

УДК 517.977

**Ю.Л. Сачков**

**Симметрии и страты Максвелла  
в задаче об оптимальном качении  
сферы по плоскости<sup>1</sup>**

**Аннотация**

Рассматривается задача о качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания. Требуется перекатить сферу из одной контактной конфигурации в другую так, чтобы длина кривой, пробегаемой точкой контакта, была наименьшей. Экстремальные траектории в этой задаче были описаны А.Артуром, Дж.Уолшем, и В.Джарджевичем.

В работе построены дискретные и непрерывные симметрии задачи, исследованы неподвижные точки их действия в прообразе и образе экспоненциального отображения. На основе этого анализа получены необходимые условия оптимальности — верхние оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, геометрические методы, симметрии, качение поверхностей, эластики Эйлера

---

<sup>1</sup>Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект No. 09-01-00246-а, а также Программой Президиума РАН «Математическая теория управления».

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Экстремальные траектории</b>	<b>8</b>
2.1	Аномальный случай . . . . .	11
2.2	Нормальный случай . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Непрерывные и дискретные симметрии</b>	<b>15</b>
3.1	Преобразование нормальных экстремалей . . . . .	15
3.2	Симметрии экспоненциального отображения . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Страты Максвелла, соответствующие симметриям</b>	<b>27</b>
4.1	Неподвижные точки симметрий в прообразе экспоненциального отображения . . . . .	29
4.2	Неподвижные точки симметрий в образе экспоненциального отображения . . . . .	31
4.3	Условия оптимальности экстремальных траекторий . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Приложение: Представление вращений трехмерного пространства кватернионами</b>	<b>39</b>

# 1 Введение

Рассматривается механическая система, состоящая из двух горизонтальных плоскостей и сферы, касающейся этих плоскостей. Нижняя плоскость неподвижна, а сфера катится без прокручивания и проскальзывания благодаря горизонтальному движению верхней плоскости. Состояние такой системы описывается точкой контакта сферы с нижней плоскостью и ориентацией сферы в трехмерном пространстве. Требуется перекатить сферу из заданного начального состояния в заданное терминальное состояние так, чтобы кривая, пробегаемая точкой контакта на плоскости, имела минимальную длину. Управлением является скорость верхней плоскости, или, что эквивалентно, скорость центра сферы.

Будет исследоваться кинематика данной системы, поэтому наличие верхней плоскости можно игнорировать и изучать качение сферы по (нижней) плоскости без прокручивания и проскальзывания. Отсутствие проскальзывания означает, что мгновенная скорость точки контакта сферы и плоскости равна нулю, а отсутствие прокручивания означает, что вектор угловой скорости сферы горизонтален. Качение одной поверхности по другой без прокручивания и проскальзывания моделирует работу руки робота-манипулятора, и задачи о таком движении вызывают большой интерес в механике, робототехнике и теории управления (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 5]).

Задача об оптимальном качении сферы по плоскости была поставлена в работе Дж.Хаммерсли [6]. А.Артур и Дж.Уолш [7] описали экстремальные траектории в этой задаче, а В.Джарджевич [8, 9] показал, что при оптимальном качении точка контакта сферы и плоскости движется по

эластикам Эйлера (стационарным конфигурациям упругого стержня на плоскости [10, 11]).

Вопрос об оптимальности экстремальных траекторий оставался открытым. Малые дуги экстремальных траекторий оптимальны, однако большие дуги, вообще говоря, нет. Точка, в которой экстремальная траектория теряет оптимальность, называется *точкой разреза* (по терминологии римановой геометрии). В этой работе начато исследование точек разреза и соответствующего времени разреза в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости. Доказаны верхние оценки времени разреза вдоль экстремальных траекторий, т.е. необходимые условия оптимальности. Эти оценки получены благодаря исследованию дискретных симметрий задачи и соответствующих *точек Максвелла* (точек пересечения экстремальных траекторий с одинаковым значением функционала и времени). Этот подход был успешно применен к анализу нескольких задач оптимального управления [12, 13, 14]; имеющийся опыт дает основания предполагать, что полученные верхние оценки времени разреза в действительности совпадают с временем разреза.

Перейдем к математической постановке задачи. Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — неподвижный правый репер в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , такой, что векторы  $e_1, e_2$  лежат в плоскости  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , по которой катится сфера  $S^2$  единичного радиуса, а вектор  $e_3$  направлен в полупространство, содержащее эту сферу. Репер  $e_1, e_2, e_3$  закреплен в точке  $O \in \mathbb{R}^2$ . Пусть  $f_1, f_2, f_3$  — подвижный правый репер, закрепленный в катящейся сфере  $S^2$ . Обозначим координаты точки в  $\mathbb{R}^3$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  как  $(x, y, z)$ , а координаты этой точки

в базисе  $f_1, f_2, f_3$ , перенесенном в точку  $O$ , как  $(X, Y, Z)$ . Таким образом,

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = Xf_1 + Yf_2 + Zf_3.$$

Пусть матрица  $R \in \text{SO}(3)$  переводит неподвижный репер  $e_1, e_2, e_3$  в подвижный репер  $f_1, f_2, f_3$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Состояние системы «сфера  $S^2$  и плоскость  $\mathbb{R}^2$ » задается координатами  $(x, y)$  точки контакта  $S^2$  и  $\mathbb{R}^2$ , и матрицей вращения  $R$ . В качестве управлений будем использовать вектор  $(u_1, u_2)$  скорости центра сферы. Как показано в работе [8], задача об оптимальном качении сферы по плоскости формализуется как следующая задача оптимального управления:

$$\dot{x} = u_1, \tag{1}$$

$$\dot{y} = u_2, \tag{2}$$

$$\dot{R} = R(u_2 A_1 - u_1 A_2), \tag{3}$$

$$Q = (x, y, R) \in M = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \tag{4}$$

$$u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

$$Q(0) = Q_0 = (0, 0, \text{Id}), \quad Q(t_1) = Q_1, \tag{6}$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min. \tag{7}$$

Здесь и далее мы используем базисные матрицы в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Допустимые управления измеримы существенно ограниченные, а допустимые траектории липшицевы.

Задача (1)–(7) есть левоинвариантная субриманова задача на группе Ли  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3)$ . Введем следующий левоинвариантный репер на этой группе Ли:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_i(R) = RA_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

В терминах левоинвариантных полей

$$X_1 = e_1 - V_2, \quad X_2 = e_2 + V_1,$$

управляемая система (1)–(4) принимает вид

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q), \quad Q \in M = \mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(3), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (9)$$

Функционал (7) есть функционал субримановой длины для левоинвариантной субримановой структуры, заданной полями  $X_1, X_2$  как ортонормированным базисом:

$$l = \int_0^{t_1} \langle \dot{Q}, \dot{Q} \rangle^{1/2} dt \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Коммутаторы  $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$  вычисляются следующим образом:

$$[A_1, A_2] = A_3, \quad [A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2.$$

Таблица умножения в алгебре Ли  $L = \text{span}(e_1, e_2, V_1, V_2, V_3)$  группы Ли  $M$  имеет вид:

$$\text{ad } e_i = 0, \quad [V_1, V_2] = V_3, \quad [V_2, V_3] = V_1, \quad [V_3, V_1] = V_2.$$

В силу равенств

$$[X_1, X_2] = V_3, \quad [X_1, V_3] = -V_1, \quad [X_2, V_3] = -V_2,$$

векторные поля  $X_1, X_2$  в правой части системы (9) порождают алгебру Ли  $L$ . По теореме Рашевского-Чжоу [5], система (9) вполне управляема, т.е. любые две точки  $Q_0, Q_1 \in M$  можно соединить траекторией системы. Из теоремы Филиппова [5] следует существование оптимальных управлений в задаче (1)–(7) для любых  $Q_0, Q_1 \in M$  в классе существенно ограниченных измеримых управлений.

Эта работа продолжает исследования инвариантных субримановых задач на группах Ли, активно ведущиеся в рамках геометрической теории управления (см. [15, 14, 16, 17]). Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 к задаче об оптимальном качении сферы по плоскости применяется принцип максимума Понтрягина, и выводятся дифференциальные уравнения для экстремальных траекторий (в удобных для нас терминах повторяется часть результатов В.Джарджевича [8, 9]). В частности, показано, что подсистема гамильтоновой системы принципа максимума для сопряженных переменных в подходящих координатах сводится к уравнению математического маятника, а проекции экстремальных траекторий на плоскость  $(x, y)$  суть эйлеровы эластики. Вводится экспоненциальное отображение, параметризующее экстремальные траектории. В разделе 3 симметрии семейства эластик на плоскости (вра-

щения и отражения) продолжаются сначала до симметрий семейства экстремалей, а затем — до симметрий экспоненциального отображения (т.е. до отображений в прообразе и образе экспоненциального отображения, с ним коммутирующих). Описывается соответствующая группа  $G$  симметрий экспоненциального отображения. В разделе 4 получены основные результаты работы — необходимые условия оптимальности экстремальных траекторий в виде верхних оценок времени разреза. Известно, что в аналитической задаче экстремальная траектория не может быть оптимальной после точки пересечения с другой экстремальной траекторией с тем же значением времени и функционала (такие точки называются точками Максвелла). Мы исследуем неподвижные точки действия группы  $G$  в прообразе и образе экспоненциального отображения. На этой основе описаны точки Максвелла, соответствующие группе симметрий  $G$  — совпадающие конечные точки экстремальных траекторий, переставляемых элементами этой группы. В качестве следствия получены верхние оценки времени разреза. Эти результаты получены в терминах кватернионов единичной длины, параметризующих вращения трехмерного пространства; в разделе 5 напоминаются основные факты, связанные с этой параметризацией.

## 2 Экстремальные траектории

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что задача минимизации субримановой длины (7) равносильна задаче минимизации действия

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min \quad (11)$$

при фиксированном терминальном времени  $t_1$ .

Для отыскания оптимальных траекторий в задаче (1)–(6), (11) применим принцип максимума Понтрягина [18] в инвариантной формулировке, для этого напомним некоторые факты гамильтонова формализма на кокасательном расслоении [5]. Рассмотрим кокасательное расслоение  $T^*M$  гладкого многообразия  $M$  с канонической проекцией  $\pi : T^*M \rightarrow M$ ,  $\pi(\lambda) = q$  для ковектора  $\lambda \in T_q^*M$ . Тавтологическая 1-форма  $s \in \Lambda^1(T^*M)$  на кокасательном расслоении определена следующим образом. Пусть  $\lambda \in T^*M$  и  $v \in T_\lambda(T^*M)$ , тогда  $\langle s_\lambda, v \rangle = \langle \lambda, \pi_*v \rangle$  (в координатах  $s = p dq$ ). Каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении  $\sigma \in \Lambda^2(T^*M)$  определяется как  $\sigma = ds$  (в координатах  $\sigma = dp \wedge dq$ ). Любому гамильтониану  $h \in C^\infty(T^*M)$  можно сопоставить гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении  $\vec{h} \in \text{Vec}(T^*M)$  по правилу  $\sigma_\lambda(\cdot, \vec{h}) = d_\lambda h$ .

Принцип максимума Понтрягина для задачи (1)–(6), (11) имеет следующую инвариантную формулировку [5]. Введем линейные на слоях кокасательного расслоения  $T^*M$  гамильтонианы, соответствующие базисным полям:

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, e_i \rangle, \quad i = 1, 2,$$

$$H_i(\lambda) = \langle \lambda, V_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3,$$

а также семейство гамильтонианов

$$\begin{aligned} h_{u,\nu}(\lambda) &= \langle \lambda, u_1 X_1 + u_2 X_2 \rangle + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2) \\ &= u_1(h_1 - H_2) + u_2(h_2 + H_1) + \frac{\nu}{2}(u_1^2 + u_2^2), \\ \lambda &\in T^*M, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Теорема 2.1** (Принцип максимума Понтрягина). Пусть  $Q_t$  и  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , являются оптимальной траекторией и соответствующим оптимальным управлением в задаче (1)–(6), (11). Тогда существует нетривиальная липшицева кривая

$$(\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \lambda_t \in T_{Q_t}^*M,$$

для которой выполнены условия:

$$\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t), \nu}(\lambda_t) = u_1(t)(\vec{h}_1(\lambda_t) - \vec{H}_2(\lambda_t)) + u_2(t)(\vec{h}_2(\lambda_t) + \vec{H}_1(\lambda_t)), \quad (12)$$

$$h_{u(t), \nu}(\lambda_t) = \max_{u \in \mathbb{R}^2} h_{u, \nu}(\lambda_t), \quad t \in [0, t_1], \quad (13)$$

$$\nu \leq 0.$$

Удовлетворяющая теореме 2.1 кривая  $\lambda_t \in T^*M$  называется экстремалью, а ее проекция  $Q_t = \pi(\lambda_t) \in M$  — экстремальной траекторией (или субримановой геодезической).

С использованием координат  $(h_1, h_2, H_1, H_2, H_3)$  в слоях кокасательного расслоения  $T^*M$  гамильтонова система (12) принимает вид:

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0, \quad (14)$$

$$\dot{H}_1 = u_1 H_3, \quad (15)$$

$$\dot{H}_2 = u_2 H_3, \quad (16)$$

$$\dot{H}_3 = -u_1 H_1 - u_2 H_2, \quad (17)$$

$$\dot{Q} = u_1 X_1 + u_2 X_2. \quad (18)$$

## 2.1 Анормальный случай

Рассмотрим сначала случай  $\nu = 0$ . Из условия максимума (13) следует, что вдоль анормальных экстремалей

$$h_1 - H_2 \equiv 0, \quad h_2 + H_1 \equiv 0.$$

Дифференцируя эти тождества в силу гамильтоновой системы (14)–(18), получаем выражения для вертикальных координат:

$$H_1 = \text{const}, \quad H_2 = \text{const}, \quad H_3 = 0, \quad h_1 = H_2, \quad h_2 = -H_1,$$

экстремальных управлений:

$$u_1 = kH_2 = \text{const}, \quad h_2 = -kH_1 = \text{const}, \quad k = \text{const} \neq 0,$$

и экстремальных траекторий:

$$x_t = u_1 t, \quad y_t = u_2 t, \\ R_t = \exp(t(u_2 A_1 - u_1 A_2)).$$

В анормальном случае сфера равномерно катится по прямой. Любая анормальная траектория оптимальна, т.е. не содержит точек разреза.

## 2.2 Нормальный случай

Теперь рассмотрим случай  $\nu = -1$ . Из условия максимума (13) получаем

$$u_1 = h_1 - H_2, \quad u_2 = h_2 + H_1.$$

Максимизированный гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}((h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2),$$

и соответствующая гамильтонова система есть

$$\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0, \quad (19)$$

$$\dot{H}_1 = (h_1 - H_2)H_3, \quad (20)$$

$$\dot{H}_2 = (h_2 + H_1)H_3, \quad (21)$$

$$\dot{H}_3 = -h_1H_1 - h_2H_2, \quad (22)$$

$$\dot{Q} = (h_1 - H_2)X_1 + (h_2 + H_1)X_2. \quad (23)$$

Как всегда в субримановых задачах, можно ограничиться геодезическими единичной скорости, т.е. экстремальными траекториями, вдоль которых  $H = \frac{1}{2}((h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2) \equiv \frac{1}{2}$ . При таком ограничении удобно перейти в сопряженном пространстве от координат  $(h_1, h_2, H_1, H_2, H_3)$  к новым координатам  $(r, \alpha, \theta, c)$ :

$$h_1 = r \cos \alpha, \quad h_2 = r \sin \alpha, \quad (24)$$

$$h_1 - H_2 = \cos(\theta + \alpha), \quad h_2 + H_1 = \sin(\theta + \alpha), \quad (25)$$

$$c = H_3.$$

После этого гамильтонова система для нормальных экстремалей (19)–(23) принимает следующую форму, которую мы и будем исследовать в

этой работе:

$$\dot{\theta} = c, \quad (26)$$

$$\dot{c} = -r \sin \theta, \quad (27)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \quad (28)$$

$$\dot{x} = \cos(\theta + \alpha), \quad (29)$$

$$\dot{y} = \sin(\theta + \alpha), \quad (30)$$

$$\dot{R} = R\Omega, \quad \Omega = \sin(\theta + \alpha)A_1 - \cos(\theta + \alpha)A_2. \quad (31)$$

Переменные  $\alpha$  и  $\theta$  однозначно определяются переменными  $h_1, h_2, H_1, H_2$  по соотношениям (24), (25) лишь в случае  $r^2 = h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ . В этом случае соответствие между траекториями систем (19)–(23) и (26)–(31) взаимно однозначно.

Если  $r^2 = h_1^2 + h_2^2 = 0$ , то параметр  $\alpha$  не определяется соотношениями (24). В этом случае будем считать, что угол  $\alpha$  принимает произвольное значение на окружности  $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ . Тогда каждой траектории системы (19)–(23) соответствует бесконечный набор траекторий системы (26)–(31) с одной и той же функцией  $\theta_t + \alpha$ . Неоднозначность соответствия между траекториями систем (19)–(23) и (26)–(31) сводится к заменам вида  $\tilde{\theta}_t = \theta_t + \gamma, \tilde{\alpha} = \alpha - \gamma$ .

Семейство нормальных экстремалей  $\lambda_t$  параметризуется цилиндром  $C$ , состоящим их начальных точек  $\lambda = \lambda_t|_{t=0}$ :

$$\begin{aligned} C &= \{\lambda \in T_{Q_0}^*M \mid H(\lambda) = 1/2\} \\ &\cong \{(h_1, h_2, H_1, H_2, H_3) \in \mathbb{R}^5 \mid (h_1 - H_2)^2 + (h_2 + H_1)^2 = 1\} \\ &\cong \{(\theta, c, \alpha, r) \mid \theta \in S^1, c \in \mathbb{R}, \alpha \in S^1, r \geq 0\}. \end{aligned}$$

Каждой начальной точке  $\lambda \in C$  соответствует экстремаль  $\lambda_t = e^{t\tilde{H}}(\lambda)$ . Основным объектом дальнейшего исследования будет экспоненциальное отображение  $\text{Exp}$ , переводящее пару, состоящую из начальной точки  $\lambda \in C$  и момента времени  $t > 0$  в конец соответствующей экстремальной траектории:

$$\text{Exp}(\lambda, t) = \pi \circ e^{t\tilde{H}}(\lambda) = Q_t,$$

$$\text{Exp} : N \rightarrow M,$$

$$N = C \times \mathbb{R}_+ = \{(\lambda, t) \mid \lambda \in C, t > 0\}.$$

В случае  $r = 0$  эластика  $(x_t, y_t)$  есть прямая (при  $H_3 = c = 0$ ) или окружность (при  $H_3 = c \neq 0$ ), будем называть такие эластики *вырожденными*.

В случае  $r \neq 0$  эластика  $(x_t, y_t)$  принадлежит одному из четырех классов в зависимости от полной энергии  $E = c^2/2 - r \cos \theta$  маятника (26), (27):

1. инфлекссионный при  $E \in (-r, r)$ ,
2. неинфлекссионный при  $E \in (r, +\infty)$ ,
3. критический при  $E = r, c \neq 0$ ,
4. прямая при  $E = -r$ , и при  $E = r, c = 0$ .

Эластики классов 1–3 будем называть *невыврожденными*.

### 3 Непрерывные и дискретные симметрии

Пусть обратимое отображение  $g$  действует в прообразе и образе экспоненциального отображения:

$$g : N \rightarrow N, \quad g : M \rightarrow M.$$

Имеются ввиду два отображения, но удобнее обозначать их одной буквой; область действия отображения ( $N$  или  $M$ ) будет ясна из контекста. Отображение  $g$  называется *симметрией экспоненциального отображения*, если  $g \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ g$ , т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\text{Exp}} & M \end{array}$$

В этом разделе построена группа симметрий экспоненциального отображения, соответствующая симметриям эластик (26)–(30) — вращениям и отражениям. В разделе 4 на основе анализа действия этой группы получены оценки времени разреза в рассматриваемой задаче о качении сферы по плоскости.

#### 3.1 Преобразование нормальных экстремалей

В этом пункте рассматриваются преобразования нормальных экстремалей  $\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s)$ ,  $s \in [0, t]$ , т.е. траекторий гамильтоновой системы

$$\dot{\theta}_s = c_s, \quad (32)$$

$$\dot{c}_s = -r \sin \theta_s, \quad (33)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{r} = 0, \quad (34)$$

$$\dot{x}_s = \cos(\theta_s + \alpha), \quad (35)$$

$$\dot{y}_s = \sin(\theta_s + \alpha), \quad (36)$$

$$\dot{R}_s = R_s \Omega_s, \quad \Omega_s = \sin(\theta_s + \alpha) A_1 - \cos(\theta_s + \alpha) A_2, \quad (37)$$

$$(x_0, y_0, R_0) = (0, 0, \text{Id}). \quad (38)$$

В вычислениях будет использоваться стандартный изоморфизм между алгебрами Ли  $\mathfrak{so}(3)$  и  $\mathbb{R}^3$  (алгебраические операции — матричный коммутатор и векторное произведение соответственно), см., например [5]. Матрице  $A \in \mathfrak{so}(3)$  сопоставляется вектор  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^3$  по следующему правилу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Базисным матрицам  $A_i$  соответствуют векторы  $\tilde{A}_i = e_i$  стандартного базиса в  $\mathbb{R}^3$ .

Следующие равенства будут полезны при вычислениях, см. [8]:

$$e^{tB} \widetilde{Ae^{-tB}} = e^{tB} \tilde{A}, \quad A, B \in \mathfrak{so}(3), \quad (39)$$

$$\widetilde{RAR^{-1}} = R\tilde{A}, \quad R \in \text{SO}(3), \quad A \in \mathfrak{so}(3).$$

### 3.1.1 Вращения

Вращения эластик  $(x_s, y_s)$  вокруг начала координат в плоскости  $(x, y)$  порождают однопараметрическую группу симметрий траекторий гамильтоновой системы (32)–(38):

$$\{\Phi^\beta \mid \beta \in S^1\},$$

где вращение  $\Phi^\beta$  определяется следующим образом:

$$\Phi^\beta : \{\lambda_s \mid s \in [0, t]\} \rightarrow \{\lambda_s^\beta \mid s \in [0, t]\}, \quad (40)$$

$$\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s), \quad Q_s = (x_s, y_s, R_s), \quad (41)$$

$$\lambda_s^\beta = (\theta_s^\beta, c_s^\beta, \alpha^\beta, r, Q_s^\beta), \quad Q_s^\beta = (x_s^\beta, y_s^\beta, R_s^\beta), \quad (42)$$

$$\theta_s^\beta = \theta_s, \quad c_s^\beta = c_s, \quad \alpha^\beta = \alpha + \beta, \quad (43)$$

$$\begin{pmatrix} x_s^\beta \\ y_s^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$R_s^\beta = e^{\beta A_3} R_s e^{-\beta A_3}, \quad \Omega_s^\beta = e^{\beta A_3} \Omega_s e^{-\beta A_3}. \quad (45)$$

**Предложение 3.1.** *Если  $\{\lambda_s \mid s \in [0, t]\}$  есть траектория системы (32)–(38), то для любого  $\beta \in S^1$  кривая  $\{\lambda_s^\beta \mid s \in [0, t]\}$  есть также траектория этой системы.*

*Доказательство.* Сводится к дифференцированию. Проверим, например, выполнение уравнений

$$\dot{R}_s^\beta = R_s^\beta \Omega_s^\beta, \quad \Omega_s^\beta = \sin(\theta_s^\beta + \alpha^\beta) A_1 - \cos(\theta_s^\beta + \alpha^\beta) A_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Omega_s^\beta &= e^{\beta A_3} (\sin(\theta_s + \alpha) A_1 - \cos(\theta_s + \alpha) A_2) e^{-\beta A_3} = \\ &= \sin(\theta_s + \alpha) e^{\beta A_3} A_1 e^{-\beta A_3} - \cos(\theta_s + \alpha) e^{\beta A_3} A_2 e^{-\beta A_3}. \end{aligned}$$

Из равенства (39) следует, что

$$e^{\beta A_3} \widetilde{A_1} e^{-\beta A_3} = e^{\beta A_3} e_1 = \cos \beta e_1 + \sin \beta e_2,$$

поэтому  $e^{\beta A_3} A_1 e^{-\beta A_3} = \cos \beta A_1 + \sin \beta A_2$ . Аналогичным вычислением получаем  $e^{\beta A_3} A_2 e^{-\beta A_3} = -\sin \beta A_1 + \cos \beta A_2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega_s^\beta &= \sin(\theta_s + \alpha)(\cos \beta A_1 + \sin \beta A_2) - \cos(\theta_s + \alpha)(-\sin \beta A_1 + \cos \beta A_2) = \\ &= \sin(\theta_s + \alpha + \beta)A_1 - \cos(\theta_s + \alpha + \beta)A_2 = \\ &= \sin(\theta_s^\beta + \alpha^\beta)A_1 - \cos(\theta_s^\beta + \alpha^\beta)A_2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \dot{R}_s^\beta &= e^{\beta A_3} \dot{R}_s e^{-\beta A_3} = e^{\beta A_3} R_s \Omega_s e^{-\beta A_3} = (e^{\beta A_3} R_s e^{-\beta A_3}) (e^{\beta A_3} \Omega_s e^{-\beta A_3}) = \\ &= R_s^\beta \Omega_s^\beta. \end{aligned}$$

□

### 3.1.2 Отражения

В этом пункте отражения траекторий  $(\theta_s, c_s)$  маятника (32), (33) в осях координат  $\theta, c$  и в начале координат продолжаютя до дискретных симметрий  $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$  семейства траекторий гамильтоновой системы (32)–(38):

$$\begin{aligned} \varepsilon^i &: \{\lambda_s \mid s \in [0, t]\} \rightarrow \{\lambda_s^i \mid s \in [0, t]\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \lambda_s &= (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s), \quad Q_s = (x_s, y_s, R_s), \\ \lambda_s^i &= (\theta_s^i, c_s^i, \alpha^i, r, Q_s^i), \quad Q_s^i = (x_s^i, y_s^i, R_s^i). \end{aligned}$$

Аналогичное продолжение для обобщенной задачи Дидоны (нильпотентной субримановой задачи с вектором роста (2,3,5)) было получено в работе [16].

**3.1.2.1 Отражение  $\varepsilon^1$**  Отражению траекторий  $(\theta_s, c_s)$  маятника (32), (33) в оси координат  $\theta$  соответствует следующая дискретная симметрия семейства экстремальных траекторий:

$$\theta_s^1 = \theta_{t-s}, \quad c_s^1 = -c_{t-s}, \quad \alpha^1 = \alpha + \pi, \quad (46)$$

$$x_s^1 = x_{t-s} - x_t, \quad y_s^1 = y_{t-s} - y_t, \quad (47)$$

$$R_s^1 = (R_t)^{-1} R_{t-s}, \quad \Omega_s^1 = -\Omega_{t-s}. \quad (48)$$

**Предложение 3.2.** Если  $\{\lambda_s \mid s \in [0, t]\}$  есть траектория системы (32)–(38), то кривая  $\{\lambda_s^1 \mid s \in [0, t]\}$  есть также траектория этой системы.

*Доказательство.* Проверим дифференциальные уравнения для отраженной кривой  $\lambda_s^1$ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_s^1 &= -\dot{\theta}_{t-s} = -c_{t-s} = c_s^1, \\ \dot{c}_s^1 &= c_{t-s} = -r \sin \theta_{t-s} = -r \sin \theta_s^1, \\ \dot{x}_s^1 &= -\dot{x}_{t-s} = -\cos(\theta_{t-s} + \alpha) = \cos(\theta_{t-s} + \alpha + \pi) = \cos(\theta_s^1 + \alpha^1), \\ \dot{y}_s^1 &= -\dot{y}_{t-s} = -\sin(\theta_{t-s} + \alpha) = \sin(\theta_{t-s} + \alpha + \pi) = \sin(\theta_s^1 + \alpha^1), \\ \Omega_s^1 &= \sin(\theta_s^1 + \alpha^1)A_1 - \cos(\theta_s^1 + \alpha^1)A_2 = \\ &= -\sin(\theta_{t-s} + \alpha)A_1 + \cos(\theta_{t-s} + \alpha)A_2 = -\Omega_{t-s}, \\ \dot{R}_s^1 &= -(R_t)^{-1} \dot{R}_{t-s} = -(R_t)^{-1} R_{t-s} \Omega_{t-s} = R_s^1 \Omega_s^1. \end{aligned}$$

Начальные условия для  $Q_s^1$  также выполняются:

$$\begin{aligned} x_s^1|_{s=0} &= x_t - x_t = 0, \\ y_s^1|_{s=0} &= y_t - y_t = 0, \\ R_s^1|_{s=0} &= (R_t)^{-1} \dot{R}_t = \text{Id}. \end{aligned}$$

□

Для выяснения наглядного смысла действия симметрии  $\varepsilon^1$  на эластике, представим это действие следующим образом:

$$\varepsilon^1 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} x_t - x_{t-s} \\ y_t - y_{t-s} \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} x_{t-s} - x_t \\ y_{t-s} - y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^1 \\ y_s^1 \end{pmatrix}.$$

Здесь (1) есть обращение времени на эластике; (2) — отражение плоскости  $(x, y)$  в центре  $p_c = (x_t/2, y_t/2)$  хорды эластике, т.е. отрезка, соединяющего ее начало  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  и конец  $(x_t, y_t)$ ; (3) — поворот эластике на угол  $\pi$  вокруг начала координат  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

С другой стороны, отображение (3)  $\circ$  (2) есть параллельный перенос начала эластике в начало координат.

**3.1.2.2 Отражение  $\varepsilon^2$**  Отражение траекторий маятника  $(\theta_s, c_s)$  в оси координат  $c$  порождает следующую симметрию экстремальных траекторий:

$$\theta_s^2 = -\theta_{t-s}, \quad c_s^2 = c_{t-s}, \quad \alpha^2 = \pi - \alpha, \quad (49)$$

$$x_s^2 = x_{t-s} - x_t, \quad y_s^2 = y_t - y_{t-s}, \quad (50)$$

$$R_s^2 = I_2(R_t)^{-1}R_{t-s}I_2, \quad \Omega_s^2 = -I_2\Omega_{t-s}I_2, \quad (51)$$

$$I_2 = I_2^{-1} = e^{\pi A_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Предложение 3.3.** *Если  $\{\lambda_s \mid s \in [0, t]\}$  есть траектория системы (32)–(38), то кривая  $\{\lambda_s^2 \mid s \in [0, t]\}$  есть также траектория этой системы.*

*Доказательство.* Аналогично доказательству предложения 3.2. Проверим, например, уравнение для матрицы  $R$ .

$$\begin{aligned}
\Omega_s^2 &= \sin(\theta_s^2 + \alpha^2)A_1 - \cos(\theta_s^2 + \alpha^2)A_2 = \\
&= \sin(\theta_{t-s} + \alpha)A_1 + \cos(\theta_{t-s} + \alpha)A_2, \\
-I_2\Omega_{t-s}I_2 &= -e^{\pi A_2}[\sin(\theta_{t-s} + \alpha)A_1 - \cos(\theta_{t-s} + \alpha)A_2]e^{-\pi A_2} = \\
&= -\sin(\theta_{t-s} + \alpha)e^{\pi A_2}A_1e^{-\pi A_2} + \cos(\theta_{t-s} + \alpha)e^{\pi A_2}A_2e^{-\pi A_2} = \\
&= \sin(\theta_{t-s} + \alpha)A_1 + \cos(\theta_{t-s} + \alpha)A_2 = \\
&= \Omega_s^2, \\
\dot{R}_s^2 &= -I_2(R_t)^{-1}\dot{R}_{t-s}I_2 = -I_2(R_t)^{-1}R_{t-s}\Omega_{t-s}I_2 = \\
&= (I_2(R_t)^{-1}R_{t-s}I_2)(-I_2\Omega_{t-s}I_2) = \\
&= R_s^2\Omega_s^2.
\end{aligned}$$

□

Действие отражения  $\varepsilon^2$  на элаستيку представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} &\stackrel{(1)}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\mapsto} \\
&\stackrel{(3)}{\mapsto} \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\chi & -\sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-s} \\ y_{t-s} \end{pmatrix} \right] = \\
&= \begin{pmatrix} x_{t-s} - x_t \\ y_t - y_{t-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^2 \\ y_s^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где  $\chi$  — полярный угол точки  $(x_t, y_t)$ :

$$\cos \chi = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}, \quad \sin \chi = \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}.$$

То есть отражение  $\varepsilon^2$  действует на эластики как композиция трех преобразований: (1) обращение времени на эластике, (2) отражение плоскости  $(x, y)$  в серединном перпендикуляре  $l^\perp$  к ее хорде и (3) поворот на угол  $(\pi - 2\chi)$ .

**3.1.2.3 Отражение  $\varepsilon^3$**  Отражение траекторий маятника  $(\theta_s, c_s)$  в начале координат  $(\theta, c) = (0, 0)$  продолжается до следующей симметрии экстремальных траекторий:

$$\theta_s^3 = -\theta_s, \quad c_s^3 = -c_s, \quad \alpha^3 = -\alpha, \quad (52)$$

$$x_s^3 = x_s, \quad y_s^3 = -y_s, \quad (53)$$

$$R_s^3 = I_2 R_s I_2, \quad \Omega_s^3 = I_2 \Omega_s I_2. \quad (54)$$

**Предложение 3.4.** *Если  $\{\lambda_s \mid s \in [0, t]\}$  есть траектория системы (32)–(38), то кривая  $\{\lambda_s^3 \mid s \in [0, t]\}$  есть также траектория этой системы.*

*Доказательство.* Аналогично доказательству предложения 3.3, проверим уравнение для матрицы вращения  $R$ .

$$\begin{aligned} \Omega_s^3 &= \sin(\theta_s^3 + \alpha^3)A_1 - \cos(\theta_s^3 + \alpha^3)A_2 = -\sin(\theta_s + \alpha)A_1 - \cos(\theta_s + \alpha)A_2, \\ I_2 \Omega_s I_2 &= I_2 [\sin(\theta_s + \alpha)A_1 - \cos(\theta_s + \alpha)A_2] I_2 = \\ &= -\sin(\theta_s + \alpha)A_1 - \cos(\theta_s + \alpha)A_2 = \\ &= \Omega_s^3, \\ \dot{R}_s^3 &= I_2 \dot{R}_s I_2 = I_2 R_s \Omega_s I_2 = (I_2 R_s I_2)(I_2 \Omega_s I_2) = \\ &= R_s^3 \Omega_s^3. \end{aligned}$$

□

В отличие от отражений  $\varepsilon^1$  и  $\varepsilon^2$ , отражение  $\varepsilon^3$  не только переводит дуги экстремальных траекторий в дуги экстремальных траекторий, но и является симметрией гамильтоновой системы  $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$ . Формулы (52)–(54) задают отображение  $\varepsilon^3 : T^*M \rightarrow T^*M$  такое, что для любой траектории  $\lambda_s$  гамильтоновой системы ее образ  $\varepsilon^3(\lambda_s)$  также является траекторией этой системы. Причем в случае отражения  $\varepsilon^3$  сужение на отрезок времени  $s \in [0, t]$  не требуется т.к. отображение  $\varepsilon^3$  (52)–(54) не зависит от конечного момента времени, в отличие от отображений  $\varepsilon^1$  (46)–(48) и  $\varepsilon^2$  (49)–(51).

Отражение  $\varepsilon^3$  имеет следующий наглядный смысл для эластик  $(x_s, y_s)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} &\stackrel{(1)}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\mapsto} \\ &\stackrel{(2)}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ -\sin 2\chi & \cos 2\chi \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \cos 2\chi & \sin 2\chi \\ \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} x_s \\ -y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^3 \\ y_s^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

это композиция (1) отражения плоскости  $(x, y)$  в хорде элаستيки и (2) поворота на угол  $(-2\chi)$ . С другой стороны,

$$\varepsilon^3 : \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_s \\ -y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s^3 \\ y_s^3 \end{pmatrix}$$

есть отражение элаستيки в оси  $x$ .

## 3.2 Симметрии экспоненциального отображения

В этом пункте действие вращений  $\Phi^\beta$  и отражений  $\varepsilon^i$  в прообразе и образе экспоненциального отображения определяется так, чтобы они коммутировали с действием экспоненциального отображения.

Вращения  $\Phi^\beta : \lambda \mapsto \lambda^\beta$  (40)–(45) являются симметриями гамильтоновой системы, поэтому их действие в  $T^*M$  естественно распадается в прямую сумму действий в  $N = T_{Q_0}^*M \times \mathbb{R}_+$  (на  $(\lambda, t)$ , где  $\lambda$  — начало экстремали) и в  $M$  (на  $Q_t$  — конец соответствующей экстремальной траектории):

$$\begin{aligned}\Phi^\beta : N &\rightarrow N, & (\lambda, t) &\mapsto (\lambda^\beta, t), \\ \lambda = (\theta, c, \alpha, r), & & \lambda^\beta &= (\theta, c, \alpha^\beta, r), \\ \alpha^\beta &= \alpha + \beta,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi^\beta : M &\rightarrow M, & Q &\mapsto Q^\beta, \\ Q = (x, y, R), & & Q^\beta &= (x^\beta, y^\beta, R^\beta), \\ \begin{pmatrix} x^\beta \\ y^\beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & & R^\beta &= e^{\beta A_3} R e^{-\beta A_3}.\end{aligned}$$

Действие отражений  $\varepsilon^i$  в  $N$  определяется ограничением их действия на вертикальные составляющие экстремальных траекторий в начальный момент времени  $s = 0$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon^i : N &\rightarrow N, & (\lambda, t) &\mapsto (\lambda^i, t), & i &= 1, 2, 3, \\ \lambda = (\theta, c, \alpha, r), & & \lambda^i &= (\theta^i, c^i, \alpha^i, r),\end{aligned}$$

где  $\lambda = \lambda_s|_{s=0}$ ,  $\lambda^i = \lambda_s^i|_{s=0}$ . Учитывая явные выражения действия отражений на дуги экстремальных траекторий из раздела 3.1, получаем явные выражения для действия  $\varepsilon^i$  в  $N$ :

$$\varepsilon^1 : (\theta, c, \alpha, r, t) \mapsto (\theta^1, c^1, \alpha^1, r, t) = (\theta_t, -c_t, \alpha + \pi, r, t),$$

$$\varepsilon^2 : (\theta, c, \alpha, r, t) \mapsto (\theta^2, c^2, \alpha^2, r, t) = (-\theta_t, c_t, \pi - \alpha, r, t),$$

$$\varepsilon^3 : (\theta, c, \alpha, r, t) \mapsto (\theta^3, c^3, \alpha^3, r, t) = (-\theta, -c, -\alpha, r, t).$$

Действие отражений в  $M$  определяется их действием на экстремальные траектории в конечный момент времени  $s = t$ :

$$\varepsilon^i : M \rightarrow M, \quad Q \mapsto Q^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$Q = (x, y, R), \quad Q^i = (x^i, y^i, R^i),$$

где  $Q = Q_s|_{s=t}$ ,  $Q^i = Q_s^i|_{s=t}$ . Явные формулы имеют вид (по результатам раздела 3.1):

$$\varepsilon^1 : (x, y, R) \mapsto (x^1, y^1, R^1) = (-x, -y, (R)^{-1}),$$

$$\varepsilon^2 : (x, y, R) \mapsto (x^2, y^2, R^2) = (-x, y, I_2(R)^{-1}I_2),$$

$$\varepsilon^3 : (x, y, R) \mapsto (x^3, y^3, R^3) = (x, -y, I_2RI_2).$$

Итак, определено действие вращений и отражений в прообразе и образе экспоненциального отображения:

$$\Phi^\beta, \varepsilon^i : N \rightarrow N, \quad (\lambda, t) \mapsto (\lambda^\beta, t), (\lambda^i, t), \quad (55)$$

$$\Phi^\beta, \varepsilon^i : M \rightarrow M, \quad Q \mapsto Q^\beta, Q^i. \quad (56)$$

Существенно, что образ  $Q^i = \varepsilon^i(Q)$  зависит лишь от прообраза  $Q$ , но не от момента времени  $t$ .

**Предложение 3.5.** *Отображения  $\Phi^\beta, \varepsilon^i$  являются симметриями экспоненциального отображения.*

*Доказательство.* Следует из того, что  $\Phi^\beta, \varepsilon^i$  преобразуют дуги экстремальных траекторий в дуги экстремальных траекторий, и из определения действия  $\Phi^\beta, \varepsilon^i$  в  $N, M$ .  $\square$

Рассмотрим группу симметрий экспоненциального отображения, порожденную вращениями и отражениями:

$$G = \langle \Phi^\beta, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \rangle.$$

Таблица умножения в этой группе для действий  $g : N \rightarrow N$  и  $g : M \rightarrow M, g \in G$ , совпадает с таблицей умножения для действия на траектории маятника  $g : \{(\theta_s, c_s)\} \mapsto \{(\theta_s^i, c_s^i)\}$  и имеет следующий вид:

$\cdot \circ \cdot$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	$\Phi^\beta$
$\varepsilon^1$	Id	$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$	$\Phi^\beta \circ \varepsilon^1$
$\varepsilon^2$	$\varepsilon^3$	Id	$\varepsilon^1$	$\Phi^{-\beta} \circ \varepsilon^2$
$\varepsilon^3$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^1$	Id	$\Phi^{-\beta} \circ \varepsilon^3$
$\Phi^\gamma$	$\varepsilon^1 \circ \Phi^\gamma$	$\varepsilon^2 \circ \Phi^{-\gamma}$	$\varepsilon^3 \circ \Phi^{-\gamma}$	$\Phi^{\beta+\gamma}$

Отсюда получаем явное описание группы симметрий:

$$G = \{ \Phi^\beta, \Phi^\beta \circ \varepsilon^i \mid \beta \in S^1, i = 1, 2, 3 \}.$$

## 4 Страты Максвелла, соответствующие симметриям

Точка  $Q_t$  экстремальной траектории  $Q_s = \text{Exp}(\lambda, s)$  называется *точкой Максвелла*, если существует другая экстремальная траектория  $\tilde{Q}_s \neq Q_s$ , для которой  $\tilde{Q}_t = Q_t$ . Известно, что в аналитической субримановой задаче экстремальная траектория не может быть оптимальной после точки Максвелла (см., например, [19]).

Определим *множество Максвелла* в прообразе экспоненциального отображения:

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) \in N \mid \exists (\tilde{\lambda}, t) \in N : \\ \text{Exp}(\lambda, s) \neq \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s), \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\}.$$

Если  $(\lambda, t) \in \text{MAX}$ , то экстремальная траектория  $\text{Exp}(\lambda, s)$  неоптимальна при  $s > t$ .

Определим также *множество Максвелла, соответствующее группе*  $G$ :

$$\text{MAX}^G = \{(\lambda, t) \in N \mid \exists g \in G : \\ (\tilde{\lambda}, t) = g(\lambda, t), \text{Exp}(\lambda, s) \neq \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s), \text{Exp}(\lambda, t) \neq \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\},$$

а также *множество Максвелла, соответствующее группе*  $\langle \varepsilon^i, \Phi^\beta \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in N \mid \exists \beta \in S^1 : \\ (\tilde{\lambda}, t) = \varepsilon^i \circ \Phi^\beta(\lambda, t), \text{Exp}(\lambda, s) \neq \text{Exp}(\tilde{\lambda}, s), \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\}.$$

Очевидно включение

$$\text{MAX}^i \subset \text{MAX}^G \subset \text{MAX}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i \circ \Phi^\beta(\lambda, t) &= (\lambda^{\beta, i}, t), \\ \text{Exp}(\lambda, s) &= Q_s, \quad \text{Exp}(\lambda^{\beta, i}, s) = Q_s^{\beta, i}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\text{MAX}^i = \{(\lambda, t) \in N \mid \exists \beta \in S^1 : Q_s \not\equiv Q_s^{\beta, i}, Q_t = Q_t^{\beta, i}\}.$$

Основная цель данного раздела — вывод уравнений, задающих страты Максвелла  $\text{MAX}^i$ . В пункте 4.1 исследуются тождества  $Q_s \equiv Q_s^{\beta, i}$ , а в пункте 4.2 — уравнение  $Q_t = Q_t^{\beta, i}$ . В заключительном пункте 4.3 приведены окончательные результаты о стратах  $\text{MAX}^i$ , и в качестве следствия — необходимые условия оптимальности в задаче о качении сферы по плоскости.

В следующем предложении показано, что разные начальные сопряженные векторы  $\lambda, \tilde{\lambda}$  могут задавать совпадающие экстремальные траектории  $Q_s \equiv \tilde{Q}_s$  только в случае, когда эластика  $(x_s, y_s) \equiv (\tilde{x}_s, \tilde{y}_s)$  является прямой.

**Предложение 4.1.** Пусть  $\lambda = (\theta, c, r, \alpha, Q_0)$ ,  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\theta}, \tilde{c}, \tilde{r}, \tilde{\alpha}, Q_0) \in C$ ,  $\lambda_s = e^{s\tilde{H}}(\lambda) = (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s)$ ,  $\tilde{\lambda}_s = e^{s\tilde{H}}(\tilde{\lambda}) = (\tilde{\theta}_s, \tilde{c}_s, \tilde{\alpha}, \tilde{r}, \tilde{Q}_s)$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q_s \equiv \tilde{Q}_s &\Leftrightarrow \theta_s + \alpha \equiv \tilde{\theta}_s + \tilde{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \lambda = \tilde{\lambda} \text{ или} \\ (2) c = \tilde{c} = 0, \theta + \alpha = \tilde{\theta} + \tilde{\alpha}, r \sin \theta = \tilde{r} \sin \tilde{\theta} = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

причем в случае (2) эластика  $(x_s, y_s) \equiv (\tilde{x}_s, \tilde{y}_s)$  есть прямая.

*Доказательство.* Имеем цепочку эквивалентных тождеств:

$$Q_s \equiv \tilde{Q}_s \Leftrightarrow x_s \equiv \tilde{x}_s, y_s \equiv \tilde{y}_s, R_s \equiv \tilde{R}_s \Leftrightarrow$$

(из горизонтальной части (29)–(31) гамильтоновой системы)

$$\Leftrightarrow \theta_s + \alpha \equiv \tilde{\theta}_s + \tilde{\alpha} \Leftrightarrow$$

(из вертикальной части (26)–(28) гамильтоновой системы)

$$\Leftrightarrow \theta_s + \alpha \equiv \tilde{\theta}_s + \tilde{\alpha}, \quad \tilde{c}_s \equiv c_s, \quad r \sin \theta_s \equiv \tilde{r} \sin \tilde{\theta}_s. \quad (57)$$

а) Если  $\tilde{c}_s \equiv c_s \equiv 0$ , то  $\theta_s, \tilde{\theta}_s \equiv \text{const}$ , и равенства (57) равносильны равенствам (2) в формулировке данного предложения.

б) Пусть  $\tilde{c}_s \equiv c_s \neq 0$ . Дифференцируя третье тождество (57) в силу гамильтоновой системы принципа максимума, получаем  $r \cos \theta_s \equiv \tilde{r} \cos \tilde{\theta}_s$ , поэтому  $r = \tilde{r}$ .

б.1) Если  $r = \tilde{r} = 0$ , то  $\lambda_s \equiv \tilde{\lambda}_s$  и  $\lambda = \tilde{\lambda}$ .

б.2) Если  $r = \tilde{r} \neq 0$ , то  $\sin \theta_s \equiv \sin \tilde{\theta}_s$ , откуда получаем тождество  $\sin \theta_s - \sin \tilde{\theta}_s = 2 \cos \frac{\theta_s + \tilde{\theta}_s}{2} \sin \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{2} \equiv 0$ .

б.2.1) Если  $\tilde{\alpha} - \alpha = 0$ , то  $\lambda = \tilde{\lambda}$ .

б.2.2) Если  $\theta_s + \tilde{\theta}_s = \pi + 2\pi k$ , то  $\theta_s \equiv \pi n, \tilde{\theta}_s \equiv \pi m$ , откуда следуют равенства (2) в формулировке данного предложения.  $\square$

## 4.1 Неподвижные точки симметрий

### в прообразе экспоненциального отображения

В этом пункте получены необходимые условия выполнения тождества  $Q_s \equiv Q_s^{\beta, i}$  в случае невырожденной эластичности  $(x_s, y_s)$ . Как следует из

предложения 4.1, в этом случае тождество  $Q_s \equiv Q_s^{\beta,i}$  эквивалентно равенству  $\lambda = \lambda^{\beta,i}$ .

**Предложение 4.2.** Пусть  $(\lambda, t) \in N$ ,  $(\lambda^{\beta,i}, t) = \varepsilon^i \circ \Phi^\beta(\lambda, t)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Пусть эластика  $\gamma = \{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$  невырождена. Если  $Q_s \equiv Q_s^{\beta,i}$ , то:

- (1) В случае  $i = 1$  эластика  $\gamma$  центрирована в вершине,
- (2) В случае  $i = 2$  эластика  $\gamma$  центрирована в точке перегиба,
- (3) В случае  $i = 3$  тождество  $Q_s \equiv Q_s^{\beta,i}$  невозможно.

Мы называем эластику  $\gamma = \{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$  центрированной в вершине (точке перегиба), если ее центр  $(x_{t/2}, y_{t/2})$  является вершиной, т.е. локальным экстремумом кривизны (соотв. точкой перегиба, т.е. точкой перемены знака кривизны).

*Доказательство.* Если  $Q_s \equiv Q_s^{\beta,i}$ , то из предложения 4.1 следует, что  $\lambda = \lambda^{\beta,i}$ . Поэтому для траекторий гамильтоновой системы принципа максимума  $\lambda_s = (\theta_s, c_s, \alpha, r, Q_s)$  и  $\lambda_s^{\beta,i} = (\theta_s^{\beta,i}, c_s^{\beta,i}, \alpha^{\beta,i}, r, Q_s^{\beta,i})$  получаем  $c_s \equiv c_s^{\beta,i}$ .

(1) Если  $i = 1$ , то  $c_s \equiv c_s^{\beta,1} \equiv c_s^1 \equiv -c_{t-s}$ . Кривизна элаستيци  $c_s$  нечетна относительно точки  $s = t/2$ , поэтому  $c_{t/2} = 0$ . Для невырожденной элаستيци любой нуль кривизны регулярен ( $c_s = 0 \Rightarrow \dot{c}_s \neq 0$ ), поэтому центр  $(x_{t/2}, y_{t/2})$  элаستيци  $\gamma$  есть точка перегиба.

(2) Если  $i = 2$ , то  $c_s \equiv c_s^{\beta,2} \equiv c_s^2 \equiv c_{t-s}$ . Кривизна элаستيци  $c_s$  четна относительно точки  $s = t/2$ . Поэтому кривизна имеет локальный экстремум в точке  $s = t/2$ , а эластика  $\gamma$  — вершину в своем центре  $(x_{t/2}, y_{t/2})$ .

(3) Если  $i = 3$ , то  $\theta_s \equiv \theta_s^{3,\beta} \equiv -\theta_s$ , т.е.  $\theta_s \equiv 0$ . Эластика  $\gamma$  вырождается в прямую, что противоречит условию данного предложения.  $\square$

## 4.2 Неподвижные точки симметрий в образе экспоненциального отображения

В этом пункте исследуются точки  $Q_t$  экстремальных траекторий, которые удовлетворяют уравнению  $Q_t = Q_t^{\beta,i}$ , возникающего в определении страта Максвелла  $MAX^i$ . Получены уравнения многообразий в пространстве состояний  $M$ , содержащих эти точки. В этих уравнениях используется представление матрицы вращения  $Q \in \text{SO}(3)$  с помощью кватернионов  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in S^3 \subset \mathbb{H}$ , см. раздел 5. Соответствие  $Q \mapsto q$  определяет кватернион  $q$  с точностью до знака; это согласуется с тем, что возникающие далее уравнения для кватерниона инвариантны относительно инверсии  $q \mapsto -q$  (см., например, (59)).

### 4.2.1 Уравнение $Q_t = Q_t^{\beta,1}$

В предложении 4.3 описываются неподвижные точки действия группы симметрий  $\langle \varepsilon^1, \Phi^\beta \rangle$  в образе экспоненциального отображения, т.е. такие точки  $Q \in M$ , что

$$\exists \beta \in S^1 \text{ такое, что } \varepsilon^1 \circ \Phi^\beta(Q) = Q. \quad (58)$$

**Предложение 4.3.** Пусть  $Q = (x, y, R) \in M$ , и  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in S^3$  — кватернион, соответствующий вращению  $R \in \text{SO}(3)$ .

(1) Если  $(x, y) \neq (0, 0)$ , то условие (58) равносильно дизъюнкции

$$q_3 = 0 \text{ или } q = \pm k, \quad (59)$$

при этом  $\beta = \pi$ .

- (2) Если  $(x, y) = (0, 0)$ , то из условия (59) следует условие (58), при этом можно положить  $\beta = \pi$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\varepsilon^1 \circ \Phi^\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \cos \beta + y \sin \beta \\ -x \sin \beta - y \cos \beta \\ e^{\beta A_3} R^{-1} e^{-\beta A_3} \end{pmatrix}.$$

Далее,  $e^{\beta A_3} R^{-1} e^{-\beta A_3} = R \Leftrightarrow R e^{\beta A_3} R e^{-\beta A_3} = \text{Id}$ .

- (1) Пусть  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} -x \cos \beta + y \sin \beta \\ -x \sin \beta - y \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta = \pi.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 \circ \Phi^\beta(Q) = Q, \quad \beta = \pi &\Leftrightarrow R I_3 R I_3 = \text{Id} \Leftrightarrow (R I_3)^2 = \text{Id} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (qk)^2 = \pm 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

в силу леммы 5.1

$$\Leftrightarrow q_3 = 0 \text{ или } q = \pm k.$$

- (2) Если  $(x, y) = (0, 0)$ , то, полагая  $\beta = \pi$ , так же, как в п. (1), заключаем, что из условия (59) следует условие (58).  $\square$

#### 4.2.2 Уравнение $Q_t = Q_t^{\beta,2}$

В предложении 4.4 описываются неподвижные точки действия группы симметрий  $\langle \varepsilon^2, \Phi^\beta \rangle$  в образе экспоненциального отображения, т.е. такие точки  $Q \in M$ , что

$$\exists \beta \in S^1 \text{ такое, что } \varepsilon^2 \circ \Phi^\beta(Q) = Q. \quad (60)$$

**Предложение 4.4.** Пусть  $Q = (x, y, R) \in M$ , и  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in S^3$  — кватернион, соответствующий вращению  $R \in \text{SO}(3)$ .

- (1) Если  $(x, y) = (\rho \cos \chi, \rho \sin \chi) \neq (0, 0)$ , то условие (60) равносильно дизъюнкции

$$xq_1 + yq_2 = 0 \text{ или } q = \pm(\cos \chi i + \sin \chi j),$$

при этом  $\beta = \pi - 2\chi$ .

- (2) Если  $(x, y) = (0, 0)$ , то условие (60) выполняется. При этом  $\beta$  можно определить из уравнения  $q_1 \sin(\beta/2) + q_2 \cos(\beta/2) = 0$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\varepsilon^2 \circ \Phi^\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \cos \beta + y \sin \beta \\ x \sin \beta + y \cos \beta \\ I_2 e^{\beta A_3} R^{-1} e^{-\beta A_3} I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \cos \beta + y \sin \beta \\ x \sin \beta + y \cos \beta \\ e^{-\beta A_3} I_2 R^{-1} e^{-\beta A_3} I_2 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} e^{-\beta A_3} I_2 R^{-1} e^{-\beta A_3} I_2 = R &\Leftrightarrow RI_2 e^{\beta A_3} RI_2 e^{\beta A_3} = \text{Id} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (RI_2 e^{\beta A_3})^2 = \text{Id} &\Leftrightarrow [qj(\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)k)]^2 = \pm 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q[\sin(\beta/2)i + \cos(\beta/2)j]^2 = \pm 1 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

в силу леммы 5.1

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[q(\sin(\beta/2)i + \cos(\beta/2)j)] = 0, \\ q(\sin(\beta/2)i + \cos(\beta/2)j) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} q_1 \sin(\beta/2) + q_2 \cos(\beta/2) = 0, \\ q = \pm(\sin(\beta/2)i + \cos(\beta/2)j). \end{cases} \tag{61}
\end{aligned}$$

(1) Пусть  $(x, y) = (\rho \cos \chi, \rho \sin \chi) \neq (0, 0)$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} -\cos \beta x + \sin \beta y \\ \sin \beta x + \cos \beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta = \pi - 2\chi.$$

Имеем

$$\varepsilon^2 \circ \Phi^\beta(Q) = Q, \quad \beta = \pi - 2\chi \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 \cos \chi + q_2 \sin \chi = 0, \\ q = \pm(\cos \chi i + \sin \chi j), \end{cases}$$

что доказывает п. (1) данного предложения.

(2) Если  $(x, y) = (0, 0)$ , то равенство  $\varepsilon^2 \circ \Phi^\beta(Q) = Q$  равносильно дизъюнкции (61). Первому равенству  $q_1 \sin(\beta/2) + q_2 \cos(\beta/2) = 0$  можно удовлетворить, выбирая подходящее значение угла  $\beta$ .  $\square$

### 4.2.3 Уравнение $Q_t = Q_t^{\beta,3}$

В предложении 4.5 описываются такие точки  $Q \in M$ , что

$$\exists \beta \in S^1 \text{ такое, что } \varepsilon^3 \circ \Phi^\beta(Q) = Q. \tag{62}$$

**Предложение 4.5.** Пусть  $Q = (x, y, R) \in M$ , и  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in S^3$  — кватернион, соответствующий вращению  $R \in \operatorname{SO}(3)$ .

(1) Если  $(x, y) \neq (0, 0)$ , то условие (62) равносильно дизъюнкции

$$\begin{cases} xq_1 + yq_2 = 0 \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} yq_1 - xq_2 = 0 \\ q_0 = 0. \end{cases} \quad (63)$$

При этом  $\beta = -2\chi$ .

(2) Если  $(x, y) = (0, 0)$ , то условие (62) равносильно дизъюнкции

$$q_3 = 0 \quad \text{или} \quad q_0 = 0. \quad (64)$$

При этом  $\beta$  можно определить соответственно из уравнений

$$\cos(\beta/2)q_1 - \sin(\beta/2)q_2 = 0 \quad \text{или} \quad \sin(\beta/2)q_1 + \cos(\beta/2)q_2 = 0.$$

*Доказательство.* Имеем

$$\varepsilon^3 \circ \Phi^\beta(Q) = \begin{pmatrix} x \cos \beta - y \sin \beta \\ -x \sin \beta - y \cos \beta \\ I_2 e^{\beta A_3} R e^{-\beta A_3} I_2 \end{pmatrix}.$$

Далее, для любых  $\beta \in S^1$ ,  $R \in \text{SO}(3)$  получаем цепочку эквивалентных равенств:

$$\begin{aligned} I_2 e^{\beta A_3} R e^{-\beta A_3} I_2 &\Leftrightarrow I_2 e^{\beta A_3} R = R I_2 e^{\beta A_3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow j(\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) = \\ &\quad = \pm(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)j(\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)k) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\beta/2)q_3 i - \sin(\beta/2)q_3 j + (\sin(\beta/2)q_2 - \cos(\beta/2)q_1)k = 0 \\ \sin(\beta/2)q_1 + \cos(\beta/2)q_2 - \sin(\beta/2)q_0 i - \cos(\beta/2)q_0 j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\beta/2)q_1 - \sin(\beta/2)q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin(\beta/2)q_1 + \cos(\beta/2)q_2 = 0 \\ q_0 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (65)$$

(1) Пусть  $(x, y) = (\rho \cos \chi, \rho \sin \chi) \neq (0, 0)$ , тогда

$$\begin{cases} x \cos \beta - y \sin \beta = x, \\ -x \sin \beta - y \cos \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \beta = -2\chi.$$

Поэтому  $\varepsilon^3 \circ \Phi^\beta(Q) = Q$ ,  $\beta = -2\chi$  равносильно дизъюнкции условий

$$\begin{cases} q_1 \cos \chi + q_2 \sin \chi = 0 \\ q_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q_1 \sin \chi - q_2 \cos \chi = 0 \\ q_0 = 0, \end{cases}$$

что при  $(x, y) \neq (0, 0)$  эквивалентно условиям (63).

(2) Пусть  $(x, y) = (0, 0)$ . Тогда угол  $\beta$  в первых равенствах (65) можно подобрать, и условие (62) равносильно условиям (64).  $\square$

### 4.3 Условия оптимальности экстремальных траекторий

В этом разделе получены основные результаты данной работы: условия принадлежности конечных точек экстремальных траекторий стратам Максвелла, и, как следствие — необходимые условия оптимальности для экстремальных траекторий общего положения.

**Теорема 4.1.** Пусть  $t > 0$  и  $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$  есть такая экстремальная траектория, что:

(1)  $q_3(t) = 0$ ,

(2) эластика  $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$  невырождена и не центрирована в точке перегиба.

Тогда  $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$ , поэтому для любого  $t_1 > t$  траектория  $Q_s$ ,  $s \in [0, t_1]$ , неоптимальна.

*Доказательство.* Положим  $\beta = \pi$ . Тогда из предложения 4.3 следует, что  $Q_t^{\beta,1} = Q_t$ , а из предложения 4.2 следует, что  $Q_s^{\beta,1} \neq Q_s$ . Поэтому  $(\lambda, t) \in \text{MAX}^1$ .  $\square$

**Теорема 4.2.** Пусть  $t > 0$  и  $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$  есть такая экстремальная траектория, что:

$$(1) (xq_1 + yq_2)(t) = 0,$$

(2) эластика  $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$  невырождена и не центрирована в вершине.

Тогда  $(\lambda, t) \in \text{MAX}^2$ , поэтому для любого  $t_1 > t$  траектория  $Q_s$ ,  $s \in [0, t_1]$ , неоптимальна.

*Доказательство.* Выберем угол  $\beta \in S^1$  следующим образом. Если  $(x, y)(t) = (\rho \cos \chi, \rho \sin \chi) \neq (0, 0)$ , то положим  $\beta = \pi - 2\chi$ . Если  $(x, y)(t) = (0, 0)$ , то найдем  $\beta$  из уравнения  $q_1(t) \sin(\beta/2) + q_2(t) \cos(\beta/2) = 0$ .

Тогда из предложения 4.4 следует, что  $Q_t^{\beta,2} = Q_t$ , а из предложения 4.2 следует, что  $Q_s^{\beta,2} \neq Q_s$ . Поэтому  $(\lambda, t) \in \text{MAX}^2$ .  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть  $t > 0$  и  $Q_s = (x_s, y_s, R_s) = \text{Exp}(\lambda, s)$  есть такая экстремальная траектория, что:

$$(1) (xq_1 + yq_2)(t) = q_3(t) = 0 \text{ или } (yq_1 - xq_2)(t) = q_0(t) = 0.$$

(2) эластика  $\{(x_s, y_s) \mid s \in [0, t]\}$  невырождена.

Тогда  $(\lambda, t) \in \text{MAX}^3$ , поэтому для любого  $t_1 > t$  траектория  $Q_s$ ,  $s \in [0, t_1]$ , неоптимальна.

*Доказательство.* Из предложения 4.5 следует, что угол  $\beta \in S^1$  можно подобрать так, что  $Q_t^{\beta,3} = Q_t$ . Согласно п. (3) предложения 4.2,  $Q_s^{\beta,3} \neq Q_s$ . Поэтому  $(\lambda, t) \in \text{MAX}^3$ .  $\square$

*Замечание.* Учитывая то, что для любого кватерниона  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3$ , соответствующее движение  $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  есть вращение вокруг вектора  $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ , можно дать следующую наглядную интерпретацию условию (1) теорем 4.1–4.3:

1. Условие (1) теоремы 4.1 означает, что вращение сферы  $R_t$  есть поворот вокруг некоторой горизонтальной оси;
2. Условие (1) теоремы 4.2 означает, что вращение  $R_t$  есть поворот вокруг некоторой оси, ортогональной вектору перемещения точки контакта сферы и плоскости  $(x_t, y_t, 0)$ ;
3. Условие (1) теоремы 4.3 означает, что вращение  $R_t$  есть поворот вокруг горизонтальной оси, ортогональной вектору  $(x_t, y_t, 0)$ , или что  $R_t$  есть поворот на угол  $\pi$  вокруг некоторой оси, лежащей в вертикальной плоскости, которая содержит вектор  $(x_t, y_t, 0)$ .

Для более полного исследования точек разреза желательно иметь эффективные оценки первых корней уравнений  $q_3(t) = 0$  и  $(xq_1 + yq_2)(t) = 0$ . Асимптотика этих оценок вблизи устойчивого положения равновесия маятника (т.е. при  $(\theta, c) \rightarrow (0, 0)$ ) была получена А.П.Маштаковым и будет

опубликована в последующей работе. Даже эта асимптотика имеет гораздо более сложную структуру, чем аналогичные глобальные оценки первого времени Максвелла в задаче Эйлера об эластичах [13], обобщенной задаче Дидоны [19], и субримановой задаче на группе движений плоскости [20]. Поэтому задача об оптимальном качении сферы по плоскости гораздо сложнее этих родственных задач оптимального управления.

## 5 Приложение: Представление вращений трехмерного пространства кватернионами

Для представления ориентации катящейся сферы удобно, наряду с матрицей  $R \in \text{SO}(3)$ , использовать кватернионы. Напомним некоторые факты, связанные с этим представлением (см., например, [21, 22]). Рассмотрим тело кватернионов

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mid q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R}\},$$

единичную сферу в нем

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$$

и подпространство мнимых кватернионов

$$I = \{q \in \mathbb{H} \mid \text{Re } q = q_0 = 0\} \simeq \mathbb{R}^3.$$

Любой кватернион  $q \in S^3$  действует на евклидовом пространстве  $I$ :

$$q \in S^3 \quad \Rightarrow \quad R_q(a) = qaq^{-1}, \quad a \in I,$$

причем отображение  $R_q : I \rightarrow I$  является вращением, т.е.  $R_q \in \text{SO}_3(I)$ .

Отображение

$$p : q \mapsto R_q, \quad S^3 \rightarrow \text{SO}_3(I) \simeq \text{SO}(3)$$

является двулистным накрытием:

$$R_q = R_{\tilde{q}} \Leftrightarrow q = \pm \tilde{q}.$$

Для любого кватерниона  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in S^3$ , движение  $R_q : I \rightarrow I$  есть вращение вокруг вектора  $a = \text{Im } q = iq_1 + jq_2 + kq_3$  так как

$$R_q(a) = qaq^{-1} = (q_0+a)a(q_0+a)^{-1} = (q_0+a)a(q_0-a) = (q_0+a)(q_0-a)a = a,$$

т.е. вектор  $\text{Im } q$  есть собственный вектор отображения  $R_q$ .

Любой кватернион  $q \in S^3$  может быть записан в виде

$$q = \cos \alpha + \sin \alpha u, \quad u \in S^3 \cap I, \quad \alpha \in S^1.$$

Тогда  $R_q$  есть поворот пространства  $I$  вокруг вектора  $u$  на угол  $2\alpha$ : в правом ортонормированном базисе  $(u, v, w)$  пространства  $I$  этот поворот имеет матрицу

$$R_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$p(\cos(t/2) + \sin(t/2)i) = e^{tA_1},$$

$$p(\cos(t/2) + \sin(t/2)j) = e^{tA_2},$$

$$p(\cos(t/2) + \sin(t/2)k) = e^{tA_3}.$$

В работе было использовано следующее простое утверждение.

**Лемма 5.1.** Пусть  $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$ . Тогда:

$$(1) \quad q^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} q = 0,$$

$$(2) \quad q^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} q = 0.$$

*Доказательство.* Следует из равенства

$$(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)^2 = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + 2q_0(q_1i + q_2j + q_3k).$$

□

## Список литературы

- [1] Laumond J.P. Nonholonomic motion planning for mobile robots// LAAS Report 98211, May 1998, LAAS-CNRS, Toulouse, France.
- [2] Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint// IEEE Trans. on Robotics and Automation, (1), **6** (1990), 62–72.
- [3] Bicchi A., Prattichizzo D., Sastry S. Planning motions of rolling surfaces// IEEE Conf. on Decision and Control, 1995.
- [4] Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: the holonomic case// In: Differential geometry and control: Summer Research Institute on Differential Geometry and Control, June 29–July 19, 1997, Univ. Colorado, Boulder, G. Ferreyra et al., Eds, 1999, 241–256.
- [5] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.

- [6] J.M. Hammersley. Oxford commemoration ball. In: *Probability, Statistics and Analysis*, pp. 112–142. London Math. Soc. lecture notes, ser. 79 (1983).
- [7] A.M. Arthur, G.R. Walsh. On the Hammersley’s minimum problem for a rolling sphere. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **99** (1986), 529–534.
- [8] V. Jurdjevic, The geometry of the plate-ball problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, v. 124 (1993), 305–328.
- [9] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [10] Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Приложение I, «Об упругих кривых», ГТТИ, Москва-Ленинград, 1934, 447–572.
- [11] Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, Москва-Ленинград, 1935.
- [12] Сачков Ю.Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, № 4, С. 123-150.
- [13] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler’s elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14 (2008), No. 2 (April), pp. 169–234.
- [14] Yu. L. Sachkov, Conjugate and cut time in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 2010, в печати.

- [15] O. Myasnychenko, Nilpotent (3, 6) Sub-Riemannian Problem. *J. Dynam. Control Systems* 8 (2002), No. 4, 573–597.
- [16] Сачков Ю.Л. Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, N 2, с. 95-116.
- [17] U.Boscain, F.Rossi, Invariant Carno-Caratheodory metrics on  $S^3$ ,  $SO(3)$ ,  $SL(2)$  and Lens Spaces, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol 47, pp. 1851-1878, (2008).
- [18] Л.С. Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1961.
- [19] Сачков Ю.Л. Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Матем. Сборник, 2006, Т. 197, № 6, С. 111-160.
- [20] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 2010, в печати.
- [21] Л.С. Понтрягин, *Обобщения чисел*, М.: Наука, 1986.
- [22] Э.Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, М.: Едиториал УРСС, 2004.