

УДК 517.977

Ю.Л. Сачков

Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны

Аннотация

Обобщенная задача Дидоны формулируется как задача оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и квадратичным функционалом — нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5)$. Экстремали этой задачи параметризуются эллиптическими функциями Якоби.

Содержание

1	Введение. Постановка задачи	1
1.1	Геометрическая постановка задачи	1
1.2	Подъем в \mathbb{R}^5	2
1.3	Задача оптимального управления в координатах	2
1.4	Субриманова задача	3
1.5	Нильпотентная субриманова $(2,3,5)$ задача	4
1.6	История задачи	5
1.7	Структура работы	6
2	Существование оптимальных решений	6
3	Экстремали	6
3.1	Принцип максимума Понтрягина	7
3.2	Нормальные экстремали	7
3.3	Анормальные экстремали	8
3.4	Оптимальность нормальных геодезических	9
4	Непрерывные симметрии	9
4.1	Вращения	9
4.2	Дилатации	10
4.3	Подъем вращений и дилатаций на T^*M	11
4.4	Факторизация экспоненциального отображения	11
4.5	Факторизация начального цилиндра C	12
5	Интегрирование гамильтоновой системы	13
5.1	Интегрируемость гамильтоновой системы	13
5.2	Маятник и эллиптические координаты	14
5.3	Параметризация геодезических	17
5.4	Подробности интегрирования гамильтоновой системы	21
6	Эластики	23
7	Приложение: эллиптические функции Якоби	24

Сведения об авторе:
Юрий Леонидович Сачков

Место работы:
Институт Программных Систем РАН
Исследовательский Центр Процессов Управления
старший научный сотрудник

Адрес:
152140 Ярославская обл.,
Переславль-Залесский
Институт Программных Систем
Ю.Л. Сачков
e-mail: sachkov@sys.botik.ru
телефон: 08535-98017

Yu.L. Sachkov

**Exponential mapping
in the generalized Dido problem**

Abstract

The generalized Dido problem is stated as an optimal control problem in the 5-dimensional space with the 2-dimensional control and a quadratic cost functional — the nilpotent sub-Riemannian problem with the growth vector $(2,3,5)$. Extremals of this problem are parametrized by Jacobian elliptic functions.

Ю.Л. Сачков

Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны¹

Аннотация

Обобщенная задача Дидоны формулируется как задача оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и квадратичным функционалом — нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2,3,5)$. Экстремали этой задачи параметризуются эллиптическими функциями Якоби.

1 Введение. Постановка задачи

1.1 Геометрическая постановка задачи

Как хорошо известно, классическая задача Дидоны может быть сформулирована следующим образом. Даны две точки на плоскости, соединенные кривой γ_0 , и число S . Требуется соединить эти точки кратчайшей кривой γ так, чтобы область на плоскости, ограниченная кривыми γ_0 и γ , имела площадь S . Известно и решение этой задачи: это дуга окружности или отрезок прямой, соединяющий заданные точки.

Рассмотрим следующее естественное обобщение задачи Дидоны. Зададим, кроме двух точек (x_0, y_0) , $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, соединяющей их кривой γ_0 и числа $S \in \mathbb{R}$, также точку на плоскости $c = (c_x, c_y) \in \mathbb{R}^2$. Необходимо найти кратчайшую кривую γ , соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , такую, чтобы область $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная парой кривых γ_0 и γ , имела заданные площадь S и центр масс c .

Несмотря на простоту и естественность формулировки, обобщенная задача Дидоны является открытой. Цель данной работы — описание экстремалей в этой задаче.

Будем считать, что кривая γ ориентирована от точки (x_0, y_0) к точке (x_1, y_1) , а кривая γ_0 в противоположном направлении (кривые γ и γ_0 будем считать липшицевыми).

По теореме Стокса, площадь S и центр масс (c_x, c_y) области D , ограниченной замкнутой кривой $\gamma + \gamma_0 = \partial D$, вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{\gamma+\gamma_0} \frac{1}{2}(x dy - y dx), \\ c_x &= \frac{1}{S} \iint_D x dx dy = \frac{1}{S} \int_{\gamma+\gamma_0} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dy, \\ c_y &= \frac{1}{S} \iint_D y dx dy = \frac{1}{S} \int_{\gamma+\gamma_0} -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx. \end{aligned}$$

Обозначим дифференциальные 1-формы:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(x dy - y dx), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dy, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx.$$

¹Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект 02-01-00506.

Замечания. (1) Задание S , c_x , c_y равносильно заданию интегралов

$$\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_1, \quad \int_{\gamma+\gamma_0} \omega_2, \quad \int_{\gamma+\gamma_0} \omega_3.$$

(2) Зависимость от кривой γ_0 несущественна, важно лишь то, что эта кривая соединяет точки (x_1, y_1) с (x_0, y_0) . А именно, выберем наряду с γ_0 другую кривую γ_1 , соединяющую (x_1, y_1) с (x_0, y_0) . Так как

$$\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_i - \int_{\gamma+\gamma_1} \omega_i = \int_{\gamma_0-\gamma_1} \omega_i,$$

то задание интегралов $\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_i$, $i = 1, 2, 3$, равносильно заданию интегралов $\int_{\gamma+\gamma_1} \omega_i$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому в дальнейшем будем считать γ_0 отрезком, соединяющим (x_1, y_1) с (x_0, y_0) .

(3) Задание $\int_{\gamma+\gamma_0} \omega_i$, $i = 1, 2, 3$, равносильно заданию интегралов $\int_{\gamma} \omega_i$, $i = 1, 2, 3$.

(4) Параллельные переносы в плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$ переводят решения задачи в решения, поэтому в дальнейшем будем считать, что кривые γ выходят из начала координат:

$$(x_0, y_0) = (0, 0). \quad (1)$$

1.2 Подъем в \mathbb{R}^5

Пусть $\gamma = \{(x(t), y(t))\}$ — кривая, выходящая из начала координат: $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Определим следующие функции времени:

$$z(t) = \int_{\gamma} \omega_1 = \int_0^t \frac{1}{2}(xy - yx) dt, \quad (2)$$

$$v(t) = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_0^t \frac{1}{2}(x^2 + y^2)y dt, \quad (3)$$

$$w(t) = \int_{\gamma} \omega_3 = \int_0^t -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)x dt. \quad (4)$$

Для плоской кривой $(x(t), y(t))$ определен ее подъем в пятимерное пространство:

$$q(t) = (x(t), y(t), z(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5,$$

в терминах которого обобщенная задача Дидоны формулируется следующим образом. Для данной точки $q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1, w_1) \in \mathbb{R}^5$ требуется найти кривую $q(t) = (x(t), y(t), z(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}^5$, удовлетворяющую условиям (1)–(4), краевому условию $q(t_1) = q_1$, так, чтобы ее проекция $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ имела наименьшую возможную длину.

1.3 Задача оптимального управления в координатах

Вводя обозначения $u_1 = \dot{x}$, $u_2 = \dot{y}$, можно сформулировать обобщенную задачу Дидоны как задачу оптимального управления в 5-мерном пространстве с 2-мерным управлением и

интегральным критерием:

$$q = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

$$\dot{x} = u_1, \quad (6)$$

$$\dot{y} = u_2, \quad (7)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \quad (8)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_2, \quad (9)$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_1, \quad (10)$$

$$q(0) = 0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (11)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (12)$$

Введем обозначения для векторных полей при управлениях:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2 + y^2}{2} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Тогда задача записывается следующим образом:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in M = \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in U = \mathbb{R}^2, \quad (13)$$

$$q(0) = q_0 = 0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (14)$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \quad (15)$$

Допустимые траектории $q(t)$ липшицевы, поэтому допустимые управления $u(t)$ измеримы и локально ограничены.

Замечание. Терминальное время t_1 можно считать как фиксированным, так и свободным, т.к. при перепараметризациях времени на кривой $q(t)$ функционал типа длины l не изменится ввиду однородности подинтегральной функции.

1.4 Субриманова задача

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^5 распределение ранга 2, т.е. поле двумерных плоскостей в касательных пространствах, порожденное полями X_1, X_2 :

$$\Delta_q = \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \quad q \in M,$$

а также скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в распределении Δ , которое задается полями X_1, X_2 как ортонормированным базисом:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Распределение Δ и скалярное произведение в нем $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задают субриманову структуру на M , а обобщенная задача Дидоны является соответствующей субримановой задачей:

$$\dot{q} \in \Delta_q,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle} dt \rightarrow \min.$$

1.5 Нильпотентная субриманова (2,3,5) задача

Вычислим повторные коммутаторы (скобки Ли) полей X_1, X_2 , чтобы получить базис в касательном пространстве T_qM многообразия M :

$$\begin{aligned} X_3 &= [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial v} + y \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_4 &= [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_5 &= [X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial w}, \\ T_qM &= \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)(q). \end{aligned}$$

Рассмотрим алгебру Ли, порожденную полями X_1, X_2 :

$$L = \text{Lie}(X_1, X_2) = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5).$$

Все ненулевые коммутаторы в этой алгебре Ли исчерпываются коммутаторами порядка 1 и 2:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5. \quad (16)$$

Иными словами, $L = \text{span}(X_1, \dots, X_5)$ является пятимерной нильпотентной алгеброй Ли с ненулевыми скобками (16).

Поэтому на многообразии M можно ввести структуру группы Ли с алгеброй Ли L так, что поля $X_i, i = 1, \dots, 5$, образуют левоинвариантный репер на M . А именно, произведение в группе Ли M задается действием потоков полей X_i :

$$e^{t_5 X_5} \circ e^{t_4 X_4} \circ e^{t_3 X_3} \circ e^{t_2 X_2} \circ e^{t_1 X_1}(q) = q \cdot e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \cdot e^{t_3 X_3} \cdot e^{t_4 X_4} \cdot e^{t_5 X_5},$$

где слева стоит композиция потоков векторных полей, а справа — произведение элементов группы Ли. Несложное вычисление показывает, что в координатах умножение в группе Ли $M = \mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$ задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ v_1 + v_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) y_2 + x_1 z_2 \\ w_1 + w_2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2) x_2 + y_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли L является градуированной:

$$\begin{aligned} L &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \\ [L_i, L_j] &= L_{i+j}, \quad L_i = \{0\} \text{ при } i > 3, \\ L_1 &= \text{span}(X_1, X_2) = \Delta, \\ L_2 &= \text{span}(X_3), \\ L_3 &= \text{span}(X_4, X_5), \end{aligned}$$

и порождается компонентой порядка 1:

$$L = \text{Lie}(L_1) = \text{Lie}(\Delta).$$

По терминологии [8], субриманова структура $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется плоской. Флаг распределения Δ :

$$\Delta \subset \Delta^2 = [\Delta, \Delta] \subset \Delta^3 = [\Delta, \Delta^2] \subset \dots \subset TM,$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= L_1 = \text{span}(X_1, X_2), \\ \Delta^2 &= L_1 \oplus L_2 = \text{span}(X_1, X_2, X_3), \\ \Delta^3 &= L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5). \end{aligned}$$

Поэтому вектор роста распределения Δ :

$$(n_1, n_2, \dots, n_N), \quad n_i = \dim \Delta^i(q), \quad n_N = \dim \text{Lie}(\Delta)(q)$$

равен $(2, 3, 5)$.

Итак, $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ является левоинвариантной нильпотентной субримановой структурой на группе Ли M с вектором роста $(2, 3, 5)$. Она является локальной квазиоднородной нильпотентной аппроксимацией произвольной субримановой структуры на 5-мерном многообразии с вектором роста $(2, 3, 5)$, см. [2], [8].

Как показано в работе [19], плоская $(2, 3, 5)$ субриманова структура единственна с точностью до изоморфизма групп Ли. Обобщенная задача Дидоны является одной из моделей плоской $(2, 3, 5)$ субримановой структуры. Другие модели можно найти в работах [19], [6].

Вектор роста $(2, 3, 5)$ является максимальным для распределений ранга 2 на 5-мерных многообразиях, поэтому распределение общего вида ранга 2 на 5-мерном многообразии имеет в точке общего положения именно этот вектор роста. Это объясняет важность плоской $(2, 3, 5)$ субримановой структуры для субримановой геометрии и теории оптимального управления.

Субримановы структуры с вектором роста $(2, 3, 5)$ возникают в некоторых важных прикладных задачах, среди которых:

- задача о качении двух твердых тел друг по другу без прокручивания и проскальзывания [16, 9, 4, 17],
- машина с двумя прицепами [15, 20],
- задача о движении заряда в плоскости под действием линейного магнитного поля (это плоская $(2, 3, 5)$ субриманова структура) [6].

1.6 История задачи

Обобщенная задача Дидоны (т.е. плоская $(2, 3, 5)$ субриманова задача) рассматривалась несколькими авторами.

В работе [12] Р. Брокетт и Л. Даи доказали интегрируемость экстремалей в этой задаче в терминах эллиптических функций Якоби. В работе [14] А. Кренер и С. Никитин исследуют эти экстремали численно. В работе [19] автором вычислены инфинитезимальные симметрии задачи. В работе [6] А. Анзалдо-Менезес и Ф. Монрой-Перез частично повторяют этот результат о симметриях с помощью другой техники.

Предшествующий максимальный вектор роста $(2, 3)$, т.е. контактный случай, был подробно изучен:

- плоский (2,3) случай, возникающий на группе Гейзенберга, был рассмотрен Р. Брокеттом [11], А.М. Вершиком и В.Я. Гершковичем [21],
- общий (2,3) случай был исследован как возмущение плоского случая А.А. Аграчевым, Ж.П. Готье и соавторами [1], [5].

1.7 Структура работы

В разделе 2 обсуждается существование оптимальных управлений в обобщенной задаче Дидоны.

В разделе 3 мы применяем принцип максимума Понтрягина в инвариантной форме, выписываем гамильтонову систему для нормальных экстремалей, и находим аномальные экстремали.

В разделе 4 рассматриваются непрерывные симметрии задачи. Экспоненциальное отображение факторизуется по действию однопараметрической группы симметрий.

В разделе 5 мы интегрируем нормальную гамильтонову систему. Показано, что система имеет достаточное количество первых интегралов и потому интегрируема по Лиувиллю. Для интегрирования системы вводятся специальные координаты, порожденные потоком уравнения маятника. В этих координатах гамильтонова система для нормальных экстремалей интегрируется в терминах эллиптических функций Якоби.

В разделе 6 рассматриваются проекции экстремалей на плоскость (x, y) — эластики.

Наконец, в приложении для удобства читателя приведены определения и некоторые свойства эллиптических функций Якоби.

2 Существование оптимальных решений

Управляемая система (13) имеет полный ранг, а пространство состояний M связно, поэтому эта система полностью управляема на M : любые две точки M могут быть соединены траекторией системы [13].

Существование оптимальных управлений в задаче оптимального управления (13)–(15) следует из теоремы Филиппова [3].

3 Экстремали

Так же как в римановой геометрии, перейдем от функционала длины к функционалу действия. Неравенство Коши-Буняковского

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \leq \sqrt{t_1} \sqrt{\int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt},$$

превращается в равенство только при $u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const}$, поэтому задача минимизации субримановой длины (15) эквивалентна задаче минимизации действия:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min, \quad (17)$$

в следующем смысле: любая минималь длины постоянной скорости:

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv \text{const}, \quad (18)$$

является минималью действия, и обратно. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем задачу (13), (17).

3.1 Принцип максимума Понтрягина

Для нахождения экстремалей мы используем принцип максимума Понтрягина в инвариантной формулировке. Напомним сначала некоторые факты гамильтонова формализма на кокасательном расслоении [7].

Рассмотрим кокасательное расслоение T^*M гладкого многообразия M с канонической проекцией $\pi : T^*M \rightarrow M$, $\pi(\lambda) = q$ для ковектора $\lambda \in T_q^*M$. Тавтологическая 1-форма $s \in \Lambda^1(T^*M)$ на кокасательном расслоении определена следующим образом. Пусть $\lambda \in T^*M$ и $v \in T_\lambda(T^*M)$, тогда $\langle s_\lambda, v \rangle = \langle \lambda, \pi_*v \rangle$ (в координатах $s = p dq$). Каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$ определяется как $\sigma = ds$ (в координатах $\sigma = dp \wedge dq$). Любому гамильтониану $h \in C^\infty(T^*M)$ можно сопоставить гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $\vec{h} \in \text{Vec}(T^*M)$ по правилу $\sigma_\lambda(\cdot, \vec{h}) = d_\lambda h$.

Принцип максимума Понтрягина [18] для задачи (13), (14), (17) имеет следующую инвариантную формулировку [13], [3].

Введем линейные на слоях кокасательного расслоения T^*M гамильтонианы, соответствующие базисным полям:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^*M, \quad i = 1, \dots, 5,$$

а также семейство гамильтонианов

$$\begin{aligned} h_{u,\nu}(\lambda) &= \langle \lambda, u_1 X_1 + u_2 X_2 \rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) \\ &= u_1 h_1(\lambda) + u_2 h_2(\lambda) + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2), \quad \lambda \in T^*M, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема 3.1 (Принцип максимума Понтрягина). Пусть q_t и $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, являются оптимальной траекторией и соответствующим оптимальным управлением в задаче (13), (14), (17). Тогда существует нетривиальная пара

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \lambda_t \in T_{q_t}^*M,$$

для которой выполнены условия:

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t),\nu}(\lambda_t) = u_1(t)\vec{h}_1(\lambda_t) + u_2(t)\vec{h}_2(\lambda_t), \quad (19)$$

$$h_{u(t),\nu}(\lambda_t) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_{u,\nu}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1], \quad (20)$$

$$\nu \leq 0.$$

Удовлетворяющая гамильтоновой системе (19) и условию максимума (20) кривая $\lambda_t \in T^*M$ называется экстремалью, а ее проекция $q_t = \pi(\lambda_t) \in M$ — экстремальной кривой (или субримановой геодезической).

3.2 Нормальные экстремали

Рассмотрим сначала нормальный случай: $\nu = -1$.

Из условия максимума (20) следует, что вдоль нормальных экстремалей $u_1(t) = h_1(\lambda_t)$, $u_2(t) = h_2(\lambda_t)$. То есть максимизированный нормальный гамильтониан имеет вид

$$H(\lambda) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_{u,-1}(\lambda) = \frac{1}{2}(h_1^2(\lambda) + h_2^2(\lambda)).$$

В силу гладкости H , нормальные экстремали являются траекториями соответствующей гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda), \quad \lambda \in T^*M. \quad (21)$$

Выпишем эту систему в координатах h_i на слоях в T^*M . Имеем

$$\dot{h}_1 = \{H, h_1\} = h_1\{h_1, h_1\} + h_2\{h_2, h_1\} = -h_2h_3. \quad (22)$$

Здесь фигурные скобки $\{h, g\}$ обозначают скобку Пуассона гамильтонианов h и g . Так как все ненулевые скобки Ли полей X_i исчерпываются коммутаторами (16), все ненулевые скобки Пуассона линейных на слоях гамильтонианов h_i исчерпываются следующими:

$$\{h_1, h_2\} = h_3, \quad \{h_1, h_3\} = h_4, \quad \{h_2, h_3\} = h_5.$$

Вычисляя \dot{h}_i , $i = 2, \dots, 5$, так же как \dot{h}_1 в (22), получаем, что гамильтонова система (21) записывается следующим образом:

$$\dot{h}_1 = -h_2h_3, \quad (23)$$

$$\dot{h}_2 = h_1h_3, \quad (24)$$

$$\dot{h}_3 = h_1h_4 + h_2h_5, \quad (25)$$

$$\dot{h}_4 = 0, \quad (26)$$

$$\dot{h}_5 = 0, \quad (27)$$

$$\dot{q} = h_1X_1 + h_2X_2. \quad (28)$$

Мы будем рассматривать геодезические, параметризованные длиной дуги, т.е. ограничимся поверхностью уровня $\{H = 1/2\}$. В полярных координатах

$$h_1 = \cos \theta, \quad h_2 = \sin \theta, \quad h_4 = \alpha \sin \beta, \quad h_5 = -\alpha \cos \beta,$$

уравнения (23)–(27) сводятся к уравнению маятника:

$$\ddot{\theta} = -\alpha \sin(\theta - \beta), \quad \alpha, \beta = \text{const}. \quad (29)$$

Известно, что это уравнение интегрируемо в эллиптических функциях Якоби [22]. Ниже мы найдем явные выражения $\theta(t)$ и q_t в модели обобщенной задачи Дидоны через эллиптические функции sn , dn , E .

3.3 Анормальные экстремали

Теперь рассмотрим анормальный случай: $\nu = 0$.

Из условия максимума (20) следует, что вдоль анормальных экстремалей $h_1 = h_2 \equiv 0$. Проинтегрировав эти тождества вдоль гамильтоновой системы (19), получаем

$$\dot{h}_1 = \{u_1h_1 + u_2h_2, h_1\} = -u_2h_3 \equiv 0, \quad \dot{h}_2 = \{u_1h_1 + u_2h_2, h_2\} = u_1h_3 \equiv 0,$$

поэтому $(u_1^2 + u_2^2)h_3^2 \equiv 0$. Но мы ищем кривые постоянной скорости (18) (причем ненулевой), поэтому $h_3 \equiv 0$ вдоль аномальных экстремалей. Дифференцируя это тождество вдоль гамильтоновой системы (19), получаем $h_3 = u_1 h_4 + u_2 h_5 \equiv 0$. Кроме того, очевидно, в силу системы (19) имеем $h_4 = h_5 \equiv 0$. Поэтому аномальные траектории имеют вид:

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad u_1, u_2 = \text{const}.$$

Это — однопараметрические подгруппы в группе Ли M , касающиеся распределения Δ . Соответствующие управления $u_1 = \cos \theta$, $u_2 = \sin \theta$, $\theta = \text{const}$, (на кривых, параметризованных длиной дуги) удовлетворяют уравнению маятника (29), поэтому аномальные геодезические не являются строго аномальными.

В модели обобщенной задачи Дидоны проекции аномальных геодезических на плоскость (x, y) являются прямыми, поэтому аномальные геодезические q_t оптимальны для $t \in [0, +\infty)$.

3.4 Оптимальность нормальных геодезических

Так как нормальный максимизированный гамильтониан H гладкий, малые дуги нормальных геодезических оптимальны [3]. Поэтому на любой геодезической q_t есть точка разреза, т.е. точка, в которой геодезическая теряет оптимальность (точка разреза может быть и на бесконечности, как на аномальных геодезических). В точках разреза теряется глобальная оптимальность геодезических. Локальным аналогом точек разреза являются сопряженные точки, в которых геодезические теряют локальную оптимальность.

Сопряженные точки являются критическими значениями экспоненциального отображения:

$$\text{Exp} : (\lambda, t) \in C \times \mathbb{R}_+ \mapsto q_t = \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda) \in M,$$

где

$$C = \{H = 1/2\} \cap T_{q_0}^* M$$

это цилиндр начальных значений для экстремалей $\lambda_t = e^{t\tilde{H}}(\lambda_0)$.

Нахождение точек разреза на нормальных геодезических — задача гораздо более сложная, чем вычисление геодезических, эта задача будет предметом нашей следующей работы.

4 Непрерывные симметрии

Для понижения размерности используем симметрии задачи.

Векторное поле $X \in \text{Vec } M$ называется непрерывной симметрией субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на M , если поток X сохраняет эту субриманову структуру, т.е. сохраняет как распределение Δ , так и скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, см. [10], [19]. Множество всех непрерывных симметрий субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ образует алгебру Ли, которую мы будем обозначать $\text{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

4.1 Вращения

Утверждение 4.1. *Существует единственное векторное поле $X_0 \in \text{Vec } M$ такое, что:*

- (1) $X_0 \in \text{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,
- (2) $X_0(\text{Id}) = 0$,

(3) $[X_0, X_1] = -X_2$, $[X_0, X_2] = X_1$ в единичном элементе Id группы Ли M .

Ненулевые коммутаторы поля X_0 с базисными полями имеют вид:

$$[X_0, X_1] = -X_2, \quad [X_0, X_2] = X_1, \quad [X_0, X_4] = -X_5, \quad [X_0, X_5] = X_4. \quad (30)$$

Иными словами, по сути, существует единственная непрерывная симметрия нашей задачи оптимального управления, т.е. симметрия субримановой структуры $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, сохраняющая начальную точку $q_0 = \text{Id}$. Условие (3) — это просто условие нормировки.

Доказательство. В работе [19] показано, что алгебра Ли $\text{Sym}(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ шестимерна и порождается правоинвариантными полями ξ_1, \dots, ξ_5 и полем X_0 , таким, что

$$[X_0, X_1] = -X_2, \quad [X_0, X_2] = X_1. \quad (31)$$

Единственность векторного поля X_0 со свойствами (1)–(3) следует из того, что только векторные поля вида kX_0 , $k \in \mathbb{R}$, удовлетворяют условиям (1) и (2).

Первые два из коммутаторов (30) поля X_0 с базисными полями уже получены в (31), а остальные следуют из них с помощью тождества Якоби. \square

В модели обобщенной задачи Дидоны симметрия

$$X_0 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial w}$$

является одновременным вращением в плоскостях (x, y) и (v, w) :

$$e^{sX_0} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos s - y \sin s \\ x \sin s + y \cos s \\ z \\ v \cos s - w \sin s \\ v \sin s + w \cos s \end{pmatrix}.$$

4.2 Дилатации

Существует также векторное поле $Y \in \text{Vec } M$ такое, что

$$[Y, X_1] = -X_1, \quad [Y, X_2] = -X_2, \quad [Y, X_3] = -2X_3, \\ [Y, X_4] = -3X_4, \quad [Y, X_5] = -3X_5. \quad (32)$$

Это поле коммутирует с X_0 : $[Y, X_0] = 0$. В модели обобщенной задачи Дидоны

$$Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 3v \frac{\partial}{\partial v} + 3w \frac{\partial}{\partial w},$$

это дилатации в $\mathbb{R}_{x,y,z,v,w}^5$:

$$e^{rY} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^r x \\ e^r y \\ e^{2r} z \\ e^{3r} v \\ e^{3r} w \end{pmatrix}.$$

4.3 Подъем вращений и дилатаций на T^*M

Введем линейные на слоях гамильтонианы

$$h_0(\lambda) = \langle \lambda, X_0(q) \rangle, \quad h_Y(\lambda) = \langle \lambda, Y(q) \rangle, \quad \lambda \in T^*M,$$

и соответствующие гамильтоновы векторные поля:

$$\vec{h}_0, \vec{h}_Y \in \text{Vec}(T^*M).$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\vec{h}_0, \vec{H}] &= 0, & \vec{h}_0 H &= 0, \\ [\vec{h}_Y, \vec{H}] &= -2\vec{H}, & \vec{h}_Y H &= -2H. \end{aligned}$$

Обозначим также вертикальное эйлерово поле на T^*M : $\epsilon = \sum_{i=1}^5 h_i \frac{\partial}{\partial h_i}$. Так как гамильтониан H квадратичен на слоях, гамильтоново поле \vec{H} линейно на слоях, поэтому

$$[\epsilon, \vec{H}] = \vec{H}, \quad \epsilon H = 2H.$$

Следовательно, векторное поле $Z = \vec{h}_Y + \epsilon$ удовлетворяет равенствам

$$[Z, \vec{H}] = -\vec{H}, \quad ZH = 0. \quad (33)$$

Более того,

$$[\vec{h}_0, Z] = 0. \quad (34)$$

Из коммутаторов (33), (34) получаем, что потоки полей \vec{H} , \vec{h}_0 и Z взаимодействуют следующим образом.

Утверждение 4.2. *Для любых $t, s, r \in \mathbb{R}$, $\lambda \in T^*M$*

$$e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t'\vec{H}} \circ e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda), \quad \text{где } t' = te^r.$$

Обозначим группы симметрий на T^*M и M :

$$\begin{aligned} G_{\vec{h}_0, Z} &= \left\{ e^{s\vec{h}_0} \circ e^{rZ} \mid s \in S^1, r \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Diff}(T^*M), \\ G_{\vec{h}_0} &= \left\{ e^{s\vec{h}_0} \mid s \in S^1 \right\} \subset \text{Diff}(T^*M), \\ G_{X_0, Y} &= \left\{ e^{sX_0} \circ e^{rY} \mid s \in S^1, r \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Diff}(M), \\ G_{X_0} &= \left\{ e^{sX_0} \mid s \in S^1 \right\} \subset \text{Diff}(M). \end{aligned}$$

4.4 Факторизация экспоненциального отображения

Так как поля \vec{h}_0 и \vec{H} коммутируют, их потоки также коммутируют:

$$e^{s\vec{h}_0} \circ e^{t\vec{H}}(\lambda) = e^{t\vec{H}} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda). \quad (35)$$

Далее, так как $\vec{h}_0 H = 0$ и $(\pi_* \vec{h}_0)(q_0) = X_0(q_0) = 0$, получаем, что поле \vec{h}_0 сохраняет начальный цилиндр $C: G_{\vec{h}_0}(C) = C$. Так как $\pi_* \vec{h}_0 = X_0$, равенство (35) можно записать в терминах экспоненциального отображения:

$$e^{sX_0} \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(e^{s\vec{h}_0}(\lambda), t). \quad (36)$$

Определим естественное действие группы $G_{\vec{h}_0}$ в области определения экспоненциального отображения:

$$e^{s\vec{h}_0} : C \times \mathbb{R}_+ \rightarrow C \times \mathbb{R}_+, \quad e^{s\vec{h}_0} : (\lambda, t) \mapsto (e^{s\vec{h}_0}(\lambda), t).$$

Тогда равенство (36) записывается следующим образом:

$$e^{sX_0} \circ \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda, t).$$

Поэтому можно факторизовать экспоненциальное отображение по действию групп $G_{\vec{h}_0}$ (в прообразе) и G_{X_0} (в образе): определено факторизованное экспоненциальное отображение $\text{Exp}' : C' \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M'$, где

$$C' = C/G_{\vec{h}_0}, \quad C' \times \mathbb{R}_+ = (C \times \mathbb{R}_+)/G_{\vec{h}_0}, \quad M' = M/G_{X_0},$$

так, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow \pi'_0 & & \downarrow \pi'_1 \\ C' \times \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\text{Exp}'} & M' \end{array}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \pi'_0 : C \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow C' \times \mathbb{R}_+, & \pi'_0 : (\lambda, t) &\mapsto (\lambda', t) = G_{\vec{h}_0}(\lambda, t), \\ \pi'_1 : M &\rightarrow M', & \pi'_1 : q &\mapsto q' = G_{X_0}(q) \end{aligned}$$

являются естественными проекциями.

4.5 Факторизация начального цилиндра C

Отметим, что $\alpha = \sqrt{h_4^2 + h_5^2}$ является первым интегралом нормальной гамильтоновой системы: $\vec{H}\alpha = 0$. Введем также интеграл энергии

$$E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4,$$

легко видеть, что $\vec{H}E = 0$. В координатах $(\theta, c = h_3, \alpha, \beta)$ на слоях в T^*M энергия имеет вид

$$E = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta) \in [-\alpha, +\infty).$$

4.5.1 Декомпозиция C

Разобьем цилиндр C на 7 клеток следующим образом:

$$\begin{aligned}
C &= \bigcup_{i=1}^7 C_i, & C_i \cap C_j &= \emptyset, \quad i \neq j, \\
C_1 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (-\alpha, \alpha)\}, \\
C_2 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E \in (\alpha, +\infty)\}, \\
C_3 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = \alpha, \theta - \beta \neq \pi\}, \\
C_4 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = -\alpha\}, \\
C_5 &= \{\lambda \in C \mid \alpha \neq 0, E = \alpha, \theta - \beta = \pi\}, \\
C_6 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = 0, c \neq 0\}, \\
C_7 &= \{\lambda \in C \mid \alpha = c = 0\}.
\end{aligned}$$

4.5.2 Координаты в C'

В координатах $(\theta, c, \alpha, \beta)$ на цилиндре C группа $G_{\vec{h}_0}$ действует следующим образом:

$$e^{s\vec{h}_0} : \begin{pmatrix} \theta \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' \\ c \\ \alpha \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta + s \\ c \\ \alpha \\ \beta + s \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Координаты в C'_i , $i = 1, \dots, 5$. Пусть $\lambda \in \bigcup_{i=1}^5 C_i = C \cap \{\alpha \neq 0\}$. Полагая $s = -\beta$ в (37), получаем $\beta' = 0$, $\theta' = \theta - \beta$. Поэтому координаты в области $\bigcup_{i=1}^5 C'_i$ фактора C' можно выбрать следующим образом:

$$(\theta', c, \alpha), \quad \theta' \in S^1, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad \theta' = \theta - \beta.$$

Координаты в C'_6 . Множество $C_6 = C \cap \{c \neq 0, \alpha = 0\}$ является 2-мерным многообразием: $C_6 \simeq (S^1_\theta \times \mathbb{R}_{c>0}) \cup (S^1_\theta \times \mathbb{R}_{c<0})$. Фактор C'_6 одномерен и параметризован параметром $c \neq 0$:

$$C'_6 \simeq \mathbb{R}_{c>0} \cup \mathbb{R}_{c<0}, \quad C'_6 = \{\theta' = 0, c \neq 0, \alpha = 0\}.$$

Факторизация C'_7 . Множество $C_7 = C \cap \{c = \alpha = 0\}$ является окружностью: $C_7 \simeq S^1_\theta$, и факторизуется в точку

$$C'_7 = \{\theta' = c = \alpha = 0\}.$$

5 Интегрирование гамильтоновой системы

5.1 Интегрируемость гамильтоновой системы

Утверждение 5.1. Гамильтонианы h_4 , h_5 и E коммутируют в смысле скобки Пуассона со всеми функциями на пространстве T_{1d}^*M сопряженном к алгебре Ли $T_{1d}M$, т.е. являются функциями Казимира.

Доказательство. Так как $\text{ad } X_4 = \text{ad } X_5 = 0$, гамильтонианы h_4 и h_5 коммутируют (в смысле скобки Пуассона) со всеми h_i :

$$\{h_4, h_i\} = \{h_5, h_i\} = 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Непосредственное вычисление показывает, что это верно и для энергии E :

$$\begin{aligned} \{h_1, E\} &= h_3 \underbrace{\{h_1, h_3\}}_{h_4} - h_4 \underbrace{\{h_1, h_2\}}_{h_3} = 0, \\ \{h_2, E\} &= h_3 \underbrace{\{h_2, h_3\}}_{h_5} + h_5 \underbrace{\{h_2, h_1\}}_{-h_3} = 0, \\ \{h_3, E\} &= -h_4 \underbrace{\{h_3, h_2\}}_{-h_5} + h_5 \underbrace{\{h_3, h_1\}}_{-h_4} = 0, \\ \{h_4, E\} &= \{h_5, E\} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому h_4, h_5 и E коммутируют со всеми h_i , т.е. они являются функциями Казимира на двойственном пространстве к алгебре Ли T_{Id}^*M . \square

Следствие 5.1. *Гамильтонианы h_4, h_5 и E являются законами сохранения (т.е. первыми интегралами нормального гамильтонова потока) для любой левоинвариантной задачи оптимального управления на группе Ли M .*

Следствие 5.2. *Гамильтоново поле \vec{H} имеет 4 независимые интеграла в инволюции: h_4, h_5, E, h_0 . Следовательно, гамильтонова система $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$ интегрируема по Лиувиллю.*

Поэтому экстремали в субримановой задаче могут быть найдены в квадратурах. Мы найдем выражения экстремалей в модели обобщенной задачи Дидоны через эллиптические функции Якоби.

5.2 Маятник и эллиптические координаты

Уравнение маятника $\ddot{\theta} = -\sin \theta$, $\theta \in S^1$ записывается в виде системы первого порядка

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c \\ \dot{c} = -\sin \theta \end{cases} \quad (\theta, c) \in S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c.$$

Эта гамильтонова система с одной степенью свободы с гамильтонианом (интегралом энергии)

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \theta \in [-1, +\infty)$$

интегрируема в эллиптических функциях Якоби (см. [22], а также Приложение).

5.2.1 Эллиптические координаты в $S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c$

Введем координаты действие-угол (φ, k) в областях на цилиндре $S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c$:

$$C_1 = \{(\theta, c) \in S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c \mid E \in (-1, 1)\}, \quad C_2 = \{(\theta, c) \in S_\theta^1 \times \mathbb{R}_c \mid E \in (1, +\infty)\}.$$

Будем называть координаты (φ, k) эллиптическими координатами в фазовом пространстве маятника. Эти координаты определяются следующим образом.

(1) $(\theta, c) \in C_1$:

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} \varphi, \\ \frac{c}{2} = k \operatorname{cn} \varphi \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c^2}{4}} \in (0, 1),$$

$$\varphi \in [0, 4K].$$

(2) $(\theta, c) \in C_2$:

$$\begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k}, \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{1}{k} \operatorname{dn} \frac{\varphi}{k} \end{cases}$$

$$\pm = \operatorname{sgn} c,$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c^2}{4}}} \in (0, 1),$$

$$\varphi \in [0, 2kK].$$

В области C_2 будем использовать, наряду с координатами (φ, k) , также координаты (ψ, k) такие, что

$$\psi = \frac{\varphi}{k} \in [0, 2K].$$

5.2.2 Уравнение маятника в эллиптических координатах

Легко проверить, что в областях C_i , $i = 1, 2$, уравнение маятника в эллиптических координатах принимает простую форму:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = c \\ \dot{c} = -\sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\varphi} = 1 \\ \dot{k} = 0 \end{cases}$$

Эллиптическая координата φ является временем движения вдоль траекторий уравнения маятника, а k — это параметр, различающий траектории с разными энергиями.

Следовательно, решения уравнения маятника имеют в эллиптических координатах простую форму:

$$k = \operatorname{const}, \quad \varphi_t = \varphi + t.$$

Если начальные значения (θ, c) выразить в терминах эллиптических координат (φ, k) , то решения уравнения маятника примут следующую форму:

(1) $(\theta, c) \in C_1$:

$$\sin \frac{\theta_t}{2} = k \operatorname{sn} \varphi_t,$$

$$\frac{c_t}{2} = k \operatorname{cn} \varphi_t,$$

$$\varphi_t = \varphi + t.$$

(2) $(\theta, c) \in C_2$, $\pm = \operatorname{sgn} c$:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta_t}{2} &= \pm \operatorname{sn} \psi_t, \\ \frac{c_t}{2} &= \pm \frac{1}{k} \operatorname{dn} \psi_t, \\ \psi_t &= \psi + \frac{t}{k}.\end{aligned}$$

5.2.3 Эллиптические координаты в C

Напомним, что интеграл энергии имеет вид

$$E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4 = \frac{c^2}{2} - \alpha \cos(\theta - \beta) \in [-\alpha, +\infty).$$

Введем эллиптические координаты $(k, \varphi, \alpha, \beta)$ в подмножествах C_1 , C_2 и C_3 цилиндра C следующим образом.

$\lambda \in C_1$:

$$\begin{aligned}\alpha &\neq 0, \quad E \in (-\alpha, \alpha), \\ k &= \sqrt{\frac{E + \alpha}{2\alpha}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}} \in (0, 1), \\ \varphi &\in [0, 4K], \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = k \operatorname{sn}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} = k\sqrt{\alpha} \operatorname{cn}(\sqrt{\alpha}\varphi). \end{cases}\end{aligned}$$

$\lambda \in C_2$:

$$\begin{aligned}\alpha &\neq 0, \quad E \in (\alpha, +\infty), \\ k &= \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta - \beta}{2} + \frac{c^2}{4\alpha}}} \in (0, 1), \\ \varphi &\in [0, 2kK], \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = \pm \operatorname{sn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\alpha}\varphi}{k}, \end{cases} \\ \pm &= \operatorname{sgn} c, \\ \psi &= \frac{\varphi}{k}.\end{aligned}$$

$\lambda \in C_3$:

$$\begin{aligned} \alpha &\neq 0, & E &= \alpha, & \theta - \beta &\neq \pi, \\ k &= 1, \\ \varphi &\in (-\infty, +\infty), \\ \begin{cases} \sin \frac{\theta - \beta}{2} = \pm \operatorname{th}(\sqrt{\alpha}\varphi), \\ \frac{c}{2} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}\varphi)}, \end{cases} \\ \pm &= \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

В эллиптических координатах $(\varphi, k, \alpha, \beta)$ на $\cup_{i=1}^3 C_i$ вертикальная часть нормальной гамильтоновой системы

$$\dot{\theta} = c, \quad \dot{c} = -\alpha \sin(\theta - \beta), \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$$

упрощается:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{k} = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0.$$

5.3 Параметризация геодезических

Пусть

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0. \tag{38}$$

Тогда гамильтонова система (23)–(28) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= c, \\ \dot{c} &= -\sin \theta, \\ \dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{y} &= \sin \theta, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(x \sin \theta - y \cos \theta) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2} \sin \theta (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \dot{y} (x^2 + y^2), \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2} \cos \theta (x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \dot{x} (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Интеграл энергии имеет вид

$$E = \frac{c^2}{2} - \cos \theta \in [-1, +\infty).$$

5.3.1 Случай $\alpha = 1, \beta = 0$

Ниже мы получаем выражение для нормальных геодезических $q_t = (x_t, y_t, z_t, v_t, w_t)$ в случае (38) с помощью эллиптических координат в фазовой плоскости маятника, введенных в разделе 5.2.1.

Обозначим $\theta = \theta_0, c = c_0$.

Случай $\lambda \in C_1$: $E \in (-1, 1)$. Пусть

$$k = \sqrt{\frac{E+1}{2}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c^2}{4}} \in (0, 1),$$

$$\varphi_t = \varphi + t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_t &= 2(E(\varphi_t) - E(\varphi)) - (\varphi_t - \varphi), \\ y_t &= 2k(\operatorname{cn} \varphi - \operatorname{cn} \varphi_t), \\ z_t &= 2k(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) - k(\operatorname{cn} \varphi + \operatorname{cn} \varphi_t)x_t, \\ v_t &= 2k \operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t x_t - k \operatorname{cn} \varphi_t x_t^2 - (1 - 2k^2 + 2k^2 \operatorname{cn} \varphi \operatorname{cn} \varphi_t)y_t, \\ w_t &= -\frac{1}{6} \left(x_t^3 + 2(2k^2 - 1 + 6k^2 \operatorname{cn}^2 \varphi)x_t + 2(\varphi_t - \varphi) \right. \\ &\quad \left. + 8k^2(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{cn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) \right. \\ &\quad \left. - 24k^2 \operatorname{cn} \varphi(\operatorname{sn} \varphi_t \operatorname{dn} \varphi_t - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi) \right). \end{aligned}$$

Случай $\lambda \in C_2$: $E \in (1, +\infty)$. Пусть

$$k = \sqrt{\frac{2}{E+1}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{c^2}{4}}} \in (0, 1),$$

$$\psi_t = \psi + \frac{t}{k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{2}{k} \left(E(\psi_t) - E(\psi) - \frac{2-k^2}{2}(\psi_t - \psi) \right), \\ y_t &= \pm \frac{2}{k}(\operatorname{dn} \psi - \operatorname{dn} \psi_t), \\ z_t &= \pm \left(2(\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) - \frac{1}{k}(\operatorname{dn} \psi + \operatorname{dn} \psi_t)x_t \right), \\ v_t &= \pm \left(2 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t x_t - \frac{1}{k} \operatorname{dn} \psi_t x_t^2 \right) + \frac{1}{k^2}(2 - k^2 - 2 \operatorname{dn} \psi \operatorname{dn} \psi_t)y_t, \\ w_t &= -\frac{1}{6} \left(x_t^3 + \frac{2}{k^2}(2 - k^2 + 6 \operatorname{dn}^2 \psi)x_t + 2k(\psi_t - \psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{k}(\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t \operatorname{dn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi \operatorname{dn} \psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{24}{k} \operatorname{dn} \psi(\operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t - \operatorname{sn} \psi \operatorname{cn} \psi) \right), \\ &\quad \pm = \operatorname{sgn} c. \end{aligned}$$

Случай $\lambda \in C_3$: $E = 1$, $\theta \neq \pi$. Обозначим

$$\varphi_t = \varphi + t.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
x_t &= 2(\operatorname{th} \varphi_t - \operatorname{th} \varphi) - (\varphi_t - \varphi), \\
y_t &= \pm 2 \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} \right), \\
z_t &= \pm \left(2 \left(\frac{\operatorname{sh} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) - \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} + \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} \right) x_t \right), \\
v_t &= \pm \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \varphi_t} x_t - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_t} x_t^2 \right) + \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \varphi_t} \right) y_t, \\
w_t &= -\frac{1}{6} \left(x_t^3 + 6 \frac{2 + \operatorname{ch}^2 \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} x_t + 6(\varphi_t - \varphi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{24}{\operatorname{ch} \varphi} \left(\frac{\operatorname{sh} \varphi_t}{\operatorname{ch}^2 \varphi_t} - \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right) - 8(\operatorname{th}^3 \varphi_t - \operatorname{th}^3 \varphi) \right), \\
\pm &= \operatorname{sgn} c.
\end{aligned}$$

Случай $\lambda \in C_4$: $E = -1$ и $\lambda \in C_5$: $E = 1$, $\theta = \pi$.

$$\begin{aligned}
x_t &= t, \\
y_t &= 0, \\
z_t &= 0, \\
v_t &= 0, \\
w_t &= -\frac{t^3}{6}.
\end{aligned}$$

5.3.2 Случай $\alpha = 0$, $\theta = 0$

Случай $\lambda \in C_6$: $c \neq 0$.

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{\sin \tau}{c}, \\
y_t &= \frac{1 - \cos \tau}{c}, \\
z_t &= \frac{\tau - \sin \tau}{2c^2}, \\
v_t &= \frac{\cos 2\tau - 4 \cos \tau + 3}{4c^3}, \\
w_t &= \frac{\sin 2\tau - 4 \sin \tau + 2\tau}{4c^3}, \\
\tau &= ct.
\end{aligned}$$

Случай $\lambda \in C_7$: $c = 0$.

$$\begin{aligned} x_t &= t, \\ y_t &= 0, \\ z_t &= 0, \\ v_t &= 0, \\ w_t &= -\frac{t^3}{6}. \end{aligned}$$

5.3.3 Общий случай

Параметризация геодезических в общем случае получается из формул для частных случаев, приведенных в разделах 5.3.1, 5.3.2 с учетом двухпараметрической группы симметрий $G_{\vec{h}_0, Z}$ описанной в разделе 4.3.

Так как $\pi_* \vec{h}_0 = X_0$ и $\pi_* Z = Y$, из Утверждения 4.2 следует, что

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\lambda, t) &= e^{-sX_0} \circ e^{-rY} \circ \text{Exp}(e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0}(\lambda), te^r), \\ \lambda &= (\theta, c, \alpha, \beta) \in C, \quad \theta \in S^1, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \in S^1. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда для $s = -\beta$, $r = \frac{1}{2} \ln \alpha$ получаем

$$e^{rZ} \circ e^{s\vec{h}_0} : \begin{pmatrix} \theta \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' \\ c' \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \beta \\ c/\sqrt{\alpha} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad te^r = t\sqrt{\alpha}.$$

Поэтому нормальные геодезические, соответствующие произвольному начальному ковектору $\lambda = (\theta, c, \alpha, \beta) \in C$, $\alpha \neq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\theta, c, \alpha, \beta, t) &= e^{-sX_0} \circ e^{-rY} \circ \text{Exp}(\theta', c', \alpha' = 1, \beta' = 0, t'), \\ \theta' &= \theta - \beta, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{\alpha}}, \quad t' = t\sqrt{\alpha}, \\ s &= -\beta, \quad r = \frac{1}{2} \ln \alpha, \end{aligned}$$

а экспоненциальное отображение для $\alpha = 1$, $\beta = 0$ было вычислено в разделе 5.3.1. Обозначая

$$\text{Exp}(\theta, c, \alpha, \beta, t) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \text{Exp}(\theta', c', \alpha' = 1, \beta' = 0, t') = \begin{pmatrix} x'_{t'} \\ y'_{t'} \\ z'_{t'} \\ v'_{t'} \\ w'_{t'} \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-r}(x'_{t'} \cos s + y'_{t'} \sin s) \\ e^{-r}(-x'_{t'} \sin s + y'_{t'} \cos s) \\ e^{-2r} z'_{t'} \\ e^{-3r}(v'_{t'} \cos s + w'_{t'} \sin s) \\ e^{-3r}(-v'_{t'} \sin s + w'_{t'} \cos s) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha = 0$. Возьмем $s = -\theta$, тогда

$$e^{s\bar{h}_0} : \begin{pmatrix} \theta \\ c \\ \alpha = 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta' = 0 \\ c \\ \alpha = 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Поэтому для $\lambda = (\theta, c, \alpha = 0, \beta) \in C$ геодезические имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\theta, c, \alpha = 0, \beta, t) &= e^{-sX_0} \circ \text{Exp}(\theta' = 0, c, \alpha = 0, \beta, t), \\ s &= -\theta, \end{aligned}$$

а экспоненциальное отображение для $\alpha = 0, \theta = 0$ уже было вычислено в разделе 5.3.2. Обозначая

$$\text{Exp}(\theta, c, \alpha = 0, \beta, t) = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \text{Exp}(\theta' = 0, c', \alpha = 0, \beta, t) = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \\ v'_t \\ w'_t \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_t \cos s + y'_t \sin s \\ -x'_t \sin s + y'_t \cos s \\ z'_t \\ v'_t \cos s + w'_t \sin s \\ -v'_t \sin s + w'_t \cos s \end{pmatrix}.$$

5.4 Подробности интегрирования гамильтоновой системы

Случай $\lambda \in C_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_t}{2} &= \text{dn } \varphi_t, \\ \cos \theta_t &= 2 \text{dn}^2 \varphi_t - 1, \\ \sin \theta_t &= 2k \text{sn } \varphi_t \text{dn } \varphi_t. \end{aligned}$$

Интеграл

$$z_t = \int y_t x_t dt - \frac{x_t y_t}{2},$$

вычисляется с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \int \text{sn } t \text{ dn } t \text{ E}(t) dt &= -\text{cn } t \text{ E}(t) + \frac{1}{2} \text{sn } t \text{ dn } t + \frac{1}{2} \int \text{cn } t dt, \\ \int t \text{ sn } t \text{ dn } t dt &= -t \text{ cn } t + \int \text{cn } t dt. \end{aligned}$$

Интегрирование

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + \frac{1}{2} \int x_t^2 \dot{y}_t dt$$

выполняется с помощью следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t E^2(t) dt &= -E^2(t) \operatorname{cn} t + E(t) \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t - \left(\frac{2}{3}k^2 - 1\right) \operatorname{cn} t \\ &\quad - \frac{k^2}{3} \operatorname{sn}^2 t \operatorname{cn} t + \int E(t) \operatorname{cn} t dt, \\ \int t \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t E(t) dt &= -t \operatorname{cn} t E(t) + \frac{1}{2} t \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t + \frac{1}{2} \operatorname{cn} t + \frac{1}{2} \int t \operatorname{cn} t dt \\ &\quad + \int \operatorname{cn} t E(t) dt, \\ \int t^2 \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t dt &= -t^2 \operatorname{cn} t + 2 \int \operatorname{cn} t dt. \end{aligned}$$

Интеграл от функции

$$w_t = -\frac{x_t^3}{6} - \frac{1}{2} \int \dot{x}_t y_t^2 dt$$

берется с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cn}^2 t \operatorname{dn}^2 t dt &= \frac{1}{3} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) E(t) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) t, \\ \int \operatorname{cn} t \operatorname{dn}^2 t dt &= \frac{1}{2} \operatorname{sn} t \operatorname{dn} t + \frac{1}{2} \int \operatorname{cn} t dt, \\ \int \operatorname{cn}^2 t dt &= \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) t + \frac{1}{k^2} E(t). \end{aligned}$$

Случай $\lambda \in C_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_t}{2} &= \operatorname{cn} \psi_t, \\ \cos \theta_t &= \frac{k^2 - 2}{k^2} + \frac{2}{k^2} \operatorname{dn}^2 \psi_t, \\ \sin \theta_t &= 2 \operatorname{sn} \psi_t \operatorname{cn} \psi_t. \end{aligned}$$

Функция

$$z_t = \frac{x_t y_t}{2} - \int \dot{x}_t y_t dt$$

интегрируется с помощью формул:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn}^2 t dt &= \frac{1}{k^2} (t - E(t)), \\ \int \operatorname{dn} t dt &= \operatorname{am} t, \\ \int \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn} t dt &= -\frac{1}{2} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t + \frac{1}{2} \operatorname{am} t. \end{aligned}$$

Далее, компонента

$$v_t = \frac{y_t^3}{6} + \frac{x_t^2 y_t}{2} - \int x_t \dot{x}_t y_t dt$$

вычисляется с помощью интегралов

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn} t E(t) dt &= -\frac{1}{2} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t E(t) - \frac{1}{6k^2} \operatorname{dn}^3 t + \frac{1}{2} \int E(t) \operatorname{dn} t dt, \\ \int t \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn} t dt &= -\frac{1}{2} t \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t - \frac{1}{2k^2} \operatorname{dn} t + \frac{1}{2} \int t \operatorname{dn} t dt, \\ \int \operatorname{sn}^2 t E(t) dt &= \frac{1}{k^2} \int E(t) dt - \frac{1}{2k^2} E^2(t), \\ \int t \operatorname{sn}^2 t dt &= \frac{1}{2k^2} t^2 - \frac{1}{k^2} t E(t) + \frac{1}{k^2} \int E(t) dt.\end{aligned}$$

Наконец, компонента

$$w_t = -\frac{x_t^3}{6} - \frac{1}{2} \int y_t^2 \dot{x}_t dt$$

вычисляется с помощью интеграла

$$\int \operatorname{sn}^2 t \operatorname{dn}^2 t dt = -\frac{1}{3} \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + \frac{1-k^2}{3k^2} t + \frac{2k^2-1}{3k^2} E(t).$$

Случай $\lambda \in C_3$. Выражения для геодезических получаются из результатов для случаев $\lambda \in C_1, C_2$ с помощью предельного перехода $k \rightarrow 1-0$.

6 Эластики

На рисунках 1–23 изображены проекции нормальных геодезических на плоскость (x, y) . Эти кривые $(x(t), y(t))$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta, \\ \dot{y} &= \sin \theta, \\ \ddot{\theta} &= -\sin \theta.\end{aligned}$$

Такие кривые называются эластками Эйлера: они были открыты Эйлером как стационарные профили упругого стержня, см. [13].

Каждая эластика соответствует некоторой траектории маятника θ_t . Как известно, характер движения маятника определяется его энергией

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \cos \theta \in [-1, +\infty).$$

Соответственно различную форму имеют эластики; заметим, что кривизна эластики равна

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y = \dot{\theta}.$$

При минимальной энергии $E = -1$ маятник находится в устойчивом положении равновесия $\theta = 0$, в этом случае эластика является прямой (Рис. 1).

При малой энергии $E \in (-1, 1)$ маятник совершает колебания, не достигая неустойчивого положения равновесия $\theta = \pi$. Соответствующие эластики имеют точки перегиба и называются инфлекссионными [13] (Рис. 2–13).

При критической энергии $E = 1$ маятник либо находится в неустойчивом положении равновесия $\theta = \pi$, либо стремится к нему при $t \rightarrow \pm\infty$. Соответствующие эластики см. на Рис. 14, 15.

При большой энергии $E \in (1, +\infty)$ маятник вращается в одном направлении, эластики сохраняют направление выпуклости, и называются неинфлексионными (Рис. 16–22).

Наконец, при бесконечной энергии $E = +\infty$ маятник вращается с бесконечной скоростью, и соответствующая эластика — окружность (Рис. 23).

Геодезические в обобщенной задаче Дидоны — эластики — образуют замечательное семейство кривых, соединяющее прямую с окружностью — геодезические в классической задаче Дидоны.

7 Приложение: эллиптические функции Якоби

Эллиптические интегралы в форме Якоби

Эллиптические интегралы первого рода:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

и второго рода:

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Полные эллиптические интегралы:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Определение эллиптических функций Якоби

$$\varphi = \operatorname{am} u \quad \Leftrightarrow \quad u = F(\varphi, k),$$

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u,$$

$$\operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u,$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

$$E(u) = E(\operatorname{am} u, k).$$

Стандартные формулы

Производные и интегралы

$$\operatorname{am}' u = \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{dn}' u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

$$\int_0^u \operatorname{dn}^2 t \, dt = E(u).$$

Вырождение

$$\begin{aligned} k \rightarrow +0 &\Rightarrow \operatorname{sn} u \rightarrow \sin u, \quad \operatorname{cn} u \rightarrow \cos u, \quad \operatorname{dn} u \rightarrow 1, \quad E(u) \rightarrow u, \\ k \rightarrow 1 - 0 &\Rightarrow \operatorname{sn} u \rightarrow \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u \rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad E(u) \rightarrow \operatorname{th} u. \end{aligned}$$

Благодарность

Автор выражает благодарность проф. А.А. Аграчеву за постановку задачи и полезные советы во время работы.

Большая часть данной работа была выполнена во время стажировки в Международной школе высших исследований в Триесте, Италия.

Список литературы

- [1] Agrachev A. A. Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures // Journal Dyn. and Control Systems. Т. 2. N 3. 1996. С. 321–358.
- [2] Аграчев А.А., Сарычев А.А. Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем// Докл. АН СССР. 1987. Т. 295.
- [3] Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint// Preprint SISSA 77/2002/M, SISSA, Trieste, Italy.
- [4] Agrachev A. A., Sachkov Yu.L. An Intrinsic Approach to the Control of Rolling Bodies// Proceedings of the 38-th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 7–10, 1999, vol. 1, 431–435.
- [5] El-Alaoui C., Gauthier J.P., Kupka I. Small sub-Riemannian balls on \mathbb{R}^3 // Journal Dyn. and Control Systems. Т. 2. N 3. 1996. С. 359–421.
- [6] Anzaldo-Menezes A., Monroy-Pérez F. Charges in magnetic fields and sub-Riemannian geodesics// In: Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications, World Scientific, 2002, pp. 183–202.
- [7] Арнольд В.И. Математические методы классической механики, М.: Наука, 1989.
- [8] Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry// In: Sub-Riemannian geometry, A. Bellaïche and J.-J. Risler, Eds., Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1996, 1–78.
- [9] Bicchi A., Prattichizzo D., Sastry S. Planning motions of rolling surfaces// IEEE Conf. on Decision and Control, 1995.
- [10] Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики, М.: Факториал, 1977.

- [11] Brockett R. Control theory and singular Riemannian geometry// In: New Directions in Applied Mathematics, (P. Hilton and G. Young eds.), Springer-Verlag, New York, 11–27.
- [12] Brockett R., Dai L. Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability// In: Nonholonomic Motion Planning, Z. Li and J. Canny, Eds., Kluwer, Boston, 1993, 1–21.
- [13] Jurdjevic V. Geometric Control Theory, Cambridge University Press, 1997.
- [14] Krener A.J., Nikitin S. Generalized isoperimetric problem// Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, **7** (1997), 3: 1–15.
- [15] Laumond J.P. Nonholonomic motion planning for mobile robots// LAAS Report 98211, May 1998, LAAS-CNRS, Toulouse, France.
- [16] Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint// IEEE Trans. on Robotics and Automation, (1), **6** (1990), 62–72.
- [17] Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: the holonomic case// In: Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control, June 29–July 19, 1997, Univ. Colorado, Boulder, G. Ferreyra et al., Eds, 1999, 241–256.
- [18] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1961.
- [19] Sachkov Yu.L. Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures// Report No. 98-151, March 1998, Laboratoire de Topologie, Université de Bourgogne, Dijon, France.
- [20] Vendittelli M., Laumond J.P., Oriolo G. Steering nonholonomic systems via nilpotent approximations: The general two- trailer system// 1999 IEEE International Confer. on Robotics and Automation, May 10–15, 1999, Detroit, MI.
- [21] Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи// Итоги науки и техники: Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 16, ВИНТИ, Москва, 1987, 5–85.
- [22] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, Москва, УРСС, 2002.

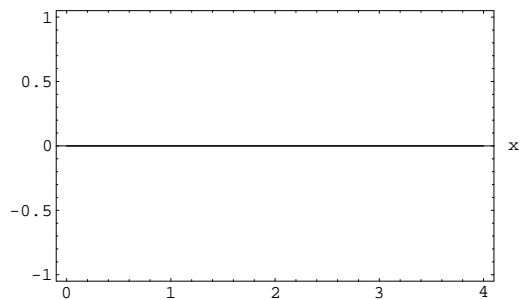


Рис. 1: $E = -1$

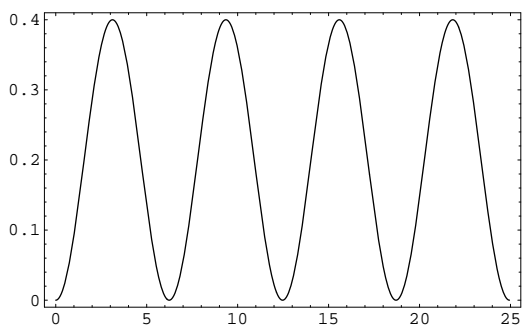


Рис. 2: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.1$

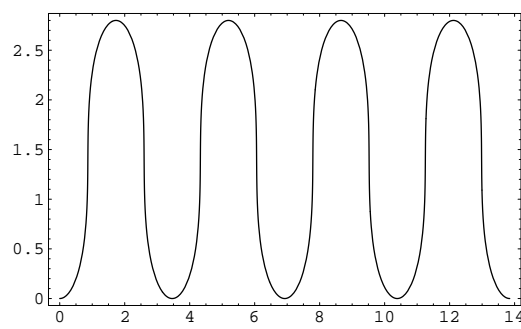


Рис. 3: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.7$

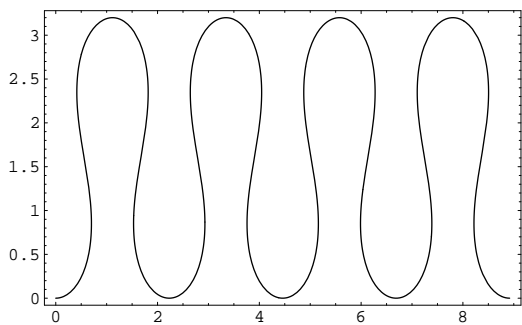


Рис. 4: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.8$

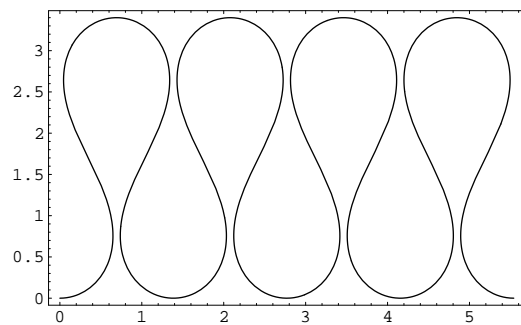


Рис. 5: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.85$

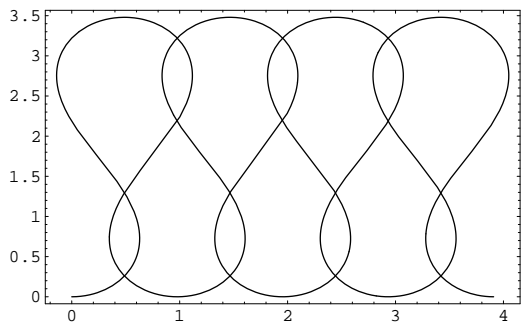


Рис. 6: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.87$

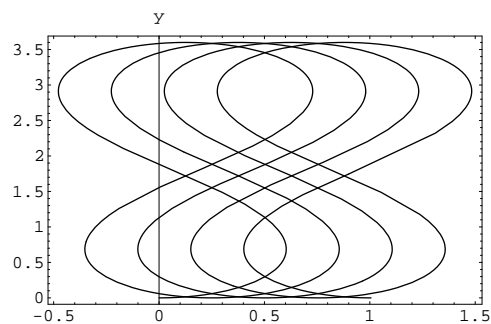


Рис. 7: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.9$

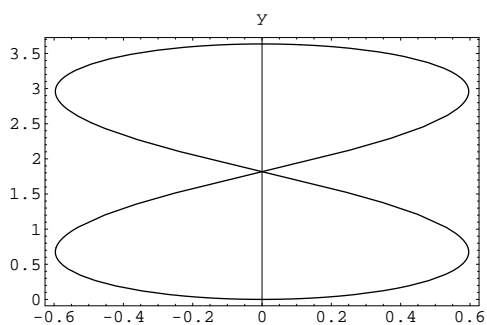


Рис. 8: $E \in (-1, 1)$, $k = k_0$

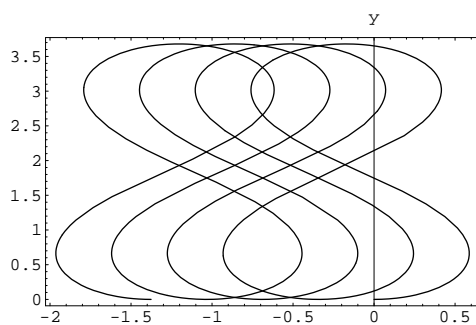


Рис. 9: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.92$

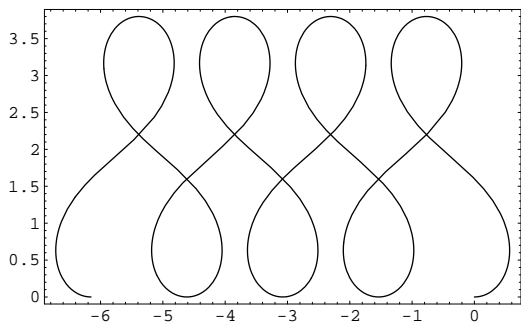


Рис. 10: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.95$

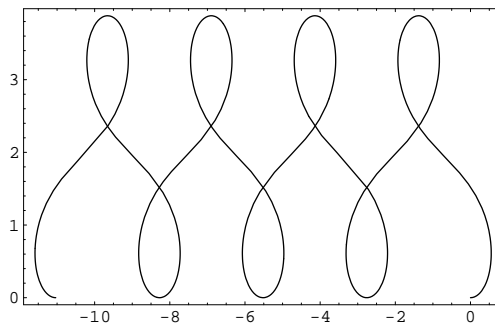


Рис. 11: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.97$

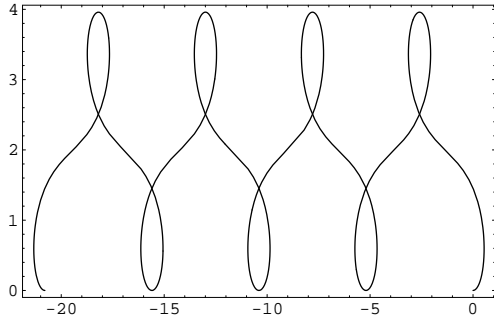


Рис. 12: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.99$

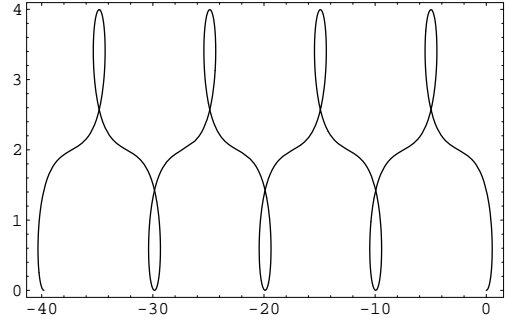


Рис. 13: $E \in (-1, 1)$, $k = 0.999$

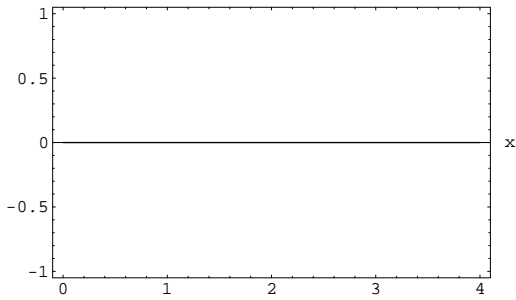


Рис. 14: $E = 1$, $\theta = \pi$

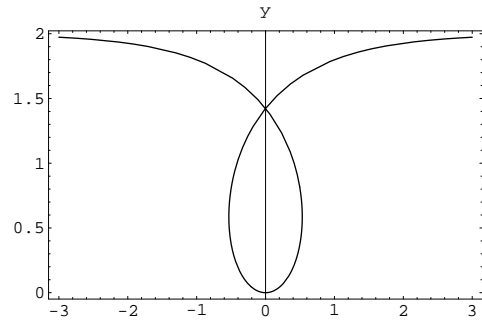


Рис. 15: $E = 1$, $\theta \neq \pi$

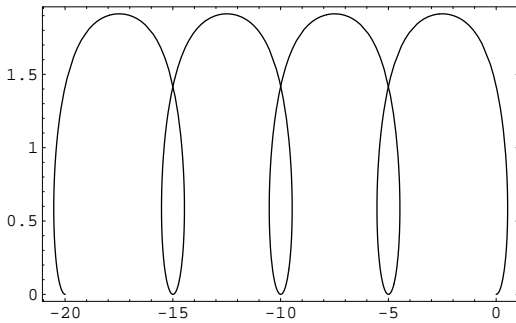


Рис. 16: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.999$

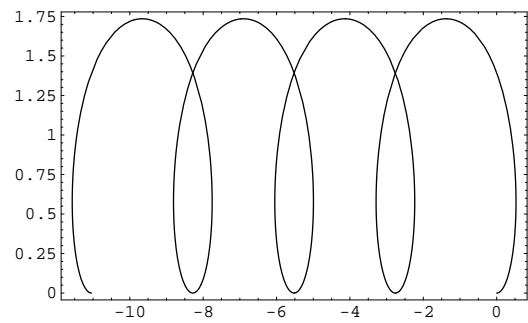


Рис. 17: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.99$

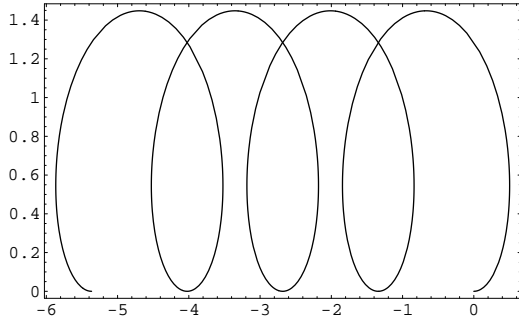


Рис. 18: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.95$

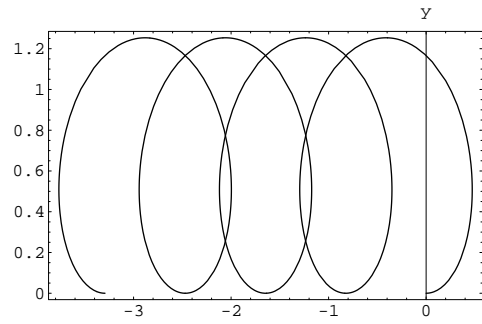


Рис. 19: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.9$

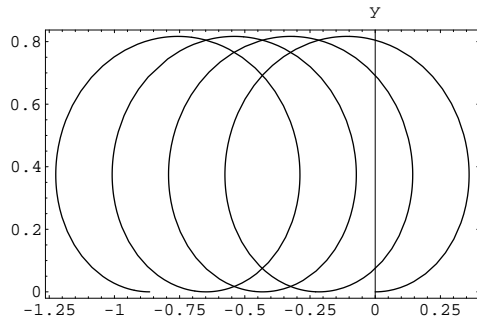


Рис. 20: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.7$

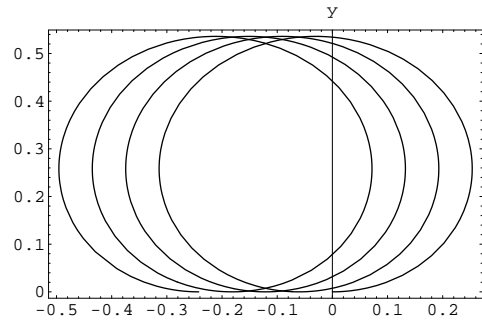


Рис. 21: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.5$

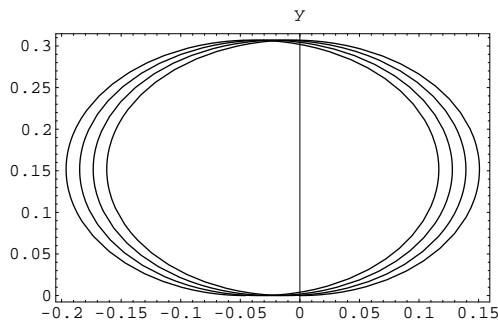


Рис. 22: $E \in (1, +\infty)$, $k = 0.3$

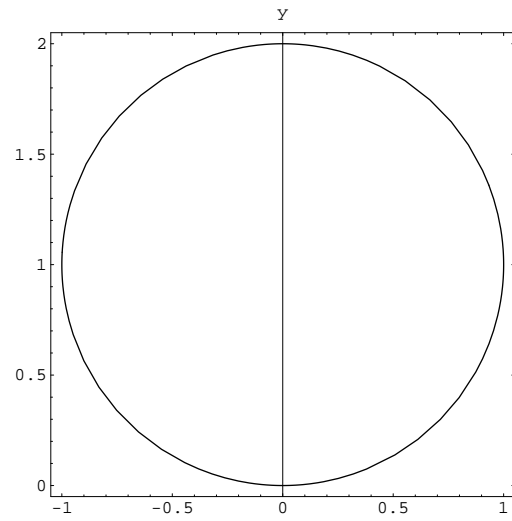


Рис. 23: $E = +\infty$