.

Ответ: **1.2.** а) 53,9 м/с; б) 49,49 м/с; в) 49,25 м/с; г) 49,005 м/с; д) 49,0 м/с; е) 98,0 м/с; ж) $v = 9,8t$ м/с.

1.2 Приращение аргумента и приращение функции

1.3. Найти приращение функции $y = x^3$ в точке $x_1 = 2$, если приращение аргумента равно:а) 2; б) 1; в) 0,5; г) 0,1. Ответ проанализируйте.

Ответ: **1.3.** а) 56; б) 19; в) 7,625; г) 1,261.

1. 4. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y(x) = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

Ответ: **1. 4.** а) $\Delta x = 999$, Δy=3.

1. 5. Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$, если $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}25$.

Ответ: **1. 5.** 0,5.

1. 6. Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$ как функцию Δx, если $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/2$.

Ответ: **1. 6.** $\cos(\Delta x) - 1$.

Если проанализировать ответ к этой задаче, то, полагая Δx малой величиной, можно выделить главную степенную часть и определить порядок малости функции $\Delta \sin(\pi/2, \Delta x)$. Порядок малости, если вспомнить Таблицу эквивалентных, равен 2.

1. 7. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение Δy, если а)$y = ax + b$, б) $y = ax^2 + bx + c$.

Ответ: **1. 7.** а) $a\Delta x$; б) $(2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$.

Если проанализировать ответы к последей задаче, то можно увидеть главную степенную часть функции $\Delta y(\Delta x)$ в любой точке x. Она является линейной.

1.3 Определение производной

1.3.1 Отношение приращения функции к приращению аргумента

1. 8. Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций: а)$y = 2x^3 - x^2 + 1$ при $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$; б) $y = 1/x$ при $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}01$. Показать, что при $\Delta x- > 0$ предел этого отношения в первом случае равен 4, во вторм равен -1/4.

Ответ: **1. 8.** а) 4,52; б) -0,249.

1. 9. Доказать, что если функция $f(x)$ возрастает, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, если убывает, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

1.3.2 Вычисление производной по определению

1.10. Исходя из определения производной непосредственно найти производные следующих функций :

а) $y = 5x^2$,

б) $y = \sqrt{x}$

в) $y = \frac{1}{2x+1}$

г) $y = 2^x$

Ответ: **1.9.** а) $10x$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{-2}{(2x+1)^2}$; г) $2^x \ln 2$.

1.11. Найти $f'(1)$, если $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

Ответ: **1.10.** $1 + \pi/4$.

1.12. Найти $f'(x_0)$, если $f(x) = (x - x_0)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

Ответ: **1.11.** $\varphi(x_0)$. Воспользоваться определением производной.

1.4 Домашнее задание

1.4.1 "Мгновенная скорость"

1.13. В тонком неоднородном стержне AB длиной 30 см масса (в граммах) распределена по закону $m = 3l^2 + 5l$, где l — длина части стержня, отсчитываемая от точки A.

Найти :а) среднюю линейную плотность стержня, б) линейную плотность в точке, отстоящей от точки A на расстоянии $l = 5$ см; в)линейную плотность в самой точке A, г)линейную плотность в конце стержня.

Ответ: **1.12.** а) 95 г/см; б) 35 г/см; в) 5 г/см; г) 185 г/см.

1.14. Через точки $A(2,4)$ и $A'(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA'. Найти угловой коэффициент этой секущей, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0{,}1$; в)$\Delta x = 0{,}01$; г)Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A?

Ответ: **1.13.** а) 5; б) 4,1; в) 4,01; г) $4+\Delta x$; д) 4.

1.4.2 Приращение аргумента и приращение функции

1.15. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \frac{1}{x^2}$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

Ответ: **1.14.** $\Delta x = -0{,}009$, $\Delta y = 990000$.

1.16. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение Δy, если $y(x) = a^x$.

Ответ: **1.15.** $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

1.17. Дана функция $y = x^2$. Найти приближенные значения производной в точке $x = 3$, если Δx равно:а) 0,5;б) 0,1; в) 0,01; г)0,001.

Ответ: **1.16.** а) 6,5; б) 6,1; в) 6,01; г) 6,001.

1.18. Пользуясь только определением производной, найти $f'(x)$: $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Ответ: **1.17.** $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

1.19. Найти $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, если $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Ответ: **1.18.** а) -8; б) 0; в) 0.

1.20. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

Ответ: **1.19.** 4.

1. 21. Известно, что $f(0) = 0$ и существует $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. Доказать, что этот предел равен $f'(0)$.

++

Пример 1. 1.

Решение.

Ответ.

1. 22. Задача без решения с подпунктами

а) пункт задачи

б) Привет

Ответ: **1. 20.** а) б)

Пример 1. 2. Разобранный пример на доказательство (без ответа)

Решение.

1. 23. Задача без подпунктов

1. 21. *Ответа нет.* **1. 24.** Задача без подпунктов

Ответ: **1. 22.** а) б)

2 Техника дифференцирования степенных функций

Цель: Развить навыки беглого вычисления производных

План

1. Производная константы, табличная производная степени; производная суммы.
   $(C', \ (x^a)', \ (u \pm v)')$
2. Производная произведения функций.
   $((uv)', \ (uvg)')$
3. Производная частного функций.
   $(\left(\dfrac{u}{v}\right)')$
4. Производная степени функции $f(x)$ — производная сложной функции.
   $((f(x)^a)')$
5. Разные функции из класса степенных.

2.1 Упражнения на дифференцирование функций

Справочный материал: $C' = 0, \ (x^a)' = ax^{a-1}, \ (u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. 1. Найти производные следующих функций:

а) $3x^2 - 5x + 1$;

б) $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$;

в) $\dfrac{x}{n} + \dfrac{n}{x} + \dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{m^2}{x^2}$;

г) $\dfrac{mx^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{p\sqrt{x}}{x}$.

Ответ: **2.1.** а) $6x-5$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$; в) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{n}{x^2}+\dfrac{2x}{m^2}-\dfrac{2m^2}{x^3}$;
г) $\dfrac{3m}{2}\sqrt{x}+\dfrac{7n}{6}\sqrt[6]{x}+\dfrac{p}{2x\sqrt{x}}$.

Справочный материал: $(uv)'=u'v+uv'$, $(uvg)'=u'vg+uv'g+uvg'$.

2.2. Вычислить производные следующих функций:

а) $(x-a)(x-b)$;

б) $(x-0{,}5)^2$;

в) $\sqrt{x}(x^3-\sqrt{x}+1)$;

г) $(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;

д) $(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

Ответ: **2.2.** а) $2x-(a+b)$; б) $2x-1$; в) $3{,}5x^2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$;
г) $4x^3-3x^2-8x+9$; д) $2x(3x^4-28x^2+49)$.

Справочный материал: $\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$.

2.3. Вычислить производные следующих функций:

а) $\dfrac{1}{x^3+3x-1}$;

б) $\dfrac{x+1}{x-1}$;

в) $\dfrac{2x}{1-x^2}$;

г) $\dfrac{v^3-2v}{v^2+v+1}$;

д) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Ответ: **2. 3.** а) $\dfrac{-3(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$; б) $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$; в) $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$; г) $\dfrac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$; д) $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

Справочный материал: $(f^a)' = af^{a-1}f'$.

2. 4. Вычислить производные сложных функций:

а) $(x^2+1)^4$;

б) $(1-x)^{20}$;

в) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$;

г) $\sqrt{1-x^2}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

е) $\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$;

Ответ: **2. 4.** а) $8x(x^2+1)^3$; б) $-20(1-x)^{19}$; в) $-4\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$; г) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; д) $\dfrac{x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$;
е) $\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$.

2. 5. Продифференцировать следующие функции:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$;

в) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

г) $\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

Ответ: **2. 5.** а) $-2\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}+\dfrac{15x}{4\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}\right)$;

б) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}, y'(0)=0$;

в) $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

г) $\dfrac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$.

2.2 Домашнее задание

Справочный материал: $C'=0$, $(x^a)'=ax^{a-1}$, $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

2. 6. Вычислить производные следующих функций:

а) $2+x-x^2$;

б) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$;

в) $a^5+5a^3x^2-x^5$;

г) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$;

д) $x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

е) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

ж) $\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

з) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Ответ: **2.6.** а) $1-2x$; б) x^2+x-2; в) $10a^3x-5x^4$; г) $-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}\right)$; д) $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; е) $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$; ж) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$; з) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$.

Справочный материал: $(uv)'=u'v+uv'$, $(uvg)'=u'vg+uv'g+uvg'$.

2.7. Вычислить производные следующих функций:

а) $(x-6)(x-8)$;

б) $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$;

в) $(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$;

Ответ: **2.7.** а) $2x-14$; б) $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$; в) $x\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$.

Справочный материал: $\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$.

2.8. Вычислить производные следующих рациональных функций:

а) $\dfrac{2x}{1-x^2}$;

б) $\dfrac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$;

в) $\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

Ответ: **2.8.** а) $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$; б) $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$;
в) $-\dfrac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$.

Справочный материал: $(f^a)' = af^{a-1}f'$.

2.9. Вычислить производные следующих функций:

а) $x\sqrt{1+x^2}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

в) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

Ответ: **2.9.** а) $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;
в) $\dfrac{1}{27}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}$, $x \neq 0$, $x \neq -1, x \neq -8$.

2.3 Дополнительные "тренажеры"

2.3.1 Первый «тренажерный» блок

2.10. Вычислить производные следующих функций:

а) x^3+x^2+x+1;

б) ax^3+bx^2+cx+d;

в) $7x^{13}+13x^{-7}$;

г) $\dfrac{\ln 3}{x}+e^2$;

д) $\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}+\dfrac{c}{x^4}$;

е) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$;

ж) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+x^{-2}+\dfrac{2}{x}$;

з) $x^3\sqrt[3]{x^2}+x^7\sqrt[3]{x}$.

Ответ: **2.10.** а) $3x^2+2x+1$; б) $3ax^2+2bx+c$; в) $91(x^{12}-x^{-8})$; г) $-\dfrac{\ln 3}{x^2}$; д) $-2ax^{-3}-3bx^{-4}-4cx^{-5}$; е) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; ж) $\sqrt[3]{x^2}-2x^{-3}-2x^{-2}$; з) $(11x^2\sqrt[3]{x^2}+22x^6\sqrt[3]{x})/3$.

2.11. Вычислить производные следующих сложных функций:

а) $(3x-7)^{10}$;

б) $\dfrac{1}{99}(1-x)^{-99}-\dfrac{1}{49}(1-x)^{-98}+\dfrac{1}{97}(1-x)^{-97}$;

в) $(a+bx)^{\alpha}$;

г) $\sqrt[4]{(8x-3)^3}$.

Ответ: **2.11.** а) $30(3x-7)^9$; б) $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}$; в) $ab(a+bx)^{\alpha-1}$; г) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{8x-3}}$.

2.12. Продифференцировать следующие функции:

а) $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{12}$;

б) $\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;

Ответ: **2.12.** а) $\dfrac{6(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$; б) $\dfrac{1+4\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
в) $\dfrac{ad-bc}{n(ax+b)(cx+d)}\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

2.3.2 Второй "тренажерный" блок

2.13. Вычислить производные следующих функций:

а) $x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0,1$;

б) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\dfrac{y^3}{0{,}3}+\dfrac{1}{5y^2}$;

в) $0{,}1t^{-2/3}-\dfrac{5{,}2}{t^{1{,}4}}+\dfrac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$.

Ответ: **2.13.** а) $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; б) $\dfrac{0{,}2}{\sqrt[4]{y^3}}-10y^2-\dfrac{0{,}4}{y^3}$;
в) $-\dfrac{1}{15}t^{-5/3}+7{,}28t^{-2{,}4}-\dfrac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$.

2.14. Вычислить производные следующих функций:

а) $(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;

б) $(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$;

в) $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

Ответ: **2.14.** а) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$; б) $\dfrac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+$
$\dfrac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+3x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$.

2.15. Вычислить производные следующих функций:

а) $\dfrac{x}{x^2+1}$;

б) $\dfrac{3t^2+1}{t-1}$;

в) $\dfrac{1}{t^2+t+1}$;

г) $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+1}$;

д) $\dfrac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$;

е) $\dfrac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$;

Ответ: **2.15.** а) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; б) $\dfrac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$; в) $-\dfrac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$;
г) $\dfrac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$; д) $\dfrac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$;
е) $-\dfrac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

2.16. Вычислить производные следующих функций:

а) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$;

б) $(1-x^2)^{10}$;

в) $(t^3-\dfrac{1}{t^3}+3)^4$;

г) $\dfrac{t^3}{(1-t)^2}$;

д) $\dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$;

е) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$;

ж) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$;

з) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Ответ: **2. 16.** а) $4x^3-3x^2(a+b+c+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-(abc+abd+acd+bcd)$; б) $-20x(1-x^9)^2$; в) $4(3t^2+\dfrac{3}{t^4})(t^3-\dfrac{1}{t^3}+3)^3$; г) $\dfrac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$; д) $-\dfrac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$; е) $-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$; ж) $\dfrac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$; з) $\dfrac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

2. 17. Вычислить производную функции:

$(1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}$.

Ответ: **2. 17.** $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$, $x\neq\sqrt[3]{-3}$.

3 Техника дифференцирования тригонометрических функций

Цель: Развить навыки беглого вычисления производных.

План

1. Табличные производные, правила дифференцирования суммы, произведения, частного.
2. Сложная функция: степень тригонометрической функции.
3. Сложная функция:тригонометрическая функция от линейной.
4. Сложные функции, являющиеся композициями степенных и тригонометрических функций.

3.1 Упражнения на дифференцирование функций

Правила дифференцирования:
$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}'$, $(\mathbf{uv})' = \mathbf{u}'\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{v}'$, $\left(\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \dfrac{\mathbf{u}'\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{v}'}{\mathbf{v^2}}$, $(\mathbf{Cu})' = \mathbf{Cu}'$.

Справочный материал:

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

3. 1. Найти производные следующих функций:

а) $\sin x + \cos x$;

б) $\varphi \sin \varphi + \cos \varphi$;

в) $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$;

г) $x^3\operatorname{ctg} x$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

е) $\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$;

ж) $\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

Ответ: **3.1.** а) $\cos x-\sin x$; б) $\varphi\cos\varphi$; в) $(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$; г) $\dfrac{x^2}{\sin x}\left(3\cos x-\dfrac{x}{\sin x}\right)$; д) $\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$; е) $\dfrac{1}{1+\cos t}$; ж) $\dfrac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$.

Справочный материал:

$(f^a)'=af^{a-1}f'$, $\left(\frac{1}{f}\right)'=(f^{-1})'=-f^{-2}f'=-\frac{f'}{f^2}$.

3.2. Найти производные следующих функций:

а) $\cos^2 x$;

б) $3\sin^2 x-\sin^3 x$;

в) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$;

г) $4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$;

д) $x^2\operatorname{ctg} x+2$;

е) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

Ответ: **3. 2.** а) $-\sin 2x$; б) $\dfrac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$; в) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$; г) $-\dfrac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$; д) $2x\operatorname{ctg} x - \dfrac{x^2}{\sin^2 x}$; е) $-\cos 2x$.

<u>*Справочный материал:*</u>

$(f(kx+b))' = f'(kx+b)(kx+b)' = kf'(kx+b)$.

3. 3. Найти производные следующих функций:

а) $\sin 3x$;

б) $a\cos\dfrac{x}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\dfrac{x+1}{2}$;

г) $\dfrac{\cos 3}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin(2x+3)$;

д) $\cos^n x\cos nx$;

е) $\dfrac{1-\cos(8x-3\pi)}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x}$.

Ответ: **3. 3.** а) $3\cos 3x$; б) $-\dfrac{a}{3}\sin\dfrac{x}{3}$; в) $\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$; г) $\sin x\sin(x+3)$; д) $-n\cos^{n-1} x\sin(n+1)x$; е) $-4\cos 8x$, $x \neq \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}k,\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Справочный материал:

$z(v(x)) \Rightarrow z = f(v), v = v(x) \Rightarrow z' = z'_v v'_x = z'(x).$

3. 4. Найти производные следующих сложных функций:

а) $\sin\dfrac{1}{x}$;

б) $\sin(\sin x)$;

в) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

г) $\cos^3 4x$;

д) $\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$;

е) $\operatorname{ctg} x^2 - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 2x$;

ж) $\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$;

з) $\sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$.

Ответ: **3. 4.** а) $-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$; б) $\cos(\sin x)\cos x$; в) $\dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$; г) $-12\cos^2 4x\sin 4x$; д) $\dfrac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}$; е) $-2\left(\dfrac{x}{\sin^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}\right)$; ж) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$; з) $-3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$, $x \neq \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.2 Домашнее задание

Справочный материал:

$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin x}.$

3. 5. Найти производные следующих функций:

а) $2\sin x - 3\operatorname{tg} x$;

б) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

в) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

г) $\sqrt{x}\sin x$;

д) $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x$;

е) $\dfrac{x}{\sin x + \cos x}$;

ж) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Ответ: **3. 5.** а) $\dfrac{2\cos^3 x - 3}{\cos^2 x}$; б) $-\dfrac{1}{1+\sin x}$; в) $\sin^{-2}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$; д) $x^2\sin x$; е) $\dfrac{\sin x + \cos x + x(\sin x - \cos x)}{1+\sin 2x}$; ж) $\dfrac{x - \sin 2x}{x\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}$.

Справочный материал:

$(f^a)' = af^{a-1}f'$, $\left(\frac{1}{f}\right)' = (f^{-1})' = -f^{-2}f' = -\frac{f'}{f^2}$.

3. 6. Найти производные следующих функций:

а) $\cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$;

б) $\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;

в) $\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x^2}$;

д) $\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x}$;

е) $\sqrt[4]{(1+\sin^2 x)^3}$.

Ответ: **3. 6.** а) $-\sin^3 x$; б) $1 + \operatorname{tg}^6 x$; в) $-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$;
г) $4\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x^2}\left(\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{\sin 2x^2}\right)$;
д) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}\cos^2 x}$; е) $\dfrac{3\sin 2x}{4\sqrt[4]{1+\sin^2 x}}$.

Справочный материал:

$(f(kx+b))' = f'(kx+b)(kx+b)' = kf'(kx+b)$.

3. 7. Найти производные следующих функций:

а) $\sin\dfrac{3x}{2}$;

б) $6\cos\dfrac{2x}{3}$;

в) $\cos 2x - 2\sin x$;

г) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

д) $3\sin(3x+5)$;

е) $\sin^2\dfrac{x}{2}$;

ж) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$;

з) $\sec^2\dfrac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{a}$;

и) $\sin^n x\cos nx$;

й) $(0{,}4\cos(8x+5) - 0{,}6\sin 0{,}8x)^2$;

к) $\sqrt{1+\sin 4x} - \sqrt{1-\sin 4x}$.

Ответ: **3.7.** а) $\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$; б) $-4\sin\dfrac{2x}{3}$; в) $-2\cos x(1+2\sin x)$; г) $\dfrac{2}{\sin^2 x}$; д) $9\cos(3x+5)$; е) $\dfrac{1}{2}\sin x$; ж) $\dfrac{1}{2}\cos x$; з) $\dfrac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$;
и) $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$;
й) $-0{,}64(2\cos(8x+5) - 3\sin 0{,}8x)(2\sin(8x+5) + 0{,}3\cos 0{,}8x)$;
к) $\dfrac{2\cos 4x}{|\cos 4x|}(\sqrt{1-\sin 4x} + \sqrt{1+\sin 4x})$.

Справочный материал:

$z(v(x)) \Rightarrow z = f(v), v = v(x) \Rightarrow z' = z'_v v'_x = z'(x)$.

3.8. Найти производные следующих функций:

а) $\sin\sqrt{1+x^2}$;

б) $\operatorname{ctg} \sqrt[3]{1+x^2}$;

в) $\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$;

г) $\cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)$;

д) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

е) $\cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Ответ: **3.8.** а) $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $-\dfrac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\,\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$;
в) $\dfrac{x^2-1}{3x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{\left(1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2}}$; г) $-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\sin\left(2\sin\dfrac{x}{3}\right)$;
д) $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$; е) $\dfrac{\sin\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

4 Техника дифференцирования показательных и логарифмических функций

Цель: Развить навыки беглого вычисления производных.

План

Часть 1: дифференцирование показательных функций.

1. Табличные производные, правила дифференцирования суммы, произведения, частного.
2. Сложная функция: $a^{f(x)}$
3. Сложные функции: композиции показательных, степенных, тригонометрических функций.

Часть 2: дифференцирование логарифмических функций.

1. Табличные производные, правила дифференцирования суммы, произведения, частного.
2. Сложные функции: $\log_a(f(x))$, $(\log_a x)^n$.
3. Сложные функции: $(\log_a(f(x))^n$, другие композиции логарифмических, показательных, степенных,тригонометрических функций.

4.1 Упражнения на дифференцирование функций

Правила дифференцирования:
$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}'$, $(\mathbf{uv})' = \mathbf{u}'\mathbf{v} + \mathbf{uv}'$, $\left(\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \dfrac{\mathbf{u}'\mathbf{v} - \mathbf{uv}'}{\mathbf{v^2}}$, $(\mathbf{Cu})' = \mathbf{Cu}'$.

4.1.1 Дифференцирование показательных функций

Справочный материал:

$(a^x)' = a^x \ln a, \ (e^x)' = e^x.$

4. 1. Найти производные следующих функций:

а) 2^x;

б) $\dfrac{1}{3^x}$;

в) $e^x \cos x$;

г) $\dfrac{x^3 + 2^x}{e^x}$.

Ответ: **4. 1.** а) $2^x \ln 2$; б) $-\dfrac{\ln 3}{3^x}$; в) $e^x(\cos x - \sin x)$; г) $\dfrac{2^x(\ln 2 - 1) + 3x^2 - x^3}{e^x}$.

Справочный материал:

$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x).$

4. 2. Найти производные следующих функций:

а) e^{-x};

б) 10^{2x-3};

в) $e^{\sqrt{x+1}}$;

г) $3^{\sin x}$;

д) 2^{3^x};

е) $e^{3x}(x+3)$;

ж) $x \cdot 2^{1-x^2}$.

Ответ: **4.2.** а) $-e^{-x}$; б) $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$; в) $\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$;
г) $3^{\sin x}\cos x\ln 3$; д) $2^{3^x}3^x\ln 2\ln 3$; е) $e^{3x}(3x+10)$;
ж) $2^{1-x^2}(1-x^2\ln 4)$.

Справочный материал:

$z(v(x))\Rightarrow z=z(v), v=v(x)\Rightarrow z'=z'_v v'_x=z'(x)$.
$u(z(v(x)))\Rightarrow u=u(z), z=z(v), v=v(x)\Rightarrow u'=u'_z z'_v v'_x=u'(x)$.

4.3. Найти производные следующих функций:

а) $\sin(2^x)$;

б) $10^{1-\sin^4 3x}$;

в) $f(e^x)\cdot e^{f(x)}$;

г) $\sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$;

д) $x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$.

Ответ: **4.3.** а) $2^x\ln 2\cdot\cos(2^x)$;
б) $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot\sin^3 3x\cos 3x$; в) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$;
г) $\cos(e^{x^2+3x-2})e^{x^2+3x-2}(2x+3)$;
д) $a^a\cdot x^{a^a}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

4.1.2 Дифференцирование логарифмических функций

Справочный материал:

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

4.4. Найти производные следующих функций:

а) $\log_{0,5} x$;

б) $x^2\log_3 x$;

в) $\dfrac{x-1}{\log_2 x}$;

г) $\ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$.

Ответ: **4. 4.** а) $\dfrac{1}{x \ln 0{,}5}$; б) $2x \log_3 x + \dfrac{x}{\ln 3}$; в) $\dfrac{x \ln x - x - 1}{x \ln^2 x} \ln 2$; г) $\dfrac{1}{x} \lg \dfrac{x^2}{10}$.

Справочный материал:
$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}$, $((\log_a x)^n)' = n(\log_a x)^{n-1} \dfrac{1}{x \ln a}$,

4. 5. Найти производные следующих функций:

а) $\log_3(x^2 - 1)$;

б) $\ln \operatorname{tg} x$;

в) $\log_2 \ln 2x$;

г) $\sqrt{\ln x}$;

д) $\dfrac{1}{\ln x}$;

е) $\log_x 2$.

Ответ: **4. 5.** а) $\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$; б) $\dfrac{2}{\sin 2x}$; в) $\dfrac{1}{x \ln 2 \cdot \ln 2x}$; г) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; д) $-\dfrac{1}{x \ln^2 x}$; е) $-\dfrac{1}{x \ln x \log_2 x}$.

Справочный материал:
$u(z(v(x))) \Rightarrow u = u(z), z = z(v), v = v(x) \Rightarrow u' = u'_z z'_v v'_x = u'(x)$.

4. 6. Найти производные следующих сложных функций:

а) $\log_2(\log_3(\log_5 x))$;

б) $\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$;

в) $\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right)$;

г) $\sqrt{1+\ln^2 x}$;

д) $\ln^4 \sin x$;

е) $\log_2^3(2x+3)^2$;

ж) $3^{\ln^2(1+e^{-x})}$.

Ответ: **4. 6.** а) $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$; б) $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$; в) $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$; г) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$; д) $4\ln^3\sin x\operatorname{ctg} x$; е) $\frac{12}{\ln 2}\frac{\log_2^2(2x+3)^2}{2x+3}$; ж) $-3^{\ln^2(1+e^{-x})}\cdot\frac{2\ln 3\ln(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}e^{-x}$.

4.2 Домашнее задание

4.2.1 Дифференцирование показательных функций

Справочный материал:

$(a^x)' = a^x\ln a, (e^x)' = e^x$.

4. 7. Найти производные следующих функций:

а) $\frac{x}{4^x}$;

б) $x\cdot 10^x$;

в) $a^x x^a$;

г) $\frac{\cos x}{e^x}$;

д) $xe^x(\cos x + \sin x)$;

е) $\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b$.

Ответ: **4. 7.** а) $4^{-x}(1 - x\ln 4)$; б) $10^x(1 + x\ln 10)$; в) $a^x x^a\left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$; г) $-\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$; д) $e^x(\cos x + \sin x + 2x\cos x)$; е) $\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$.

Справочный материал:

$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)}\ln a \cdot f'(x)$.

4. 8. Найти производные следующих функций:

а) $3^{\sin x}$;

б) $Ae^{-k^2x}\sin(\omega x + \alpha)$;

в) $a^{\sin^3 x}$;

г) $e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$;

д) $2^{\sqrt{\sin^2 x}}$.

Ответ: **4. 8.** а) $3^{\sin x}\cos x\ln 3$; б) $Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x + \alpha) - k^2\sin(\omega x + \alpha)]$; в) $3\sin^2 x\cos x a^{\sin^3 x}\ln a$; г) $e^x[1 + e^{e^x}\left(1 + e^{e^{e^x}}\right)]$; д) $2^{\sqrt{\sin^2 x}}\ln 2 \cdot \cos x \cdot \mathrm{sgn}(\sin x)$.

4.2.2 Дифференцирование логарифмических функций

Справочный материал:

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4. 9. Найти производные следующих функций:

а) $x \lg x$;

б) $\dfrac{\ln x}{x^n}$;

в) $e^x \log_2 x$;

г) $\log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$.

Ответ: **4. 9.** а) $\dfrac{\ln x + 1}{\ln 10}$; б) $\dfrac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}$; в) $\left(\log_2 x + \dfrac{1}{x \ln 2}\right) e^x$;
г) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x \log_3 x}{\ln 2} + \log_2 x \log_3 x + \dfrac{\ln x \log_2 x}{\ln 3}\right)$.

Справочный материал:

$((\log_a x)^n)' = n(\log_a x)^{n-1}\dfrac{1}{x \ln a}$.

4. 10. Найти производные следующих функций:

а) $\ln^2 x$;

б) $\lg^3 x^2$;

в) $\log_x 2^x$;

г) $\dfrac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6 \ln x + 6)$;

д) $\log_2 x \cdot \log_x e + \log_2 x \cdot \ln 2$.

Ответ: **4. 10.** а) $\dfrac{2 \ln x}{x}$; б) $\dfrac{6}{x} \lg e \lg^2 x^2$; в) $\dfrac{\ln x - 1}{\ln x \cdot \log_2 x}$;
г) $-\dfrac{\ln^3 x}{x^2}$; д) $\dfrac{1}{x}$.

Справочный материал:

$(\log_a(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}$.

4. 11. Найти производные следующих функций:

а) $\ln(x^2-4x)$;

б) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

в) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

г) $\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$;

д) $\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sin x}{2}\right)$;

е) $\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

ж) $\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$;

з) $\dfrac{1}{\sin\alpha}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\ln\dfrac{1+x\cos\alpha}{1-x\cos\alpha}$;

и) $x+\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+\sin x)-\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Ответ: **4.11.** а) $\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$; б) $\dfrac{x}{x^4-1}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; г) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; д) $\dfrac{\cos x}{\cos\sin x}$; е) $-\dfrac{1}{\cos x}$; ж) $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x$; з) $\dfrac{2\sin\alpha}{(1-x^2)(1-x^2\cos^2\alpha)}$; и) $-\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.

Справочный материал:
$u(z(v(x)))\Rightarrow u=u(z), z=z(v), v=v(x)\Rightarrow u'=u'_z z'_v v'_x=u'(x)$.

4.12. Найти производные следующих сложных функций:

а) $\log_{\varphi(x)}\psi(x)$, $(\varphi(x)>0,\ \psi(x)>0)$;

б) $x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$;

в) $10^{\frac{x}{\log_3 x}}$;

г) $(1+\ln\sin x)^n$;

д) $f(f[f(x)])$;

е) $e^{\sqrt{\ln x}}$;

ж) $\sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$;

з) $e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$.

Ответ: **4.12.** а) $\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln\varphi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$; б) $2\sin(\ln x)$; в) $10^{\frac{x}{\log_3 x}}\cdot\ln 10\cdot\dfrac{\ln x-1}{\ln x\cdot\log_3 x}$; г) $n(1+\ln\sin x)^{n-1}\operatorname{ctg} x$; д) $f'(x)\cdot f'[f(x)]\cdot f'(f[f(x)])$; е) $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$; ж) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}$; з) $e^{\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}\cdot\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+x+1)}}$.

5 Техника дифференцирования обратных тригонометрических, гиперболических, степенно-показательных функций

Цель: Развить навыки беглого вычисления производных.

План

Часть 1: Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

1. Табличные производные, основные правила дифференцирования.
2. Сложные функции: композиции обратных тригонометрических, показательных, степенных, логарифмических, тригонометрических функций.

Часть 2: Дифференцирование гиперболических функций.

1. Табличные производные, основные правила дифференцирования. Сложные функции.

Часть 3: Дифференцирование степенно-показательных функций.

5.1 Упражнения на дифференцирование функций

Основные правила дифференцирования:

$$(\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}', \ (\mathbf{uv})' = \mathbf{u}'\mathbf{v} + \mathbf{uv}', \ \left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \frac{\mathbf{u}'\mathbf{v} - \mathbf{uv}'}{\mathbf{v^2}}, \ (\mathbf{Cu})' = \mathbf{Cu}'.$$

Правило дифференцирования сложной функции:

$$[\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))]' = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

5.1.1 Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Справочный материал:

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. 1. Найти производные следующих функций:

а) $2\arcsin x + 0{,}2\arccos x + 0{,}5\,\mathrm{arctg}\, x - 5\,\mathrm{arcctg}\, x$;

б) $\dfrac{\arcsin x}{e^x}$;

в) $\arcsin \dfrac{x}{2}$;

г) $\mathrm{arcctg}\, 2^x$;

д) $8\left(\mathrm{arcctg}\, \dfrac{x}{8}\right)^{-\frac{1}{8}}$;

е) $\mathrm{arctg}^2\, \dfrac{1}{x}$;

ж) $\arccos(\cos^2 x)$;

з) $\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$;

и) $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$;

й) $\ln\sin\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\, e^{3x}}$.

Ответ: **5. 1.** а) $\dfrac{1{,}8}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{5{,}5}{1+x^2}$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x\right)e^{-x}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; г) $-\dfrac{2^x \ln 2}{2^{2x}+1}$; д) $\dfrac{8}{(64+x^2)(\operatorname{arcctg}\frac{x}{8})^{\frac{9}{8}}}$; е) $-\dfrac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$;

ж) $\dfrac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$; з) $\dfrac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$;

и) $\dfrac{x+1}{8\sqrt[4]{(\arcsin\sqrt{x^2+2x})^3\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}}$; й) $\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{(\operatorname{arctg}(e^{3x}))^2}}$.

5.1.2 Дифференцирование гиперболических функций.

Справочный материал:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$;

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(\operatorname{cth})' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

5. 2. Найти производные следующих функций:

а) $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$;

б) $\dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}$;

в) $\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x$;

г) $\sqrt{\operatorname{ch} x}$;

д) $\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;

е) $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$;

ж) $\operatorname{th}(\ln x)$;

з) $\frac{1}{2}\operatorname{th}x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$;

и) $e^{\operatorname{ch}^2 x}$;

й) $\sqrt[4]{(1+\operatorname{th}^2 x)^3}$.

Ответ: **5. 2.** а) $\operatorname{ch}2x$; б) $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$; в) 0; г) $\frac{\operatorname{sh}x}{2\sqrt{\operatorname{ch}x}}$; д) $\operatorname{sh}(\operatorname{sh}x)\operatorname{ch}x$; е) $\frac{1}{\operatorname{ch}2x}$; ж) $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$; з) $\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$; и) $e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh}2x$; й) $\frac{3\operatorname{th}x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$.

5.1.3 Дифференцирование степенно-показательных функций $\mathbf{u(x)^{v(x)}}$.

<u>*Справочный материал:*</u>

$u(x)^{v(x)}\equiv e^{v(x)\ln u(x)},\ (u(x)>0,\ v(x)\not\equiv 1)$;

$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=\left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)'$.

5. 3.

а) x^{x^2};

б) $x^{\ln x}$;

в) $2x^{\sqrt{x}}$;

г) $\sqrt[x]{x},\ (x>0)$;

д) $x+x^x+x^{x^x}$;

е) $(\ln x)^x : x^{\ln x}$;

ж) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$— дифференцируемые функции.

Ответ: **5. 3.** а) $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$; б) $2x^{\ln x - 1}\ln x$;
в) $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$; г) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;
д) $1 + x^x(1+\ln x) + x^x x^{x^x}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right)$;
е) $\dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}[x - 2\ln^2 x + x\ln x \cdot \ln(\ln x)]$; ж) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left(\dfrac{1}{\varphi(x)}\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right)$.

5.2 Домашнее задание

5.2.1 Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Справочный материал:

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. 4. Найти производные следующих функций:

а) $\dfrac{1}{\arcsin x}$;

б) $x\,\mathrm{arctg}\, x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2}(\mathrm{arctg}\, x)^2$;

в) $\ln\sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{arctg}\,\dfrac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

г) $\arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arcctg}\,\dfrac{\sqrt{2}}{x}$;

е) $\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

ж) $\operatorname{arctg} e^x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$.

Ответ: **5. 4.** а) $-\dfrac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$; б) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$; в) $\dfrac{x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$; д) $\dfrac{1}{x^2+2}$; е) $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$; ж) $e^{\operatorname{arctg} x}\left(\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}+\dfrac{\operatorname{arctg} e^x}{1+x^2}\right)$.

5. 5. Найти производные следующих функций:

а) $\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

б) $\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$;

в) $\ln(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$;

г) $\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Ответ: **5. 5.** а) $-\dfrac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$, $(x \neq 0)$; б) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$; в) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$; г) $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

5. 6. Найти производные следующих функций:

а) $\arcsin(\sin x)$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin x\right)$;

в) $\arcsin \dfrac{\sin \alpha \cdot \sin x}{1 - \cos \alpha \cdot \cos x}$;

г) $\arcsin \sqrt{\sin x}$;

д) $\cos(2 \arccos x)$;

е) $\cos(3 \arccos x)$;

ж) $\arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$;

з) $e^{m \arcsin x}[\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)]$.

Ответ: **5. 6.** а) $\mathrm{sgn}(\cos x)$, $(x \neq \dfrac{2k-1}{2}\pi,\ k \in Z)$;
б) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$; в) $\dfrac{\cos x - \cos \alpha}{|\cos x - \cos \alpha|} \cdot \dfrac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha \cdot \cos x}$; г) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$;
д) $4x$; е) $12x^2 - 3$; ж) $\dfrac{2x(\cos x^2 + \sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$;
з) $\dfrac{2m}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot e^{m(\arcsin x)} \cos(m \arcsin x)$.

5.2.2 Дифференцирование гиперболических функций.

Справочный материал:

$\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$; $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$;

$\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$.

$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$; $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$; $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}$; $(\mathrm{cth})' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\, x}$;

5. 7. Найти производные следующих функций:

а) $x\, \mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x$;

б) $\dfrac{\ln x}{\operatorname{cth} x}$;

в) $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$;

г) $\operatorname{th}(1 - x^2)$;

д) $\sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$;

е) $\dfrac{\operatorname{ch} x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x^2}{2}$.

Ответ: **5. 7.** а) $x \operatorname{ch} x$; б) $\dfrac{1}{x \operatorname{cth} x} + \dfrac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x}$; в) $2 \operatorname{sh} 2x$; г) $-\dfrac{2x}{\operatorname{ch}^2(1 - x^2)}$; д) $\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$; е) $-\dfrac{4x}{\operatorname{sh}^3 x^2}$.

5.2.3 Дифференцирование степенно-показательных функций $\mathbf{u(x)^{v(x)}}$.

Справочный материал:

$u(x)^{v(x)} \equiv e^{v(x) \ln u(x)}, \ (u(x) > 0, \ v(x) \not\equiv 1)$;

$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x) \ln u(x)}\right)'$.

5. 8. Найти производные следующих функций:

а) $(x + 1)^{\frac{2}{x}}$;

б) $x^{\sin x}$;

в) $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$;

г) $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$;

д) $x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}, \ (a > 0, \ x > 0)$.

е) $y = \left(\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right)^{\operatorname{arctg}^2 x}$;

Ответ: **5. 8.** а) $2(x+1)^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$; б) $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$;

в) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x) - (\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x)$;

г) $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x} - \dfrac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$;

д) $x^{a-1}x^{x^a}(1 + a\ln x) + a^x x^{a^x}\left(\dfrac{1}{x} + \ln a \ln x\right) + x^x a^{x^x} \ln a(1 + \ln x)$;

е) $y' = 2y\left\{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} + \operatorname{arctg}^2 x\left[\dfrac{\sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}} - \dfrac{\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$.

6 Разные задачи

Цель: Решать разнообразные задачи, закрепляя навыки вычисления производных.

План

1. Логарифмическое дифференцирование.
2. Дифференцирование функций, содержащих модуль.
3. Смешанные задачи.

6.1 Упражнения

6.1.1 Логарифмическое дифференцирование.

Справочный материал:

Дана функция $y = f(x)$. Нужно найти $y' = f'(x)$. Заметим, что $(\ln y)' = (\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Следовательно, $y' = y \cdot (\ln y)'$ или $y' = f(x)(\ln f(x))'$.

6. 1. Используя логарифмическое дифференцирование, найти производные следующих функций:

а) $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}$;

б) $(\ln x)^x$;

в) $x^3 \cdot e^{x^2} \cdot \sin 2x$;

г) $\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

д) $\sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$.

Ответ: **6.1.** а) $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{3+\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$; б) $(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$;
в) $x^2e^{x^2}\sin 2x(3+2x^2+2x\operatorname{ctg}2x)$; г) $-\dfrac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;
д) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x}{1-e^x}\right)$.

6.1.2 Дифференцирование функций, содержащих модуль.

Справочный материал:

$|x| = x\operatorname{sgn}x$, где

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases} \tag{1}$$

$y=|x|$, $y'=|x|'=(x\operatorname{sgn}x)'=\operatorname{sgn}x$, $x\neq 0$. В точке $x=0$ функция не имеет производной.

6.2. Найти производную и построить график функции и ее производной, если $y=x|x|$.

Ответ: **6.2.** $y'=2|x|$.Графики см. на рис. ?????

6.3. Найти производные следующих функций:

а) $|(x-1)^2(x+1)^3|$;

б) $[x]\cdot\sin^2\pi x$.

Ответ: **6.3.** а) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; б) $\pi[x]\sin 2\pi x$.

6.1.3 Смешанные задачи

6.4. Найти $f'(a)$, если $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ — непрерывна при $x=a$.

Ответ: **6.4.** $\varphi(a)$.

6.5. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$.

Ответ: **6.5.** $1000!$.

6.6. Вычислить производную функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $(1+ax^b)(1+bx^a)$, $x_0 = 1$;

б) $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\log_2 x \ln 2x$, $x_0 = 1$.

Ответ: **6.6.** а) $ab(a+b+2)$; б) 1; в) 1.

6.7. Вычислить производную функции в указанных точках:

а) $(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$, $x = 0$;

б) $\sqrt{\ln x}(\ln x - \log_{ex} x)\sqrt{\ln x + \log_x e + 2}$, $x = e$;

в) $\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$, $x = 1$.

Ответ: **6.7.** а) $\sqrt[6]{72}$; б) $\dfrac{2}{e}$; в) 0.

6.2 Домашнее задание

6.2.1 Логарифмическое дифференцирование.

6.8. Найти производные следующих функций, используя логарифмическое дифференцирование:

а) $(\sin x)^{\arcsin x}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$;

в) $x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

Ответ: **6. 8.** а) $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x\right)$;
б) $\dfrac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$; в) $\dfrac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$.

6.2.2 Дифференцирование функций, содержащих модуль.

6. 9. Найти производные следующих функций:

а) $\ln|x|$;

б) $|\sin^3 x|$;

в) $\arccos\dfrac{1}{|x|}$.

Ответ: **6. 9.** а) $\dfrac{1}{x}\,(x \neq 0)$; б) $\dfrac{3}{2}\sin 2x\cdot|\sin x|$;
в) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,(|x|>1)$.

6.2.3 Смешанные задачи.

6. 10. Вычислить производную функции $y=f(x)$ в точке x_0:

а) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, $x_0=-3$;

б) $\operatorname{arctg} x\cdot\arccos x, x_0=0$;

в) $\dfrac{x^2}{\ln x}$, $x_0=e$.

Ответ: **6. 10.** а) 2; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) e.

6. 11. Вычислить производную функции в указанных точках:

а) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, $x=0$, $x=1$;

б) $\ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x \cdot \operatorname{arctg} \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $(\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x=0$.

Ответ: **6.11.** а) $y'(0)=2$, $y'(1)=-2$; б) 0; в) 0.

6.12. Показать, что функция $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$— непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$, не имеет производной в точке a.

Чему равны односторонние производныпе $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

Ответ: **6.12.** $f'_-(a) = -\varphi(a)$, $f'_+(a) = \varphi(a)$.

7 Производные высших порядков

Цель: Освоить навык вычисления высших производных.

План

1. Производные указанных порядков многочленов; производные указанных порядков многочленов в заданной точке.
2. Производные указанных порядков произвольных функций; производные указанных порядков произвольных функций в заданной точке.
3. Производные высших порядков от сложных функций, заданных в общем виде.
4. Формула Лейбница.
5. Формула для $y^{(n)}$ произвольной функции.
6. Проверка того, что данная функция является решением обыкновенного дифференциального уравнения.

7.1 Упражнения

Справочный материал:

$y'' = (y')'$; $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

7.1.1 Многочлены.

7.1. Найти производные указанных порядков от следующих функций:

а) $y = x^2 - 3x + 2$, y''?;

б) $y = 1 - x^2 - x^4$, y'''?;

в) $y = (x^2 + 1)^3$, y''?;

г) $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, $y^{(n)}$?.

Ответ: **7. 1.** а) 2; б) $-24x$; в) $6(5x^4+6x^2+1)$; г) $\dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$, если $n \leqslant m$; 0, если $n > m$.

7. 2. Найти производные указанных порядков в указанных точках:

а) $y=(x+10)^6$, $y'''(2)$?;

б) $y=x^6-4x^3+4$, $y^{(4)}(1)$?.

Ответ: **7. 2.** а) 207360; б) 360.

7.1.2 Произвольные функции.

7. 3. Найти производные указанных порядков от следующих функций:

а) $y=\cos^2 x$, y'''?;

б) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f^{(5)}(x)$?;

в) $y=x\ln x$, $y^{(5)}$?;

г) $y=x^3\ln x$, $y^{(4)}$?;

д) $y=\dfrac{a}{x^n}$, y''?;

е) $\rho=a\sin 2\varphi$, $\dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4}=$?.

Ответ: **7. 3.** а) $4\sin 2x$; б) $\dfrac{5!}{(1-x)^6}$; в) $-\dfrac{6}{x^4}$; г) $\dfrac{6}{x}$; д) $\dfrac{an(n+1)}{x^{n+2}}$; е) $16a\sin 2\varphi$.

7. 4. Найти производные указанных порядков в указанных точках:

а) $f(x) = e^{2x-1}$, $f''(0)$?;

б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f''(1)$?.

Ответ: **7. 4.** а) $\dfrac{4}{e}$; б) $-\dfrac{1}{2}$.

7. 5. Найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, если $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$.

Ответ: **7. 5.** $y(0) = y'(0) = 1$; $y''(0) = 0$.

7.1.3 Сложные функции, заданные в общем виде.

7. 6. Найти y'', если $y = \ln f(x)$.

Ответ: **7. 6.** $\dfrac{f''(x)}{f(x)} - \dfrac{(f'(x))^2}{f^2(x)}$.

7. 7. Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y'', если:

а) $y = u^2$;

б) u^v, $(u > 0)$.

Ответ: **7. 7.** а) $2(uu''+u'^2)$; б) $u^v\left[\left(v\dfrac{u'}{u} + v'\ln u\right)^2 + v\dfrac{uu'' - u'^2}{u^2} + \dfrac{2u'v'}{u} + u''\ln u\right]$.

7. 8. Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Найти y'' и y''', если:

а) $f(x^2)$;

б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Ответ: **7. 8.**

а) $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$, $y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$;

б) $y'' = \dfrac{1}{x^4} f''\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{2}{x^3} f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$y''' = -\dfrac{1}{x^6} f'''\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{6}{x^5} f''\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{6}{x^4} f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

7.1.4 Формула Лейбница.

Справочный материал:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)};\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Формулы высших производных от основных элементарных функций:

$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a,$
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$
$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),$
$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n},$
$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{x^n}.$

7. 9. Используя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков от следующих функций:

а) $((x^2+1)\sin x)^{(20)}$;

б) $y = x(2x-1)^2(x+3)^3,\ y^{(6)},\ y^{(7)}$;

в) $y = x^2 \sin 2x,\ y^{(50)}$;

г) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}},\ y^{(100)}$.

Ответ: **7. 9.** а) $(x^2-379)\sin x - 40x\cos x$; б) $y^{(6)} = 4 \cdot 6!,\ y^{(7)} = 0$; в) $2^{50}(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x)$; г) $\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$.

7.1.5 Формула для $\mathbf{y^{(n)}}$ произвольной функции.

7. 10. Найти общие выражения для производных порядка n от функций:

а) $y = e^{ax}$;

б) $y = e^{-x}$ (устно).

в) $y = \sin ax + \cos bx$;

г) $y = \ln(ax + b)$.

Ответ: **7.10.** а) $a^n e^{ax}$; б) $(-1)^n e^{-x}$; в) $a^n \sin\left(ax + \dfrac{\pi n}{2}\right) + b^n \cos\left(bx + \dfrac{\pi n}{2}\right)$; г) $\dfrac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n}$.

7.11. Разлагая функции на простейшие дроби, найти производные порядка n от заданных функций:

а) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$;

б) $\dfrac{2x}{x^2-1}$.

Ответ: **7.11.** а) $\dfrac{2 \cdot (-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$; б) $(-1)^n n! \left(\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$.

7.12. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$.

Ответ: **7.12.** $\dfrac{n!}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$.

7.1.6 Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение.

7.13. Доказать, что функция $y = e^x \sin x$ удовлетворяет соотношению $y'' - 2y' + 2y = 0$, а функция $y = e^{-x} \sin x$ — соотношению $y'' + 2y' + 2y = 0$.

7.2 Домашнее задание

7.2.1 Упражнения на отыскание второй производной.

7.14. Найти производную второго порядка:

а) $x^2 + 13x + 11$;

б) $x\sqrt{1+x^2}$;

в) e^{-x^2};

г) $\operatorname{tg} x$;

д) $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

е) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

ж) $x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

Ответ: **7.13.** а) 2; б) $\dfrac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; в) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; г) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; д) $\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$; е) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2} + \dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$; ж) $-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$.

7.15. Найти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, если $y(x) = e^{2x}\sin 3x$.

Ответ: **7.14.** $y'(0) = 3$, $y''(0) = 12$, $y'''(0) = 9$.

7.2.2 Сложные функции, заданные в общем виде.

7.16. Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y'', если:

а) $y = \ln\dfrac{u}{v}$;

б) $\sqrt{u^2+v^2}$.

Ответ: **7.15.** а) $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$;
б) $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7.17. Найти y'', если $y=\ln f(x)$.

Ответ: **7.16.** $\dfrac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$.

7.18. Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Найти y'' и y''', если:

а) $f(e^x)$;

б) $f(\ln x)$.

Ответ: **7.17.**
а) $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$, $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$;
б) $y''=\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$, $y'''=\dfrac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$.

7.2.3 Формула Лейбница.

7.19. Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков от заданных фунций:

а) $y=(x^2+x+1)\sin x$, $y^{(15)}$;

б) $y=(x^2-x)e^x$, $y^{(20)}$;

в) $y=\sin x\cdot e^{-x}$, $y^{(5)}$;

г) $y=x\log_2 x$, $y^{(10)}$;

д) $y = x \operatorname{sh} x$, $y^{(100)}$;

е) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Ответ: **7. 18.** а) $\cos x\cdot(209-x-x^2)-15\sin x\cdot(2x+1)$; б) $e^x(x^2+39x+360)$; в) $4\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)e^{-x}$; г) $\dfrac{8!\log_2 e}{x^9}$; д) $x\operatorname{sh} x+100\operatorname{ch} x$; е) $e^x\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^i\dfrac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, $A_{10}^i = 10\cdot 9\cdot\ldots\cdot(11-i)$, $A_{10}^0 = 1$.

7.2.4 Формула для $\mathbf{y^{(n)}}$ произвольной функции.

7. 20. Найти общие выражения для производных порядка n от функций:

а) $y = \sin^2 x$;

б) $x\ln x$;

в) $\dfrac{1}{ax+b}$.

Ответ: **7. 19.** а) $2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$; б) $\dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$, $(n \geqslant 2)$; в) $\dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

7. 21. Разлагая функции на простейшие дроби, найти производные порядка n от заданных функций:

а) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;

б) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$;

в) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Ответ: **7.20.** а) $\dfrac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$; б) $n!\left[\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$; в) $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

7.22. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

Ответ: **7.21.**
Замечание: дробь $\dfrac{1}{1+x^2}$ является простейшей.
Указание: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(1+x^2)f'(x)=1$, далее, применяя формулу Лейбница к последнему равенству, находим рекуррентную формулу $(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$.
Окончательный ответ:
$f^{(2k)}(0)=0,\ f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!\ (k=0,1,2,\ldots)$.

7.23. Найти $f^{(n)}(a)$, если $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка в окрестности точки a.

Ответ: **7.22.** $n!\varphi(a)$.

7.2.5 Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение.

7.24. Доказать, что функция $y=e^{4x}+2e^{-x}$ удовлетворяет соотношению $y'''-13y'-12y=0$.

7.25. Доказать, что функция $y=\cos e^x+\sin e^x$ удовлетворяет соотношению $y''-y'+ye^{2x}=0$.