

© 2008 г. А.А.Ардентов  
Ю.Л.Сачков, канд. физ.-мат. наук,  
Институт Программных Систем РАН  
Переславль-Залесский

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА ОБ ЭЛАСТИКАХ <sup>1</sup>

Рассматривается задача Эйлера о стационарных конфигурациях упругого стержня с фиксированными конечными точками и направлениями стержня на концах. Соответствующая задача оптимального управления сведена к нескольким системам алгебраических уравнений в эллиптических функциях Якоби. Построены алгоритм и компьютерная программа для решения задачи оптимального управления.

### 1. Задача Эйлера об эластиках: история, постановка, приложения

В 1744 г. Леонард Эйлер первым детально исследовал следующую задачу о стационарных конфигурациях упругого стержня [7]. Дан упругий стержень на плоскости, у которого закреплены положения концов, а также углы наклона стержня на концах. Требуется определить возможные профили стержня при заданных граничных условиях. Эйлер получил дифференциальные уравнения для стационарных конфигураций стержня и описал их возможные качественные типы. Эти конфигурации называются эйлеровыми эластками.

В данной работе описано сведение задачи Эйлера к решению некоторого набора систем алгебраических уравнений в эллиптических функциях Якоби, полученное на основе работ [4, 5, 13, 14]. Построен алгоритм приближенного решения этих систем уравнений. Описана компьютерная программа в системе Mathematica [15] для решения задачи Эйлера об эластках, приведены результаты работы этой программы. Обсуждаются перспективы разработки параллельного алгоритма и его реализации на суперкомпьютере.

Задача о форме упругого стержня имеет богатую историю, связанную с именами Якоба Бернулли (1691 г.) [9], Даниила Бернулли (1742 г.) [8], Леонарда Эйлера (1744 г.) [7], Макса Борна (1906 г.) [10]. Подробное описание этой истории можно найти в литературе [2, 34, 35].

Данная работа опирается на подробный и в определенном смысле окончательный анализ задачи об эластках, выполненный в статьях [4, 13, 14] с помощью методов геометрической теории управления [1].

Эйлеровы эластики, а также их естественные обобщения находят важные применения в механике, инженерии, теории управления, теории аппроксимации, молекулярной биологии, нанотехнологиях [18–31]. Поэтому описанное в данной работе полное решение задачи Эйлера представляется весьма актуальным.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект ).

Напомним точную постановку задачи об эластиках. Рассмотрим однородный упругий стержень фиксированной длины  $l > 0$  на двумерной плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Выберем любые точки  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$  и произвольные единичные касательные векторы в этих точках  $v_i \in T_{a_i}\mathbb{R}^2$ ,  $|v_i| = 1$ ,  $i = 0, 1$ . Задача заключается в нахождении формы стержня  $\gamma : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , выходящего из точки  $a_0$  и приходящего в точку  $a_1$  с соответствующими касательными векторами  $v_0$  и  $v_1$ , см. Рис. 1.

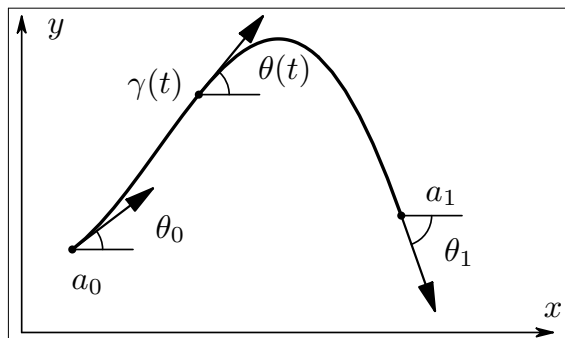


Рис. 1. Постановка задачи Эйлера

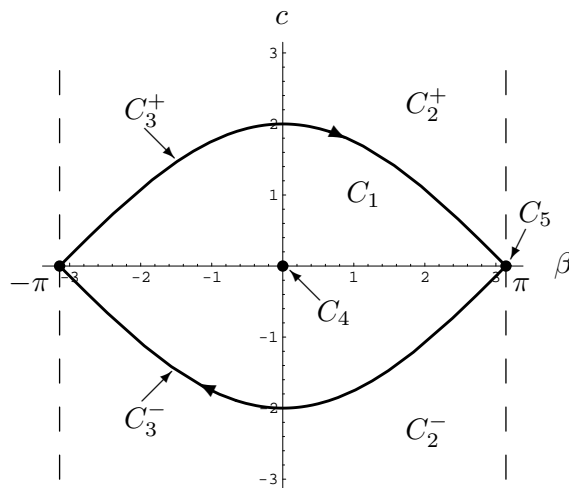


Рис. 2. Разбиение фазового цилиндра маятника

Задача об эластиках формализуется как следующая задача оптимального управления, см. [4, 11]:

- (1)  $\dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u,$
- (2)  $q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1, \quad u \in \mathbb{R},$
- (3)  $q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1),$
- (4)  $J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min,$
- (5)  $u(\cdot) \in L_2[0, 1], \quad q(\cdot) \in AC[0, 1],$

без ограничения общности предполагаем, что упругий стержень имеет единичную длину. Интеграл (4) имеет смысл упругой энергии стержня: отыскивается стержень минимальной упругой энергии при фиксированных граничных условиях (3).

Как показано в работе [4], для этой задачи множество достижимости из точки  $q_0 = (0, 0, 0)$  за время 1 имеет вид  $\mathcal{A} = \{(x, y, \theta) \in M \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ или } (x, y, \theta) = (1, 0, 0)\}$ .

## 2. Сведение задачи Эйлера к решению систем уравнений

Опишем сведение задачи оптимального управления (1)–(5) к решению нескольких систем уравнений в эллиптических функциях.

## 2.1. Экспоненциальное отображение

С помощью принципа максимума Понтрягина [3] экстремальные траектории в задаче (1)–(5) параметризованы функциями Якоби [6]. Семейство экстремальных траекторий параметризовано точками  $(\beta, c)$  на фазовом цилиндре  $C = S^1_\beta \times \mathbb{R}_c$  математического маятника  $\dot{\beta} = c, \dot{c} = -\sin \beta$ . Полная энергия маятника  $E = \frac{c^2}{2} - \cos \beta$  задает разбиение цилиндра  $C = \cup_{i=1}^5 C_i$ , см. Рис. 2, где

$$\begin{aligned} (6) \quad & C_1 = \{(\beta, c) \in C \mid E \in (-1, 1)\}, \\ (7) \quad & C_2 = \{(\beta, c) \in C \mid E \in (1, +\infty)\}, \\ (8) \quad & C_3 = \{(\beta, c) \in C \mid E = 1, \beta \neq \pi\}, \\ (9) \quad & C_4 = \{(\beta, c) \in C \mid E = -1\}, \\ (10) \quad & C_5 = \{(\beta, c) \in C \mid E = 1, \beta = \pi\}. \end{aligned}$$

В работах [13, 16] получена явная параметризация экстремальных траекторий в задаче Эйлера функциями Якоби  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}, E$  [6]:

$$(11) \quad x = x(\lambda, t), \quad y = y(\lambda, t), \quad \theta = \theta(\lambda, t), \quad \lambda \in N = T_{q_0}^* M \simeq \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь и далее  $\lambda$  обозначает тройку сопряженных переменных принципа максимума Понтрягина;  $N \simeq \mathbb{R}^3$  есть пространство сопряженных переменных.

Рассмотрим экспоненциальное отображение за единичное время:

$$\operatorname{Exp} : N \rightarrow M, \quad \operatorname{Exp}(\lambda) = q(\lambda, 1) = (x(\lambda, 1), y(\lambda, 1), z(\lambda, 1)).$$

Это отображение переводит вектор сопряженных переменных  $\lambda \in N \simeq \mathbb{R}^3$  в конечную точку соответствующей экстремальной траектории в момент времени  $t = 1$ . Явные формулы для функций  $(x, y, \theta)$  для областей  $C_1, C_2$  имеют следующий вид (здесь используются специальные эллиптические координаты  $k, \varphi, \psi$ , выпрямляющие уравнение маятника [13, 16, 18]).

Если  $(\beta, c) \in C_1$ , то

$$(12) \quad \sin \frac{\theta_t}{2} = k \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t) - k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t),$$

$$(13) \quad \cos \frac{\theta_t}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t) + k^2 \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t),$$

$$(14) \quad \begin{aligned} x_t &= \frac{2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) (E(\sqrt{r}\varphi_t) - E(\sqrt{r}\varphi)) \\ &\quad + \frac{4k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) (\operatorname{cn} \sqrt{r}\varphi - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) \\ &\quad + \frac{2k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}^2(\sqrt{r}\varphi) (\sqrt{r}t + E(\sqrt{r}\varphi) - E(\sqrt{r}\varphi_t)) - t, \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} y_t &= \frac{2k}{\sqrt{r}} (2 \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) - 1) (\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) \\ &\quad - \frac{2k}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) (2(E(\sqrt{r}\varphi_t) - E(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t). \end{aligned}$$

Если  $(\beta, c) \in C_2$ , то

$$(16) \quad \sin \frac{\theta_t}{2} = \pm(\operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi_t) - \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi_t)),$$

$$(17) \quad \cos \frac{\theta_t}{2} = \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi_t) + \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi_t),$$

$$(18) \quad x_t = \frac{1}{\sqrt{r}}(1 - 2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{r}\psi)) \left( \frac{2}{k}(\operatorname{E}(\sqrt{r}\psi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\psi)) - \frac{2 - k^2}{k^2} \sqrt{rt} \right) \\ + \frac{4}{k\sqrt{r}} \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi)(\operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi_t)),$$

$$(19) \quad y_t = \pm \left( \frac{2}{k\sqrt{r}}(2 \operatorname{cn}^2(\sqrt{r}\psi) - 1)(\operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi) - \operatorname{dn}(\sqrt{r}\psi_t)) \right. \\ \left. - \frac{2}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}(\sqrt{r}\psi) \operatorname{cn}(\sqrt{r}\psi) \left( \frac{2}{k}(\operatorname{E}(\sqrt{r}\psi_t) - \operatorname{E}(\sqrt{r}\psi)) - \frac{2 - k^2}{k^2} \sqrt{rt} \right) \right).$$

### 2.2. Оптимальность эластик

В работах [13, 14] получена оценка времени, когда экстремальные траектории теряют оптимальность (т.е. времени разреза  $t_{\text{cut}}$ ) вида

$$t_{\text{cut}}(\lambda) \leq \mathbf{t}(\lambda), \quad \lambda \in N,$$

в терминах функции  $\mathbf{t} : N \rightarrow (0, +\infty]$ , явно описанной в работах [13, 14]. Таким образом, для отыскания оптимальных эластик достаточно рассмотреть ограничение экспоненциального отображения  $\operatorname{Exp} : N' \rightarrow \mathcal{A}$ , где  $N' = \{\lambda \in N \mid \mathbf{t}(\lambda) \leq 1\}$ .

### 2.3. Глобальная структура экспоненциального отображения

Рассмотрим разбиение  $N' = \cup_{i=1}^4 L_i$ , где  $L_i$  — подмножества в  $N'$ , соответствующее четырем квадрантам  $\{(c, \theta) \mid \operatorname{sgn} c = \pm 1, \operatorname{sgn} \theta = \pm 1\}$  на фазовой плоскости маятника  $C$ , см. Рис. 3. На этом рисунке ограничивающая области  $L_i$  сверху поверхность  $p = p_1^{\text{MAX}}$  соответствует равенству  $\mathbf{t}(\lambda) = 1$ .

Рассмотрим также разбиение полнотория

$$\operatorname{int} \mathcal{A} = \{(x, y, \theta) \mid x^2 + y^2 < 1, \quad \theta \in (0, 2\pi)\}$$

на подмножества  $\operatorname{int} \mathcal{A} = M_+ \cup M_- \cup M_0$  согласно знаку функции  $P = x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2}$ :

$$M_+ = \{(x, y, \theta) \in \operatorname{int} \mathcal{A} \mid P > 0, \quad \theta \in (0, 2\pi)\},$$

$$M_- = \{(x, y, \theta) \in \operatorname{int} \mathcal{A} \mid P < 0, \quad \theta \in (0, 2\pi)\},$$

$$M_0 = \{(x, y, \theta) \in \operatorname{int} \mathcal{A} \mid P = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi)\},$$

см. Рис. 4.

Из результатов работ [4, 13, 14] следует, что

$$\operatorname{Exp}(L_1) \subset M_-, \quad \operatorname{Exp}(L_3) \subset M_-, \quad \operatorname{Exp}(L_2) \subset M_+, \quad \operatorname{Exp}(L_4) \subset M_+,$$

причем каждое из отображений

$$\operatorname{Exp} : L_1 \rightarrow M_-, \quad \operatorname{Exp} : L_3 \rightarrow M_-, \quad \operatorname{Exp} : L_2 \rightarrow M_+, \quad \operatorname{Exp} : L_4 \rightarrow M_+$$

является диффеоморфизмом, т.е. гладкой биекцией, имеющей гладкое обратное отображение.

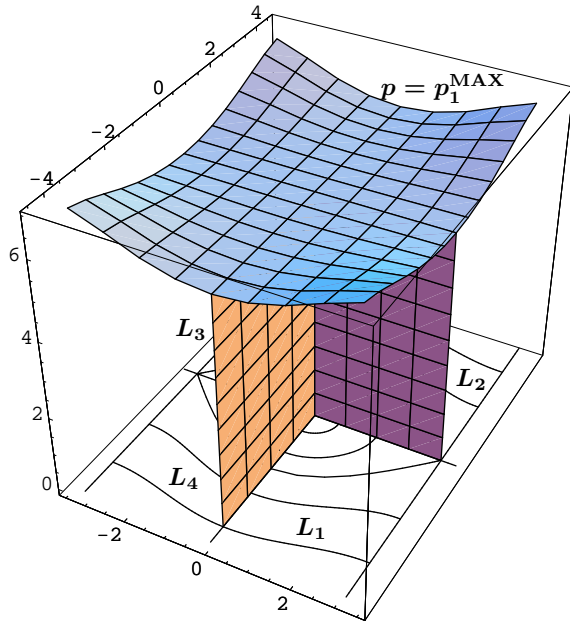


Рис. 3. Разбиение в прообразе экспоненциального отображения

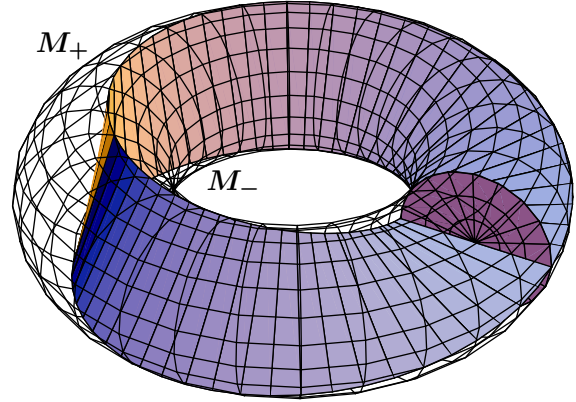


Рис. 4. Разбиение в образе экспоненциального отображения

### 3. Алгоритм решения задачи об эластках

#### 3.1. Сведение к решению систем уравнений

На основе описанных выше результатов получаем следующий алгоритм решения задачи оптимального управления (1)–(5). Возьмем произвольную конечную точку  $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1) \in M$ .

- 1) Если  $q_1 \notin \mathcal{A}$ , то задача решения не имеет; поэтому далее считается, что  $q_1 \in \mathcal{A}$ .
- 2) Если  $q_1 = (1, 0, 0)$ , то искомая эластика — прямая:  $(x, y) = (t, 0)$ . Далее считается, что  $q_1 \neq (1, 0, 0)$ .
- 3) Имеем  $q_1 \in \text{int } \mathcal{A} = M_+ \cup M_- \cup M_0$ . Определяется, какому из множеств  $M_+$ ,  $M_-$ ,  $M_0$  принадлежит точка  $q_1$ . В случае общего положения можно предполагать, что  $q_1 \notin M_0$ . Если  $q_1 \in M_-$ , то находятся решения уравнений

$$(20) \quad \text{Exp}(\lambda_1) = q_1, \quad \lambda_1 \in L_1, \quad q_1 \in M_-,$$

$$(21) \quad \text{Exp}(\lambda_2) = q_1, \quad \lambda_2 \in L_3, \quad q_1 \in M_-,$$

каждое из этих уравнений имеет единственное решение. В случае  $q_1 \in M_+$  находятся решения уравнений

$$(22) \quad \text{Exp}(\lambda_1) = q_1, \quad \lambda_1 \in L_2, \quad q_1 \in M_+,$$

$$(23) \quad \text{Exp}(\lambda_2) = q_1, \quad \lambda_2 \in L_4, \quad q_1 \in M_+,$$

также имеющие единственное решение.

- 4) По найденным наборам  $\lambda_1, \lambda_2$  находятся соответствующие управления  $u_i(t)$  с использованием формул работы [13] и вычисляются значения функционала упругой энергии (5) на соответствующих эластичках  $J_i = \int_0^1 u_i^2(t) dt$ . Оптимальным является управление  $u_i(t)$  с меньшим значением функционала  $J_i$ .

### 3.2. Решение краевой задачи в области $L_i$

Несмотря на то, что, как доказано теоретически, каждая из систем (20)–(23) имеет единственное решение, практическое нахождение этого решения составляет нетривиальную задачу по следующим причинам. Во-первых, функции  $x, y, \theta$  (11), параметризующие экспоненциальное отображение, задаются неэлементарными функциями — эллиптическими функциями Якоби. Во-вторых, в разных областях  $C_i$  (см. (6)–(10)) эти функции  $x, y, \theta$  задаются разными формулами, см. (12)–(19). Поэтому непосредственное применение стандартных вычислительных средств решения систем нелинейных уравнений (например, системы Mathematica [15]) не дает решения систем (20)–(23).

Авторами был разработан и реализован в системе Mathematica специальный алгоритм, устойчиво решающий эти системы уравнений, и таким образом дающий полное решение задачи Эйлера. Этот алгоритм использует некоторую нетривиальную комбинацию стандартных методов решения уравнений: метод Ньютона, метод хорд, метод случайного перебора с фиксированными границами и метод равномерного поиска.

Опишем алгоритм решения системы уравнений (20); остальные системы (21)–(23) решаются аналогично.

На вход алгоритма подается произвольная точка  $q_1 \in M_-$ . Из результатов [4, 13, 14] следует, что существует единственный набор  $\lambda_1 \in L_1 = L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3$ , для которого выполняется система (20). Здесь и далее

$$L_i = L_i^1 \cup L_i^2 \cup L_i^3, \\ L_i^1 = L_i \cap \{E < 1\}, \quad L_i^2 = L_i \cap \{E > 1\}, \quad L_i^3 = L_i \cap \{E = 1\}.$$

Множество  $L_1^3$  имеют меру нуль, поэтому можно считать, что  $\lambda_1 \in L_1^1 \cup L_1^2$ .

- 1) Поиск корня системы (20) в области  $L_1^1$ .

1.1 Случайным образом выбираются две точки  $\lambda_1^1, \lambda_1^2 \in L_1^1$ . Запускается метод хорд решения системы (20) с использованием этих точек в качестве начальных, в результате получается точка  $\hat{\lambda}_1^0$ . Если  $\hat{\lambda}_1^0 \in L_1^1$ , то полагаем  $\tilde{\lambda}_1^0 = \hat{\lambda}_1^0$ . Если  $\hat{\lambda}_1^0 \notin L_1^1$ , то координаты точки  $\hat{\lambda}_1^0$  нормализуются (с использованием симметрий экспоненциального отображения) на промежутки, задающие область  $L_1^1$ . Обозначим это преобразование  $\rho$  и положим  $\tilde{\lambda}_1^0 = \rho(\hat{\lambda}_1^0)$ .

1.2 Запускается метод Ньютона с использованием в качестве начальной точки  $\tilde{\lambda}_1^0$ . В результате получается точка  $\hat{\lambda}_1^1$ . Аналогично предыдущему пункту  $\hat{\lambda}_1^1$  преобразуется в  $\tilde{\lambda}_1^1$  с помощью  $\rho$ .

1.3 Сравниваются между собой точки  $\tilde{\lambda}_1^0$  и  $\tilde{\lambda}_1^1$  по степени удовлетворения системы (20): вычисляется разность  $\delta = |\text{Exp}(\tilde{\lambda}_1^0) - q_1| - |\text{Exp}(\tilde{\lambda}_1^1) - q_1|$ .

- 1.4 Если  $\delta > 0$ , то переходим в пункт 1.2 со сдвигом индексов у  $\tilde{\lambda}_1^i$ . Иначе переходим к следующему пункту.
- 1.5 Если полученный набор  $\tilde{\lambda}_1^i$  удовлетворяет системе (20) с требуемой точностью, то искомым корень  $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1^i$  найден в области  $L_1^1$ , и алгоритм завершает работу. В противном случае корень в области  $L_1^1$  не найден, совершается переход в пункт 2.
- 2) Поиск корня системы (20) в области  $L_1^2$ . Выполняются пункты 2.1–2.5, полностью аналогичные пунктам 1.1–1.5, с заменой области  $L_1^1$  на область  $L_1^2$ .
- 3) Если корень  $\lambda_1$  найден, он возвращается в качестве результата. Иначе переходим к пункту 1.

### 3.3. Решение краевой задачи в области $L_i \cup L_j$

Описанная в пункте 3.2 схема работает, когда известно, в какой именно области  $L_i$  находится искомым корень. Однако в данной задаче имеются две области  $L_i$  и  $L_j$  (точнее,  $L_1$  и  $L_3$ , или  $L_2$  и  $L_4$ ), причем корень находится лишь в одной из этих областей. Если запустить поиск корня сначала в одной, а потом в другой области последовательно, то возможна ситуация когда в первой области нет корня, поэтому его поиск будет продолжаться бесконечно.

Поэтому приходится вычисления производить параллельно. Для того, чтобы реализовать параллельные вычисления последовательным образом, необходимо дискретизировать вычисления и выполнять их по очереди: сначала в области  $L_i$ , потом в  $L_j$ , затем опять в  $L_i$  и так далее. В данной задаче существует естественное разбиение вычисления на шаги (это описанные в пункте 3.2 итерации алгоритма).

Итак, сначала делается одна итерация в области  $L_i$ , если корень найден, то вычисление останавливается (корень найден), если нет, запускается итерация в  $L_j$ , если корень не найден, то опять запускается поиск в области  $L_i$  и так далее пока в одной из областей не будет найден корень.

Полная блок-схема алгоритма решения задачи об эластике приведена на Рис. 5.

## 4. Программная реализация

### 4.1. Описание программы FindElastic

В системе Mathematica [15] была написана программа `FindElastic`, реализующая описанный выше алгоритм поиска оптимальной эластике. На вход программе подается тройка  $(x, y, \theta) = q_1$  и формат выходного графического файла (eps, jpeg, png, gif и т.д.). В качестве результата программа возвращает файл указанного формата с изображением эластике, дающей решение задачи (1)–(5). В рабочей тетради системы Mathematica вычисляются параметры, задающие оптимальную эластику.

Так как размер программы относительно велик, опишем лишь основные ее моменты.

- 1) Основной функцией является `FindElastic`, которая по заданной точке  $(x, y, \cos\theta, \sin\theta)$  и области поиска `area` (которая соответствует  $L_{area}$ ) получает набор  $(u, v, b_0, k, r, whichCase, energy)$ , содержащий полную

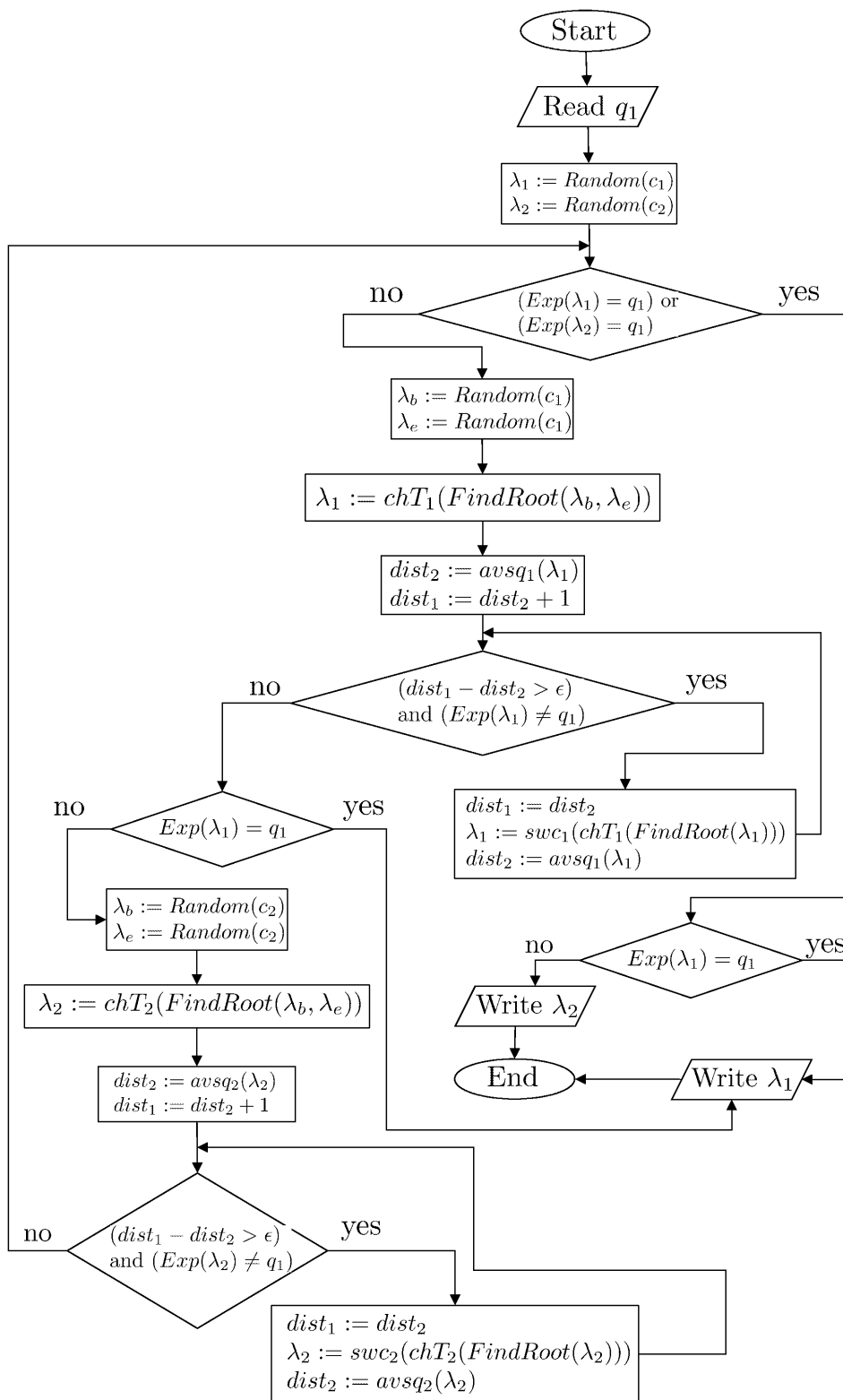


Рис. 5. Блок-схема программы FindElastic



информацию о корнях  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  системы (20)–(23) (в зависимости от того в какой области *area* был произведен поиск);

- 2) Метод хорд и метод Ньютона реализуются стандартной функцией `FindRoot`, причем количество итераций у первого равно 300, а у второго 50, а у последнего запуска метода Ньютона — 300. Также следует отметить, что точность вычислений этих методов задается константами `ag1` и `wr1`, которые можно при необходимости изменить непосредственно в программе;
- 3) Преобразование  $\rho$ , описанное в алгоритме, было усложнено в процессе реализации. Если оно преобразует результат метода хорд, то запускается либо функция `chT1`, либо `chT2` в зависимости от параметра *area*. Если же преобразуется результат метода Ньютона, то помимо этих функций запускается либо функция `swc1`, либо `swc2` (в зависимости от *area*);
- 4) Функции `cht1`, `cht2` выполняют с координатами вектора  $\hat{\lambda}_k^i$  следующее: если  $v$  — преобразуемая координата, а  $vmax$  и  $vmin$  — максимум и минимум, задающий необходимую область  $L_{area}^k$ , то в качестве результата возвращается  $Mod[v, vmax - vmin] + vmin$ . Эта запись аналогична следующей:

$$(24) \quad For[v \geq vmax, v- = vmax - vmin];$$

$$(25) \quad For[v < vmin, v+ = vmax - vmin];$$

Несмотря на то, что первая запись более компактна, практика показывает, что более надежной и наглядной является вторая.

- 5) Функции `swc1`, `swc2` отвечают за последовательный перебор по сетке в искомой области. Иными словами, тройке  $(u, v, k)$  сопоставляется набор  $\{(u, v + ei \cdot j_1, k + ei \cdot j_2) \in L_{area}^k \mid j_1, j_2 \in \mathbb{Z}\}$ , где  $ei$  — константа, шаг сетки. Из этого набора выбирается та точка, у которой расстояние  $|\text{Exp}((u, v + ei \cdot j_1, k + ei \cdot j_2)) - q_1|$  является наименьшим;
- 6) расстояние  $|\text{Exp}(\cdot) - q_1|$  вычисляется при помощи функций `avsq1` и `avsq2`;
- 7) Функции `inR1`, `inR2` проверяют, принадлежит ли точка нужным областям.
- 8) Функции перевода `switchArea1`, `switchArea2` преобразуют входную точку  $(x, y, \cos\theta, \sin\theta)$  таким образом, что можно использовать одни и те же формулы для экспоненциального отображения (основываясь на его симметриях).
- 9) Функция `switchSearch` переводит текущие границы в границы заданной области  $L_{area}^k$ .

#### 4.2. Результаты работы программы

Программа `FindElastic` прошла тщательное тестирование на суперкомпьютере `skif.botik.ru` [33]. Результаты характерного тестирования выглядят следующим образом:

- Количество правильно найденных корней: 2500 из 2500.

- Среднее количество попыток: 2,6144.
- Максимальное количество попыток: 908.
- Потраченное время: 46 ч. 7 мин. 45.8 сек.
- Время на тест в среднем: 1 мин. 6.42632 сек.

На Рис. 6, 7 приведены примеры оптимальных эластиков, вычисляемых программой FindElastic.

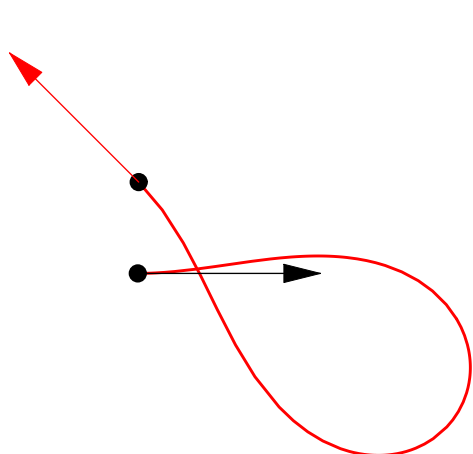


Рис. 6. Оптимальная эластика

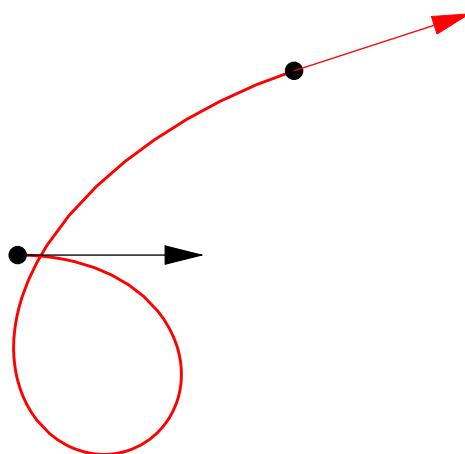


Рис. 7. Оптимальная эластика

Была также написана программа для построения анимаций семейства оптимальных эластиков, соответствующих изменяющимся граничным условиям. Примеры последовательных кадров таких анимаций см. на Рис. 8.

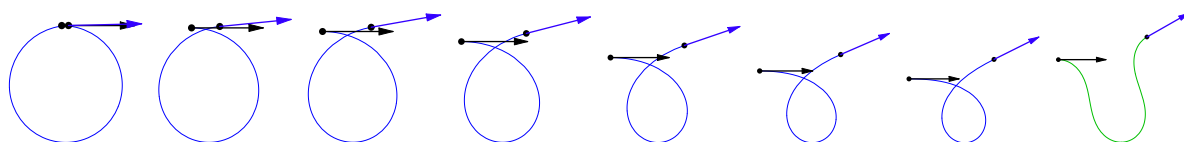


Рис. 8. Кадры анимации с оптимальными эластикami

Сами анимации, а также другие результаты работы программ, связанных с эластикami, представлены в Интернете [32].

В работе [17] описано применение программы FindElastic для построения множества разреза в задаче Эйлера, т.е. множества точек, в которых эластики теряют оптимальность.

### 4.3. Параллельная версия программы

В дальнейшем написанные программы будут распараллелены с помощью системы gridMathematica — параллельной версии системы Mathematica. Опишем возможные пути к распараллеливанию:

- 1) зачастую необходимо вычислить несколько решений задачи (например, для создания анимации о движении конца элаستيку по плоскости), отсюда возникает естественный подход к распараллеливанию — параллелизм по данным.
- 2) при необходимости можно ускорить выполнение основной функции `findElastic`, для этого достаточно запустить ее на нескольких узлах с одинаковыми входными параметрами, результатом считается самое быстрое выполнение программы, остальные недосчитавшиеся запуски останавливаются. Отметим, что в предыдущем пункте имеется тенденция к линейному распараллеливанию, в этом же счет будет ускоряться значительно медленней.
- 3) также можно распределить поиск в пространстве на несколько узлов. Иными словами, «разрезать» пространство некоторым образом, например по некоторой координате, и считать каждый кусок на отдельном узле.

Заметим, что второй пункт можно значительно усложнить, изменяя конфигурацию поиска для каждого узла. К примеру, на одном узле поставить больше итераций методу хорд, на другом — больше методу Ньютона и т. д. То же самое касается остальных пунктов, в третьем есть свобода разбиения пространства на подмножества. В первом, при большом количестве вызовов можно менять тяжесть гранулы (на один узел посылать не одну задачу, а две, три и т. д.).

Использование параллельной программы поможет для расчета последовательной версии. Если разбить исходное пространство параметров на достаточно мелкую сетку, то очевидно, в дальнейшем можно стартовать не от случайной точки, а от ближайшей (в силу непрерывности), задавая таким образом хорошее начальное приближение искомого корня.

## 5. Заключение

Применение геометрических методов теории управления оказалось очень эффективным для полного теоретического исследования задачи Эйлера об эластиках.

Разработанные на основе этих результатов алгоритм и компьютерная программа дают полное практическое решение задачи Эйлера.

Данный подход будет применен для решения нескольких актуальных задач теории управления: субримановой задачи на группе движений плоскости, задачи о качении сферы по плоскости [26], нильпотентной субримановой задачи с вектором роста  $(2,3,5)$  [18–21], субримановой задачи на группе Энгеля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. Москва-Ленинград: ОНТИ, 1935.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
4. Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик // Доклады Академии Наук. ноябрь 2007. Т. 417. № 1. С. 23-25.
5. Сачков Ю.Л. Управляемость и оптимальное управление для инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. Дисс. уч.степ. д.ф.-м.н. Москва: МИАН им. В.А.Стеклова, 2008.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: УРСС, 2002. 515 с.
7. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии Наук. Приложение I. «Об упругих кривых». Москва-Ленинград: ГТТИ, 1934. С. 447-572.
8. Bernoulli D. 26th letter to L. Euler (October, 1742) // Fuss, Correspondance mathématique et physique. St. Petersburg: 1843. Т. 2.
9. Bernoulli J. Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la demonstration de la corbure des corps qui font ressort // Collected works. Geneva: 1744. Т. 2.
10. Born M. Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum // Preisschrift und Dissertation, Göttingen, Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei Göttingen. 1906. Reprinted in: Ausgewählte Abhandlungen. Göttingen. Vanderhoeck & Ruppert. 1963. V. 1. P. 5-101.
11. Jurdjevic V. Geometric control theory. Cambridge University Press, 1997.
12. Saalschütz L. Der belastete Stab. Leipzig, 1880.
13. Sachkov Yu.L. Maxwell strata in Euler's elastic problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 2008, V. 14, № 2 (April). P. 169-234.
14. Sachkov Yu.L. Conjugate points in Euler's elastic problem // Journal of Dynamical and Control Systems. 2008, V. 14, № 3 (July).
15. Wolfram S. Mathematica: a system for doing mathematics by computer. MA: Addison-Wesley. Reading, 1991.

16. Ардентов А.А. Экстремальные кривые в задаче Эйлера об эластиках // Программные системы: теория и приложения. Труды международной конференции, Переславль-Залесский, октябрь 2006 г. М.: Физматлит, 2006. Т. 2. С. 23-37.
17. Ардентов А.А. Множество разреза в задаче Эйлера об эластиках // Программные системы: теория и приложения. Сб. трудов конференции, Переславль-Залесский, 2008 г. Переславль-Залесский: Изд-во «Университет города Переславля», 2008. Т. 2. С. 58-66.
18. Сачков Ю.Л. Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник. 2003. Т. 194, № 9. С. 63-90.
19. Сачков Ю.Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник. 2006. Т. 197, № 2. С. 95-116.
20. Сачков Ю.Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник. 2006. Т. 197, № 4. С. 123-150.
21. Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник. 2006. Т. 197, № 6. С. 111-160.
22. Birkhoff G., de Boor C.R. Piecewise polynomial interpolation and approximation // Approximation of Functions. Proc. Sympos. General Motors Res. Lab., 1964. Elsevier. Amsterdam: 1965. P. 164-190.
23. Golumb M., Jerome J. Equilibria of the curvature functional and manifolds of non-linear interpolating spline curves // SIAM J. Math. Anal. 1982. V. 13. P. 421-458.
24. Jerome J.W. Minimization problems and linear and nonlinear spline functions, I: Existence // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. P. 808-819.
25. Jerome J.W. Smooth interpolating curves of prescribed length and minimum curvature // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 51. P. 62-66.
26. Jurdjevic V. The geometry of the ball-plate problem // Arch. Rat. Mech. Anal. 1993. V. 124. P. 305-328.
27. Jurdjevic V. Non-Euclidean elastica // Am. J. Math. 1995. V. 117. P. 93-125.
28. Linnér A. Unified representations of non-linear splines // J. Approx. Theory. 1996. V. 84. P. 315-350.
29. Manning R.S., Maddocks J.H., Kahn J.D. A continuum rod model of sequence-dependent DNA structure // J. Chem. Phys. 1996. V. 105. P. 5626-5646.
30. Manning R.S., Rogers K.A., Maddocks J.H. Isoperimetric conjugate points with application to the stability of DNA minicircles // Proc. R. Soc. Lond. A. 1998. V. 454. P. 3047-3074.
31. Mumford D. Elastica and computer vision // Algebraic geometry and its applications. C.L.Bajaj, Ed., Springer-Verlag. New-York: 1994, P. 491-506.

32. <http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/GROUP/group.html>
33. <http://skif.pereslavl.ru/skif/>
34. *Truesdell C.* The Influence of Elasticity on Analysis: The Classic Heritage // Bulletin American Math. Society. 1983. V. 9. No. 3. P. 293-310.
35. *Timoshenko S.* History of Strength of Materials. New-York: McGraw-Hill, 1953.