ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ №2(25), 2015, с. 101–117

УДК 004.222.3, 517.13

А. Б. Шворин

Параллельное сложение вещественных чисел в системах счисления с перекрытием

Аннотация. В данной работе исследуется интервальное представление действительных чисел в системах счисления с перекрытием. Для задачи сложения группы чисел предложена классификация решений, описан класс решений, обладающих поразрядным параллелизмом, и предложено два параллельных алгоритма. Найдены ограничения на параметры системы, при которых достигается заданная точность.

Ключевые слова и фразы: представление данных, действительные числа, системы счисления, сложение, параллельные алгоритмы.

Введение

Довольно давно было известно, что сложение чисел имеет линейную сложность по количеству разрядов слагаемых и в общем случае поразрядному распараллеливанию не поддается. Например, этот факт был отмечен в 1946 г. фон Нейманом и соавторами в статье [1]. Такое положение дел характерно для традиционных позиционных систем счисления, однако существуют представления, где сложение может выполняться параллельно. В 1840 г. Коши [2] исследовал систему счисления с основанием 10, но имеющую нестандартный набор цифр $\{-5, \ldots, 5\}$, и заметил, что в такой системе переносы ограничены. Брауэр в 1921 [3] сконструировал систему счисления с основанием 2 с тремя цифрами, значения которых перекрывались. Его целью, однако, был не параллелизм сложения, а возможность организовать вычислительный процесс таким образом, чтобы старшие разряды результата могли быть получены из ограниченного количества разрядов слагаемых. На рис. 1 приведен пример, когда в традиционной десятичной системе счисления невозможно узнать цифру результата,

Проект проводится при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России (идентификатор № RFMEFI61314X0030).

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l} 0.0999\ldots \\ 0.0000\ldots \end{array} \\
\hline
0.? \qquad\quad
\end{array}
$$

Рис. 1. Сложение в десятичной системе

не зная всех цифр слагаемых, в то время как в системе Брауэра такой проблемы нет.

Обобщение позиционных систем счисления, названное β-expansion, было введено Rényi [4] (1957) и более подробно изучено Parry [5] (1960). Основная идея, описанная в этих работах, заключалась в представлении вещественного числа в виде $x = \sum_{-m}^{n} d_i\beta^i$ для заданного основания $\beta > 1$, где $d_i \in \mathbb{Z} \cap [0, b]$ — цифры ($b \geqslant \lceil\beta\rceil$). В этих работах был предложен простой последовательный алгоритм вычисления цифр d_i для заданного x. Далее Avizienis в статье [6] (1961), во-первых, формализовал проблему параллельного сложения и, во-вторых, описал достаточно общий класс систем счисления и алгоритмов сложения.

Начиная с 1990-х, существенный вклад был внесен Frougny и другими авторами. Например, в статьях [7–9] были найдены условия на параметры системы, необходимые для существования параллельного алгоритма сложения, а также была поставлена задача минимизации мощности алфавита (набора цифр) для данного базиса β при сохранении возможности параллельного сложения.

В приведенной выше серии работ, начиная с Rényi, ставилась задача точного представления некоторого подмножества действительных (или комплексных) чисел. Из этого, в частности, вытекает требование, чтобы основание системы счисления было алгебраическим. В работе Непейводы и др. [10] (2014) вместо точного представления предлагается интервальное, то есть записи в виде конечной последовательности цифр ставится в соответствие не число, а отрезок. В рамках данной статьи подразумевается именно такое интервальное представление, благодаря чему удается снять ограничения на основание системы счисления, и в качестве основания может быть взято произвольное вещественное число, превосходящее единицу. Тем не менее сохраняются ограничения на параметры системы, связанные с известным ранее требованием избыточности. Поскольку в данной работе представление чисел не точно, появляется необходимость следить за точностью результата. Приведены соответствующие оценки, связывающие потерю точности результата сложения (количество теряемых разрядов) с параметрами системы.

Данная статья наследует обозначения Непейводы, которые не совпадают с обозначениями Avizienis и ряда последующих работ.

1. Системы счисления с перекрытием

1.1. Базовое определение

В работе [10] приводится следующее определение.

Определение 1. *Система с перекрытием представления чисел на отрезке* $[low, high]$ *задается четверкой*

$$\langle low, high, \nu = \lambda i.\nu_i, \varepsilon = \lambda i.\varepsilon_i \rangle ,$$

где

$$\nu : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+, \quad \varepsilon : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q},$$
$$\forall i \in \mathbb{N}^+ \nu_i > 1$$
$$\exists \varepsilon^* \in \mathbb{Q}\ \forall i \in \mathbb{N}^+ 0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon^* < 1.$$

Числа ν_i *называются основаниями,* ε_i *— перекрытиями. Если функции постоянны, то система называется равномерной, идентифицируется интервалом изменения, основанием* ν *и перекрытием* ε*.*

В рамках данной статьи будет рассматриваться более узкий класс систем. А именно, вводятся следующие ограничения:

- рассматриваются только равномерные системы: $\nu_i = \nu = const$, $\varepsilon_i = \varepsilon = const$;
- отрезок, на котором представлены числа, является единичным: $[low, high] = [0, 1]$ (впрочем, это условие не ограничивает общности, поскольку линейным преобразованием можно свести любой отрезок к единичному).

Таким образом, система задается парой параметров $\langle \nu, \varepsilon \rangle$.

Рис. 2 ([10]) иллюстрирует разбиение единичного отрезка на перекрывающиеся части, соответствующие цифрам. Используемые здесь обозначения связаны следующими соотношениями:

$$\delta = \xi - \epsilon, \quad \epsilon = \xi\varepsilon, \quad (\nu - 1)\delta + \xi = 1.$$

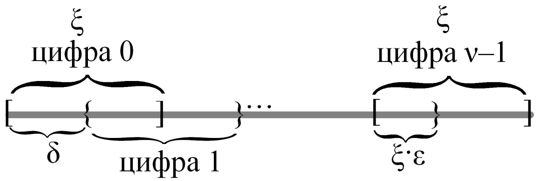

Рис. 2. Разбиение диапазона на цифры

Используемое в [6] и других работах основание системы счисления β будет выражаться в этих обозначениях как $\beta = 1/\xi$, $\beta > 1$.

Введем дополнительные обозначения:

- $\mu = \nu - 1$,
- $I_+(A, \Delta) = [A, A + \Delta], \quad I_-(A, \Delta) = [A - \Delta, A]$.

Следующее определение связывает число с его представлением в системе с перекрытием.

Определение 2. *Для* $\alpha \in [0, 1]$ *запись в системе с перекрытием* $\langle \nu, \varepsilon \rangle$

$$\alpha \sim \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_N},$$

где $a_i \in \{0, \ldots, \mu\}$ *— цифры, означает по определению, что*

$$\alpha \in I_+\left(\delta \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{i-1}, \xi^n\right) \quad \text{для } n \in \{1, \ldots, N\}. \tag{1}$$

1.2. Расширенное определение

Для представления чисел бóльших единицы достаточно добавить слева несколько старших разрядов с отрицательными номерами:

$$\alpha \sim \overline{a_{-N'} a_{-N'+1} \ldots a_{-1} a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \ldots a_N}.$$

Здесь символ ($\bullet$) является аналогом десятичной запятой, то есть используется в качестве разделителя между нулевым разрядом и первым. За счет добавления старших разрядов отрезок, на котором представлены числа, расширяется до $[0, \xi^{-N'-1}]$.

Определение 2 обобщается до следующего вида:

$$\alpha \in I_+\left(\delta \sum_{i=-N'}^{n} a_i \xi^{i-1}, \xi^n\right) \quad \text{для } n \in \{-N', \ldots, N\}. \tag{1*}$$

Для удобства можно доопределить незначащие цифры нулями ($a_n = 0$ для $n < -N'$) и переписать определение следующим образом:

$$(1^{**}) \qquad \alpha \in I_+\left(\delta \sum_{i=-\infty}^{n} a_i \xi^{i-1}, \xi^n\right) \quad \text{для } n \leqslant N.$$

Сумма всегда конечна, поскольку содержит конечное число ненулевых слагаемых.

Можно заметить, что отрезки

$$I_n = I_+\left(\delta \sum_{i=-\infty}^{n} a_i \xi^{i-1}, \xi^n\right)$$

вложены друг в друга:

$$I_n \subset I_{n'} \text{ для } n > n',$$

то есть одно условие $\alpha \in I_N$ равносильно всей группе (1^{**}).

2. Сложение в системах с перекрытием

2.1. Формализация задачи сложения

Пусть для m чисел α_j ($\alpha_j \in [0,1]$) заданы их представления в системе с перекрытием $\langle \nu, \varepsilon \rangle$ с точностью N разрядов

$$(2) \qquad \alpha_j \sim \overline{\bullet\, a_{j1} a_{j2} a_{j3} \dots a_{jN}}, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \quad m \geqslant 2,$$

и требуется найти представление для их суммы $\gamma = \sum\limits_{j=i}^{m} \alpha_j$.

При этом допускается потеря точности, заключающаяся в том, что младшие p ($p \in \mathbb{N}$) разрядов представления γ остаются неопределенными. Также необходимо добавить к результату q ($q \in \mathbb{N}$) старших разрядов, поскольку сумма γ в общем случае выходит за пределы интервала $[0,1]$. То есть требуется найти цифры $\{c_n\}_{n=-q+1}^{N-p}$, такие что

$$(3) \qquad \gamma \sim \overline{c_{-q+1} c_{-q+2} \dots c_0 \bullet c_1 c_2 \dots c_{N-p}}.$$

На рис. 3 показана общая схема сложения. Здесь звездочки в правой части представления каждого числа обозначают неопределенные цифры. Для слагаемых не определены цифры, начиная с $(N+1)$-го

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & \ldots 00 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1N} & **\ldots \\
+ & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \\
 & \ldots 00 & 0 & \ldots & 0 & a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mN} & **\ldots \\
\hline
 & \ldots 00 & 0 & \ldots & 0 & s_1 & \ldots & s_{N-p} & s_{N-p+1} & \ldots & s_N & **\ldots \\
 & \ldots 00 & c_{-q+1} & \ldots & c_0 & c_1 & \ldots & c_{N-p} & * & \ldots & * & **\ldots
\end{array}
$$

Рис. 3. Потеря разрядов справа и добавление слева при сложении

разряда, а для результата — начиная с $(N-p+1)$-го, то есть p разрядов теряется. Слева к результату добавляются ненулевые в общем случае цифры в разрядах с $(-q+1)$-го по 0-й.

Для заданных параметров системы в разделе 2.5 будут найдены минимально возможные значения p и q, а также предложен алгоритм вычисления цифр c_n.

Доопределим $a_{jn}=0$ для $n\leqslant 0$ и обозначим поразрядные суммы $s_n=\sum\limits_{j=1}^{m} a_{jn}$ для $n\leqslant N$. Тогда, используя определение (1^{**}), формулировку задачи сложения можно переписать в следующем виде.

Для $\forall\gamma\in[0,m]$, $\forall s_n\in\{0,\ldots,m\mu\}$, *таких что* $s_n=0$ *для* $n\leqslant 0$ *и*

$$\gamma\in I_+\left(\delta\sum_{i=-\infty}^{n} s_i\xi^{i-1}, m\xi^n\right) \quad \text{для } n\leqslant N, \tag{4}$$

нужно найти числа $\{c_n\}$, *такие что для* $n\leqslant N-p$ *выполнены требования*

$$c_n\in\mathbb{Z} \text{ — целочисленность цифр,} \tag{5a}$$

$$c_n\in[0,\mu] \text{ — ограниченность цифр,} \tag{5b}$$

$$\gamma\in I_+\left(\delta\sum_{i=-\infty}^{n} c_i\xi^{i-1}, \xi^n\right) \text{ — локализация результата.} \tag{5c}$$

Здесь для дальнейшего удобства вынесены отдельно условия (5a) и (5b), выражающие тот факт, что c_n — цифры системы $\langle\nu,\varepsilon\rangle$. Ограничение $c_n=0$ для $n\leqslant -q$ специально не включено в требования, поскольку факт существования такого q следует непосредственно из (5c). Ниже будут даны оценки на q.

В общем случае решение не единственно, и далее будет дана классификация решений. Кроме того, будут предложены конкретные решения, по которым строятся алгоритмы вычисления c_n, эффективные в том смысле, что цифры результата могут вычисляться независимо и параллельно.

2.2. Локализация результата

Введем следующие обозначения:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} s_i \xi^{i-1}, \quad C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi^{i-1}, \quad \rho = \mu\xi \frac{1 - m\xi^p}{1 - \xi} = \xi \frac{1 - m\xi^p}{\delta}.$$

Утверждение 1. *Требуемое условие* (5c) *эквивалентно следующему:*

$$(5c') \qquad C_n \in I_-(S_{n+p}, \rho\xi^{n-1}) \quad \text{для } n \leqslant N - p.$$

Доказательство. Пусть выполнено ($5c'$). Условия (4) и ($5c'$) эквиваленты следующим неравенствам при $n \leqslant N - p$:

$$S_{n+p} \leqslant \frac{\gamma}{\delta} \leqslant S_{n+p} + \frac{m\xi^{n+p}}{\delta},$$
$$S_{n+p} - \rho\xi^{n-1} \leqslant C_n \leqslant S_{n+p},$$

откуда, с одной стороны,

$$C_n \leqslant S_{n+p} \leqslant \frac{\gamma}{\delta},$$

а с другой

$$C_n \geqslant S_{n+p} - \rho\xi^{n-1} \geqslant \frac{\gamma}{\delta} - \frac{m\xi^{n+p}}{\delta} - \rho\xi^{n-1} = \\ = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{m\xi^{n+p} + \xi^n - m\xi^{n+p}}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\xi^n}{\delta},$$

то есть

$$C_n \leqslant \frac{\gamma}{\delta} \leqslant C_n + \frac{\xi^n}{\delta},$$

что эквивалентно (5c).

В обратную сторону доказательство проводится аналогично. □

Если выразить C_n в виде

$$C_n = S_{n+p} - \sigma_n \rho \xi^{n-1}$$

для некоторых σ_n, то ($5c'$) эквивалентно следующему условию:

$$(5c'') \qquad \sigma_n \in [0, 1] \quad \text{для } n \leqslant N - p.$$

Для $n \leqslant -p$ имеем $S_{n+p} = 0$, откуда $\sigma_n = 0$ и $C_n = 0$ и, следовательно, $c_n = 0$. Здесь, в частности, можно заметить оценку $q \leqslant p$, то есть слева к результату добавляется не больше значащих разрядов, чем теряется справа.

Для $n > -p$, вычитая $(n-1)$-е уравнение из n-го и умножая полученное равенство на ξ^{1-n}, получаем

$$c_n = s_{n+p}\xi^p - \sigma_n\rho + \frac{\sigma_{n-1}}{\rho}. \tag{6}$$

Выражение $\sigma_n\rho$ можно представить в виде суммы дробной и целой части:

$$\sigma_n\rho = \theta_n + k_n, \quad \text{где } \theta_n \in [0,1),\ k_n \in \mathbb{Z}.$$

Утверждение 2. *Для $\theta \in [0,1)$, $y > 0$ неравенство*

$$0 \leqslant \theta + k \leqslant y$$

имеет следующее решение относительно $k \in \mathbb{Z}$:

$$k \in \begin{cases} \{0, \dots, \lfloor y \rfloor\}, & \textit{при } \theta \leqslant \{y\}; \\ \{0, \dots, \lfloor y \rfloor - 1\}, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

В частности, при $y \geqslant 1$ решение всегда есть.

Теперь можно явно выразить все решения k_n, обеспечивающие выполнение условия ($5c''$). Действительно,

$$0 \leqslant \sigma_n \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \theta_n + k_n \leqslant \rho,$$

откуда, согласно утверждению 2, получаем решения k_n:

$$k_n \in \begin{cases} \{0, \dots, R\}, & \text{при } \theta_n \leqslant r; \\ \{0, \dots, R-1\}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{$5c'''$}$$

Здесь $R = \lfloor \rho \rfloor$, $\quad r = \{\rho\}$. Заметим, что ($5c'''$) эквивалентно ($5c''$).

Необходимость существования решения ($5c'''$) определяет ограничение точности p, как показано в разделе 2.5.

2.3. Целочисленность цифр

При некоторых дополнительных условиях дробные части θ_n можно выразить явно.

Утверждение 3. *Если $k_n/\xi \in \mathbb{Z}$ для всех $n \leqslant N$ то условие* (5a) *эквивалентно*

$$\theta_n = \left\{ \sum_{i=1}^{p} s_{n+i}\xi^i \right\}, \tag{5a'}$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть: $\{x\} \overset{\text{def}}{=} x \bmod 1$.

Доказательство. Пусть верно (5a), то есть $c_n \in \mathbb{Z}$.

Для $n \leqslant -p$ тривиально $\theta_n = 0$. Далее доказательство ведется по индукции, начиная с $n = -p + 1$, путем сравнения обеих частей равенства (6) по модулю 1.

База индукции $n = -p + 1$:

$$0 \equiv c_{-p+1} \equiv s_1\xi^p - \theta_{-p+1} + 0 \pmod 1,$$

$$\theta_{-p+1} \equiv s_1\xi^p \equiv \sum_{i=1}^{p} s_{-p+1+i}\xi^i \pmod 1.$$

Общий случай:

$$0 \equiv c_n \equiv s_{n+p}\xi^p - \theta_n + \frac{\theta_{n-1} + k_{n-1}}{\xi} \pmod 1,$$

$$\theta_n \equiv s_{n+p}\xi^p + \sum_{i=1}^{p} s_{n-1+i}\xi^{i-1} + \frac{k_{n-1}}{\xi} \equiv \sum_{i=1}^{p} s_{n+i}\xi^i + \frac{k_{n-1}}{\xi} \pmod 1.$$

Пользуясь дополнительным условием, получаем требуемое представление для θ_n.

В обратную сторону доказательство проводится путем прямолинейного сравнения (6) по модулю 1. □

2.4. Ограниченность цифр: достаточные условия

Выше были определены ограничения на k_n и правила вычисления θ_n, которые обеспечивают выполнение требований (5c) и (5a). Таким образом, для построения алгоритма сложения на основе регулярного решения необходимо уточнить процедуру выбора k_n из множества ($5c'''$) таким образом, чтобы требуемые неравенства (5b) были выполнены. Следующие утверждения помогают подобрать *достаточные* для этого условия.

Утверждение 4. *Для* $\forall k \in \{0, \ldots, R-1\}$ *можно взять* $k_n = k_{n-1} = k$, *тогда будет выполнено неравенство* (5b) *для данного* n.

Доказательство.

$$c_n = s_{n+p}\xi^p - (\theta_n + k_n) + \frac{\theta_{n-1} + k_{n-1}}{\xi} = \\ = s_{n+p}\xi^p - \theta_n + \theta_{n-1} + \frac{1-\xi}{\xi}(k + \theta_{n-1}).$$

Каждое слагаемое оценивается сверху следующим образом:

$$\begin{array}{c} s_{n+p}\xi^p \leqslant m\mu\xi^p \\ -\theta_n \leqslant 0 \\ \theta_{n-1} < 1 \\ \frac{1-\xi}{\xi}(k+\theta_{n-1}) < \frac{1-\xi}{\xi}R \leqslant \frac{1-\xi}{\xi}\rho = \mu(1-m\xi^p) \\ \hline c_n < m\mu\xi^p + 1 + \mu(1-m\xi^p) = \mu + 1\ . \end{array}$$

Для оценки снизу заметим, что $-\theta_n > -1$, а остальные слагаемые неотрицательные, поэтому $c_n > -1$.

Таким образом, выполнено $0 \leqslant c_n \leqslant \mu$. □

Утверждение 5. *Если взять* k_n *и* k_{n-1} *равными максимально возможному из условия* (5c''') *значению, то есть*

$$k_i = \begin{cases} R, & \text{при } \theta_i \leqslant r \\ R-1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{для } i \in \{n-1, n\},$$

то будет удовлетворено неравенство (5b) *для данного* n.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы по отдельности разобрать случаи $\theta_i > r$ и $\theta_i \leqslant r$ для $i \in \{n-1, n\}$.

Например, пусть $\begin{cases} \theta_{n-1} \leqslant r \\ \theta_n > r \end{cases}$, тогда $\begin{cases} k_{n-1} = R \\ k_n = R-1 \end{cases}$.

Представим c_n в виде

$$c_n = s_{n+p}\xi^p - \theta_n + \theta_{n-1} + 1 + (R + \theta_{n-1})\frac{1-\xi}{\xi}.$$

Тогда имеет место оценка слагаемых сверху:

$$\begin{aligned} s_{n+p}\xi^p &\leqslant m\mu\xi^p \\ -\theta_n &< -r \\ \theta_{n-1} &\leqslant r \\ (R+\theta_{n-1})\frac{1-\xi}{\xi} &\leqslant (R+r)\frac{1-\xi}{\xi} = \mu(1-m\xi^p) \end{aligned}$$

$$\overline{\qquad c_n < m\mu\xi^p - r + r + 1 + \mu(1-m\xi^p) = \mu + 1\ ,}$$

откуда $c_n \leqslant \mu$.

Оценка снизу $c_n \geqslant 0$ для данного представления очевидна.

Аналогичным образом разбираются остальные случаи. □

2.5. Оценка количества добавляемых и теряемых разрядов

Поскольку γ может принимать все значения из $[0, m]$, необходимо добавить столько старших разрядов, чтобы можно было выразить число m. Значит, m не должно превосходить максимально возможного значения правого конца интервала из условия (5c):

$$m \leqslant \delta\mu \sum_{i=-q+1}^{N} \xi^{i-1} + \xi^N.$$

Чтобы q зависело только от параметров системы, но не от точности представления N, потребуем, чтобы это неравенство выполнялось для всех $N \in \mathbb{N}$, то есть

$$m \leqslant \delta\mu \sum_{i=-q+1}^{\infty} \xi^{i-1},$$

откуда

$$m\xi^q \leqslant 1. \tag{7}$$

Обозначим минимально возможное значение q как

$$q^* = \min\{\, q \in \mathbb{Z} \mid m\xi^q \leqslant 1 \,\} = \left\lceil \frac{\ln m}{-\ln \xi} \right\rceil. \tag{8}$$

Из требования существования решения неравенства ($5c'''$) можно вывести наилучшее значение точности p в зависимости от параметров системы. При $\rho \geqslant 1$ решение k_n неравенства всегда существует, также это условие является достаточным для существования искомых $\{c_n\}$.

Если $\rho < 1$, то можно подобрать такие входные данные, чтобы $\theta_n > r$ для какого-нибудь n (ниже в разделе 2.3 показано, как именно выражаются θ_n). Тогда не будет решения для соответствующего k_n.

Таким образом, следующее ограничение на параметры системы является необходимым и достаточным для существования решения:

$$\mu\xi\frac{1-m\xi^p}{1-\xi} \geqslant 1. \tag{9}$$

Из этого неравенства получается оценка наименьшего значения p, которую обозначим следующим образом:

$$p^* = \min\left\{ p \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \mu\xi\frac{1-m\xi^p}{1-\xi} \geqslant 1 \right\}. \tag{10}$$

3. Классификация решений

Поскольку представление числа в системе с перекрытием неоднозначно, у задачи сложения может существовать несколько решений. В зависимости от параметров системы, а также от способов выбора k_n можно предложить следующую классификацию решений.

- Прежде всего отметим регулярные решения — те, для которых выполнено $k_n/\xi \in \mathbb{Z}$. В этом случае каждое θ_n зависит не более чем от p разрядов аргументов и может быть вычислено по формуле ($5a'$). Условие $k_n/\xi \in \mathbb{Z}$ может быть достигнуто разными способами, что позволяет выделить несколько подклассов решений.
  - «Тип 1» $\xi = 1/z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Ограничение, наложенное на параметры системы позволяет построить решение, для которого q принимает минимально допустимое значение из оценки (7): $q = q^*$. Каждый разряд результата зависит не более чем от $2p + 2$ разрядов аргументов.
  - «Тип 2» состоит из единственного решения, которое задается условием $k_n = 0$, и далее будет показано, что это решение всегда существует. Вероятно, самое алгоритмически простое решение с точки зрения зависимостей (каждый разряд результат зависит не более чем от $p + 1$ разрядов аргументов) и количества вычислительных операций. В общем случае $q = p$.
  - Смешанный тип $\xi = t/z$, $k_n \equiv 0 \pmod t$ для некоторых $z, t \in \mathbb{Z}$.

- Остальные решения, для которых не выполнено $k_n/\xi \in \mathbb{Z}$, отнесем к классу нерегулярных. По-видимому, такие решения не представляют практического интереса, поскольку в общем случае θ_n и, следовательно, c_n будут зависеть от неограниченного количества разрядов слагаемых, что не допускает алгоритмические реализации с поразрядным параллелизмом.

4. Построение алгоритма сложения

4.1. Алгоритм для решения «типа 1»

В этом варианте решения вводится дополнительное ограничение на параметры системы, что дает больше свободы на выбор k_n. Идея этого решения состоит в том, чтобы занулить как можно больше старших цифр результата $c_{-p+1}, \ldots, c_{-q}$, выбирая подходящие k_n для этих разрядов, после чего, воспользовавшись утверждениями 4 и 5, выбрать оставшиеся k_n равными или почти равными k_{-q}.

Представим c_n в виде

$$c_n = s_{n+p}\xi^p - \sigma'_n + \frac{\sigma'_{n-1}}{\xi} \quad \text{для } n \leqslant N-p, \quad \text{где } \sigma'_n = \sigma_n\rho.$$

Потребуем, чтобы $c_n = 0$ для $n \in \{-p+1, \ldots, -q\}$. Тогда, учитывая, что $\sigma'_{-p} = 0$, можно выразить остальные σ'_n:

$$\begin{aligned} \sigma'_{-p+1} &= s_1\xi^p, \\ \sigma'_{-p+2} &= s_2\xi^p + s_1\xi^{p-1}, \\ &\ldots \\ \sigma'_{-q} &= s_{-q+p}\xi^p + \cdots + s_1\xi^{q+1}. \end{aligned}$$

Согласно требованию ($5c''$), должно быть выполнено $\sigma'_n \leqslant \rho$, что может быть проверено следующей оценкой:

$$\sigma'_{-p+1} \leqslant \sigma'_{-p+2} \leqslant \ldots \leqslant \sigma'_{-q} = \\ = \sum_{i=1}^{p-q} s_i\xi^{q+i} \leqslant m\mu \sum_{i=1}^{p-q} \xi^{q+i} = \mu\xi\frac{m\xi^q - m\xi^p}{1-\xi} \leqslant \mu\xi\frac{1-m\xi^p}{1-\xi} = \rho.$$

Здесь последнее неравенство имеет место в силу оценки (7) на q.

Таким образом, данное решение позволяет занулить максимально возможное количество старших разрядов результата, то есть можно взять q равным q^*.

Теперь осталось выбрать значения k_n для $n > -q$. Если $k_{-q} < R$, то, согласно утверждению 4, можно получить корректное решение, взяв $k_n = k_{-q}$ для $n \in \{-q, \ldots, N-p\}$. Если же $k_{-q} = R$, то некоторые k_n нужно брать равными R или $R-1$, и тогда, согласно утверждению 5, решение будет корректным.

Ниже представлен алгоритм вычисления цифр c_n.

$$s_n \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{для } n \in \{-p+1, \ldots, 0\}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} & \text{для } n \in \{1, \ldots, N\}; \end{cases}$$

$$\theta_n \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{p} s_{n+i}\xi^i \right\} \quad \text{для } n \in \{-p, \ldots, N-p\};$$

$$k_n \coloneqq \left\lfloor \sum_{i=0}^{n+q-1} s_{n+q-i}\xi^{p-i} \right\rfloor \quad \text{для } n \in \{-p+1, \ldots, -q\};$$

$$k_n \coloneqq \begin{cases} R, & \text{если } k_{-q} = R \text{ и } \theta_n \leqslant r \\ k_{-q}, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{для } n \in \{-q+1, \ldots, N-p\};$$

$$c_n \coloneqq s_{n+p}\xi^p - (\theta_n + k_n) + \frac{\theta_{n-1} + k_{n-1}}{\xi} \quad \text{для } n \in \{-p+1, \ldots, N-p\}.$$

4.2. Алгоритм для решения «типа 2»

Если выбрать все $k_n = 0$, то, согласно утверждению 4, получим корректное решение.

Алгоритм вычисления цифр c_n выглядит следующим образом.

$$s_n \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{для } n \in \{-p+1, \ldots, 0\}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} & \text{для } n \in \{1, \ldots, N\}; \end{cases}$$

$$\theta_n \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{p} s_{n+i}\xi^i \right\} \quad \text{для } n \in \{-p, \ldots, N-p\};$$

$$c_n \coloneqq s_{n+p}\xi^p - \theta_n + \frac{\theta_{n-1}}{\xi} \quad \text{для } n \in \{-p+1, \ldots, N-p\}.$$

В этом решении $q = p$, то есть справа к результату добавляется столько же разрядов, сколько теряется слева. Причем q улучшить нельзя, поскольку c_{-p+1} в общем случае отлично от нуля: $c_{-p+1} = \lfloor s_1 \xi^p \rfloor$.

Заключение

В данной работе рассмотрен довольно общий класс систем счисления с перекрытием, при этом используется не точное, а интервальное представление чисел. Поставлена задача параллельного сложения двух и более чисел в заданном представлении.

Получены необходимые и достаточные условия, при которых возможен поразрядный параллелизм сложения. Дана оценка точности (количества теряемых разрядов результата) в зависимости от параметров системы, а также определено минимальное количество добавляемых старших разрядов.

Избыточность систем с перекрытием приводит к тому, что представление числа в общем случае неоднозначно. Поэтому для задачи сложения существует несколько решений — способов записать результат при достижении одной и той же точности. В данной работе построена классификация множества решений, в частности, выделены те классы решений, которые позволяют построить алгоритм сложения, обладающий поразрядным параллелизмом. Приведено два таких параллельных алгоритма, представляющий решения из разных классов.

Благодарности

Автор выражает благодарность Николаю Николаевичу Непейводе за блестящие идеи, связанные с альтернативным представлением чисел, Евгению Кочурову, Алексею Демидову и Юрию Климову за плодотворные обсуждения, а также Ольге Гусевой за помощь в написании статьи.

Список литературы

[1] A. Burks, H. H. Goldstine, J. von Neumann, Preliminary discussion of the logic design of an electronic computing instrument, 1946 ↑ 101.

[2] A. Cauchy. “Sur les moyens d’éviter les erreurs dans les calculs numériques”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Série I*, **11** (1840), pp. 789–798 ↑ 101.

[3] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reele Zahl eine dezimalbruchentwicklung? *Mathematische Annalen*, **83**:3–4 (1921), pp. 201–210 ↑ 101.
[4] A. Rényi. “Representations for real numbers and their ergodic properties”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **8** (1957), pp. 477–493 ↑ 102.
[5] W. Parry. “On the β-expansions of real numbers”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **11** (1960), pp. 401–416 ↑ 102.
[6] A. Avizienis. “Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic”, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **10** (1961), pp. 389–400 ↑ 102, 104.
[7] Ch. Frougny, E. Pelantova, M. Svobodova. “Parallel addition in non-standard numeration systems”, *Theoretical Computer Science*, **412**:41 (2011), pp. 5714–5727 ↑ 102.
[8] Ch. Frougny, E. Pelantova, M. Svobodova. “Minimal Digit Sets for Parallel Addition in Non-Standard Numeration Systems”, *Journal of Integer Sequences*, **16**:2 (2013), pp. 13.2.17 ↑ 102.
[9] Ch. Frougny, J. Sakarovitch, “Number representation and finite automata”, *Combinatorics, Automata and Number Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. **135**, eds. V. Berthé, M. Rigo, Cambridge University Press, 2010, pp. 34–107 ↑ 102.
[10] Н. Н. Непейвода, И. Н. Григоревский, Е. П. Лилитко. «О представлении действительных чисел», *Программные системы: теория и приложения*, **5**:4(22) (2014), с. 105–121, URL http://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_105-121.pdf ↑ 102, 103.

Об авторе:

Артем Борисович Шворин

Инженер-программист ИПС им. А.К. Айламазяна РАН. Область научных интересов: математический анализ, метавычисления, функциональное программирование.

e-mail: shvorin@gmail.com

Пример ссылки на эту публикацию:

А. Б. Шворин. «Параллельное сложение вещественных чисел в системах счисления с перекрытием», *Программные системы: теория и приложения*, 2015, **6**:2(25), с. 101–117.
URL http://psta.psiras.ru/read/psta2015_2_101-117.pdf

Artem Shvorin. *Parallel Addition of Real Numbers in Overlaying Numeration Systems.*

Abstract. Real numbers interval representation in overlaying numeration systems is defined and studied in this paper. The considered problem concerns addition of a group of numbers represented in such systems. All the solutions of this problem are classified, a class of parallelizable solutions is described, and also there are introduced two parallel algorithms. Limitations of system parameters are found in order to provide the given accuracy (*In Russian*).

Key Words and Phrases: data representation, real numbers, numeration system, addition, parallel algorithms.

References

[1] A. Burks, H. H. Goldstine, J. von Neumann, Preliminary discussion of the logic design of an electronic computing instrument, 1946.

[2] A. Cauchy. "Sur les moyens d'éviter les erreurs dans les calculs numériques", *C. R. Acad. Sci. Paris. Série I*, **11** (1840), pp. 789–798.

[3] L. E. J. Brouwer. Besitzt jede reele Zahl eine dezimalbruchentwicklung? *Mathematische Annalen*, **83**:3–4 (1921), pp. 201–210.

[4] A. Rényi. "Representations for real numbers and their ergodic properties", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **8** (1957), pp. 477–493.

[5] W. Parry. "On the β-expansions of real numbers", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **11** (1960), pp. 401–416.

[6] A. Avizienis. "Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic", *IRE Transactions on Electronic Computers*, **10** (1961), pp. 389–400.

[7] Ch. Frougny, E. Pelantova, M. Svobodova. "Parallel addition in non-standard numeration systems", *Theoretical Computer Science*, **412**:41 (2011), pp. 5714–5727.

[8] Ch. Frougny, E. Pelantova, M. Svobodova. "Minimal Digit Sets for Parallel Addition in Non-Standard Numeration Systems", *Journal of Integer Sequences*, **16**:2 (2013), pp. 13.2.17.

[9] Ch. Frougny, J. Sakarovitch, "Number representation and finite automata", *Combinatorics, Automata and Number Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. **135**, eds. V. Berthé, M. Rigo, Cambridge University Press, 2010, pp. 34–107.

[10] N. N. Nepeyvoda, I. N. Grigorevskiy, E. P. Lilitko. "New representation of real numbers", *Programmnye Sistemy: Teoriya i Prilozheniya*, **5**:4(22) (2014), pp. 105–121 (in Russian), URL http://psta.psiras.ru/read/psta2014_4_105-121.pdf.

Sample citation of this publication

Artem Shvorin. "Parallel Addition of Real Numbers in Overlaying Numeration Systems", *Program systems: theory and applications*, 2015, **6**:2(25), pp. 101–117. (*In Russian.*) URL http://psta.psiras.ru/read/psta2015_2_101-117.pdf