Известия Академии наук. Серия Энергетика, №5, 2003.

УДК 536.7

© 2003 г. Цирлин А.М., Андреев Д.А., Могутов В.А.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ

Аннотация

В статье рассмотрена задача экономии энергии на термостатирование. Показано,что при прямой подаче тепла для любого закона теплопередачи следует подавать его только в термостатируемые помещения, а при использовании кондиционеров часть энергии следует подавать (отбирать) и в промежуточные помещения, температуры которых не заданы.

1. Введение и постановка задачи. Для поддержания заданного поля потенциалов (температур, концентраций, давлений и прочих) в открытой термодинамической системе необходимо подводить к этой системе потоки вещества и энергии. Если интенсивность таких управляемых потоков и точки их контакта с системой можно выбирать, возникает задача оптимального потенциалостатирования, т.е. поддержания заданного распределения потенциалов в открытой распределенной системе при миниммальных затратах, оцениваемых тем или иным критерием. Если число управляемых потоков конечно, то с их помощью можно поддерживать заданные значения вектора интенсивных переменных лишь в конечном числе точек, и термодинамическую систему можно представить как совокупность систем с сосредоточенными параметрами, взаимодействующих друг с другом. Типичным и практически важным примером подобной системы является здание, состоящее их многих взаимосвязанных помещений, в некоторых из которых нужно поддерживать заданные значения температуры (в более общем случае влажности, концентрации воздушной среды и др.). Ниже с использованием результатов термодинамики при конечном времени решена задача оптимального термостатирования. Использованный метод может быть распространен и на общую задачу потенциалостатирования.

Энергосбережение в строительстве является одним из основных источников экономии энергии, так как около 40% энергии тратится на отопление и кондиционирование помещений [1]. Строительство энергосберегающих зданий [1] стало одним из главных направлений энергосбережения, достигаемого за счет целого ряда мероприятий: забор воздуха для вентиляции через подземный теплообменник, полная регенерация тепла выходящего воздуха, солнечные батареи на крыше здания, отопление с использованием тепловых насосов, многослойная и отражающая изоляция и пр. В результате энергопотребление таких зданий в пять–восемь раз меньше, чем для зданий обычной конструкции. Повышение стоимости энергии делает строительство энергосберегающих зданий весьма актуальным для России.

Одним из факторов энергосбережения — термостатирование помещений в энергосберегающем здании. Задача оптимального термостатирования состоит в том, чтобы поддерживать заданные температуры только в части помещений при произвольных температурах в остальных (промежуточных) помещениях, затрачивая при этом минимальное количество энергии. Как состав термостатируемых помещений, так и заданные значения температур могут изменяться от сезона и времени суток.

Подобная задача возникает в криогенной технике при поддержании низкой температуры в камере за счет отбора тепла с использованием холодильного цикла. В этом случае для некоторых законов теплопереноса целесообразно использовать так называемую активную изоляцию, когда часть тепла отбирается из основной, а часть из промежуточных камер, в которых поддерживается температура более низкая, чем температура окружающей среды. Задача об активной изоляции рассмотрена в [2] для линейного закона теплопереноса и обратимых холодильных циклов, затем обобщена в [3] на случай необратимых циклов холодильных машин и в [4], где показано, для каких законов теплопередачи активная изоляция дает экономию энергии. Задача об активной изоляции представляет собой частный случай задачи термостатирования при последовательном соединении камер.

В этой работе авторы рассматривают задачу оптимального термостатирования в системе общей структуры с несколькими взаимосвязанными помещениями при двух вариантах подачи энергии:

A. Задача отопления (подача тепла за счет электрического, газового, водяного, воздушного обогрева).

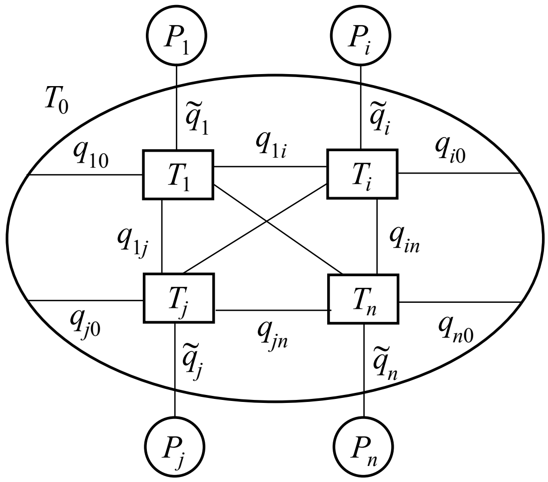

Рис. 1: Общая расчетная схема здания.

B. Задача кондиционирования (обогрев или охлаждение помещений с использованием цикла теплового насоса или холодильного цикла).

Рассматриваемая структура изображена на рис. 1, где обозначены:

T_i — температура i-ой камеры ($i = 0, 1, \ldots, n$), ^{0}C;

$\alpha_{ij}(T_i, T_j)$ — коэффициенты теплопередачи между i-ой и j-ой камерами, которые могут зависеть от температур в этих камерах ($\alpha_{ji} = \alpha_{ij} \geq 0$), Вт/ ^{0}C;

$q_{ij} = \alpha_{ij}(T_i, T_j)(T_j - T_i)$ — тепловой поток от i-ой камеры к j-ой, Вт;

$q_{i0} = \alpha_{i0}(T_i, T_0)(T_0 - T_i)$ — тепловой поток от i-ой камеры к окружающей среде с температурой T_0, Вт;

$\tilde{q}_i$ — тепло, подаваемое (отбираемое) в i-ю камеру, Вт. Положительным считается направление потока тепла к камере.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть температуры в m камерах $T_1, \ldots, T_m$ фиксированы ($m < n$), как и температура окружающей среды T_0. Требуется так выбрать потоки тепла $\tilde{q}_i$ ($i = 1, \ldots, n$), чтобы для варианта A общее количество подводимого тепла, а для варианта B — общая мощность, затрачиваемая на привод тепловых и холодильных машин, были минимальны.

2. Минимизация затрат тепла на отопление. Запишем формальную постановку задачи для случая минимизации затрат тепла.

Критерий оптимальности

$$I_A = \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \to \min, \tag{1}$$

при условиях теплового баланса для каждого помещения

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) + \tilde{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

ограничениях на тепловые потоки

$$\tilde{q}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{3}$$

и условиях, наложенных на температуры термостатируемых помещений

$$T_i = fix, \quad i = 0, \dots, m. \tag{4}$$

Задачу (1)–(4) можно упростить, исключив условия (2) и записывая с их использованием критерий (1) как

$$I_A = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) \to \min, \tag{5}$$

при условиях

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Переменными в этой задаче являются температуры промежуточных помещений T_i $(i = m+1, \dots, n)$.

Запишем функцию Лагранжа задачи (5) и (6)

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j)(\lambda_i - 1). \tag{7}$$

По условиям теоремы Куна-Таккера получим условия оптимальности. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} = (\lambda_i - 1) \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{ij}(T_i, T_j)}{\partial T_i} = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j)\lambda_i = 0, \quad i = m+1, \dots, n. \tag{9}$$

Условия дополняющей нежесткости (9) соответствуют тому, что $\lambda_i = 0$ для тех помещений, у которых $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) < 0$, и $\lambda_j > 0$, если $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) = 0$. Так как $\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) < 0$ для помещений, в которые тепло подается ($\tilde{q}_i > 0$), $\frac{\partial q_{ij}}{\partial T_i} < 0$ для всех j, то из условий (8), (9) следует, что тепло должно подводиться лишь к тем помещениям, температуры в которых заданы. При этом оптимальные потоки тепла $\tilde{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$) и температуры в промежуточных помещениях T_i ($i = m+1, \ldots, n$) однозначно определяются уравнениями тепловых балансов (2), которые примут вид

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) + \tilde{q}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) = 0, \quad i = m+1, \ldots, n, \tag{11}$$

$$T_i = fix, \quad i = 0, \ldots, m. \tag{12}$$

Для ньютоновских законов теплопереноса α_{ij} постоянны и задача (4)–(6) становится задачей линейного программирования, а условия (10), (11) превращаются в систему линейных уравнений, размерность которой равна $(n-m)$. Решение $(n-m)$ уравнений (11) определяет величины вектора потоков $\tilde{q}$. Если один из потоков $\tilde{q}_i$ окажется отрицательным, то для данных коэффициентов теплопередачи для отопления следует использовать кондиционеры.

П р и м е р. Рассмотрим здание, план которого и соответствующая ему расчетная схема приведены на рис. 2. Температура окружающей среды T_0, а также температуры в первом T_1 и втором T_2 помещениях заданы и равны -20 ^{0}C, 18 ^{0}C и 20 ^{0}C соответственно. Коэффициенты теплопередачи между помещениями и окружающей средой приведены в табл. 1. Требуется найти количества подводимого тепла $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ и температуры T_3 – T_6 в остальных помещениях.

Считая тепловые потоки пропорциональными разности температур ($q_{ij} = \alpha_{ij}(T_j - T_i)$) запишем (4)–(6) в виде задачи линейного программирования

$$I_A = -\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=0}^{6} \alpha_{ij}(T_j - T_i) \to \min, \tag{13}$$

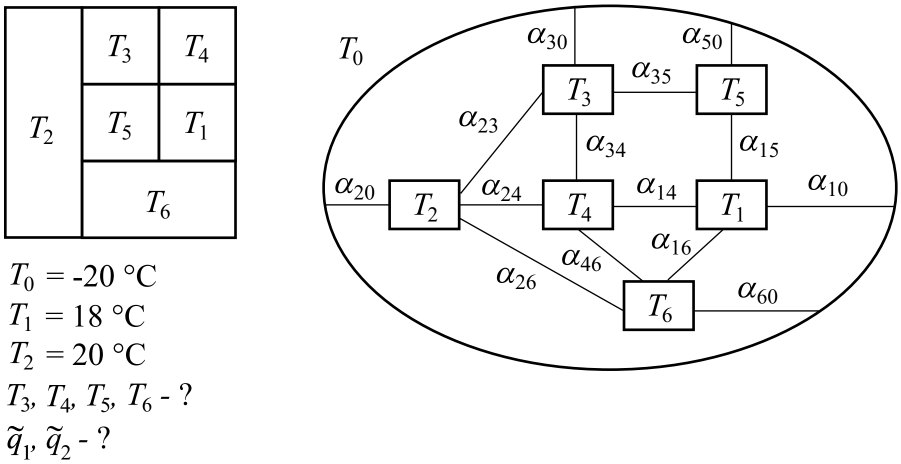

Рис. 2: План и расчетная схема здания.

$$\sum_{j=0}^{6} \alpha_{ij}(T_j - T_i) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, 6, \tag{14}$$

$$T_i = fix, \qquad i = 0, 1, 2. \tag{15}$$

Подставим данные таблицы 1 в (13) и перепишем это выражение с точностью до константы в виде

$$I_A = 16,8T_3 + 33,6T_5 + 50,4T_6 \to \min_{T_3,T_4,T_5,T_6}. \tag{16}$$

Оптимальное решение определяется условиями (10), (11), которые примут вид

$$\begin{cases} 33,6\ T_4 + 33,6\ T_5 + 33,6\ T_6 - 2452,8 + \tilde{q}_1 = 0; \\ 33.6\ T_3 + 33,6\ T_4 + 33,6\ T_6 - 5376 + \tilde{q}_2 = 0; \\ -117,6\ T_3 + 33,6\ T_4 + 33,6\ T_5 + 336 = 0; \\ 33,6\ T_3 - 134,4\ T_4 + 33,6\ T_6 + 1276,8 = 0; \\ 33,6\ T_3 - 100,8\ T_5 - 67,2 = 0; \\ 33,6\ T_4 - 151,2\ T_6 + 268,8 = 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$T_0 = -20\ {}^0\text{C}, \quad T_1 = 18\ {}^0\text{C}, \quad T_2 = 20\ {}^0\text{C}. \tag{18}$$

Решая систему (17), (18) получим следующие результаты

$$\tilde{q}_1 = 1832\ \text{Вт}, \quad \tilde{q}_2 = 4579\ \text{Вт},$$

Таблица 1: Значения коэффициентов теплопередачи α_{ij}, Вт/ ^{0}С.

i / j	0	1	2	3	4	5	6
0	–	16,8	84	16,8	0	33,6	50,4
1	16,8	–	0	0	33,6	33,6	33,6
2	84	0	–	33,6	33,6	0	33,6
3	16,8	0	33,6	–	33,6	33,6	0
4	0	33,6	33,6	33,6	–	0	33,6
5	33,6	33,6	0	33,6	0	–	0
6	50,4	33,6	33,6	0	33,6	0	–

$$T_3 = 6,8\ ^0\text{C}, \quad T_4 = 12,3\ ^0\text{C}, \quad T_5 = 1,6\ ^0\text{C}, \quad T_6 = 4,5\ ^0\text{C}.$$

Минимальные затраты тепла I_A^* равны

$$I_A^* = 1832 + 4579 = 6411 \text{ Вт}.$$

3. Минимизация затрат энергии при использовании тепловых насосов (задача кондиционирования). Системы кондиционирования все шире используются для поддержания заданной температуры в помещениях, а для стран с жарким климатом — это один из основных потребителей энергии.

Задача о минимуме суммарных затрат энергии при кондиционировании имеет вид

$$I_B = \sum_{i=1}^{n} P_i \to \min, \tag{19}$$

при условиях (2), (4).

Обозначим через r_i ($r_i = \tilde{q}_i/P_i$) отопительные коэффициенты тепловых насосов, которые зависят от конструкции насоса (коэффициентов теплопередачи в нагревателе и холодильнике K_0 и K_i), формы цикла, температур на холодной и горячей стороне цикла T_0 и T_i и от подводимой мощности P_i. Обратимая оценка отопительного коэффициента теплового насоса не зависит от P_i

$$r_i^0 = \frac{T_i}{T_i - T_0}. \tag{20}$$

Здесь и далее температуры измеряются в градусах Кельвина.

Оценка для отопительного коэффициента теплового насоса и холодильного коэффициента обратного цикла с учетом необратимости процесса теплопереноса получена в [**??**], [6]. Для ньютоновского закона теплообмена воздуха с рабочим телом, температура которого T, $q = K(T - T)$ с коэффициентами $K = K_0$ при отборе тепла от окружающей среды и $K = K_i$ при передаче тепла в помещение, эта оценка имеет вид

$$\begin{aligned} r_i(T_0, T_i, P_i) = 1 + \frac{1}{2P_i} \Bigg[& \sqrt{P_i^2 + \frac{\overline{K}_i(T_i + T_0)}{2} P_i + \frac{\overline{K}_i^2 (T_i - T_0)^2}{16}} \\ & - P_i - \frac{\overline{K}_i(T_i - T_0)}{4} \Bigg], \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\overline{K}_i = \dfrac{4K_iK_0}{(\sqrt{K_i} + \sqrt{K_0})^2}$ — эквивалентный коэффициент теплопередачи.

Условия (2) перепишем в форме

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) + P_i r_i(T_0, T_i, P_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Искомыми переменными в задаче (19), (22), (4) являются подводимые мощности $P_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и температуры промежуточных камер T_i $(i = m+1, \ldots, n)$. Если в уравнениях (22) $\sum\limits_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) < 0$, то кондиционер для i-го помещения работает как тепловой насос и r_i имеет форму (21). Если $\sum\limits_{j=0}^{n} q_{ij} > 0$, то кондиционер работает как охладитель, причем температура $T_i < T_0$. В этом случае холодильный коэффициент обратимого цикла

$$\tilde{r}_i^0 = \frac{T_i}{T_0 - T_i} = r_i^0 - 1.$$

Для необратимого цикла в условиях (22) и в вытекающих из них соотношениях вместо $r_i(T_0, T_i, P_i)$ фигурирует

$$\tilde{r}_i = r_i(T_i, T_0, P_i) - 1. \tag{23}$$

Отметим, что в выражении (23) температуры T_0 и T_i в r_i следует поменять местами. Равенство (23) вытекает из известной связи между холодильным коэффициентом обратного цикла и отопительным коэффициентом теплового насоса [6].

Условия оптимальности задачи (19), (22), (4), сформулированные через ее функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ P_i[1 + \lambda_i r_i(T_0, T_i, P_i)] + \lambda_i \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j) \right\},$$

приводят к соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow r_i(T_0, T_i, P_i) + P_i \frac{\partial r_i}{\partial P_i} = -\frac{1}{\lambda_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_\nu} = 0 \Rightarrow P_\nu \lambda_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial T_\nu} + \lambda_\nu \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \lambda_i \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} = 0, \quad \nu = m+1, \ldots, n, \tag{25}$$

которые вместе с условиями (21)–(23) определяют искомые переменные.

При использовании обратимой оценки отопительного (холодильного) коэффициента задача упрощается и система (22), (24), (25) приводит к уравнениям

$$P_i = -\frac{T_i - T_0}{T_i} \sum_{j=0}^{n} q_{ij}(T_i, T_j), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

$$\lambda_i = -\frac{T_i - T_0}{T_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{27}$$

$$\lambda_\nu \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \lambda_i \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} - P_\nu \lambda_\nu \frac{T_0}{(T_\nu - T_0)^2} = 0, \quad \nu = m+1, \ldots, n. \tag{28}$$

Откуда для температур промежуточных камер имеем

$$\frac{T_\nu - T_0}{T_\nu} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \frac{T_i - T_0}{T_i} \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} + \frac{T_0}{T_\nu^2} \sum_{j=0}^{n} q_{\nu j}(T_\nu, T_i) = 0, \quad \nu = m+1, \ldots, n. \tag{29}$$

Эта система позволяет найти все температуры, так как для $i \leq m$ их значения заданы (см. (12)). После этого из условий (26) могут быть найдены оптимальные значения мощностей P_i для всех i от 1 до n.

П р и м е р. Рассмотрим здание, план которого и соответствующая ему расчетная схема приведены на рис. 3. Температуры T_0 и T_1, равны, соответственно 253 К и 293 К; коэффициенты теплопередачи в тепловых насосах $K_0 = K_1 = K_2 = 3000$ Вт/К; коэффициенты теплопередачи между помещениями $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 180$ Вт/К и окружающей средой $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 94,08$ Вт/К. Требуется найти температуру T_2 во втором помещении и мощности P_1, P_2, затрачиваемые на привод тепловых насосов. Тепловые потоки считаются пропорциональными разности температур ($q_{ij} = \alpha_{ij}(T_j - T_i)$), а процесс теплопереноса необратимым.

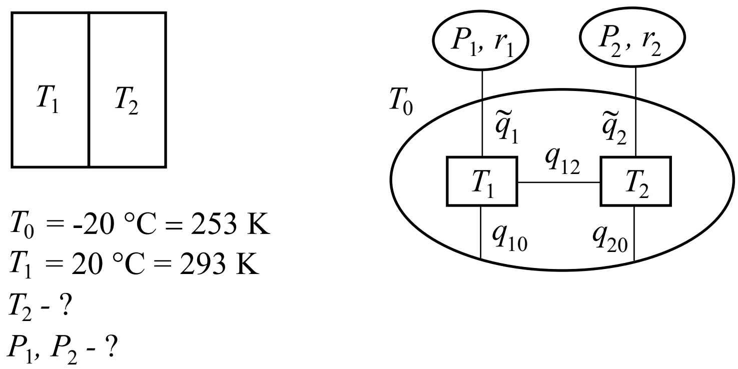

Рис. 3: План и расчетная схема здания.

Задача (19), (22), (4) о минимуме затрат энергии на привод тепловых насосов запишется в виде

$$I_B = P_1 + P_2 \to \min, \tag{30}$$

$$\begin{cases} \alpha_{10}(T_0 - T_1) + \alpha_{12}(T_2 - T_1) + P_1 r_1(T_0, T_1, P_1) = 0; \\ \alpha_{20}(T_0 - T_2) + \alpha_{21}(T_1 - T_2) + P_2 r_2(T_0, T_2, P_2) = 0, \end{cases} \tag{31}$$

$$T_0 = 253 \text{ К}, \quad T_1 = 293 \text{ К}, \tag{32}$$

где r_1 и r_2 имеют вид (21).

Выражая P_1 и P_2 через T_2 в системе (31) и учитывая заданные значения величин, а также выражения (21), после преобразований, выполненных с использованием пакета MathCad, получим систему

$$\begin{cases} P_1(T_2) = 1,6\dfrac{848560349 - 4468950 \cdot T_2 + 5625 \cdot T_2^2}{76737 - 50 \cdot T_2}; \\ P_2(T_2) = 0,48\dfrac{2436457 \cdot T_2^2 - 1313982242 \cdot T_2 + 176932331113}{4267 \cdot T_2 - 318926}. \end{cases} \tag{33}$$

Теперь критерий оптимальности I_B зависит только от температуры T_2 и, как показывают расчеты, достигает минимума при температуре $T_2 = 282$ К.

Подставляя найденную температуру T_2 в систему (33), находим затраты энергии на привод тепловых насосов $P_1 = 910,36$ Вт и $P_2 = 79,32$ Вт.

Выводы. 1. Для произвольного закона теплопереноса при обогреве здания за счет прямой подачи тепла (электрообогрев, подача горячей воды или воздуха, газовый обогрев) его целесообразно подавать только в помещения с фиксированной температурой в количествах, определяемых решением задачи (1)–(4). Температуры в промежуточных помещениях определяются условиями теплообмена.

2. При кондиционировании здания целесообразно часть энергии тратить на промежуточные помещения, поддерживая в них некоторые оптимальные температуры, определяемые решением задачи (19), (22), (4).

3. Полученные соотношения позволяют оценить затраты энергии на термостатирование и построить систему оперативного перераспределения потоков энергии, минимизирующую эти затраты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feist Wolfgang.* Passivhaus — ein neuer Standard mit hohem Entwicklung spotential. // Energie Effizientes Bauen, №1, 2000.

2. *Мартыновский В.С.* Циклы, схемы и характеристики теплотрансформаторов. — М.: Энергия, 1979.

3. *Софиев М.А.* К расчету активной тепловой изоляции. // Теор. основы хим. технологии, №3, 1988.

4. *Tsirlin A.M., Sofiev M.A., Kazakov V.A.* Finite-time thermodynamics. Active potentiostatting. // J. Phys. D: Appl. Phys., 1998, V.31, №18.

5. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами. // Автоматика и телемеханика, №1–3, 1983.

6. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. — М.: Химия, 2000.

Переславль-Залесский
Москва