

## Введение

Значительное число систем самой разной природы состоит из множества элементов, каждым из которых нельзя управлять непосредственно. Элементы таких систем образуют микроуровень. Управление же системами возможно посредством изменения условий на макроуровне, влияющих на все множество их элементов. Такие системы называют *макроуправляемыми* системами или просто *макросистемами*. Классическим и наиболее изученным примером макросистем являются термодинамические системы, состоящие из большого числа молекул. Такие макропеременные как температура, давление, состав отражают средние по ансамблю молекул характеристики системы. Поведение термодинамических систем на микроуровне изучает статистическая физика, связывающая это поведение с характеристиками макросистемы. Термодинамика же изучает наблюдаемые *феноменологические* закономерности поведения макросистем.

Другим примером макросистем являются микроэкономические системы, состоящие из большого числа элементарных участников экономического взаимодействия. Микроэкономика изучает наблюдаемые закономерности взаимодействия экономических агентов, обмена товарами и услугами. Управление микроэкономическими системами возможно только на макроуровне, посредством, изменения тех или иных условий общих для всех элементарных экономических агентов.

Еще один пример — сегрегированные системы [58], т.е. системы, состоящие из множества агрегатов, погруженных в общую для них среду. Скорость изменения состояния каждого из агрегатов зависит от его текущего состояния, некоторого индивидуального параметра и от состояния среды, которое в свою очередь изменяется под влиянием среднего по ансамблю воздействия со стороны агрегатов. Пример подобной системы — сушка частиц (агрегатов) в кипящем слое. Средой здесь является сушильный агент, температура и влажность которого — макропеременные, усредненно зависят от кинетики сушки отдельных агрегатов, индивидуальными параметрами агрегата — начальный размер и время пребывания частицы в аппарате. Управлять можно расходом, входной температурой сушильного агента и расходом частиц.

Все эти воздействия влияют на усредненные по множеству агрегатов характеристики процесса. Вектор индивидуальных параметров является случайным, известно его распределение по множеству агрегатов на входе в аппарат. Сегрегированными являются процессы кристаллизации и растворения, химические реакции, протекающие в вязких средах и пр. Близки к сегрегированным и социально-экономические модели, в которых в качестве агрегатов фигурируют семейные ячейки, влияющие друг на друга через общую социально-экономическую среду.

В качестве макросистем рассматривают системы эволюции городов, миграции населения и др. Во всех этих системах управление возможно лишь на макроуровне.

Перечислим некоторые общие особенности макросистем:

1. Связь между макро- и микропеременными реализуется через операцию усреднения по множеству микроэлементов.

2. Переменные, характеризующие макросистемы, делятся на две категории: *интенсивные* и *экстенсивные*. Первые из них (температура, давление, состав) не изменяются при изменении числа микроэлементов системы, а вторые (объем, энергия, запас ресурсов) при неизменных условиях пропорциональны этому числу.

3. При объединении макросистем в условиях изоляции от окружения в них происходят процессы, приводящие к выравниванию значений интенсивных переменных. Эти процессы протекают самопроизвольно и никак не влияют на состояние внешней среды, окружающей подсистемы. Обратный процесс разделения однородной системы на подсистемы с разными значениями интенсивных переменных невозможен без изменений, вносимых в окружающую среду. Таким образом процессы выравнивания параметров подсистем *необратимы*. Именно необратимость составляет основную особенность реальных процессов в макросистемах.

4. Важную роль в макросистемах играют специального типа подсистемы — посредники, которые в самопроизвольном процессе обмена между подсистемами способны извлекать некий ресурс (энергию, деньги, ...). Используя этот ресурс, посредник при некоторых условиях может вновь разделить систему на разнородные подсистемы. Таким образом посредник уменьшает необратимость процессов.

В книге рассмотрены термодинамические и микроэкономические системы. Приведенные ниже примеры позволяют ощутить аналогию этих видов макросистем, наметить основную проблематику и схему их исследования.

### **Примеры процессов в макроуправляемых системах**

#### *А. Термодинамика.*

*1. Процесс непосредственного теплового контакта двух тел.*

При контакте друг с другом двух тел, изолированных от внешней среды и имеющих различные начальные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , через достаточно большое время их температуры выравниваются до некоторой средней температуры. Чтобы вернуть систему к прежнему состоянию, нужно охладить одно из тел и нагреть второе, используя в первом случае холодильную установку, а во втором — тепловой насос. При этом должна быть затрачена некоторая работа  $A$ , а значит изменится состояние окружения. Таким образом процесс непосредственного теплового контакта необратим. Чем меньше время  $\tau$ , отпущенное на то, чтобы вернуть систему в исходное состояние, тем больше потребуется работы. Предел  $A(\tau)$  при  $\tau$ , стремящемся к бесконечности, обозначим через  $A^0$ .

*2. Тепловой контакт двух тел через идеальную тепловую машину.*

Пусть в той же системе имеется идеальная тепловая машина. В такой машине нет потерь на трение, она получает тепло от горячего тела при температуре газа в цилиндре сколь угодно близкой к температуре нагревателя и отдает тепло при температуре газа близкой к температуре холодильника. Продолжительность процесса не ограничена и машина будет извлекать работу до тех пор, пока температуры тел не выровняются. При этом общая температура системы окажется ниже, чем при непосредственном контакте, а полученной работы при использовании для этого идеальных теплового насоса и холодильной машины как раз хватит для того, чтобы вернуть систему в исходное состояние, если на это отпущено неограниченное время. Так что при неограниченной продолжительности процесса контакта через посредника — идеальную тепловую машину, оказывается обратимым.

Если продолжительность процесса ограничена, то он будет необратимым и в системе с посредником, хотя для возврата системы и понадобится меньше энергии, чем при непосредственном контакте.

*В. Микроэкономика.*

*3. Непосредственный контакт двух экономических агентов (ЭА).*

ЭА — совокупность потребителей или производителей того или иного ресурса, характеризуется оценкой ресурса  $p$  — минимальной ценой, по которой он готов продавать ресурс. Если цена ниже, чем оценка, то ЭА готов ресурс покупать. Оценка ресурса зависит от его запаса  $N$ . С ростом  $N$  ресурс становится как правило менее значимым для ЭА и его оценка уменьшается с ростом запаса. При прямом контакте двух ЭА, тот, у которого оценка выше, покупает ресурс у ЭА с более низкой оценкой до тех пор пока в результате перераспределения ресурса оценки не выровняются на некотором значении промежуточном между начальными значениями оценок у каждого из ЭА.

Для того, чтобы вернуть систему в первоначальное состояние, нужно закупить ресурс у того ЭА, у которого оценка снизилась в результате обмена, и продать тому, у которого она повысилась. При этом закупать ресурс придется по цене выше установившейся, а продавать — по цене ниже установившейся, что потребует затрат капитала в количестве  $E$ . Так что состояние окружения изменится. Значит процесс непосредственного контакта двух ЭА необратим. Чем меньше времени  $\tau$  отпущено на возврат системы к исходному состоянию, тем больше денег на это потребуется. Предел  $E(\tau)$  при  $\tau$ , стремящемся к бесконечности, обозначим через  $E^0$ .

#### 4. Контакт ЭА через посредника.

Пусть в той же системе имеется посредник, закупающий ресурс у ЭА с низкой оценкой и продающий его ЭА, у которого оценка выше. Если продолжительность процесса не ограничена и посредник стремится от перепродажи ресурса извлечь максимально возможный капитал, то он будет торговать по ценам сколь угодно близким к оценкам. При этом он извлечет капитал в количестве  $E^0$ , вложив который может вернуть систему в исходное состояние. Таким образом процесс контакта ЭА через посредника при неограниченной продолжительности этого контакта обратим. Общая для двух ЭА оценка ресурса, к которой придет система с посредником, будет, как показано в гл. 6, иной, чем в системе без посредника.

Если продолжительность процесса извлечения капитала или возврата системы в исходное состояние ограничена, то посреднику придется повысить цену закупок и снизить цену продаж. Для возврата системы в исходное состояние не хватит извлеченного капитала и процесс оказывается необратимым.

Эти примеры рассмотрены очень бегло, чтобы продемонстрировать близость оптимизационных задач (извлечению работы соответствует извлечение капитала, температурам — оценки ресурсов, тепловой машине — посредническая фирма, наконец потери связаны с необратимостью и растут с уменьшением продолжительности процессов). В книге эти и подобные им задачи сформулированы, а их решения получены на количественном уровне.

Учет необратимости экономических процессов не менее важен, чем термодинамических, тем более, что аналогия между обратимой термодинамикой и экономикой прослеживается давно и оказывается достаточно полной [44], [113], [114]. Подобная аналогия для необратимой микроэкономики последовательно не проведена, несмотря на значительное число работ, появившихся в последние годы [61], [118], [119].

#### Открытые и замкнутые системы

*Открытыми* называют системы, обменивающиеся с окружением

материальными, энергетическими, финансовыми потоками. В открытой системе состоянию равновесия соответствует неизменность интенсивных переменных во времени, но они могут меняться от подсистемы к подсистеме и их значения зависят от величины и параметров внешних потоков. Для функционирования открытой системы в стационарном режиме она должна содержать не менее двух *резервуаров* — систем, интенсивные переменные которых не зависят от изменений их экстенсивных переменных.

Система может быть изолирована от окружения по всем или некоторым видам потоков. Равновесие в полностью изолированной *замкнутой* системе при наличии контакта между подсистемами соответствует равенству значений интенсивных переменных отдельных подсистем.

Задачи исследования предельных возможностей открытых и замкнутых систем отличаются друг от друга. В открытых системах исследуют обычно стационарные состояния и речь идет о предельных при тех или иных ограничениях значениях потоков. В замкнутых же системах исследуют процессы перехода из одного состояния в другое, при этом нас интересуют количества тех или иных ресурсов или продолжительность перехода в условиях наложенных ограничений.

Допущение о том, что неоднородную систему можно разбить на несколько подсистем, в каждой из которых интенсивные переменные одинаковы по объему, и в каждый момент времени эти переменные связаны между собой так же как и в равновесии, называют *гипотезой локального равновесия*. В равновесии система характеризуется только частью переменных, их называют независимыми. Остальные переменные могут быть найдены через независимые и через *уравнения состояния*. Эти уравнения могут быть получены как обработкой экспериментальных наблюдений над макросистемой так и на основе модельных представлений о свойствах составляющих систему элементов. Так, в статистической физике на основе модели поведения молекул идеального газа получают уравнение, связывающее температуру, давление и объем макроскопической системы (уравнение Менделеева-Клапейрона). Использование уравнений состояния в неравновесных процессах предполагает справедливость гипотезы локального равновесия.

При контакте двух подсистем с отличными друг от друга значениями интенсивных переменных  $u_1$  и  $u_2$  возникают потоки вещества, энергии, ресурсов, величина которых зависит от различия  $u_1$  и  $u_2$ . Эти потоки меняют значения экстенсивных переменных каждой из подсистем. При равенстве векторов интенсивных переменных контактирующих подсистем эти потоки равны нулю.

Как видно из приведенных примеров важную роль в макроуправляемых системах играют посредники. Интенсивные переменные посредника не определяются количеством имеющегося у него ресурса, они являются управляющими переменными и выбираются исходя из условий оптимальности поставленной перед посредником задачи. При этом посредник может поочередно контактировать с подсистемами, изменяя свое состояние во времени (цикл тепловой машины, челночная торговля и пр.) или контактировать одновременно с несколькими подсистемами, индивидуально выбирая значения интенсивных переменных для каждой из них (турбина, фирма, одновременно покупающая и продающая товары). В первом случае посредник циклически изменяет (регенерирует) свое состояние в каждом цикле. Такие системы называют *регенеративными*.

Посредник в открытых системах осуществляет обмен ресурсами с выбранными им подсистемами, извлекая за счет этих обменов поток  $n$  целевого ресурса. Так, тепловая машина извлекает работу, финансовый посредник (банк) или производственная фирма прибыль.

### Задачи исследования

Приведенные примеры на интуитивном уровне показывают роль посредников в макросистемах и позволяют наметить основную проблематику книги, перечислив типовые задачи:

1. Какую максимальную работу можно извлечь в замкнутой термодинамической системе заданной структуры за фиксированное время  $\tau$ ? Величину этой работы  $A_\tau^{\max}$  называют *работоспособностью* системы. В том частном случае, когда система содержит резервуар, а  $\tau \rightarrow \infty$  работоспособность совпадает с *эксергией*, широко используемой в технической термодинамике. Работоспособность однородной системы равна нулю.

2. Как проводить процессы закупок — продаж, чтобы потери капитала, связанные с необратимостью, оказались минимальны, какова величина этих «неизбежных» потерь, как они зависят от функций спроса и предложения ЭА? Какой максимальный капитал может извлечь посредник в замкнутой микроэкономической системе произвольной структуры за время  $\tau$ ? Величину этого капитала  $E_\tau^{\max}$  называют *прибыльностью* системы.

Очевидно, что в однородной системе, по окончании процесса выравнивания значений интенсивных переменных  $A_\tau^{\max} = E_\tau^{\max} = 0$ . Самопроизвольный необратимый процесс уменьшает прибыльность.

3. Задача разделения, очень актуальная для термодинамических систем: какую минимальную работу надо затратить, чтобы однородную систему разделить на несколько систем с заданными значениями интенсивных переменных за фиксированное время  $\tau$ ? Ясно, что мини-

мальная работа разделения  $A_\tau^{\min}$  не равна работоспособности разделенной системы.

4. Распределение ресурсов между подсистемами в открытой макросистеме с посредником и без посредника? Какую максимальную мощность может извлечь посредник в открытой термодинамической и максимальную прибыль в открытой микроэкономической системе?

Перечисленные задачи не исчерпывают всех постановок рассмотренных в книге, но они являются типичными для оптимизационных задач, возникающих в макроуправляемых системах.

Необратимость процессов порождает специфический подход к решению перечисленных и подобных им задач. Как и для всякой системы уравнения энергетического, материального, финансового балансов накладывают на потоки, поступающие и выходящие из системы, связи, выделяя в пространстве, по осям которого отложены эти потоки, область реализуемости. Однако для макросистем к этим балансовым соотношениям нужно добавить баланс по фактору, характеризующему необратимость процессов. В термодинамике таким фактором является энтропия. В микроэкономике — ее аналог, называемый благосостоянием. В уравнение баланса по фактору необратимости входит неотрицательное слагаемое  $\sigma$ . Величина  $\sigma$  характеризует прирост фактора необратимости за счет процессов, протекающих в системе. В термодинамике это слагаемое называют *диссипацией* или *производством энтропии*. Оно больше или равно нулю, что вместе с уравнениями материального и энергетического балансов выделяет область, внутри которой  $\sigma > 0$  (процессы реализуемы), и границу этой *области реализуемости*, для которой  $\sigma = 0$ .

Обратимым процессам соответствует либо сколь угодно малая интенсивность потоков (сколь угодно большая продолжительность), либо при заданной величине потока сколь угодно большие значения коэффициентов, связывающих величину потоков обмена с различием интенсивных переменных подсистем (коэффициентов тепло- и массопереноса, коэффициентов, определяющих скорость химических реакций, наклон функций спроса и предложения и пр.). Эти коэффициенты называют *кинетическими*.

Ограничения, наложенные на время протекания процесса  $\tau$ , на его интенсивность и кинетические коэффициенты позволяют найти оценку снизу  $\sigma_{\min}$  для величины  $\sigma$ . В этом случае область реализуемых процессов сжимается, на ее границе  $\sigma = \sigma_{\min}$ , а внутри  $\sigma \geq \sigma_{\min}$ . Решения поставленных выше задач лежат как правило на границе области реализуемости.

Общая схема решения экстремальных задач в макроуправляемых системах такова:

1. Записывают уравнения балансов по энергии, веществу и фактору необратимости.
2. Для ограничений, наложенных на решение задачи, определяют зависимость  $\sigma_{\min}$  от интенсивностей потоков в системе, кинетических коэффициентов и пр.
3. Строят область реализуемости или находят предельное значение того или иного показателя внутри или на границе области реализуемости.

### **Немного истории**

Термодинамика при конечном времени стала активно развиваться с начала 80-х годов усилиями математиков и инженеров из разных стран мира. Одной из первых задач была задача, связанная с упомянутой в примере 2 системой: «Как нужно изменять температуру рабочего тела и какое время цикла  $\tau$  надо выбрать, чтобы получить максимальную мощность тепловой машины?» При этом считалось, что температуры горячего, и холодного источников фиксированы. Она стала актуальной с развитием ядерной энергетики и была решена Новиковым, позднее Курзоном и Альбурном. Эта задача, позднее задача о максимальном КПД машины при заданной ее мощности, привели к выявлению класса процессов минимальной диссипации [59], [84], [154], на которых и достигается их решение. Процессы минимальной диссипации в термодинамике при конечном времени играют ту же роль, что и обратимые процессы в равновесной термодинамике. В настоящее время в области термодинамики при конечном времени работают многие исследователи в разных странах мира. Значительную роль в их развитии сыграла школа профессора Берри из Чикагского университета США (Саламон, Хоффман, Андрессен, Синюттич и др.). В России очень много сделал в этом направлении профессор Розоноэр, который был инициатором использования методов оптимального управления применительно к термодинамическим системам, наиболее последовательно рассмотрел аналогии между обратимыми процессами в термодинамике и экономике, ввел применительно к макроуправляемым системам термин «макродинамика». Ряд вошедших в книгу результатов был получен в ходе многолетней совместной работы с Л.И.Розоноэром.

Для решения задач термодинамики при конечном времени методы оптимизации играют центральную роль. Здесь используют методы нелинейного программирования, оптимального управления и усредненной оптимизации [21], [63], адекватные особенностям математических моделей термодинамических систем. Поэтому в ряде работ это направление называют «оптимизационной» или «управляемой термодинамикой».

Близость моделей и проблематики термодинамических и экономи-



ческих систем делает возможным распространение развитых для термодинамики методов на микроэкономику с введением для нее количественной меры необратимости. Исследований по «оптимизационной» микроэкономике очень немного, хотя аналогии между термодинамикой и микроэкономикой для обратимых систем рассматривались неоднократно в том числе Фон-Нейманом, Самуэльсоном и др. Данная книга продолжает эту аналогию для необратимых и управляемых процессов.

Весьма полезными для автора были дискуссии с К. Мартинаш (Венгрия) по «термодинамике экономических систем». Исследования по термодинамике при конечном времени проводились автором совместно со своими коллегами Р.С. Берри и П. Саламоном (США), Б. Андресеном (Дания), К.-Х. Хоффманом (Германия), С. Синютичем (Польша) и сотрудниками В.А. Мироновой, С.А. Амелькиным, В.А. Казаковым, А.В. Руденко и др., они были поддержаны РФФИ, фондами Сороса и INTAS. Всем упомянутым лицам и организациям автор выражает глубокую благодарность.

Неоценимую помощь в оформлении рукописи и подготовке оригинал-макета оказала автору М.А. Журавлева, без которой издание этой книги было бы невозможно.

## Глава 1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ БАЛАНСЫ

В главе приведены математические модели термодинамических систем, записаны уравнения термодинамических балансов и изложена общая схема исследования систем для процессов заданной интенсивности. Даны выражения для производства энтропии в типовых процессах и последовательность получения обратимых оценок их эффективности.

### 1.1. Общая схема исследования

В «Размышлениях о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», вышедших в 1824 г., Сади Карно писал: «Часто поднимали вопрос: ограничена или бесконечна движущая сила тепла, существует ли определенная граница для возможностей улучшений, граница, которую природа вещей не может перешагнуть каким бы то ни было способом?». Карно показал, что такая граница существует, и получил предельное значение коэффициента превращения тепла, отобранного у высокотемпературного источника, в работу. Результат, полученный Карно, стал основополагающим для развития термодинамики и теплотехники. Как писал Ф. Энгельс в «Диалектике природы», Карно «устранил безразличные для главного процесса побочные обстоятельства и сконструировал идеальную паровую машину, которую, правда, так же нельзя осуществить, как нельзя, например, осуществить геометрическую линию или плоскость, но которая оказывает по-своему такие же услуги, как и эти математические абстракции: она представляет рассматриваемый процесс в чистом, независимом, неискаженном виде».

Говоря современным языком, Карно построил, хотя и очень упрощенную, математическую модель тепловой машины, поставил задачу о максимуме ее термического КПД, т.е. о максимуме отношения полученной работы к затраченному теплу и нашел решение этой экстремальной задачи. Конечно, строгой математической постановки в работе Карно не было. Нельзя забывать, что ему был неизвестен закон сохранения энергии, а при решении он опирался на представление о тепле как об особом рода жидкости — теплороде. Тем замечательнее,

что Карно удалось найти правильное решение. При этом оказалось, что в идеальной тепловой машине процессы передачи тепла от одного тела к другому должны были протекать со сколь угодно малой интенсивностью, при стремящейся к нулю разности температур. Эти процессы можно провести и в обратном направлении, используя энергию, полученную в прямом процессе, без затраты энергии извне. Продолжительность таких *обратимых* процессов для получения конечной работы должна быть сколь угодно велика, а значит, мощность машины Карно должна быть равной нулю. Отметим, что если бы Карно ставил задачу о максимуме КПД строго, предполагая в качестве искомой переменной и продолжительность цикла, то ему было бы нелегко ее решить, поскольку максимума в этой задаче нет, ее решение достигается лишь в пределе при продолжительности цикла, стремящейся к бесконечности. Иначе говоря, полученный им результат есть точная верхняя грань (*supremum*) для коэффициента полезного действия.

Отметим, что обратимая тепловая машина Карно может иметь и конечную мощность, но лишь в том случае, когда коэффициенты теплообмена между источниками тепла и рабочим телом тепловой машины (размеры машины) сколь угодно велики. В этом случае КПД Карно представляет собой отношение «обратимой мощности» к потоку тепла, отбираемого от горячего источника.

Пусть термодинамический процесс в системе заключается в преобразовании некоторого вида энергии, например, тепловой, в работу. Если процесс обратим, то полученная работа достаточна для возврата системы в исходное состояние, если необратим, то недостаточна, и требуется подвод дополнительной энергии извне. Та дополнительная внешняя энергия, которая требуется при этом, может служить мерой необратимости, а тот факт, что работа, полученная в обратимом процессе, больше, чем в процессе необратимом, составляет содержание теоремы о максимальной работе.

Широкое распространение для анализа технологических систем термодинамическими методами получил эксергетический подход. При таком подходе термодинамическое совершенство систем оценивается по величине потерь работоспособной энергии (эксергии), т.е. потенциальной работы, которую могла бы совершить система за счет обратимого выравнивания своих параметров с параметрами окружающей среды. Эксергетический анализ позволяет сказать, в каких элементах системы, на каких стадиях технологического процесса происходят наибольшие потери эксергии, что указывает на необходимость совершенствования этих стадий, он позволяет сравнить два различных процесса, протекающих в одинаковом окружении.

Основной недостаток эксергетического подхода состоит в том, что

он учитывает необратимость процесса, связанную с приростом энтропии системы, через потенциальный обратимый процесс выравнивания ее параметров с параметрами среды. При этом механизм «генерации» энтропии, характеризующий рассеяние (диссипацию) энергии, его связь с кинетикой процесса, коэффициентами тепло- и массообмена, не учитывается. Никак не оцениваются неизбежные потери эксергии, зависящие от заданной интенсивности процесса (мощности машин, производительности аппаратов), коэффициентов тепло- и массопереноса и пр. Естественно, что при эксергетическом подходе не ставится задача об обеспечении минимальной необратимости процесса при тех или иных условиях, определяющих его производительность.

Введение в задачу о предельных возможностях тепловой машины добавочного ограничения на ее мощность снизит величину достижимого в такой машине термического КПД. Возникает целый ряд вопросов.

1. На сколько снизится предельное значение термического КПД?

2. Как на это снижение влияют законы, связывающие потоки тепла с температурами обменивающихся теплом тел?

3. Какова при заданных величинах поверхностей теплообмена, а значит, при заданных коэффициентах теплопередачи предельная мощность тепловой машины?

Актуальность подобных задач для тепловых машин, тепловых насосов, холодильных машин, а также для целого ряда термодинамических процессов массообмена, разделения и др. вызвала к жизни ряд работ, в которых в той или иной форме учитывается фактор продолжительности термодинамических процессов или вводится ограничение на их интенсивность. Это направление получило название *термодинамика при конечном времени*.

Первой в этом направлении была работа И. И. Новикова о цикле тепловой машины предельной мощности [125]. Подобная задача возникла с появлением ядерной энергетики, в которой капитальные затраты гораздо больше, а стоимость топлива меньше, чем на угольных или газовых электростанциях. В связи с этим для атомных электростанций важнее получить максимальную мощность, а экономичность играет меньшую роль. Независимо от Новикова и существенно позднее ту же задачу решили Ф. Л. Курзон и Б. Альборн [94]. Именно их публикация благодаря последующим работам Р. С. Берри и его сотрудников [70, 87, 137] стала толчком к активному развитию термодинамики при конечном времени.

В термодинамике при конечном времени предполагают, что систему можно разбить на такие подсистемы, в каждой из которых в любой момент времени отклонения интенсивных переменных от их средних по объему значений пренебрежимо малы, а значит, отсутствуют свя-

занные с этими отклонениями потоки внутри подсистем. Изменение же интенсивных переменных происходит только на границах подсистем, так что система в целом находится в неравновесном состоянии. Такое допущение позволяет использовать при описании подсистем уравнения состояния, справедливые лишь в условиях равновесия, для описания переходных процессов в системе оказывается возможным применить обыкновенные дифференциальные уравнения, а для решения экстремальных задач — методы оптимального управления объектами с сосредоточенными параметрами.

Общая проблематика термодинамики при конечном времени заключается в следующем.

1. Как обеспечить заданную среднюю интенсивность потока при минимальной средней диссипации?

2. Каков предельный коэффициент превращения одного вида энергии в другой при ограниченной продолжительности процессов или при их фиксированной средней интенсивности?

3. Если параметры одной подсистемы меняются, то как нужно изменять параметры другой, чтобы обеспечить максимальную среднюю интенсивность потоков?

Охарактеризуем предварительно ту общую схему, по которой могут быть решены эти и другие подобные задачи.

Первым шагом в исследовании предельных возможностей термодинамических систем является составление балансовых соотношений для вещества, энергии и энтропии. В последнее из этих соотношений войдет слагаемое, характеризующее необратимость процессов, — производство энтропии  $\sigma$ . Это слагаемое равно нулю, если все процессы в системе протекают обратимо, и больше нуля для необратимых процессов. Неотрицательность диссипации определяет некоторое множество реализуемости в пространстве параметров входных и выходных потоков. Если на систему наложены дополнительные условия конечного времени процессов или их заданной средней интенсивности, то можно найти величину диссипации, минимально возможную при этих ограничениях. В любой реальной системе  $\sigma \geq \sigma_{\min}$ , что сужает множество реализуемости. При этом важно, что это множество учитывает кинетику процессов, а также через коэффициенты тепло и массообмена учитывает размеры установки.

Вторым шагом является получение из уравнений балансов связи между тем или иным показателем эффективности системы и диссипацией  $\sigma$ . Как правило, естественные показатели эффективности монотонно ухудшаются с ростом  $\sigma$  и достигают своих предельных значений в обратимом процессе, что приводит к оценкам, аналогичным КПД Карно для процессов самой разной природы.

Третьим, наиболее трудным шагом является решение задачи о такой организации процессов, для которой диссипация минимальна при заданных ограничениях.

Так как в сложной системе диссипация аддитивно зависит от диссипации в каждом из элементарных процессов, то важным этапом исследования является выявление условий минимальной диссипации. Оптимальная организация процессов в сложной системе сводится к согласованию друг с другом отдельных процессов минимальной диссипации, например, к выбору, таких поверхностей на каждой из связанных друг с другом стадий, чтобы суммарное производство энтропии было минимально при заданных суммарных затратах на материалы поверхностей. На этом этапе задача оказывается технико-экономической. Для того чтобы реализовать намеченную схему, нужно познакомиться с основными величинами, характеризующими термодинамические системы, методами составления термодинамических балансов и уравнениями, характеризующими динамику таких систем.

## 1.2. Математическое описание термодинамических систем

**Равновесные термодинамические системы. Основные переменные и уравнения состояния.** Сложная термодинамическая система может быть разбита на равновесные подсистемы, каждую из которых выделяют контрольной поверхностью. Для описания термодинамических систем используют физические величины, характеризующие макроскопическое состояние отдельных подсистем и системы в целом. Подсистемы могут взаимодействовать, т.е. обмениваться теплом или веществом через разделяющие их поверхности. Взаимодействия могут быть различного рода — теплообмен (обмен тепловой энергией), массообмен (обмен веществом), механическое взаимодействие (совершение работы), деформационное (изменение объема подсистемы) и т.д. Каждому виду процесса соответствует пара величин: координата и потенциал.

*Координата и потенциал взаимодействия.* Координатой называют величину, изменение которой свидетельствует о наличии взаимодействия данного рода. Если эта величина не изменяется, то взаимодействия данного рода нет. Например, координатой деформационного взаимодействия является объем; если объем не изменяется, то деформационное взаимодействие отсутствует. Координатой массообменного взаимодействия является масса. Если масса ни одного из компонентов не изменяется, то массообмен отсутствует.

Потенциалом взаимодействия называется величина, отличие в зна-

чениях которой для двух контактирующих подсистем является причиной взаимодействия между ними. Для деформационного взаимодействия потенциалом является давление, для теплообмена — температура. Отличие температур тел вызывает обмен теплом. Отличие значений потенциалов вызывает взаимодействие, а изменение координаты — его следствие. Координаты и потенциалы будем обозначать  $z_i$  и  $Y_i$ ;  $i$  — индекс, отражающий вид взаимодействия.

*Равновесное и неравновесное состояния.* Говорят, что подсистема находится в равновесном состоянии, если величины потенциалов каждого рода по ее объему одинаковы (давление, температура, концентрации всех компонентов одинаковы во всех точках объема). Равновесное состояние полностью характеризуется заданием значений потенциалов всех взаимодействий в одной точке объема. При этом нужно задавать потенциалы не всех мыслимых взаимодействий, а только тех, которые в рассматриваемых условиях существенно влияют на процесс. Например, все тела находятся в поле действия гравитации. Однако, если ее действие на интересующий нас процесс мало, то наличие гравитационного взаимодействия можно не учитывать.

Если значения потенциалов, например, температуры, по объему подсистемы отличаются, то в ней идет некоторый процесс. В этом случае говорят, что состояние системы неравновесно.

Если в подсистему, находящуюся в состоянии равновесия, внести некоторое количество вещества или энергии, в ней начнется переходной процесс, в ходе которого значения потенциалов (температуры, давления) будут выравниваться. Подсистема будет переходить в новое состояние равновесия. Такой процесс называется релаксацией. Он протекает с определенной скоростью и требует времени, называемого временем релаксации.

*Равновесный и неравновесный, обратимый и необратимый процессы.* Как уже говорилось, подсистема, находящаяся в состоянии равновесия, может быть выведена из него в результате внешних воздействий — изменения значений потенциалов на ее поверхности. Если внешние условия изменяются медленно, скорость их изменения существенно меньше скорости релаксации, то в каждый момент времени состояние подсистемы будет пренебрежимо мало отличаться от равновесного. Такой процесс называется квазиравновесным или просто равновесным [18]. Скорость протекания такого процесса сколь угодно мала, время протекания бесконечно велико, поэтому понятие скорости для таких процессов не используется. В технике такие процессы не проводятся. Однако подобная идеализация позволяет существенно упростить их описание.

Равновесные процессы часто, но не всегда, обратимы. Ни один из

реальных процессов, протекающих в природе, не является обратимым. Но существуют процессы, которые можно вести как угодно близко к обратимым, задавая бесконечно малую разность между потенциалами на границе подсистем, т.е. проводя процесс квазиравновесно. Это процессы теплообмена, массообмена, совершения механической работы, протекания обратимых химических реакций. Вместе с тем существуют процессы, которые принципиально нельзя вести обратимо, например, процессы смешения жидкостей или газов с разными начальными концентрациями, или процесс непосредственного обмена теплом тел с разными начальными температурами, так как для их разделения нужно будет приложить дополнительную работу, которая не получена в прямом процессе.

Реальные процессы протекают при конечной разности потенциалов с конечной, а не с бесконечно малой скоростью. При этом состояние подсистем существенно отклоняется от равновесного. Такие процессы называются неравновесными. Они изучаются в неравновесной термодинамике. Все неравновесные процессы являются необратимыми.

**Потенциалы и координаты для процессов теплообмена, массообмена, химического взаимодействия.** Как уже говорилось, координатой  $z_i$  является величина, изменение которой свидетельствует о наличии взаимодействий данного рода. При отсутствии взаимодействия данного рода координата не изменяется. Потенциалом  $Y_i$  является величина, отличие в значении которой для взаимодействующих подсистем является причиной возникновения взаимодействия данного рода. При этом существует количественная мера  $dQ$  взаимодействия для взаимодействий всех видов. Она определяется соотношением

$$dQ_i = Y_i dz_i$$

и в термодинамических системах имеет размерность энергии. Конкретизируем это выражение для основных видов взаимодействий.

*Деформационное взаимодействие.* Рассмотрим деформационное взаимодействие, проявляющееся в изменении объема. Координатой этого взаимодействия является объем  $V$ . Это взаимодействие возникает, если отличаются давления на поверхности подсистемы, поэтому потенциалом этого взаимодействия является давление  $P$ . Количество деформационного взаимодействия определяется величиной  $PdV$ , которая оценивает совершенную работу.

Традиционно принято считать работу  $PdV$  положительной, если она совершается подсистемой. В то же время в термодинамике для всех видов взаимодействий принято считать количественную меру взаимодействия  $dQ$  положительной, если в результате взаимодействия энергия подсистемы увеличивается. Для того чтобы не возникало против-



речия, потенциалом деформационного взаимодействия нужно считать не давление, а величину, отличающуюся от давления знаком, — обобщенную силу  $Y = -P$ . Тогда  $dQ = -PdV$ .

*Теплообмен.* Процесс теплообмена возникает, если отличаются температуры взаимодействующих тел, поэтому потенциалом этого взаимодействия является температура  $T$ . Предполагая, что обмен теплом представляет собой одну из форм обмена энергией и что для него должна существовать своя координата, ее ввели, обозначили  $S$  и назвали энтропией (entropos — преобразование, энтропия — параметр преобразования; введена в 1850 г. Рудольфом Клаузиусом). Тогда количество теплового взаимодействия

$$dQ = TdS, \quad (1.1)$$

откуда изменение энтропии определяется величиной

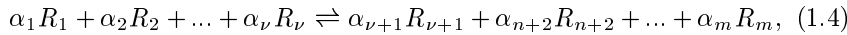
$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (1.2)$$

Это — известное соотношение Р. Клаузиуса.

*Массообмен.* При массообмене изменяется масса  $m$ , поэтому она является координатой массообменного взаимодействия и определяется как правило числом молей  $N$ . Потенциал же не вполне ясен. Вводить эту величину произвольно нельзя, потенциал и координата взаимодействия связаны между собой. Поэтому, как и в предыдущем случае, вначале можно просто утверждать, что потенциал этого взаимодействия существует. Он вводится, обозначается  $\mu$  и называется химическим потенциалом (введен в 1874 г. Д. Гиббсом). Затем к нему предъявляются те же требования, что и к потенциалам остальных взаимодействий, что позволяет доопределить эту величину. Количество массообменного взаимодействия —

$$dQ = \mu dm. \quad (1.3)$$

*Химическое взаимодействие.* Пусть происходит химическая реакция



где  $R_i$  — реагенты, а  $\alpha_i$  — стехиометрические коэффициенты.

В дальнейшем будем считать, что  $\alpha_i$  отрицательно для исходных веществ,  $\alpha_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , и положительно для продуктов реакции,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = \nu + 1, \dots, m$ . В результате этого процесса изменяется масса или число молей реагентов, причем для всех реагентов

$$dm_i = \alpha_i d\xi, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.5)$$

Здесь  $\xi$  — степень полноты реакции (степень превращения). Она и является координатой химического взаимодействия.

Реакция протекает слева направо, если некоторая величина  $A$ , называемая химическим сродством реакции, положительна,  $A > 0$ . Реакция протекает справа налево, если  $A < 0$ , и скорость реакции равна нулю, если  $A = 0$ . Величина химического сродства реакции —

$$A = - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i. \quad (1.6)$$

Она введена де Донде [42]. Поэтому потенциалом химического взаимодействия можно считать взвешенную с учетом стехиометрических коэффициентов сумму химических потенциалов реагентов (исходных веществ и продуктов реакции)  $A$ . Величина

$$dQ = Ad\xi$$

определяет количество химического взаимодействия.

В каждый момент времени состояние равновесной термодинамической системы может быть охарактеризовано набором различных макроскопических величин, таких, как внутренняя энергия  $E$ , объем  $V$ , энтропия  $S$ , состав  $N$  ( $N_i$  — количество молей  $i$ -го вещества, содержащееся в системе,  $i = 1, \dots, m$ ), температура  $T$ , давление  $p$ , химические потенциалы  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и т.д. Ниже мы будем рассматривать системы электрически нейтральные, поэтому такая их характеристика, как электрический заряд, не вводится.

Остановимся несколько подробнее на одной из перечисленных величин — энтропии. Как и внутреннюю энергию, энтропию непосредственно нельзя измерить. Изменение внутренней энергии определяют через изменение температуры и давления. Аналогично и изменение энтропии системы может быть вычислено по непосредственно измеряемым переменным. Первоначально энтропия была введена Клаузиусом как мера полноты преобразования теплоты в работу. Позднее был выявлен статистический смысл энтропии применительно к термодинамическим, информационным и другим системам. В этих системах, состоящих из множества подсистем, одному и тому же макросостоянию системы (давлению, температуре, объему и пр.) могут соответствовать различные микросостояния, т.е. различные конфигурации подсистем. Число таких микросостояний  $\Omega$  и характеризует энтропия (она пропорциональна логарифму  $\Omega$ ). Таким образом, энтропия при данном макросостоянии характеризует неопределенность состояния системы на микроуровне. Если две независимые системы, имеющие число возможных состояний  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , объединяются в одну, то для объединенной системы  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$  (для каждого микросостояния первой возможно  $\Omega_2$  микросостояний второй), а энтропия  $S$  равна сумме  $S_1$  и  $S_2$  — энтропий каждой из подсистем. Когда к системе при температуре  $T$

подводится порция энергии  $dQ$ , то энтропия системы возрастает (см. (1.2.)).

Все переменные, характеризующие систему, в термодинамике принято разбивать на две группы — экстенсивные и интенсивные. Интенсивные величины (температура, давление, химические потенциалы) не изменяются при разделении системы непроницаемой перегородкой. Экстенсивные же величины (внутренняя энергия, энтропия, число молей) при таком разделении для каждой из получившихся подсистем уменьшаются во столько раз, во сколько объем подсистемы окажется меньше объема первоначальной системы.

Перечисленные величины не являются независимыми. Они связаны друг с другом уравнениями состояния. Обычно в качестве независимых переменных выбирают  $E$ ,  $V$ ,  $N$  или  $S$ ,  $V$ ,  $N$ , а остальные переменные выражают через них с использованием уравнений состояния. Так, если в качестве независимых переменных приняты  $E$ ,  $V$  и  $N$ , то энтропия выражается как функция этих переменных

$$S = S(E, V, N). \quad (1.7)$$

Интенсивные же переменные могут быть выражены через экстенсивные переменные и функцию (1.7) с помощью соотношений

$$T = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)^{-1}, \quad p = T \frac{\partial S}{\partial V}, \quad \mu_i = -T \frac{\partial S}{\partial N_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.8)$$

*Термодинамические потенциалы.* Неподвижное тело, находящееся в поле тяготения, обладает потенциальной энергией. Величина потенциальной энергии не зависит от того, как оказалось тело в том или ином состоянии, она зависит только от состояния. При переходе из одного состояния в другое тело совершает работу (или внешняя среда совершает работу над телом), максимальная величина которой равна разности потенциальных энергий в исходном и конечном состояниях. Если переход осуществлялся с рассеянием энергии, например, путем трения, то произведенная работа может только уменьшиться, а подводимая энергия только увеличиться по сравнению с потенциально возможной.

Функции, аналогичные потенциальной энергии, вводят и для термодинамических систем. Однако здесь максимальная полезная работа, которую может совершить система при переходе из одного состояния в другое, зависит от того, в каких условиях проделан такой переход. В силу этого термодинамических потенциалов несколько. Общим для всех термодинамических потенциалов является то, что они зависят только от состояния системы. Разность потенциалов характеризует предельную работу, которую может совершить система при переходе из одного состояния в другое в тех или иных условиях. Запишем

условие, связывающее между собой возможные изменения параметров замкнутой термодинамической системы при подводе к ней некоторой порции энергии  $dQ$ :

$$dQ = dE + pdV - \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i. \quad (1.9)$$

Здесь  $dE$  — изменение внутренней энергии системы;  $pdV$  — работа, совершаемая системой и связанная с изменением ее объема;  $\mu_i dN_i$  — изменение энергии системы, вызванное изменением количества  $i$ -го вещества (в замкнутой системе оно может возникнуть при наличии химических реакций).

С учетом связи (1.1) между  $dQ$  и  $dS$  равенство (1.9) примет форму

$$TdS = dE + pdV - \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i. \quad (1.10)$$

Рассмотрим случай, когда химические реакции отсутствуют. В этом случае

$$TdS = dE + pdV. \quad (1.11)$$

При постоянной температуре приращение работы  $pdV$  равно  $d(TS - E)$ , а значит, предельная работа расширения, совершенная телом при переходе в изотермических условиях из состояния 1 в состояние 2, равна

$$A_T = F_1 - F_2 \quad (dA_T = -dF), \quad (1.12)$$

где

$$F = TS - E \quad (1.13)$$

— энергия Гельмгольца. Так как внутренняя энергия  $E$  и энтропия  $S$  зависят только от состояния системы и являются экстенсивными переменными, то и энергия Гельмгольца обладает теми же свойствами.

В изоэнтропическом обратимом процессе, когда система изолирована от внешней среды нетеплопроводными стенками,  $dS = 0$ , и из уравнения (1.11) следует, что потенциально возможная работа расширения

$$A_S = E_1 - E_2 \quad (dA_S = -dE). \quad (1.14)$$

Таким образом, внутренняя энергия также является термодинамическим потенциалом и характеризует предельное значение работы термодинамической системы.

Кроме работы расширения, связанной с изменением объема тела и равной

$$A = \int_1^2 pdV, \quad dA = pdV, \quad (1.15)$$

часто используют понятие полезной внешней работы. Эта работа  $L$  образуется как разность между работой расширения и так называемой работой проталкивания, равной  $pV$ . Последняя представляет собой работу, которую нужно затратить, чтобы ввести тело объема  $V$  в среду с давлением  $p$ :

$$dL = dA - d(pV).$$

Так как  $dA = pdV$ , а  $d(pV) = Vdp + pdV$ , то

$$dL = -Vdp.$$

Заменив в равенстве (1.11)  $dA$  на  $dL$ , получим

$$TdS = dE + d(pV) + dL. \quad (1.16)$$

В адиабатическом процессе, когда левая часть в этом равенстве равна нулю,

$$dL_S = -d(E + pV).$$

Функцию

$$I = E + pV \quad (1.17)$$

называют энтальпией. Она, как  $E$  и  $F$ , является термодинамическим потенциалом и определяет предельное значение полезной внешней работы, произведенной телом при переходе из одного состояния в другое в обратимом адиабатическом процессе

$$L_S = I_1 - I_2. \quad (1.18)$$

Наконец, в изотермическом процессе из равенств (1.16) и (1.17) следует, что

$$dL_T = -d(I - TS),$$

а предельное значение полезной внешней работы, произведенной телом, может быть выражено через термодинамический потенциал

$$\Phi = I - TS, \quad (1.19)$$

называемый энергией Гиббса. Очевидно, что, как и остальные термодинамические потенциалы  $E$ ,  $F$ ,  $I$ , энергия Гиббса является функцией состояния и аддитивна. Так что в системе, состоящей из нескольких тел,

$$E = \sum_{\nu} E_{\nu}, \quad F = \sum_{\nu} F_{\nu}, \quad I = \sum_{\nu} I_{\nu}, \quad \Phi = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}. \quad (1.20)$$

Вернемся теперь к случаю, когда состав системы может изменяться и условие закона сохранения энергии имеет форму (1.10). Перепишем это уравнение с заменой внутренней энергии  $E$  на энергию Гиббса  $\Phi$ . Получим

$$\sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = d\Phi + SdT - Vdp.$$

В условиях постоянства температуры и давления два слагаемых в правой части этого уравнения равны нулю, а химический потенциал  $i$ -го компонента

$$\mu_i = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{P, T, N_{j \neq i}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

Так как энергия Гиббса аддитивна, то  $d\Phi = \sum_{i=1}^n d\Phi_i$ , а химический потенциал  $\mu_i$  представляет собой удельную энергию Гиббса  $i$ -го вещества.

Использование термодинамических потенциалов позволяет определить предельную работу, которую можно получить при различных типах контакта системы с окружающей средой. Пусть, например, система состоит из  $m$  подсистем и имеет тепловой контакт с термостатом, так что температура каждой  $j$ -й подсистемы  $T_j$  постоянна и равна температуре термостата  $T_0$ . Объем каждой из подсистем может меняться, но их суммарный объем  $V = \sum_{j=1}^m V_j$  постоянен. Предельная работа, совершаемая в такой системе, в силу равенства (1.12) и свойства аддитивности внутренней энергии (1.20) равна

$$A_{T,V} = \sum_{j=1}^m \Delta F_j = \sum_{j=1}^m \Delta E_j - T_0 \sum_{j=1}^m \Delta S_j. \quad (1.22)$$

Здесь  $\Delta F_j = F_{j1} - F_{j2}$ , аналогичный вид имеют  $\Delta E_j$  и  $\Delta S_j$ . Таким же образом при контакте системы, состоящей из равновесных подсистем, с термостатом и баростатом, т.е. при  $T_j = T_0$ ,  $P_j = P_0$  для всех значений  $j$ , предельная полезная работа системы

$$L_{T,P} = \sum_{j=1}^m \Delta \Phi_j = \sum_{j=1}^m \Delta I_j - T_0 \sum_{j=1}^m \Delta S_j. \quad (1.23)$$

Так как термодинамические потенциалы, а значит, и их приращения  $\Delta F_j$ ,  $\Delta \Phi_j$  и т.д., являются функциями состояния, то достаточно, чтобы требования  $T_j = T_0$  и  $P_j = P_0$  выполнялись лишь для начального и конечного состояний системы, а не в течение всего процесса.

Связи между термодинамическими потенциалами и параметрами системы в дифференциальной форме позволяют выразить одни вели-

чины через другие. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV, \quad dI = TdS + VdP, \\ d\Phi &= VdP - SdT, \quad dF = -(SdT + pdV). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Если в системе возможны химические превращения, то в правые части каждого из этих равенств нужно добавить слагаемое  $\sum_{i=1}^n \mu_i dN_i$ .

Из равенств (1.24) следует, что

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,N} = \left( \frac{\partial I}{\partial S} \right)_{P,N}, \quad p = - \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}, \\ V &= \left( \frac{\partial I}{\partial P} \right)_{S,N} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial P} \right)_{T,N}, \quad S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{P,N}, \\ \mu_i &= \left( \frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_{S,V} = \left( \frac{\partial I}{\partial N_i} \right)_{S,P} = \left( \frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{V,T} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{P,T}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если задана одна из зависимостей, то можно найти значения остальных величин, характеризующих систему в данном состоянии. Например, пусть известна функция  $F(T, V, N)$ . По соотношениям (1.25) можно найти  $S$  и  $P$  при заданных  $T, V, N$ , после этого вычислить  $E = F - TS$  и т.д.

*Условия равновесия.* Замечательным свойством энтропии является то, что в любом термодинамическом процессе, протекающем в изолированной системе, энтропия системы не уменьшается. Если процесс протекает обратимо, т.е. суммарная энтропия системы  $S_\Sigma$  не возрастает, то система может быть возвращена в исходное состояние только за счет энергии, выделившейся в прямом процессе, так что все параметры системы и среды восстанавливаются. В необратимом же процессе величина  $S_\Sigma$  растет. Прирост энтропии может служить характеристикой необратимости процесса. *Когда изолированная система состоит из нескольких подсистем, то в состоянии равновесия энтропия системы достигает своего максимально возможного значения при тех или иных ограничениях, наложенных на систему.*

Рассмотрим, например, изолированную систему, состоящую из двух подсистем, объемы которых  $V_1, V_2$  и составы  $N_1, N_2$  фиксированы, а обмен энергией между ними может осуществляться только через теплопроводящую перегородку. Внутренняя энергия системы  $E$  равна сумме энергий подсистем, как и ее энтропия

$$E = E_1 + E_2; \quad S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2).$$

Так как системы находятся в равновесии, то их энтропия для заданного значения  $E$  максимальна, так что  $E_1$  и  $E_2$  должны быть таковы, чтобы доставлять решение следующей экстремальной задаче:

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2) \rightarrow \max \quad / \quad E_1 + E_2 = E.$$

Необходимым условием оптимальности в этой задаче является стационарность по  $E_1$  и  $E_2$  функции Лагранжа

$$R = S_1(E_1) + S_2(E_2) + \lambda(E_1 + E_2 - E),$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}.$$

С учетом формулы (1.8) это равенство соответствует тому, что в тепловом равновесии температуры подсистем должны быть одинаковы.

Говорят, что системы находятся в механическом равновесии, если поршень, их разделяющий, неподвижен. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в этом случае объемы подсистем должны распределяться так, чтобы производные энтропии каждой из подсистем по величине их объемов были одинаковы, а это означает равенство давлений (см. (1.8)).

При рассмотрении химического равновесия те же соображения о максимуме суммарной энтропии при заданном суммарном количестве каждого из компонентов в системе приводят к условию равенства производных энтропии каждой из подсистем по числу молей в ней  $i$ -го вещества, т.е. к равенству векторов химических потенциалов  $\mu_i$ .

Таким образом, если кроме теплового равновесия наблюдается еще механическое и химическое, то равны не только температуры, но и давления и химические потенциалы подсистем.

**Идеальный газ.** Уравнение состояния может быть конкретизировано при тех или иных допущениях о свойствах термодинамической системы. Одной из простейших таких систем является идеальный газ, который по предположению состоит из большого числа частиц, чье взаимодействие друг с другом пренебрежимо мало. Реальные газы близки к этой модели в достаточно разреженном состоянии.

Напомним без вывода основные соотношения, связывающие термодинамические переменные для идеального газа.

Уравнение состояния имеет вид:

$$PV = NRT. \quad (1.26)$$

Здесь  $P$ ,  $V$ ,  $T$  — давление, объем и температура  $N$  молей газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная, равная  $8,314 \cdot 10^{-7}$  эрг/град моль.



Внутренняя энергия  $E$  идеального газа зависит только от температуры. Она меняется, например, при подводе или отводе тепла. Производную  $\partial Q/\partial T$  называют теплоемкостью газа. Однако эта производная зависит от того, каким образом происходит нагрев или охлаждение газа. Если объем газа  $V$  остается постоянным, то теплоемкость обозначают как  $C_v$ , а если остается постоянным давление, то  $C_p$ . При постоянном объеме все подводимое тепло  $\Delta Q$  идет только на повышение внутренней энергии, а при постоянном давлении изменение температуры в соответствии с уравнением состояния (1.26) вызывает изменение объема, и газ производит работу равную  $P\Delta V$ . Ясно, что при том же  $\Delta Q$  изменение температуры, а значит, и внутренней энергии во втором случае окажется меньше, так что  $C_p > C_v$ . Разность двух этих теплоемкостей для одного моля газа постоянна, так как при постоянном объеме

$$C_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v = \frac{dE}{dT},$$

при постоянном же давлении

$$C_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \frac{dE}{dT} + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Но, как следует из уравнения состояния (1.26), при  $N = 1$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{P}.$$

Так что  $C_p = C_v + R$ . Подчеркнем, что при выводе этого равенства мы использовали полную производную  $dE/dT$ , так как от  $p$  и  $V$  внутренняя энергия не зависит.

Используя уравнение состояния (1.26), получим зависимость энтропии от параметров идеального газа. При  $N = 1$  в равновесном процессе по условию (1.10)

$$TdS = dE + dA = C_v dT + pdV. \quad (1.27)$$

При постоянной теплоемкости  $C_v$

$$dS = d(C_v \ln T + R \ln V). \quad (1.28)$$

Если выразить  $\ln T$  из уравнения состояния  $pV = RT$ ,

$$\ln T = \ln p + \ln V - \ln R$$

и учесть связь между  $R$ ,  $C_p$  и  $C_v$ , то получим

$$dS = d(C_v \ln p + C_p \ln V). \quad (1.29)$$

Величина энтропии может отличаться от выражений, стоящих в (1.28), (1.29) под знаком дифференциала, только на некоторую константу. Если известна энтропия при некоторых стандартных параметрах  $P_0$ ,  $V_0$

(обозначим ее как  $S_0$ ), то энтропия  $S$  одного моля идеального газа удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} S - S_0 &= C_v \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left( \frac{V}{V_0} \right), \\ S - S_0 &= C_v \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) + C_p \ln \left( \frac{V}{V_0} \right), \\ S - S_0 &= C_p \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left( \frac{P}{P_0} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Часто принимают  $S_0$  равной нулю и записывают (1.30) как зависимость энтропии  $S$  от переменных состояния системы. Чтобы подсчитать энтропию  $N$  молей газа, занимающих объем  $\tilde{V}$  по формуле (1.30), надо умножить  $S$  на  $N$  и подставить вместо  $V$  объем одного моля  $\tilde{V}/N$ . Получим

$$S_N = N \left( C_v \ln \frac{T}{T_0} + R \frac{\tilde{V}}{NV_0} \right) = N \left( C_v \ln \frac{P}{P_0} + C_p \ln \frac{\tilde{V}}{NV_0} \right). \quad (1.31)$$

При смешении идеальных газов каждый из них ведет себя в общем объеме так, как будто других газов не существует. Давление  $P_i$  удовлетворяет уравнению (1.26), в которое входит число молей  $N_i$   $i$ -го газа, температура  $T$  и объем  $V$ , занимаемый смесью. Так что

$$P_i V = N_i R T.$$

Давление  $P_i$  называют парциальным давлением  $i$ -го газа. Общее давление смеси равно сумме парциальных давлений (закон Дальтона)

$$P = \sum_{i=1}^M P_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^M N_i. \quad (1.32)$$

При смешении идеальных газов тепло не подводится и не совершается никакой работы, значит, температура смеси и внутренняя энергия не изменяются. Таким образом, внутренняя энергия смеси равна сумме внутренних энергий отдельных компонент:

$$E = \sum_{i=1}^m E_i.$$

Подсчитаем изменение энтропии газов при их смешении при фиксированной температуре  $T$  и давлении  $P$ , взяв для простоты два газа с числом молей  $N_1$  и  $N_2$  и объемами  $V_1$  и  $V_2$  соответственно. По формуле (1.31) энтропия системы до смешения равна

$$S^H = N_1 \left( C_{v1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V_1}{N_1 V_0} \right) + N_2 \left( C_{v2} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V_2}{N_2 V_0} \right).$$

После смешения энтропия определяется выражением

$$S^C = N_1 \left( C_{v1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{N_1 V_0} \right) + N_2 \left( C_{v2} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{N_2 V_0} \right),$$

так как каждый из газов занял весь объем  $V = V_1 + V_2$ . Учтем, что при одинаковых температурах и давлениях объемы газов пропорциональны числу молей  $N_i$ , так что

$$\frac{V_1}{V} = \frac{N_1}{N}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{N_2}{N}, \quad N = N_1 + N_2.$$

Энтропией смешения называют приращение энтропии  $\Delta S_{\text{см}} = S^C - S^H$ . Она равна

$$\Delta S_{\text{см}} = R \left( N_1 \ln \frac{N}{N_1} + N_2 \ln \frac{N}{N_2} \right). \quad (1.33)$$

В расчете на один моль смеси

$$\Delta \tilde{S}_{\text{см}} = \frac{\Delta S_{\text{см}}}{N} = -R(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2). \quad (1.28a)$$

Здесь  $x_i = N_i/N$  — мольная концентрация. Процесс смешения необратим, о чем и свидетельствует увеличение энтропии. Отметим, что для одинаковых газов энтропия смеси равна

$$S^C = (N_1 + N_2) \left( C_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0(N_1 + N_2)} \right).$$

Нетрудно показать, что в этом случае  $\Delta S_{\text{см}} = 0$ .

Чтобы получить зависимость химического потенциала от температуры и давления для идеального газа, используем равенство (1.24) для дифференциала энергии Гиббса чистого вещества

$$d\Phi = V dP - S dT + \mu dN.$$

Так как  $d\Phi$  — полный дифференциал, то значение его второй производной не зависит от порядка дифференцирования

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial N \partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial N} \right)_T \quad (1.34)$$

или

$$\left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_T = \frac{V}{N}.$$

Из уравнения состояния идеального газа  $V/N = \frac{RT}{p}$ , так что

$$d\mu = RT \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя это соотношение при  $T = \text{const}$ , получим

$$\mu = \mu^0(T) + RT \ln p. \quad (1.35)$$

Постоянная интегрирования  $\mu^0(T)$  представляет собой химический потенциал газа при температуре  $T$  и давлении, равном единице.

В смеси идеальных газов каждая составляющая характеризуется парциальным давлением  $P_i$ , и уравнение (1.35) примет форму

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln P_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.36)$$

Так как  $P_i = \frac{N_i}{V}RT = C_iRT$ , то

$$\mu_i(C, T) = \mu_{iC}^0 + RT \ln C_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\mu_{iC}^0(T)$  — химический потенциал чистого вещества. Если концентрации веществ в смеси исчисляются в мольных долях, то  $P_i = px_i$  и

$$\mu_i(x_i, p, T) = \mu_i^0 + RT \ln(px_i) = \bar{\mu}_{iC}(T, p) + RT \ln x_i. \quad (1.37)$$

Сумма  $\bar{\mu}_{iC}(T, p)$  первых двух слагаемых в правой части этого равенства равна химическому потенциалу  $i$ -го газа, взятого в чистом виде при давлении и температуре смеси. По аналогии со смесями идеальных газов другие смеси, у которых химические потенциалы подчиняются равенствам (1.35), (1.36), называют идеальными растворами.

Рассмотрим систему, состоящую из жидкости, содержащей несколько компонент, и паров этой жидкости. Если температура и давление таковы, что каждая из компонент жидкости способна в рассматриваемых условиях находиться в конденсированном состоянии, то газовая фаза будет смесью насыщенных паров тех же компонент. Газовую фазу можно считать смесью идеальных газов, так что химический потенциал  $i$ -й компоненты в ней имеет вид (1.36)

$$\mu_i^\Gamma = \mu_i^0 + RT \ln p_i.$$

Для жидкости, являющейся идеальным раствором, химические потенциалы в соответствии с (1.36) равны

$$\mu_i^{\text{ж}} = \bar{\mu}_i + RT \ln x_i.$$

В условиях равновесия  $\mu_i^\Gamma = \mu_i^{\text{ж}}$ , так что

$$\mu_i^0 + RT \ln p_i = \bar{\mu}_i + RT \ln x_i,$$

откуда после преобразований следует

$$\frac{p_i}{x_i} = \exp\left(\frac{\bar{\mu}_i - \mu_i^0}{RT}\right). \quad (1.38)$$

Правая часть этого выражения зависит от давления и температуры.

Обозначим ее как  $F_i(p, T)$ , оставив пока функцию  $F_i$  неопределенной. В таких обозначениях из (1.38) следует равенство

$$p_i = F_i x_i. \quad (1.39)$$

Чтобы найти функцию  $F_i$ , устремим  $x_i$  к единице, т.е. рассмотрим случай, когда раствор приближается к чистому  $i$ -му компоненту. При этом давление  $i$ -го компонента над раствором должно приближаться к равновесному давлению пара чистого вещества  $\bar{P}_i$ . Так что  $F_i = \bar{P}_i$ , и уравнение (1.39) примет вид

$$P_i = \bar{P}_i x_i. \quad (1.40)$$

Давление насыщенного пара над раствором пропорционально давлению насыщенного пара чистого вещества и концентрации рассматриваемого вещества в растворе. Соотношение (1.40) называют законом Рауля.

*Обратимая работа разделения.* Формула (1.37) для химических потенциалов позволяет рассчитать потери свободной энергии при смешении газов или идеальных растворов. Рассмотрим смесь двух веществ  $A$  и  $B$ . Их химические потенциалы равны

$$\mu_A = \bar{\mu}_A + RT \ln x_A, \quad \mu_B = \bar{\mu}_B + RT \ln x_B.$$

Свободная энергия Гиббса для моля смеси:

$$\Phi_{\text{см}} = x_A \mu_A + x_B \mu_B.$$

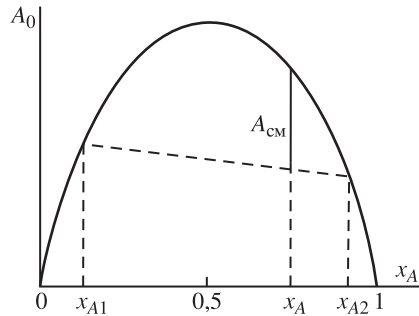
Свободная энергия чистых веществ, взятых в тех же количествах:

$$\bar{\Phi} = x_A \bar{\mu}_A + x_B \bar{\mu}_B.$$

Потери энергии при смешении чистых веществ:

$$A_0 = \bar{\Phi} - \Phi_{\text{см}} = -RT(x_A \ln x_A + x_B \ln x_B). \quad (1.41)$$

Очевидно, что  $A_0 > 0$ . Эту величину называют обратной работой разделения, так как она равна минимальной работе, которую нужно



Р и с. 1.1. Зависимость потерь энергии при смешении от концентрации ключевого компонента

затратить для разделения одного моля смеси на чистые компоненты. Функция  $A_0(x_A)$  показана на рис. 1.1, при этом учтено, что  $x_B = 1 - x_A$ .

Сравнение функции  $A_0(x)$  с энтропией смешения (1.28а) приводит к соотношению

$$\Delta S_{\text{см}} = \frac{A_0}{T}. \quad (1.42)$$

В более общем случае для смеси  $m$  компонент совершенно аналогичным образом потери энергии при смешении примут форму

$$A_0 = -RT \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i. \quad (1.43)$$

Рассмотрим случай, когда один моль смеси, состоящей из двух компонентов  $A$  и  $B$ , нужно разделить на два потока, в первом из которых концентрации равны  $x_{A1}$  и  $x_{B1}$ , а во втором  $x_{A2}$  и  $x_{B2}$ . Обозначим долю первого потока через  $\gamma$ , так что доля второго потока равна  $1 - \gamma$ , энергия Гиббса для каждого из выходных потоков и их сумма равны

$$\Phi_1 = \gamma(x_{A1}\mu_{A1} + x_{B1}\mu_{B1}), \quad \Phi_2 = (1 - \gamma)(x_{A2}\mu_{A2} + x_{B2}\mu_{B2}),$$

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Потери энергии при смешении (они же равны минимальной работе разделения):

$$A_{\text{см}} = \Phi_{\Sigma} - \Phi_{\text{см}}.$$

После подстановки в это равенство выражений для химических потенциалов минимальная работа разделения примет форму

$$A_{\text{см}} = A_0(x_A) - [\gamma A_0(x_{A1}) + (1 - \gamma)A_0(x_{A2})]. \quad (1.44)$$

Если учесть, что  $x_A = \gamma x_{A1} + (1 - \gamma)x_{A2}$ , то  $A_{\text{см}}$  представляет собой расстояние между точкой  $A_0(x_A)$  и ординатой отрезка, соединяющего  $A_0(x_{A1})$  и  $A_0(x_{A2})$ , для  $x = x_A$ . Так как функция  $A_0(x_A)$  выпукла вверх, работа разделения неотрицательна (см. рис. 1.1).

Работа разделения пропорциональна числу молей  $N$  разделяемой смеси. Если учесть это обстоятельство и разделить левые и правые части равенств для работы разделения на величину, определяющую масштаб времени, то в левых частях этих равенств мы получим «обратимую мощность» разделения, а в правых вместо числа молей расход разделяемой смеси.

**Изменение энтропии при фазовых превращениях.** При фазовых превращениях, проходящих при постоянном давлении и температуре  $T$  энтропия меняется на величину отношения прироста энтальпии к температуре фазового превращения. Так, при плавлении льда

$$\Delta S_a = \frac{\Delta H}{T_a} = \frac{6008}{273,2} = 29,99 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{к}), \quad (1.45)$$

а при испарении воды при нормальном атмосферном давлении

$$\Delta S_b = \frac{\Delta H}{T_b} = \frac{40673}{373,2} = 108,93 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{к}). \quad (1.46)$$

При нагреве тела с заданной теплоемкостью от температуры  $T_1$  до  $T_2$  за сколько угодно большое время (обратимо) изменение энтропии равно

$$\Delta S_\nu = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C d \ln T. \quad (1.47)$$

Если нагревание происходит при постоянном объеме, то  $C = C_\nu(T)$ , а если при постоянном давлении, то  $C = C_p(T)$ . Зависимости теплоемкости от температуры для различных веществ находят экспериментально.

Следует отметить, что расчет по формулам (1.45)–(1.47) предполагает равновесный характер процессов. Они непригодны, например, для расчета изменения энтропии при застывании переохлажденной жидкости или при кристаллизации из пересыщенного раствора. Изменение фазового состояния системы нужно разбить в этом случае на равновесные стадии. Пусть температура замерзания  $T_0$ , а температура жидкости  $T_1 < T_0$ . Для подсчета изменения энтропии нужно переход от жидкости к твердому телу провести в три равновесных стадии:

1. Нагрев жидкости от  $T$  до  $T_0$ .
2. Равновесный фазовый переход при  $T = T_0$ .
3. Охлаждение твердого тела до  $T_1$ .

Так как энтропия — функция состояния, то прирост энтропии при кристаллизации переохлажденной жидкости равен сумме ее приростов на каждой стадии.

### 1.3. Термодинамические балансы

**Открытая система.** Термодинамические балансы устанавливают связь между потоками по каждому из веществ, энергии и энтропии, которыми система обменивается с окружением, а также возникновением этих величин в системе и скоростью изменения их количества. Все потоки далее мы будем суммировать, считая входящие потоки положительными, а выходящие — отрицательными. Разделим потоки на конвективные и диффузионные, отметив последние индексом  $d$ . В отличие от конвективного потока диффузионный зависит от различия между интенсивными переменными исследуемой системы в точке, куда он входит или откуда выходит и интенсивными переменными окружения. Кроме того, будем использовать следующие обозначения:  $j$  — индекс потока,  $e_j, v_j$ , — внутренняя энергия и объем одного моля соответствующего потока, а  $P_j$  — его давление,  $h_j = e_j + P_j v_j$  — мольная энтальпия,  $h_{dj}$  — энтальпия в потоке, поступающем диффузионно,  $q_j$  —  $j$ -й поток тепла,  $N_a$  — мощность, производимая системой.

Приведем общий вид балансовых уравнений.

*Энергетический баланс.* Скорость изменения энергии  $E$  системы определяется потоками энергии, приносимой и уносимой вместе с конвективными потоками вещества, изменением энергии за счет диффузионного обмена веществом, потоками тепла, передаваемого кондуктивно, и мощностью совершаемой работы:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j g_{dj} h_{dj} + \sum_j q_j - N_a.$$

*Материальный баланс.* Изменение числа  $N_i$  молей  $i$ -го компонента в системе определяется потоками вещества, поступающими конвективно и диффузионно, а также протеканием химических реакций:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} x_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu.$$

Здесь  $x_{ij}$  — мольная доля  $i$ -го компонента в  $j$ -м потоке,  $\alpha_{i\nu}$  — стехиометрический коэффициент, с которым  $i$ -й компонент входит в уравнение  $\nu$ -й реакции,  $W_\nu$  — скорость  $\nu$ -й реакции.

*Энтропийный баланс.* Изменение энтропии  $S$  системы происходит вследствие притока энтропии вместе с веществами, поступающими конвективно и диффузионно, притока или отвода тепла ( $q_j = T_j dS_j/dt$ , откуда  $q_j/T_j$  — изменение энтропии под влиянием  $j$ -го потока тепла с температурой  $T_j$ ) и производства энтропии  $\sigma$  вследствие неравновесности процессов, проходящих внутри самой системы:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j g_{dj} s_{dj} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma.$$

Увеличение энтропии вследствие диффузионного притока вещества можно выразить и с использованием потоков вносимой энергии  $q_{dj} = g_{dj} h_{dj}$ . Так как удельная энергия Гиббса  $\phi_{dj} = h_{dj} - T_{dj} s_{dj}$ , то  $s_{dj} = (h_{dj} - \phi_{dj})/T_{dj}$ , где  $s_{dj}$  — удельная энтропия  $j$ -го диффузионного потока,  $h_{dj}$  — удельная энтальпия. Следовательно,  $g_{dj} s_{dj} = g_{dj} (h_{dj} - \phi_{dj})/T_{dj}$ . Если диффузионно переносится несколько потоков вещества, то

$$g_{dj} s_{dj} = \left( q_{dj} - \sum_i \frac{g_{dj} \mu_{dij}}{T_{dj}} \right),$$

где  $\mu_{dij}$  — химический потенциал  $i$ -го компонента в  $j$ -м диффузионном потоке. Тогда уравнение энтропийного баланса приобретает вид

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dj} \mu_{dij}}{T_{dj}} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma.$$



Таким образом, уравнения для энергии, вещества и энтропии имеют форму

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_{dj} + \sum_j q_j - N_a, \quad (1.48)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} x_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \quad (1.49)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dj} \mu_{dij}}{T_{dj}} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma. \quad (1.50)$$

Здесь  $n_{i\nu} = -\alpha_{i\nu} W_\nu$  — интенсивность образования  $i$ -го вещества в  $\nu$ -й реакции,  $T_\nu$  — температура  $\nu$ -й реакции. Если диффузионных потоков нет, то

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_j - N_a, \quad (1.51)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \quad (1.52)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sigma, \quad (1.53)$$

где в число тепловых потоков включены потоки тепла, выделяющиеся или поглощаемые при химических реакциях, которые зависят от скорости реакций.

Если рассматривается стационарный режим процесса, когда  $dE/dt = dN_i/dt = dS/dt = 0$ , то записанные уравнения из дифференциальных превращаются в конечные соотношения. При рассмотрении циклического процесса балансы можно записать не для каждого момента времени, а в среднем за цикл работы установки. Так как в начале и конце цикла состояние системы одинаково, то общее изменение энергии, количества вещества и энтропии за цикл равно нулю. Балансы в этом случае также сводятся к системе соотношений, связывающих средние за цикл значения слагаемых, стоящих в правых частях уравнений.

Для замкнутых систем, состоящих из нескольких равновесных подсистем, термодинамические балансы имеют форму

$$\dot{E}_0 = \sum_i \dot{E}_i, \quad \dot{N}_0 = \sum_i \dot{N}_i, \quad \dot{S}_0 = \sum_i \dot{S}_i,$$

где  $i$  — номер подсистемы, а индекс 0 относится к системе в целом. В свою очередь,  $\dot{E}_i$ ,  $\dot{N}_i$  и  $\dot{S}_i$  определяются соотношениями (1.48)–(1.50).

Термодинамические балансы связывают интенсивность и составы потоков, поступающих в систему, скорости химических превращений в

ней и производство энтропии. Они же позволяют найти производство энтропии в неоднородной изолированной системе, когда подсистемы обмениваются друг с другом веществом и энергией.

**Производство энтропии в неоднородной изолированной системе.** В изолированной неоднородной системе между  $i$ -й и  $j$ -й подсистемами возникают потоки тепла, диффузионные потоки вещества, протекают химические реакции. Внешние потоки отсутствуют и изменение энтропии каждой из подсистем с учетом ее равновесия ( $\sigma_j = 0$ ) имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T_j} \left[ \sum_i \left( q_{ij} + q_{dij} + \sum_k g_{dij} x_{ijk} \mu_{jk} \right) + \sum_{k\nu} \mu_{k\nu} n_{k\nu} \right]. \quad (1.54)$$

Здесь  $k_\nu$  — индекс вещества, образующегося в  $\nu$ -й реакции. Скорость изменения энтропии в такой системе связана с ее неоднородностью. Она равна

$$\sigma = \sum_j \frac{dS_j}{dt}. \quad (1.55)$$

Она неотрицательна и в том случае, когда те или иные процессы отсутствуют, так что зависимости потоков от интенсивных переменных подсистем  $q_{ij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j)$ ,  $g_{dij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j)$ ,  $n_{k\nu}(P_j, T_j, \mu_j)$  должны быть таковы, чтобы сумма по  $j$  определяющихся ими слагаемых в (1.54) была неотрицательна при отсутствии остальных потоков.

Отметим, что для записи термодинамических балансов не требуется знания уравнения состояния подсистем  $S(E, V, N)$ , нужно лишь, чтобы такая зависимость существовала. Тогда

$$\dot{S} = S_E \dot{E} + S_V \dot{V} + \sum_{i=1}^m S_{N_i} \dot{N}_i,$$

что совпадает с выражением (1.50) для равновесной подсистемы, если учесть, что

$$S_E = \frac{1}{T}, \quad S_V = \frac{P}{T}, \quad S_{N_i} = -\frac{\mu_i}{T}, \quad \dot{E} = q - N_a = q - P\dot{V}.$$

Покажем, как из термодинамических балансов вытекают выражения для производства энтропии.

*Теплообмен.* Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух равновесных подсистем с температурами  $T_1$  и  $T_2$ . Поток тепла между ними зависит от  $T_1$  и  $T_2$ , так что

$$\text{sign } q(T_1, T_2) = \text{sign}(T_1 - T_2), \quad q(T_1, T_2) = 0, \quad \text{при } T_1 = T_2. \quad (1.56)$$

В соответствии с (1.54) имеем

$$\dot{S}_1 = -\frac{q}{T_1}, \quad \dot{S}_2 = \frac{q}{T_2},$$

так что

$$\dot{S} = \sigma = q(T_1, T_2) \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right). \quad (1.57)$$

В силу равенства (1.56) производство энтропии неотрицательно.

*Перенос тепла в слое.* Найдем производство энтропии в слое теплопроводного вещества. Для этого выражение (1.57) запишем через градиент температуры как

$$\sigma = q \nabla \left( \frac{1}{T} \right) = - \frac{q \nabla(T)}{T^2}.$$

Если тепловой поток пропорционален градиенту температуры с коэффициентом  $-k$ , то

$$\sigma = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2.$$

*Изотермический массоперенос.* Для двух однородных подсистем, имеющих температуру  $T$  и химические потенциалы  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $g_k$  — поток  $k$ -го вещества. Согласно (1.54)

$$\dot{S}_j = - \frac{1}{T} \sum_k g_k(\mu_1, \mu_2) \mu_{kj}, \quad j = 1, 2.$$

Скорость изменения суммарной энтропии:

$$\sigma = \dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \frac{1}{T} \sum_j g_j(\mu_1, \mu_2) (\mu_{2j} - \mu_{1j}). \quad (1.58)$$

При этом законы массопереноса удовлетворяют условию неотрицательности  $\sigma$  при  $\mu_1$ , не равном  $\mu_2$ .

*Неизотермический массоперенос.* Пусть температуры подсистем различны, как и их химические потенциалы, и между ними осуществляется массоперенос. Совершенно аналогично тому, как это было сделано в рассмотренных выше случаях, производство энтропии в системе можно записать в форме

$$\sigma = \sum_k \left[ g_k \left( \frac{\mu_{2k}}{T_2} - \frac{\mu_{1k}}{T_1} \right) + q_k \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right], \quad (1.59)$$

где  $q_k$  — приток энергии с потоком вещества,  $g_k(\mu_1, \mu_2, T_1, T_2)$ .

*Деформационное взаимодействие.* Рассмотрим две подсистемы, разделенные поршнем;  $P_1$  и  $P_2$  — давления в подсистемах,  $T$  — их температура. Разность давлений вызывает перемещение поршня. Обозначим через  $v$  скорость изменения объема каждой из подсистем, связанную с перемещением поршня.

Производство энтропии определяется отношением энергии, рассеиваемой при перемещении поршня  $q = v(P_1, P_2)(P_1 - P_2)$ , к температуре

$$\sigma = \frac{v(P_1, P_2)}{T} (P_1 - P_2). \quad (1.60)$$

Вид зависимости скорости от перепада давлений определяется характером трения поршня о стенки.

*Дросселирование газа.* При прохождении газа через сужающее устройство (дроссель) его давление изменяется от  $P_1$  до  $P_2$ , а расход  $g$  зависит от перепада давлений. Будем предполагать, что поток тепла  $q$  подводится к системе так, что температура газа не изменяется.

$$\sigma = g(s_2 - s_1) + \frac{q}{T}.$$

Ввиду того, что в изотермическом процессе подводимое тепло равно

$$q = g(h_2 - h_1),$$

а также учитывая, что химические потенциалы имеют вид

$$\mu_i = h_i - Ts_i, \quad i = 1, 2,$$

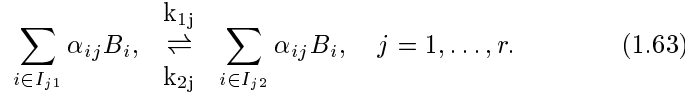
получим

$$\sigma = g(P_1, P_2)(\mu_1 - \mu_2)/T. \quad (1.61)$$

Для идеальных газов энтальпия зависит только от температуры, поэтому

$$\sigma = g(P_1, P_2)(s_1 - s_2) = g(P_1, P_2)R \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right). \quad (1.62)$$

*Процесс химического превращения.* Рассмотрим термодинамическую систему, в которой при постоянных температуре  $T$  и давлении  $P$  происходит химический процесс вида



Здесь  $j$  — номер реакции,  $B_i$  — участвующие компоненты,  $I_{j1}$  и  $I_{j2}$  — множество индексов исходных компонентов и конечных продуктов реакции,  $\alpha_{ij}$  — стехиометрические коэффициенты (они положительны для продуктов реакции и отрицательны для исходных компонент),  $k_{1j}$  и  $k_{2j}$  — константы скоростей прямых и обратных реакций.

Если через  $W_j$  обозначить скорость  $j$ -й реакции, то изменение числа молей  $i$ -го вещества в реакционном объеме определяется как

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j \alpha_{ij} W_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.64)$$

Производство энтропии вследствие химического превращения имеет вид

$$\sigma_x = -\frac{1}{T} \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{T} \sum_j W_j A_j, \quad (1.65)$$

где  $A_j = -\sum_i \alpha_{ij} \mu_i$  — химическое сродство  $j$ -й реакции. В обратимой реакции в состоянии равновесия  $A_j = 0$ . Скорости реакций в свою очередь зависят от концентраций, температуры и давления.

*Тепломассоперенос.* Подсистемы, контактирующие друг с другом, имеют разные температуры  $T_1$  и  $T_2$  и векторы химических потенциалов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  с составляющими  $\mu_{ji}$  ( $j = 1, 2; i = 1, \dots, n$ ). Эти различия вызывают поток тепла  $q$  и векторный поток вещества  $g = \{g_1, \dots, g_n\}$ , каждый из которых зависит и от температуры  $T_j$  и от химических потенциалов  $\mu_j$ . Производство энтропии примет форму

$$\sigma = q(T_1, T_2, \mu_1, \mu_2) \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) + \sum_i g_i(T_1, T_2, \mu_1, \mu_2) \left( \frac{\mu_{i2}}{T_2} - \frac{\mu_{i1}}{T_1} \right). \quad (1.66)$$

*Смешение потоков.* Рассмотрим первоначально случай, когда в системе смешиваются потоки чистых веществ, имеющих одинаковую температуру  $T$ . Обозначим через  $N_k$  число молей  $k$ -го вещества, поступающего в систему в единицу времени (мольный расход). Процесс смешения необратим, производство энтропии может быть найдено как разность между энтропией выходного и входных потоков. С учетом неизменности их энтальпии получим

$$\sigma = -\frac{1}{T} \sum_k N_k (\mu_k - \mu_k^0). \quad (1.67)$$

Для идеальных газов и идеальных растворов разница между химическим потенциалом  $k$ -го вещества в смеси  $\mu_k(x_k)$  и его потенциалом в чистом виде  $\mu_k^0$  равна  $RTx_k \ln x_k$ , так что

$$\sigma = -R \sum_k N_k x_k \ln x_k,$$

где

$$x_k = \frac{N_k}{\sum_\nu N_\nu}.$$

В более общем случае в смеситель поступают потоки с мольными расходами  $g_j$ , каждый из которых содержит  $x_{kj}$  мольных долей  $k$ -го компонента. Химический потенциал  $k$ -того компонента в  $j$ -м потоке обозначим как  $\mu_{kj}$ . Состав смеси на выходе определяется соотношением

$$x_k = \frac{\sum_j g_j x_{kj}}{\sum_j g_j} = \frac{N_k}{\sum_\nu N_\nu}, \quad (1.68)$$

а производство энтропии — соотношением

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left( \sum_k \mu_k(x_k) \sum_j g_j x_{kj} - \sum_k \sum_j g_j x_{kj} \mu_{kj}(x_{kj}) \right).$$

Здесь  $\mu_k(x_k)$  — химический потенциал  $k$ -го вещества в выходном потоке. С учетом (1.67)

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left[ \sum_k N_k \mu_k(x_k) - \sum_j g_j x_{kj} \mu_{kj}(x_{kj}) \right],$$

или, переходя к приращениям химических потенциалов,

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left[ \sum_k N_k (\mu_k(x_k) - \mu_k^0) - \sum_j g_j x_{kj} (\mu_{kj}(x_{kj}) - \mu_{kj}^0) \right].$$

При смешении двух однородных потоков идеального газа с расходами  $g_1$  и  $g_2$  и температурами  $T_1$  и  $T_2$  производство энтропии равно

$$\sigma_{\text{см}} = \left( g_1 \ln \frac{T_{\text{см}}}{T_1} + g_2 \ln \frac{T_{\text{см}}}{T_2} \right) C_p,$$

где температура смеси  $T_{\text{см}}$  определяется из уравнения теплового баланса

$$T_{\text{см}}(g_1 + g_2) = T_1 g_1 + T_2 g_2.$$

Теплоемкость потоков  $C_p$  предполагается одинаковой, как и их давление  $P$ .

*Учет смешения в химическом реакторе.* Для изотермического реактора периодического действия, в который в момент  $t = 0$  загружаются чистые компоненты, в качестве производства энтропии естественно принять отношение прироста энтропии смеси к продолжительности процесса  $\tau$ . В изотермическом процессе прирост энтропии равен

$$\Delta S = S(\tau) - S(0) = \Delta S_{\text{см}} + \Delta S_x. \quad (1.69)$$

Первое слагаемое в этом выражении — прирост энтропии за счет смешения

$$\Delta S_{\text{см}} = -\frac{1}{T} \sum_k N_{k0} (\mu_k(x_k) - \mu_k^0).$$

Здесь  $N_{k0}$  — число молей  $k$ -го компонента в смеси в момент  $t = 0$ . Для любого момента  $t$

$$x_k(t) = \frac{N_k(t)}{\sum_{\nu} N_{\nu}(t)},$$

$x_{k0}$  — начальная концентрация  $k$ -го компонента.

Прирост энтропии за счет протекания химической реакции подсчитывается через химические потенциалы и концентрации в момент окончания процесса  $\tau$ :

$$\Delta S_x = -\frac{1}{T} \sum_k \left( \bar{N}_k \mu_k(\bar{x}_k) - N_{k0} \mu_k(x_{k0}) \right).$$

Число молей в момент  $\tau$  для  $k$ -го компонента зависит от стехиометрических коэффициентов и скоростей реакции как

$$\bar{N}_k = N_{k0} + \int_0^\tau \sum_j \alpha_{kj} W_j(x(t)) dt.$$

Суммируя приросты энтропии, получим

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\tau} = -\frac{1}{T\tau} \sum_k \left( \bar{N}_k \mu_k(\bar{x}_k) - N_{k0} \mu_k^0 \right).$$

Для реактора идеального смешения непрерывного действия, в который подаются чистые компоненты с расходами  $g_{k0}$ , производство энтропии можно представить как сумму двух составляющих:

$$\sigma = \sigma_{\text{см}} + \sigma_x. \quad (1.70)$$

Обозначая через  $\bar{x}$  вектор концентраций на выходе из реактора (а значит, и в его объеме), получим для первого слагаемого в (1.70) (см. (1.67))

$$\sigma_{\text{см}} = -\frac{1}{T} \sum_k g_{k0} (\mu_k(\bar{x}_k) - \mu_k^0).$$

Второе слагаемое, аналогично выражению (1.65), равно

$$\sigma_x = -\frac{1}{T} \sum_k \mu_k(\bar{x}_k) \sum_j \alpha_{kj} W_j(\bar{x}) = \frac{1}{T} \sum_j W_j(\bar{x}) A_j.$$

В свою очередь вектор  $\bar{x}$  определяется из уравнений материального баланса

$$\bar{x}_k = \frac{N_k + \sum_j \alpha_{kj} W_j(\bar{x})}{\sum_\nu \left( N_\nu + \sum_j \alpha_{\nu j} W_j(\bar{x}) \right)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

*Циклические процессы.* В циклических процессах переменные, характеризующие состояние системы, периодически принимают одно и то же значение, так что справедливы условия цикличности

$$E(0) = E(\tau), \quad S(0) = S(\tau), \quad N_k(0) = N_k(\tau), \quad k = 1, \dots, K.$$

В силу условий цикличности интегралы за период  $[0, \tau]$  от правых частей в уравнениях термодинамических балансов (1.48)–(1.50) равны нулю. Если режим системы статический, то переменные состояния неизменны и левые части уравнений термодинамических балансов равны нулю.

#### 1.4. Связь эффективности термодинамических систем с производством энтропии

Уравнения (1.48)–(1.50) позволяют проследить связь показателей эффективности процесса с производством энтропии  $\sigma$ . Действительно, рассмотрим установившийся процесс, в котором левая часть уравнения (1.50) равна нулю (в каждый момент времени или в среднем за цикл). Согласно принятому выше правилу положительным считается направление потоков вещества и энергии, поступающих в систему, а отрицательным — выходящих из нее. Организация процессов в системе определяет ее необратимость и, в силу уравнения (1.50), сказывается при фиксированных параметрах входных потоков на характеристике выходных. Рост  $\sigma$  приводит к росту энтропии выходных потоков, при прочих равных условиях этот рост уменьшает температуру потоков на выходе либо при фиксированной температуре увеличивает отходящий поток энергии. И в том, и в другом случае это приводит к уменьшению механической работы, или работы разделения, вырабатываемой системой. Энергетическая эффективность термодинамической системы, характеризующаяся отношением полезной работы, вырабатываемой в ней, к затратам энергии, достигает максимума в обратимых процессах, когда  $\sigma = 0$ . В таблице 1.1 даны уравнения термодинамических балансов и вытекающие из этих уравнений зависимости между показателем эффективности процесса и производством энтропии  $\sigma$  для некоторых термодинамических систем. Покажем последовательность получения этих зависимостей на примерах конкретных систем.

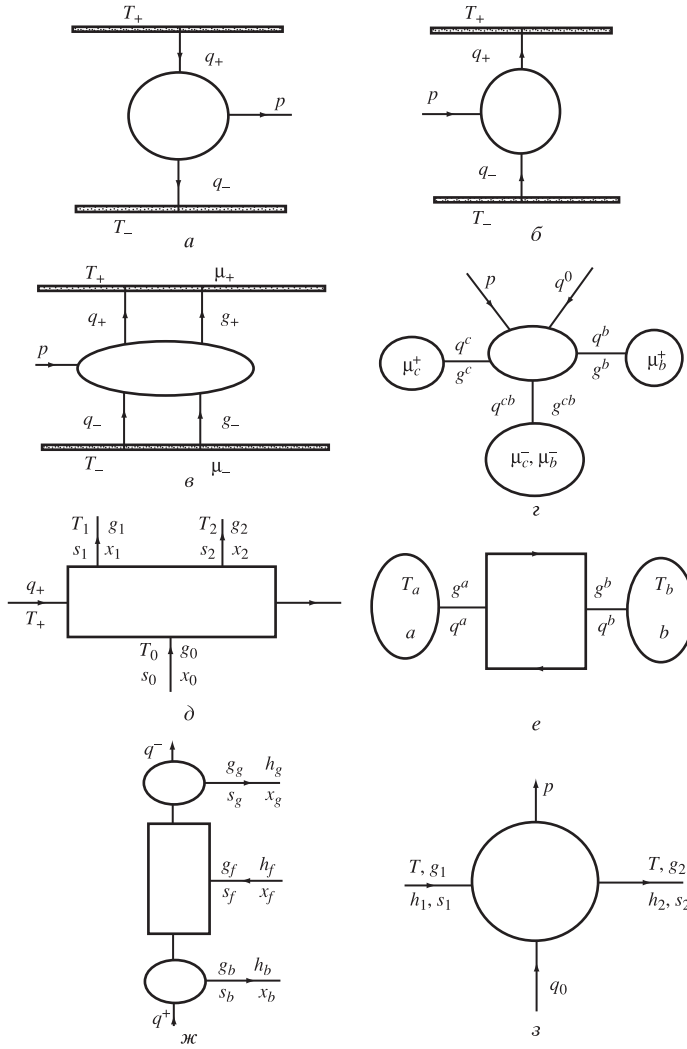
*Тепловая машина.* Тепловая машина преобразует тепло, получаемое от резервуара с температурой  $T_+$  (горячего источника), в работу. Состояние рабочего тела меняется циклично, при этом оно отдает часть энергии холодному источнику с температурой  $T_-$ . Показателем эффективности может служить отношение произведенной работы к количеству тепла, отобранного у горячего источника (термический КПД  $\eta = p/q_+$ ).



Таблица 1.1

Термодинамические балансы и показатели эффективности

Процесс	Уравнения термодинамических балансов	Показатель эффективности
Тепловая машина (рис. 1.2, а)	$q^+ - q^- - P = 0, \quad \frac{q^+}{T^+} - \frac{q^-}{T^-} + \sigma = 0$	$\eta = \frac{P}{q^+} = \frac{1 - T^-/T^+}{1 + T^- \sigma / P}$
Тепловой насос и холодильник (рис. 1.2, б)	$q^+ + q^- - P = 0, \quad \frac{q^+}{T^+} + \frac{q^-}{T^-} + \sigma = 0$	$\eta_r = \frac{q^-}{ P } = \frac{1}{T^+ / T^- - 1} - \frac{T^+ \sigma}{ P }, \quad \eta_{hp} = \frac{q^+}{ P } = 1 + \eta_r$
Диффузионно-механический цикл (рис. 1.2., в)	$q^+ + q^- - P = 0, \quad g^+ + g^- = 0,$ $q^+ + q^- - \mu^+ g^+ - \mu^- g^- + \sigma \Gamma = 0$	$\eta_d = \frac{P}{g^+} = \mu^+ - \mu^- - \frac{T\sigma}{g^+}, \quad \eta_r = \frac{g^-}{P} = \frac{1 - T\sigma/ P }{\mu^+ - \mu^-}$
Циклическое разделение бинарных смесей (рис. 1.2, з)	$q^{cb} + q_b^c + q^b - q^o - P = 0, \quad g_c^{cb} - g^c = 0,$ $g_b^{cb} - g^b = 0, \quad g^{cb} = g_c^{cb} + g_b^{cb},$ $1/T(q^{cb} + q^c + q^b + q^o - \mu_c g_c^{cb} - \mu_b g_b^{cb} - \mu_c^+ g^c - \mu_b^+ q^b) + \sigma = 0$	$\eta = \frac{g^{cb}}{ P } = \frac{g^{cb}}{ g^c(\mu_c^+ - \mu_c^-) +  g^b (\mu_b^+ - \mu_b^-) + T\sigma }$
Нециклическое разделение бинарных смесей (рис. 1.2, д)	$g_0 = g_1 + g_2, \quad g_0 x_0 - g_1 x_1 - g_2 x_2 = 0,$ $q^+ - q^- - g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0,$ $\frac{q^+}{T^+} - \frac{q^-}{T^-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0$	$\eta = \frac{g_1}{q^+} = \frac{1}{F} \left( 1 - \frac{T^-}{T^+} \right) - \sigma \frac{T^-}{F q^+},$ $\Delta S_{oi} = \Delta S_{cm0} - \Delta S_{cmi} + C_p \ln \left( \frac{T_0}{T_i} \right) - C_p \ln \left( \frac{P_0}{P_i} \right),$ $F = T^- (\Delta S_{01} + a \Delta S_{02}) - \Delta h_{01} - a \Delta h_{02},$ $\Delta h_{0i} = C_p (T_0 - T_i), \quad i = 1, 2$
Абсорбционно-десорбционный цикл (рис. 1.2, е)	$q^o + q^s = 0, \quad g^o + g^s = 0,$ $\frac{q^o}{T_a} + q^s T_s - \mu_a g^o / T_a - \mu_s g^s / T_s + \sigma = 0$	$\eta = \frac{g^s}{q^s} = \frac{1/T_a - 1/T_s}{\mu_s / T_s - \mu_a / T_a} - \sigma \frac{1/g^o}{\mu_s / T_s - \mu_a / T_a}$
Ректификация (рис. 1.2, ж)	$g_g h_g + g_b h_b + g_f h_f + q^+ + q^- = 0,$ $g_g x_{gi} + g_b x_{bi} + g_f x_{fi} = 0, \quad i = 1, \dots, l,$ $g_g s_g + g_b s_b + g_f s_f + q^+ / T_b + q^- / T_g + \sigma = 0$	$\eta = \frac{g_f}{q^+} = \frac{g_f (1/T_g - 1/T_b)}{\sum_{i=b,g,f} (g_i s_i - g_i h_i / T_g) + \sigma}$
Двигатель внутреннего сгорания (рис. 1.2, з)	$g_1 h_1 + g_2 h_2 + q_0 - P = 0,$ $g_1 s_1 + g_2 s_2 + q_0 / T + \sigma = 0, \quad g_1 + g_2 = 0$	$\eta = P/g_1 = g^1 - g^2 - \sigma T/g_1$ $g^i = h_i - T s_i, \quad i = 1, 2$



Р и с. 1.2. Структуры потоков для систем из табл. 1.1

Введя обозначения для средних интенсивностей потоков тепла, отбираемого от горячего ( $q_+$ ) и отдаваемого холодному ( $q_-$ ) источнику, а также для мощности  $p$ , запишем уравнения балансов энергии и энтропии для рабочего тела:

$$q_+ - q_- - p = 0, \tag{1.71}$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0. \tag{1.72}$$

Нули в правых частях этих уравнений соответствуют тому факту, что состояние рабочего тела либо вообще не меняется во времени (паровые и газовые турбины), либо меняется циклически (паровые машины).

Из уравнения (1.71) выразим термический КПД как

$$\eta = \frac{p}{q_+} = 1 - \frac{q_-}{q_+}.$$

В свою очередь из (1.72) следует, что

$$\frac{q_-}{q_+} = \frac{T_-}{T_+} + \sigma \frac{T_-}{q_+}.$$

Таким образом,

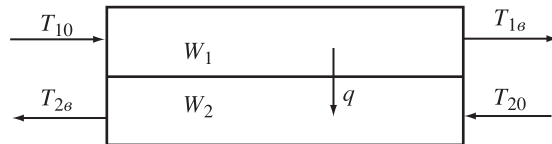
$$\eta = \left(1 - \frac{T_-}{T_+}\right) - \sigma \frac{T_-}{q_+} = \frac{1 - T_-/T_+}{1 + \sigma T_-/N}. \tag{1.73}$$

При отсутствии необратимости ( $\sigma = 0$ ) термический КПД равен КПД Карно:

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_-}{T_+}.$$

Если есть возможность оценить производство энтропии, т.е. найти  $\sigma_{\min}$  такое, что реальное  $\sigma > \sigma_{\min} > 0$ , то, подставив  $\sigma_{\min}$  в формулу (1.73), можно найти более точную оценку для  $\eta$ . В гл. 4 показано, как при заданной мощности  $p$  и кинетике теплопереноса такая оценка может быть найдена.

*Стационарный теплообмен.* Рассмотрим термодинамическую систему (рис. 1.3), состоящую из двух потоков, обменивающихся друг с другом теплом. Будем предполагать, что изменением давления потоков можно пренебречь. Обозначим через  $g_i, C_i, T_{i0}, T_{iB}, s_{i0}, s_{iB}$  — расход, теплоемкость, температуру и энтропию  $i$ -го потока на входе и выходе соответственно ( $i = 1, 2$ ),  $W_i = C_i g_i$  водяной эквивалент  $i$ -го потока.



Р и с. 1.3. Схема организации стационарного теплообмена

Уравнения баланса энергии и энтропии имеют форму

$$\begin{aligned} W_1(T_{10} - T_{1B}) + W_2(T_{20} - T_{2B}) &= 0, \\ g_1(s_{10} - s_{1B}) + g_2(s_{20} - s_{2B}) &= \sigma. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Здесь  $\sigma$  — производство энтропии за счет необратимости процессов теплопереноса.

Пусть нагрузка теплообменника  $q = W_1(T_{10} - T_{1B})$  задана, тогда из (1.74) следуют равенства

$$g_1 = \frac{q}{C_1(T_{10} - T_{1B})}, \quad g_2 = -\frac{q}{C_2(T_{20} - T_{2B})}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение баланса энтропии получим

$$\frac{s_{1B} - s_{10}}{C_1(T_{10} - T_{1B})} - \frac{s_{2B} - s_{20}}{C_2(T_{20} - T_{2B})} - \frac{\sigma}{q} = 0.$$

Если потоки по своим свойствам близки к идеальным газам, то при изохорическом теплообмене приросты энтропии потоков равны

$$s_{1B} - s_{10} = C_1 \ln \left( \frac{T_{1B}}{T_{10}} \right), \quad s_{2B} - s_{20} = C_2 \ln \left( \frac{T_{2B}}{T_{20}} \right).$$

Так что уравнение (1.74) примет форму

$$\frac{\ln(T_{20}/T_{2B})}{T_{20} - T_{2B}} - \frac{\ln(T_{10}/T_{1B})}{T_{10} - T_{1B}} = \frac{\sigma}{q}. \quad (1.75)$$

Отношение  $\Theta_i = \frac{T_{i0} - T_{iB}}{\ln(T_{i0}/T_{iB})}$  имеет размерность температуры, оно монотонно зависит от средней температуры  $i$ -го потока, а при малой разности температур сколь угодно близко к этой средней температуре ( $\Theta_i \approx 0,5(T_{i0} + T_{iB})$ ). Будем называть  $\Theta_i$  эффективной температурой  $i$ -го потока. Из (1.75) следует, что с уменьшением необратимости процесса эффективная температура нагреваемого потока возрастает. Действительно,

$$\frac{1}{\Theta_2} - \frac{1}{\Theta_1} = \frac{\sigma}{q}.$$

При заданной тепловой нагрузке и температуре  $T_{10}$  величина  $\Theta_1$  фиксирована. Минимизация производства энтропии  $\sigma$  за счет выбора  $W_1$ ,  $W_2$  и за счет организации теплообмена позволяет при фиксированной поверхности теплообменника увеличить эффективную температуру второго потока, а значит, при заданной  $T_{20}$  повысить  $T_{2B}$ .

*Процесс термического разделения двухкомпонентной смеси.* Рассмотрим процесс разделения смеси, состоящей из двух компонент. Обозначим через  $q_i$ ,  $T_i$ ,  $s_i$ ,  $p_i$ ,  $h_i$ ,  $x_i$ ,  $\mu_i$  — расход, температуру, энтропию,

давление, концентрацию ключевого компонента и его химический потенциал в  $i$ -м потоке. Примем индекс  $i = 0$  для разделяемого потока,  $i = 1$  для потока, обогащенного ключевым веществом (так что  $x_1 > x_0$ ), индекс  $i = 2$  для потока, очищенного от ключевого вещества ( $x_2 < x_0$ ). К схеме разделения подводится тепловой поток  $q_+$ , от источника с температурой  $T_+$  и отводится тепло  $q_-$  источнику с температурой  $T_-$ . Производство энтропии обозначим через  $\sigma$ .

Запишем первоначально уравнения материального, энергетического и энтропийного балансов для схемы разделения в целом, а затем рассмотрим балансовые соотношения только для рабочего тела. В последнем случае масса рабочего тела за цикл остается постоянной и производство энтропии связано только с диссипативными потоками тепло- и массопереноса.

Термодинамические балансы схемы:

$$\begin{aligned} g_0 &= g_1 + g_2, \quad g_0 x_0 - g_1 x_1 - g_2 x_2 = 0, \\ q_+ - q_- + g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 &= 0, \\ \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma &= 0. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Два последних равенства удобно переписать так, чтобы в них вошли не абсолютные значения, а приращения энтальпии и энтропии. С учетом (1.76), выразив  $g_0$  через  $g_1$  и  $g_2$ , получим

$$q_+ - q_- + g_1 \Delta h_{01} + g_2 \Delta h_{02} = 0, \quad (1.77)$$

$$g_2 \Delta s_{02} + g_1 \Delta s_{01} + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0. \quad (1.78)$$

Здесь  $\Delta s_{01} = s_0 - s_1$ ,  $\Delta s_{02} = s_0 - s_2$  — приросты энтропий, а  $\Delta h_{01} = h_0 - h_1$ ,  $\Delta h_{02} = h_0 - h_2$  — приросты энтальпий соответствующих потоков.

Как правило, концентрации ключевого вещества в потоках заданы, а в качестве термического КПД процесса разделения может быть принято отношение расходов целевого потока  $g_1$  и потока тепла  $q_+$ :

$$\eta = \frac{g_1}{q_+}. \quad (1.79)$$

Из уравнений материального баланса (1.76) выразим  $g_2$  через  $g_1$ . Обозначим  $a = (x_1 - x_0)/(x_0 - x_2)$ . Тогда расход второго потока  $g_2 = a g_1$ . Уравнения (1.77), (1.78) перепишутся в форме

$$q_+ - q_- + g_1 (\Delta h_{01} + a \Delta h_{02}) = 0, \quad (1.80)$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_1 (\Delta s_{01} + a \Delta s_{02}) + \sigma = 0. \quad (1.81)$$

Исключим из (1.80)  $q_-$ , получим  $q_- = q_+ + g_1(\Delta h_{01} + a\Delta h_{02})$  и подставим это выражение в (1.81). Приходим к равенству

$$q_+ \left( \frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right) = g_1 \left( \Delta s_{01} + a\Delta s_{02} - \frac{\Delta h_{01} + a\Delta h_{02}}{T_-} \right) + \sigma,$$

из которого следует, что

$$\eta = \frac{g_1}{q_+} = \frac{1}{F} \left( 1 - \frac{T_-}{T_+} \right) - \sigma \frac{T_-}{Fq_+} = \frac{1}{F} \left( \eta_k - \sigma \frac{T_-}{q_+} \right). \quad (1.82)$$

Здесь  $F = T_-(\Delta s_{01} + a\Delta s_{02}) - \Delta h_{01} - ah_{02}$ ,  $\eta_k$  — КПД Карно. Приращения энтальпии и энтропии, входящие в  $F$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta h_{0i} &= C_p(T_0 - T_i), \quad i = 1, 2, \\ \Delta s_{0i} &= C_p \ln \frac{T_0}{T_i} - R \ln \frac{P_0}{P_i} + \Delta s_{см0} - \Delta s_{смi}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Энтропия смешения одного моля смеси  $i$ -го потока:

$$\Delta s_{смi} = R[(1 - x_i) \ln(1 - x_i) + x_i \ln x_i], \quad i = \overline{0, 2}.$$

Первое слагаемое в выражении (1.82), как и отношение  $T_-/F$ , зависят только от параметров внешних потоков. В обратимом процессе производство энтропии  $\sigma$  равно нулю, и величина термического КПД достигает максимума, равного первому слагаемому в (1.82). Оценив снизу тем или иным способом необратимость процесса, т.е. найдя минимально возможную при данной производительности и кинетике тепло- и массопереноса величину  $\sigma$ , можно уточнить обратимую оценку термического КПД процесса разделения.

В том случае, когда разделение осуществляется за счет циркуляции рабочего тела с поочередным поглощением им примеси в первом полуцикле (абсорбция или адсорбция) и выделением во втором полуцикле (десорбция), выражение для термического КПД, близкое к (1.82), но включающее химические потенциалы потоков, можно получить из термодинамических балансов для рабочего тела.

Так как параметры рабочего тела меняются периодически, то изменение его массы  $\Delta M$ , внутренней энергии  $\Delta E$  и энтропии  $\Delta S$  за цикл равны нулю. Из этих условий следует, что расход вещества, поглощенного из смеси в первом полуцикле, равен  $g_1$ . Уравнения термодинамических балансов примут форму

$$q_+ - q_1 + g_1 \Delta h_{01} = \frac{\Delta E}{\tau} = 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_1 \left( \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0} \right) + \sigma = \frac{\Delta S}{\tau} = 0. \quad (1.84)$$

Исключая из (1.83)  $q_1 = q_+ + g_1 \Delta h_{01}$  и подставляя в (1.84), получим термический КПД цикла разделения в форме

$$\eta = \frac{g_1}{q_+} = \frac{1}{\varphi} \left( 1 - \frac{T_-}{T_+} \right) - \sigma \frac{T_-}{q_+ \varphi} = \frac{1}{\varphi} \left( \eta_k - \sigma \frac{T_-}{q_+} \right). \quad (1.85)$$

Функция  $\varphi$  зависит, как и  $F$  в выражении (1.82), от параметров входного потока и потока, обогащенного целевым компонентом

$$\varphi = T_- \left( \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0} \right) - \Delta h_{01}.$$

В том частном случае, когда температуры разделяемого потока и первого потока одинаковы ( $T_0 = T_1 = T$ ), приращение энтальпии  $\Delta h_{01} = 0$  и функция  $\varphi$  примет вид

$$\varphi = \frac{T_-}{T} (\mu_1 - \mu_0).$$

Для оценки производства энтропии  $\sigma$  весь процесс можно разбить на стадии. Например, абсорбционно-десорбционный цикл можно условно разбить на стадии тепло- и массопереноса. Оценив снизу производство энтропии  $\sigma_+$  на стадии теплообмена, когда горячий раствор, выходящий из десорбера, отдает свое тепло раствору, поступающему в десорбер, производство энтропии  $\sigma_2$  на стадии абсорбции,  $\sigma_3$  на стадии нагрева раствора в десорбере внешним источником и  $\sigma_4$  на стадии выделения примеси в десорбере, можно найти  $\sigma = \sum_{i=1}^4 \sigma_i$ . Эта величина после подстановки в (1.85) позволяет найти необратимую верхнюю оценку для термического КПД цикла.

*Диффузионно-механический и термо-диффузионный циклы.* Механическая работа может быть получена не только за счет передачи тепла от более горячего к более холодному резервуару, как это происходит в цикле тепловой машины, но и за счет передачи вещества от тела с большим к телу с меньшим химическим потенциалом. Рассмотрим систему, состоящую из двух источников, в одном из которых химический потенциал некоторого вещества равен  $\mu_+$ , а в другом  $\mu_-$  (для определенности  $\mu_+ > \mu_-$ ) и рабочего тела, параметры которого циклически изменяются. Как и ранее, запишем балансы вещества, энергии и энтропии, учтя, что в среднем за цикл внутренняя энергия, энтропия и количество молей  $N$  вещества для рабочего тела не изменяются.

Получим:

а) для энергии

$$q_+ - q_- - P = \dot{E} = 0; \quad (1.86)$$

б) для вещества

$$g_+ - g_- = \dot{N} = 0; \quad (1.87)$$

в) для энтропии

$$\frac{1}{T} (q_+ - q_- - \mu_+ g_+ + \mu_- g_-) + \sigma = \dot{S} = 0. \quad (1.88)$$

Здесь принято, что температуры потоков  $g_+$  и  $g_-$  одинаковы.

В качестве критерия эффективности цикла может быть принято отношение средней мощности к потоку  $g_+$ :

$$\eta = \frac{P}{g_+}.$$

Из условий (1.86)–(1.88), исключая  $g_-$ ,  $g_+$  и  $q_-$ , получим

$$\eta = \mu_+ - \mu_- - \sigma \frac{T}{g} = \frac{\mu_+ - \mu_-}{1 + \sigma T/P}. \quad (1.89)$$

Обратимая оценка показателя эффективности диффузионно-механического цикла равна разности химических потенциалов  $\mu_+ - \mu_-$ . Этого следовало ожидать по смыслу химического потенциала как величины свободной энергии Гиббса, отнесенной к одному молю вещества. Исследуя необратимость массопереноса и оценив величину  $\sigma$ , можно с использованием (1.89) существенно улучшить обратимую оценку и связать показатель эффективности с коэффициентами массопередачи и другими факторами, определяющими необратимость.

Читателю предлагается проделать аналогичные выкладки в том случае, когда температуры резервуаров различны, а показатель эффективности цикла равен отношению механической мощности к суммарному потоку энергии, отбираемой от одного из источников:

$$\eta = \frac{P}{g_+ \mu_+ + q_+}.$$

В целом ряде процессов происходит затрата высокопотенциального тепла с температурой  $T_+$  с целью передачи потока  $g$  от источников с низким потенциалом  $\mu_-$  к источнику с высоким потенциалом  $\mu_+$  [36]. Из полученных выше выражений (1.51)–(1.53) следует, что коэффициент эффективности таких термо-диффузионных циклов равен

$$\eta = \frac{g}{q} = \frac{1/T_- - 1/T_+}{\mu_+/T_+ - \mu_-/T_-} - \frac{\sigma}{q(\mu_+/T_+ - \mu_-/T_-)}. \quad (1.90)$$

**Использование уравнений балансов для выделения области реализуемых значений параметров.** Рассмотрим стационарный процесс, в котором  $\dot{E} = \dot{N} = \dot{S} = 0$ . В этом случае из уравнений термодинамических балансов (1.48)–(1.50) и неравенства  $\sigma \geq \sigma_{\min}$  вытекают условия, которым должны удовлетворять реализуемые значения переменных в стационарном режиме термодинамического процесса:

$$\sum_j g_j h_j + \sum_j q_{dj} + \sum_j q_j - N_a = 0, \quad (1.91)$$

$$\sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu = 0, \quad (1.92)$$



$$\sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dj} \mu_{di}}{T_{dj}} + \sum_{iv} \frac{\mu_{iv} n_{iv}}{T_v} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} \leq -\sigma_{\min}. \quad (1.93)$$

При этом нужно учесть, что величина  $\sigma_{\min}$  в свою очередь зависит от интенсивности потоков, кинетических коэффициентов, гидродинамики аппаратов и пр.

### 1.5. Последовательность решения оптимизационных задач термодинамики

Как было видно для всех рассмотренных примеров, из уравнений термодинамических балансов следует, что показатель эффективности использования энергии в термодинамических системах (термический КПД) монотонно уменьшался с ростом производства энтропии  $\sigma$ , т.е. с ростом необратимых потерь энергии. Величина  $\sigma$  зависит от кинетики тепло- и массообменных процессов, а также кинетики химических реакций. Уравнения кинетики связывают диссипативные потоки энергии и вещества с интенсивными переменными взаимодействующих подсистем. Связь показателя эффективности с производством энтропии дана в табл. 1.1.

Задача оптимальной в термодинамическом смысле организации процесса состоит в том, чтобы выбором температур, давлений, химических потенциалов взаимодействующих подсистем, а также коэффициентов в уравнениях кинетики добиться минимума производства энтропии при заданной интенсивности потоков. В распределенных стационарных системах (трубчатых теплообменниках, реакторах, колонных аппаратах и пр.) интенсивные переменные меняются по длине, и требуется найти оптимальный закон изменения этих переменных и коэффициентов тепло- и массопереноса вдоль аппарата. В нестационарных процессах требуется найти закон изменения интенсивных переменных во времени.

Важным свойством производства энтропии в системе является ее аддитивность, что позволяет на первом этапе разбить сложную систему на отдельные подсистемы, оптимизировать каждую из подсистем при тех или иных параметрах поступающих и выходящих из нее потоков. На следующем этапе требуется так согласовать средние интенсивности потоков, чтобы удовлетворить системным связям и минимизировать суммарное производство энтропии.

Как правило, для реализации найденных законов изменения температур, давлений, химических потенциалов мы можем изменять объемы подсистем, коэффициенты тепло- и массообмена. Самым простым и самым распространенным способом изменения коэффициентов

тепло- и массообмена является установление и разрыв контактов между подсистемами. В тех случаях, когда перечисленные способы управления не позволяют реализовать оптимальное решение, величина  $\sigma^{\min}$ , соответствующая этому решению, дает оценку снизу для производства энтропии. Таким образом, при заданной интенсивности процесса нельзя получить производство энтропии, меньшее, чем  $\sigma^{\min}$ . Подстановка  $\sigma^{\min}$  в выражение для термического КПД или другого показателя эффективности, монотонно зависящего от  $\sigma$ , позволяет получить верхнюю оценку, которую при заданной интенсивности нельзя превзойти. Естественно, что эта оценка ниже обратимой, а значит ближе к истине. Она зависит от производительности, коэффициентов тепло- и массообмена, т.е. от конструкции и размеров аппарата, что позволяет сопоставить термодинамические показатели со стоимостными и найти компромиссное решение. Подстановка  $\sigma^{\min}$  в условия (1.91)–(1.93) позволяет выделить область реализуемости необратимых процессов.

В ряде случаев с ростом производительности системы  $\sigma^{\min}$  растет столь быстро, что эта производительность при любых затратах энергии не может превзойти некоторого предела, что позволяет оценить и предельную производительность процессов.

## Глава 2

# ПРОЦЕССЫ МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ

Из примеров, приведенных в параграфе 1.4, видно, что предельные возможности термодинамических систем ограничены необратимостью протекающих в них процессов. Показателем этой необратимости является диссипация (производство энтропии). В данной главе рассмотрены процессы, которые при заданной средней интенсивности (средней величине движущих сил) имеют минимальную диссипацию. В этих процессах движущие силы так распределены во времени или в пространстве, что необратимость процесса, оцениваемая производством энтропии, минимальна. В ряде случаев точный минимум найти не удается или для его определения требуется слишком много исходных данных. Тогда стремятся получить оценку диссипации снизу.

Так как в сложной системе производство энтропии аддитивно связано с производством энтропии в каждом из ее элементов, то при проектировании системы достаточно оптимально распределить между подсистемами значение средней интенсивности процессов. Каждому значению средней интенсивности соответствует минимально возможная величина диссипации энергии. При проектировании сложных систем необходимо предварительно найти предельные возможности входящих в них подсистем.

Первоначально рассмотрим задачу о минимальной диссипации в общем виде. Затем полученные соотношения конкретизируем для целого ряда процессов (тепло- и массопереноса, дросселирования, химических превращений и пр.).

Процессы минимальной диссипации тесно связаны с одной из центральных в термодинамике задач о максимальной работе. Класс процессов минимальной диссипации столь же важен, как и класс обратимых процессов. Он сужает границы наших возможностей настолько, что иногда эти границы оказываются реализуемыми и расширить их можно лишь за счет добавочных вложений (увеличение поверхностей контакта) либо за счет уменьшения интенсивности процесса.

В двух последних параграфах рассмотрены условия И. Пригожина, согласно которым стационарному состоянию открытой системы соответствует минимум производства энтропии, а также методика классификации процессов, по типу условий минимальной диссипации.

### 2.1. Условия минимальной диссипации

**Постановка задачи.** Термодинамический процесс характеризуют два типа переменных — интенсивные (температура, давление, концентрация и пр.) и экстенсивные (объем, внутренняя энергия, число молей некоторого вещества в системе, энтропия и др.). При делении однородной системы на две подсистемы интенсивные переменные для каждой из них оказываются неизменными, а экстенсивные переменные уменьшаются во столько раз, во сколько объем подсистемы меньше исходного суммарного объема.

Будем обозначать интенсивные переменные для  $i$ -й системы через  $u_i$ , а экстенсивные через  $x_i$ . В общем случае эти переменные векторные. Когда две подсистемы контактируют друг с другом, различие между  $u_1$  и  $u_2$  приводит к возникновению потока  $J(u_1, u_2)$ . Функция  $J$  для скалярных  $u_1$  и  $u_2$  непрерывна, дифференцируема по совокупности аргументов и обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} > 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} < 0, \quad (2.1)$$

$$J(u_1, u_2) = 0, \quad \text{при} \quad u_2 = u_1.$$

Поток при этом иногда записывают как

$$J(u_1(l), u_2(l)) = a(l)\check{J}(u_1(l), u_2(l)), \quad (2.2)$$

где  $a(l) > 0$  — коэффициент, характеризующий распределение поверхности переноса по  $l$ . Когда общий коэффициент переноса  $A$  задан, то

$$\int_0^L a(l)dl = A. \quad (2.3)$$

Если  $a$  постоянно, то  $a(l) = A/L$ . Аргумент  $l$  может иметь смысл времени или поверхности контактирования.

В более общем случае  $J = (J_1, \dots, J_j, \dots, J_m)$  — вектор потоков,  $u_\nu = (u_{\nu 1}, \dots, u_{\nu j}, \dots, u_{\nu m})$  — вектор интенсивных переменных  $\nu$ -й подсистемы ( $\nu = 1, 2$ ). Первое из условий (2.1) примет вид

$$\frac{\partial J_j}{\partial u_{1k}} > 0, \quad \frac{\partial J_j}{\partial u_{2k}} < 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Второе условие не изменится.

Различие между векторами  $u_1$  и  $u_2$  приводит к появлению движущих сил  $X_j$ , каждая из которых определяется только  $u_{1j}$  и  $u_{2j}$ , удовлетворяет условиям, аналогичным (2.1), и имеет тот же знак, что и поток  $J_j$ . Производство энтропии, характеризующее необратимость

процесса, равно среднему значению скалярного произведения вектора потоков на вектор движущих сил:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_0^L \sum_{j=1}^m J_j(u_1, u_2) X_j(u_{1j}, u_{2j}) dl \quad (2.5)$$

Отмеченные выше условия, которым удовлетворяют функции  $J_j$  и  $X_j$ , приводят к тому, что сумма, стоящая под знаком интеграла, положительно определенная.

Будем предполагать, что в нашем распоряжении находится одна из интенсивных переменных (для определенности  $u_2(l)$ ), которая может принимать значения из некоторого множества  $V$ . Вторая же переменная в силу изменения  $X_1$  изменяется так, что

$$\frac{du_{1j}}{dl} = \varphi_j(u_1, u_2), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

Кроме того, средние значения всех или части потоков заданы:

$$\frac{1}{L} \int_0^L J_j(u_1, u_2) dl = \bar{J}_j, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad k_1 \leq m. \quad (2.7)$$

В этих условиях требуется найти минимальное производство энтропии  $\bar{\sigma}$ .

**Скалярный случай.** Получим условия оптимальности задачи (2.5)–(2.7) первоначально для скалярного случая ( $m = 1$ ), а затем для векторного. В скалярном случае задача запишется в форме

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_0^L J(u_1, u_2) X(u_1, u_2) dl \rightarrow \min_{u_2 \in V} \quad (2.8)$$

при условиях

$$\frac{du_1}{dl} = \varphi(u_1, u_2), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L J(u_1, u_2) dl = \bar{J}. \quad (2.10)$$

Величина  $L$  может быть как фиксированной, так и подлежать оптимальному выбору.

Сделаем допущение, что в оптимальном процессе  $\varphi(u_1, u_2) \neq 0$ ; это позволяет провести замену переменной

$$dl = \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)}. \quad (2.11)$$

После этой замены задача (2.8)–(2.10) примет вид (считаем первоначально  $L$  заданной)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{J(u_1, u_2)X(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)} du_1 \rightarrow \min_{u_2 \in V} \quad (2.12)$$

при условиях

$$\frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{J(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)} du_1 = \bar{J}, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)} = 1, \quad (2.14)$$

и фиксированном значении  $u_{10}$ .

Эта задача существенно проще исходной задачи (2.8)–(2.10), так как не содержит дифференциальной связи (2.9). Ее решение  $u_2^*$  получается не как функция  $l$ , а как функция  $u_1$ , что во многих случаях гораздо полезнее. Функция Лагранжа для задачи (2.12)–(2.14) запишется в форме

$$R = \frac{1}{\varphi(u_1, u_2)} [J(u_1, u_2)(X(u_1, u_2) + \lambda_1) + \lambda_2], \quad (2.15)$$

условия оптимальности в форме принципа максимума (см. гл.9) имеют вид

$$u_2^*(u_1, \lambda) = \arg \max_{u_2 \in V} R(u_1, u_2, \lambda). \quad (2.16)$$

При отсутствии ограничений или внутри допустимой области  $V$  условие стационарности  $R$  по  $u_2$  примет форму

$$(X + \lambda_1)(\varphi J'_{u_2} - \varphi'_{u_2} J) + \varphi J X'_{u_2} - \lambda_2 \varphi'_{u_2} = 0. \quad (2.17)$$

Условие (2.17) совместно с равенствами (2.13), (2.14), а также с требованием

$$R(u_{1L}, u_2(u_{1L}), \lambda) = 0 \quad (2.18)$$

позволяет найти  $u_2^*(u_1)$ ,  $u_{1L}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

Задача сильно упрощается в одном распространенном случае, когда скорость изменения переменной  $u_1$  пропорциональна потоку:

$$\varphi(u_1, u_2) = c(u_1)J(u_1, u_2). \quad (2.19)$$

В этом случае первое слагаемое в условии (2.17) обращается в нуль, и оно примет форму

$$J^2(u_1, u_2) = \lambda_2 \left( \frac{\partial J(u_1, u_2)}{\partial u_2} : \frac{\partial X(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right), \quad (2.20)$$

а условие (2.13) переписывается как

$$\int_{u_{10}}^{u_{1L}} \frac{du_1}{c(u_1)} = \bar{J} \cdot L, \quad (2.21)$$

что определяет  $u_{1L}$  независимо от оптимального решения  $u_2^*(u_1)$ .

*Распределение поверхности.* В том случае, когда коэффициент переноса  $a$  не постоянен, поток задан в форме (2.2) и удовлетворяет ограничению (2.3), функция  $a(l)$  подлежит оптимальному выбору. Условие стационарности по  $a(u_1)$  функции Лагранжа

$$R_1 = R(u_1, u_2, \lambda) - \lambda_3 \frac{a(u_1)}{\varphi(u_1, u_2)},$$

где  $R$  определяется выражением (2.15), приводит к равенству

$$\tilde{J}(u_1, u_2)(X(u_1, u_2) + \lambda_1) = \lambda_3, \quad (2.22)$$

которое нужно добавить к условиям (2.17), (2.18) вместе с ограничением (2.3) и условием неотрицательности  $a(u_1) \geq 0$ .

**Векторный случай.** Условия оптимальности для задачи (2.5)–(2.7) имеют форму принципа максимума Понтрягина (см. [40]). Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^k [\psi_0 J_j(u_1, u_2) X_j(u_{1j}, u_{2j}) + \psi_j \varphi_j(u_1, u_2) + \lambda_j J_j(u_1, u_2)].$$

Сопряженные переменные  $\psi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\psi_j}{dl} = -\frac{\partial H}{\partial u_{1j}}, \quad j = 1, \dots, k, \quad \psi_j(L) = 0, \quad (2.23)$$

а переменные  $u_2^*$  определяются по условию максимума  $H$

$$u_{2j}^*(l) = \operatorname{argmax}_{u_{2j} \in V} H(u_1^*(l), \psi(l), \lambda), \quad j = 1, \dots, k, \quad \lambda_j = 0 \quad \text{при} \quad j > k_1. \quad (2.24)$$

В невырожденном случае  $\psi_0 = -1$ .

*Линейная зависимость потоков от движущих сил.* Аналитическое решение уравнений (2.23), (2.24) совместно с уравнениями (2.6) и условиями (2.7) возможно лишь в редких случаях. При малом отклонении от термодинамического равновесия, когда потоки  $J$  и силы  $X$  связаны соотношениями Онзагера

$$J = AX^T, \quad (2.25)$$

в которых матрица феноменологических коэффициентов  $A$  положительно определенная, выражение, стоящее под знаком интеграла в

(2.5), — положительно определенная квадратичная форма от термодинамических сил. В этом случае решение задачи кардинально упрощается, а именно, на первом ее этапе можно отбросить условия (2.6) и перейти к задаче о минимуме среднего значения квадратичной формы

$$\bar{\sigma} = \overline{(XAX^T)} \rightarrow \min \quad (2.26)$$

при условиях

$$\sum_{\nu=1}^k a_{\nu j} \overline{X_{\nu}} = \overline{J_j}, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad (k_1 \leq k). \quad (2.27)$$

Переменными в этой усредненной задаче является вектор движущих сил  $X$ . Так как задача (2.26), (2.27) выпуклая, то ее решение соответствует постоянству искомым переменных, а значит, определение  $X_{\nu}^*$  сводится к решению простой задачи квадратичного программирования.

На втором этапе находят значения вектора  $u_2 \in V$ , удовлетворяющие условиям

$$X_j(u_{1j}, u_{2j}) = X_j^*, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.28)$$

и уравнениям (2.6). Для этого можно рассматривать условия (2.28) как уравнения, определяющие зависимость  $u_2(u_1)$ . После подстановки этой зависимости в (2.6) и решения уравнений получим  $u_1^*(l)$ , а значит, и  $u_2^*(u_1^*(l)) = u_2^*(l)$ . Если найденное решение удовлетворяет ограничениям, то задача (2.26), (2.27) эквивалентна исходной, и мы нашли процесс минимальной диссипации. Если  $u_2^*(l) \notin V$ , то решение задачи (2.26), (2.27) дает оценку снизу для минимального производства энтропии в необратимом процессе.

*Потоки не связаны друг с другом.* Второй случай, когда решение многомерной задачи кардинально упрощается, это случай независимости взаимодействий, когда каждый из потоков зависит только от своих переменных

$$J_j = J_j(u_{1j}, u_{2j}), \quad j = 1, \dots, k,$$

то же относится и к силам  $X_j$ , причем

$$\frac{du_{1j}}{dl} = \varphi_j(u_{1j}, u_{2j}), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = \overline{u_1}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.29)$$

В этом случае задача о минимуме диссипации распадается на  $k$  одномерных задач вида

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{L} \int_0^L J_j(u_{1j}, u_{2j}) X_j(u_{1j}, u_{2j}) dl \rightarrow \min \quad (2.30)$$



при условии (2.29) и

$$\frac{1}{L} \int_0^L \varphi_j(u_{1j}, u_{2j}) dl = \frac{u_1(L) - u_1(0)}{L}. \quad (2.31)$$

Аналогично одномерному случаю для выбора каждой из переменных  $u_{2j}$  можно записать требование

$$u_{2j}^* = \arg \max_{u_{2j} \in V_j} \left[ \frac{1}{L} (J_j X_j + \lambda_j) \right], \quad (2.32)$$

или, в более слабой форме,

$$\frac{J_j(u_{1j}, u_{2j})}{dJ_j/d u_{2j}} \frac{d}{du_{2j}} (J_j X_j) - J_j X_j = \text{const} = \lambda_j. \quad (2.33)$$

Величины  $\lambda_j$  определяются из условий

$$\int_{u_{1j}(0)}^{\bar{u}_{1j}} \frac{du_{1j}}{\varphi_j(u_{1j}, u_{2j}^*(\lambda_j, u_{1j}))} = L, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.34)$$

Может оказаться, что значения  $\bar{u}_{1j}$  заданы не для всех  $j$ , а только для  $j = 1, \dots, k_1$ ,  $k_1 < k$ . Тогда для определения  $\lambda_j$  совместно с  $u_{1j}$  при  $j = k_1 + 1, k$  имеем дополнительно условия равенства нулю выражения, стоящего под знаком  $\arg \max$  в (2.32), причем в функциях  $\varphi_j, g_j, f_j$  вместо  $u_{1j}$  стоит искомое  $\bar{u}_{1j}$ , а вместо  $u_{2j}$  стоит  $u_{2j}^*(\lambda_j, \bar{u}_{1j})$ . Эти требования следуют из принципа максимума Потрягина.

*Выбор значения  $L$ .* Введение множителя  $1/L$  в критерий (2.5) и условия (2.7) при фиксированном значении  $L$  никак не влияет на оптимальное решение, однако оно делает задачу осмысленной и при стремлении  $L$  к бесконечности. Кроме того, само значение  $L$  может подлежать оптимальному выбору.

При таком выборе функционал Лагранжа для соответствующей экстремальной задачи должен быть стационарен по  $L$ .

Например, в задаче (2.12)–(2.14) функционал Лагранжа

$$\bar{R} = \frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_{1L}} R(u_1, u_2, \lambda) du_1,$$

где функция  $R$  определяется равенством (2.15). Условие стационарности  $\bar{R}$  по  $L$  приводит к уравнению

$$R(u_1(L), u_2(L), \lambda) = \frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} R(u_1, u_2, \lambda) du_1.$$

В общей задаче (2.5)–(2.7) для выбора  $L$  к условиям (2.23), (2.24) добавятся условия

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k J_j(u_1(L), u_2(L)) [X_j(u_1(L), u_2(L)) + \lambda_j] = \\ = \frac{1}{L} \int_0^L \sum_{j=1}^k J_j(u_1, u_2) (X_j(u_1, u_2) + \lambda_j) dl, \end{aligned} \quad (2.35)$$

вытекающие из требования стационарности по  $L$  интеграла от функции  $H$ , в которую добавлены множители  $1/L$  перед первым и третьим слагаемыми под знаком суммы.

## 2.2. Условия минимальной диссипации для конкретных процессов

Конкретизируем условия минимальной диссипации для некоторых процессов.

**Теплоперенос.** Термодинамическая сила  $X$  в задаче о минимальной диссипации процесса теплопереноса равна

$$X(T_1, T_2) = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right), \quad (2.36)$$

а поток  $J$  равен  $q(T_1, T_2)$ . Функция  $\varphi$  в условиях (2.9), определяет скорость изменения температуры  $T_1$ . В большинстве случаев можно считать, что

$$\frac{dT_1}{dl} = -\frac{1}{c_1(T_1)} q(T_1, T_2), \quad T_1(0) = T_{10}, \quad (2.37)$$

где  $c_1(T_1)$  — теплоемкость горячего источника. Для процесса, протекающего во времени, с сосредоточенными параметрами горячего источника аргумент  $l$  имеет смысл времени, а  $L$  — продолжительности процесса. Для непрерывного теплообменника, в котором температура горячего потока меняется от сечения к сечению, величина  $c$  представляет собой водяной эквивалент потока (произведение его расхода на удельную теплёмкость), а  $L$  — длину теплообменника.

В соответствии с условиями (2.20), (2.21), (2.14) минимальной диссипации при заданной средней интенсивности теплового потока  $\bar{q}$  для процесса теплообмена получим

$$q^2(T_1, T_2) = -\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial T_2} \cdot T_2^2, \quad (2.38)$$

$$\int_{T_{1L}}^{T_{10}} c_1(T_1) dT_1 = \bar{q} \cdot L, \quad (2.39)$$

$$\int_{T_{1L}}^{T_{10}} \frac{c_1(T_1) dT_1}{q(T_1, T_2)} = L. \quad (2.40)$$

Первое из этих условий определяет  $T_2^*(T_1, \lambda_2)$ , второе —  $T_{1L}$ , а третье — константу  $\lambda_2$ .

Для линейного закона теплопереноса

$$q = \alpha(T_1 - T_2) \quad (2.41)$$

с постоянной теплоемкостью (водяным эквивалентом)  $c$  из условий (2.37)–(2.39) получим

$$\alpha^2(T_1 - T_2)^2 = -\lambda_2(-\alpha)T_2^2 \Rightarrow \alpha \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right)^2 = \lambda_2. \quad (2.42)$$

Таким образом в процессе минимальной диссипации, для любого  $l$  отношение  $\frac{T_1}{T_2}$  должно быть постоянно и равно

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}. \quad (2.43)$$

Из (2.39) следует, что  $T_{1L} = T_{10} - \bar{q}L/c$ ; наконец, из условия (2.39) вытекает, что

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}}{1 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}} = -\frac{c}{\alpha L} \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}} \right). \quad (2.44)$$

Минимальное производство энтропии, получаемое после подстановки (2.43), (2.44) в выражение

$$\sigma = \frac{c}{L} \int_{T_{1L}}^{T_{10}} \left( \frac{1}{T_2(T_1)} - \frac{1}{T_1} \right) dT_1,$$

равно

$$\sigma^* = \frac{c^2 \ln^2 \left( 1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}} \right)}{\left[ \alpha L + c \ln \left( 1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}} \right) \right] L}.$$

Отметим, что производство энтропии в каждом сечении теплообменника или в каждый момент времени для процесса минимальной диссипации одинаково. Для более общего закона теплопереноса вида

$$q(T_1, T_2) = \alpha(T_1^n - T_2^n) \quad (2.45)$$

условия (2.38) примут форму

$$\alpha(T_1^n - T_2^n)^2 = \lambda_2 n T_2^{n+1},$$

или

$$\frac{q(T_1, T_2)}{\alpha T_2^{(n+1)/2}} = \left( \frac{T_1^n}{T_2^{(n+1)/2}} - T_2^{(n-1)/2} \right) = \sqrt{\frac{\lambda_2 n}{\alpha}} = \text{const.} \quad (2.46)$$

При  $n > -1$  тепловой поток с ростом температуры  $T_2$  растет, а при  $n < -1$  — падает. При  $n = -1$  тепловой поток, соответствующий минимальной диссипации, постоянен и равен  $\bar{q}$ , а само минимальное производство энтропии в соответствии с (2.8) равно

$$\sigma^* = \frac{\bar{q}^2}{\alpha} \quad (2.47)$$

При этом для  $n = -1$  как и для ньютоновского закона минимуму диссипации соответствует постоянство производства энтропии для каждого сечения теплообменника или для каждого момента времени.

Отметим, что далеко не всегда в процессе минимальной диссипации производство энтропии постоянно. В параграфе 2.4 получено условие, выделяющее те термодинамические процессы, для которых это свойство справедливо (см. п.2.4).

**Изотермический массоперенос.** Интенсивными переменными подсистем в этом случае являются векторы концентраций  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) с составляющими  $C_{ik}$ , характеризующими состав подсистем. Как потоки веществ, так и химические потенциалы зависят от концентраций. В выражении (2.5) потоки и движущие силы имеют вид

$$\begin{aligned} J_j(u_1, u_2) &= J_j(C_1, C_2), \\ X_j(u_{1j}, u_{2j}) &= \frac{1}{T(C_1, C_2)} \left( \mu_{1j}(C_{2j}, T) - \mu_{2j}(C_{1j}, T) \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Остановимся на случае, когда из одной подсистемы в другую переходит только один ключевой компонент. При этом давление в подсистеме вследствие диффузии не меняется. Концентрацию ключевого компонента в первой подсистеме обозначим через  $C_1$ , а во второй — через  $C_2$ . Начальный состав каждой подсистемы задан, а так как задана интенсивность массопереноса

$$\int_0^L g(C_1, C_2) dl = \bar{g}L, \quad (2.49)$$

то и конечный состав фиксирован. Минимизация диссипации сводится к минимизации производства энтропии, возникающего вследствие

диффузии

$$\bar{\sigma}_g = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{g(C_1, C_2)}{T(C_1, C_2)} (\mu_1(C_1, T) - \mu_2(C_2, T)) dl \rightarrow \min. \quad (2.50)$$

Чтобы получить зависимость от  $C_1$  и  $C_2$  скорости изменения концентрации  $C_1$ , необходимо учесть, что поток  $g$  меняет как состав первой подсистемы, так и общее количество вещества  $G_1$  в ней, так как это поток лишь ключевого компонента

$$\frac{d(G_1 C_1)}{dl} = \frac{dG_1}{dl} = -g(C_1, C_2). \quad (2.51)$$

Из условий (2.51) следует, что

$$\frac{dC_1}{dl} = -\frac{1-C_1}{G_1} g(C_1, C_2), \quad C_1(0) = C_{10}, \quad (2.52)$$

а

$$\frac{dG_1}{dC_1} = \frac{G_1}{1-C_1},$$

откуда

$$G_1(C_1) = \frac{G_1(0)(1-C_{10})}{1-C_1} = \frac{\tilde{G}}{1-C_1},$$

где  $\tilde{G}$  — количество инертного компонента в первой подсистеме. После подстановки  $G_1(C_1)$  в (2.52) получим

$$\frac{dC_1}{dl} = -\frac{1}{\tilde{G}} (1-C_1)^2 g(C_1, C_2), \quad C_1(0) = C_{10}. \quad (2.53)$$

Вид правой части этого уравнения позволяет использовать условия оптимальности (2.20), (2.21), которые примут форму

$$\frac{\partial T}{\partial C_2} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial T} - \frac{\partial \mu_2}{\partial T} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{T} \right) - \frac{\partial \mu_2}{\partial C_2} = \lambda_2 \left( \frac{\partial g}{\partial C_2} \right) \frac{T}{g^2(C_1, C_2)}, \quad (2.54)$$

$$C_{1L} = \frac{C_{10} G_{10} - \bar{g} L}{G_{10} - \bar{g} L}. \quad (2.55)$$

Для химических потенциалов в форме

$$\mu_i = \mu_0(P, T) + RT \ln C_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.56)$$

производная  $\frac{\partial \mu_2}{\partial C_2} = \frac{RT}{C_2}$ , так что условия (2.54) примут вид

$$-\frac{R}{C_2} = \lambda_2 \left( \frac{\partial g}{\partial C_2} \right) \frac{1}{g^2}. \quad (2.57)$$

Константу  $\lambda_2$  находят из условия

$$\int_{C_{1L}}^{C_{10}} \frac{\tilde{G}}{T(C_1, C_2)(1-C_1)^2} dC_1 = L$$

после подстановки в него решения  $C_2^*(C_1, \lambda_2)$ , уравнения (2.57).

Особенно простое решение соответствует случаю, когда поток диффузии пропорционален разности химических потенциалов и температура  $T$  постоянна:

$$g = \alpha (\mu_1(C_1) - \mu_2(C_2)).$$

В этом случае из (2.54) следует, что

$$g^* = \text{const} = \bar{g},$$

$$\frac{dC_1}{dl} = \frac{\bar{g}(1 - C_1)}{G_{10} - \bar{g}l} \Rightarrow C_1(l) = 1 - (1 - C_{10}) \frac{G_{10}}{G_{10} - \bar{g}l}.$$

Для химических потенциалов в форме (2.56) постоянству потока соответствует постоянство отношения

$$\frac{C_1}{C_2} = \exp\left(\frac{\bar{g}}{2T}\right).$$

Минимальное производство энтропии при этом

$$\bar{\sigma}^* = \frac{\bar{g}^2}{\alpha T}.$$

Другие законы массопереноса рассмотрены в [35].

**Деформационное взаимодействие.** В данном случае функция  $g(u_1, u_2)$  соответствует зависимости скорости перемещения поршня  $v$  от давлений  $P_1$  и  $P_2$ . В большинстве случаев скорость зависит только от разности  $P_1 - P_2$ , так что производство энтропии можно записать как

$$\sigma(P_1 - P_2) = \frac{v(P_1 - P_2)}{T} (P_1 - P_2) \rightarrow \min; \quad (2.58)$$

среднее значение этой величины минимизируют при заданном среднем значении скорости  $\bar{v}$

$$\frac{1}{L} \int_0^L v(P_1(l) - P_2(l)) dl = \bar{v}. \quad (2.59)$$

Выражая  $\Delta P = P_1 - P_2$  через  $v$  как  $\Delta P(v)$ , можно записать усредненную задачу о минимуме диссипации как

$$\bar{\sigma}(v) = \overline{\frac{1}{T} v \Delta P(v)} \rightarrow \min / \bar{v} = v_0. \quad (2.60)$$

Если  $\sigma(v)$  выпукла вниз, то оптимальная скорость должна быть постоянна и равна  $\bar{v}$ . В противном случае решению усредненной задачи нелинейного программирования (2.60) соответствует ордината выпуклой оболочки функции  $\sigma(v)$  для  $v = \bar{v}$ . Скорость принимает не более двух значений  $v^1$  и  $v^2$ , определяющихся условиями

$$L(\lambda^*, v^i) = \max_{\lambda} \min_v [\sigma(v) + \lambda(v - \bar{v})]. \quad (2.61)$$

Значения функции  $L$  в точках  $v^i$  ( $i = 1, 2$ ) одинаковы. Доля  $\gamma$  периода  $L$ , в течение которой  $v^*(l) = v^1$ , находится из условия

$$\gamma v^1 + v^2(1 - \gamma) = \bar{v}, \quad \gamma \geq 0.$$

**Дросселирование.** Обозначим через  $P_1$  и  $P_2$  давление до и после сужающего устройства, а через  $g(P_1, P_2)$  — расход через него. Будем предполагать, что процесс происходит изотермически, т.е. температура не изменяется. Производство энтропии

$$\sigma = g(P_1, P_2) \frac{\mu_1(P_1, T) - \mu_2(P_2, T)}{T}. \quad (2.62)$$

Для идеального газа выражение (2.62) примет форму

$$\sigma = g(P_1, P_2) \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (2.63)$$

Пусть  $P_1$  — давление в замкнутой емкости объема  $V$ , оно снижается при истечении газа через сужающее устройство. Задана продолжительность процесса  $\tau$  и средняя интенсивность потока  $\bar{g}$ . Требуется минимизировать диссипацию:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(P_1, P_2) \frac{\mu_1(P_1, T) - \mu_2(P_2, T)}{T} dt \rightarrow \min, \quad (2.64)$$

при условиях

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(P_1, P_2) dt = \bar{g}, \quad (2.65)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{RTg(P_1, P_2)}{V}, \quad P_1(0) = P_{10}. \quad (2.66)$$

Условия оптимальности этой задачи в соответствии с равенствами (2.20), (2.21) имеют форму

$$Tg^2(P_1, P_2) = -\lambda_2 \left( \frac{\partial g}{\partial P_2} : \frac{\partial \mu_2}{\partial P_2} \right), \quad (2.67)$$

$$P_1(\tau) = P_{10} - \frac{RT}{V} \bar{g} \tau. \quad (2.68)$$

Для идеального газа и зависимости

$$g(P_1, P_2) = \alpha(P_1 - P_2)^{1/2}$$

условие (2.67) приводит к соотношению

$$\frac{(P_1 - P_2)^3}{P_2^2} = \text{const} = \eta. \quad (2.69)$$

Подстановка условия (2.69) в уравнения (2.64) и (2.66) позволяет найти оптимальный закон изменения  $P_2^*(t)$  и минимальное производство энтропии  $\bar{\sigma}^*$ . Оптимальный закон изменения давления определяется после решения уравнений (2.66), (2.69) с точностью до константы  $\eta$

$$P_2^*(t, \eta) = \left\{ \sqrt{\frac{4}{3}\eta^{2/3} - \frac{2}{3}\eta^{1/6} \left[ \frac{\gamma RT}{V} t - f(P_{20}, \eta) \right]} - \frac{2}{3}\eta^{1/3} \right\}^3, \quad (2.70)$$

где

$$f(P_{20}, \eta) = \frac{3}{2}\eta^{-1/6} P_{20}^{2/3} + 2\eta^{1/6} P_{20}^{1/3}. \quad (2.71)$$

Величина  $P_{20}$  находится из (2.69) как решение уравнения

$$P_{20} + \eta^{1/3} P_{20}^{2/3} = P_{10}, \quad (2.72)$$

$$\bar{\sigma}^* = \frac{V}{RT\tau} \left[ P_{10}(\ln P_{10} - 1) - P_1(\tau)(\ln P_1(\tau) - 1) - r(P_{20}) - r(P_2(\tau)) \right].$$

Здесь

$$r(P_2) = P_2(\ln P_2 - 1) + \eta^{1/3} P_2^{2/3} \left( \ln P_2 - \frac{3}{2} \right).$$

**Кристаллизация.** Производство энтропии в процессе кристаллизации, как в любом процессе массопереноса, выражается формулой

$$\sigma = g(C_1, C_2) \frac{\mu_1(C_1) - \mu_2(C_2)}{T}. \quad (2.73)$$

Для идеальных растворов химический потенциал кристаллизующегося вещества в растворе при постоянных температуре и давлении зависит от его концентрации  $C_1$ ,

$$\mu_1 = \mu^0(T, P) + RT \ln C_1.$$

Потенциал  $\mu_2$  определяется равновесной концентрацией  $C_2 = C_P$ :

$$\mu_2 = \mu^0(T, P) + RT \ln C_P,$$

так что

$$\sigma = g(C_1, C_P) R \ln \frac{C_1}{C_P}. \quad (2.74)$$

Поток  $g$  зависит от поверхности кристаллов  $F$ , которая в свою очередь определяется массой кристаллов  $M$ . Масса изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dM}{dt} = \alpha F (C_1 - C_P),$$

$$M(0) = M_0, \quad M(\tau) = \bar{M}.$$

Если размеры и форма кристаллов при  $t = 0$  одинаковы, то

$$\dot{M} = KM^{2/3}(C_1 - C_P). \quad (2.75)$$



Коэффициент  $K$  зависит как от коэффициента массопередачи так и от формы кристалла.

Задача о минимуме диссипации в процессе кристаллизации примет форму

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} K M^{2/3} (C_1 - C_P) R \ln \frac{C_1}{C_P} dt \rightarrow \min_{C_1}, \quad (2.76)$$

$$\int_0^{\tau} K M^{2/3} (C_1 - C_P) dt = (\bar{M} - M_0). \quad (2.77)$$

Условия оптимальности этой задачи вытекают из требований (2.20), (2.21) и имеют вид

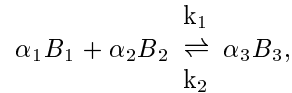
$$\frac{M^{2/3} (C_1 - C_P)^2}{C_1} = \frac{\lambda_2}{KR} = \text{const} = \eta. \quad (2.78)$$

Из условий (2.78) и уравнения (2.75) получим дифференциальное уравнение, которое с точностью до константы  $\tilde{\eta} = \eta$  определяет  $C^*(t)$ . Для этого заменим  $\dot{M}$  и  $M$  через  $\dot{C}_1$  и  $C_1$ :

$$\dot{C}_1^* = -\sqrt{\tilde{\eta}} \frac{\sqrt{C_1^*} (C_1^* - C_P)^3}{C_1^* + C_P}, \quad C_1(0) = C_{10}. \quad (2.79)$$

Нетрудно видеть, что для случая, когда начальные массы кристаллов различны, использование уравнения (2.75) для средней начальной массы дает (в силу выпуклости вверх зависимости поверхности от  $M$ ), оценку снизу для производства энтропии.

**Химические превращения.** Рассмотрим изотермический реактор идеального смешения периодического действия, в котором протекает реакция вида



где  $B_i$  — реагенты,  $\alpha_i$  — стехиометрические коэффициенты. Далее будем считать, что  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 < 0$ ,  $\alpha_3 > 0$ . Скорость реакции определяется законом действующих масс

$$W(X) = W_1 - W_2 = k_1 X_1^{-\alpha_1} X_2^{-\alpha_2} - k_2 X_3^{\alpha_3}, \quad (2.80)$$

где  $X_i = \frac{N_i(t)}{N(t)}$  — мольная доля  $i$ -го компонента,  $n_i$  — число молей  $i$ -го компонента в аппарате,  $N(t) = \sum_i n_i(t)$ .

Производство энтропии

$$\sigma = \frac{W}{T} A, \quad (2.81)$$

где

$$A = - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i$$

— химическое сродство реакций.

Для идеальных растворов

$$\mu_i = \mu_i^0(T, P) + RT \ln X_i,$$

откуда

$$A = - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i^0(T, P) - RT \sum_i \alpha_i \ln X_i.$$

Первое слагаемое в этом выражении равно [9]

$$- \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i^0 = RT \ln k_p(T, P).$$

Константа равновесия  $k_p$  равна отношению констант скоростей прямой и обратной реакций:

$$k_p(T, P) = \frac{k_1(T, P)}{k_2(T, P)}.$$

Таким образом,

$$A = RT \left( \ln \frac{k_1}{k_2} - \sum_i \ln X_i^{\alpha_i} \right) = RT \ln \frac{k_1 X_1^{-\alpha_1} X_2^{-\alpha_2}}{k_2 X_3^{\alpha_3}} = RT \ln \frac{W_1}{W_2}.$$

Пусть задана средняя скорость реакции

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} W(t) dt = \bar{W}, \quad (2.82)$$

а скорость реакции  $W(t)$  является управлением. Она определяет изменение степени превращения  $\xi(t)$

$$\frac{d\xi}{dt} = W \quad (2.83)$$

и числа молей компонентов в ходе реакции

$$\frac{dN_i}{dt} = \alpha_i W, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда

$$N_3(t) = N_{30} + \alpha_3 \xi(t),$$

а общее число молей —

$$N(t) = N_0 + \xi(t) \sum_{i=1}^3 \alpha_i.$$

Скорость обратной реакции —

$$W_2 = k_2 \frac{N_3(\alpha)}{\sum_i N_i(t)} = k_2 \frac{N_{30} + \alpha_3 \xi(t)}{N_0 + \xi(t) \sum_{i=1}^3 \alpha_i}.$$

С учетом сказанного, задача о минимуме диссипации примет вид

$$\sigma = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau RW \ln \frac{W + W_2(\xi)}{W_2(\xi)} dt \rightarrow \min$$

при условиях

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau W(t) dt &= \bar{W}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= W, \quad \xi(0) = 0, \\ W_2(\xi) &= k_2 \frac{N_{30} + \alpha_3 \xi}{N_0 + \xi \sum_i \alpha_i}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Используя замену переменных  $dt = \frac{d\xi}{W}$ , запишем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{R}{\tau} \ln \frac{W + W_2(\xi)}{W_2(\xi)} + \frac{\lambda}{W}.$$

Из условия стационарности  $L$  по  $W$  получим

$$\frac{W^2}{W + W_2(\xi)} = \frac{\lambda \tau}{R} = \text{const}. \quad (2.85)$$

Это требование вместе с уравнением (2.83) и условием на среднее значение  $W$  позволяют найти  $W^*(t)$ ,  $\xi^*(t)$  и оценку для производства энтропии.

Условия минимальной диссипации и минимальное производство энтропии для некоторых процессов приведены в табл. 2.1.

### 2.3. Равновесие в открытых термодинамических системах. Теорема Пригожина

Рассмотрим открытую термодинамическую систему, состоящую из двух резервуаров со значениями интенсивных переменных  $u_+$  и  $u_-$  и промежуточной подсистемы, имеющей вектор интенсивных переменных  $u$  и экстенсивных переменных  $v$ . Поток  $J_+$ , поступающий в систему, зависит от  $u_+$  и  $u$ , а выходящий — от  $u$  и  $u_-$ . Аналогичным образом движущие силы:  $x_+$  зависит от  $u_+$  и  $u$ , а  $x_-$  от  $u$  и  $u_-$ . Среднее производство энтропии в такой системе за время  $\tau$

Таблица 2.1

## Условия минимальной диссипации термодинамических процессов

Процесс	Условия минимальной диссипации	Минимальное производство энтропии
Теплообмен двух потоков $q = \alpha(T_2 - T_1)$	$\frac{T_1(f)}{T_2(f)} = 1 - \frac{\beta}{\alpha F}$	$\sigma^* = \frac{\beta^2}{\alpha F - \beta}$ $\beta = W \ln\left(1 - \frac{\beta}{WT_1(0)}\right)$
Векторный поток $J = LX$	$X = \text{const.}$ $J = \bar{J}$	$\sigma^* = \bar{J}L^{-1}\bar{J}^T$
Односторонний изотермический массоперенос $g(c_1, c_2) = k(c_1(f) - c_2(f))$	$c_2(f) = c_1(f) + \frac{m}{2} - \sqrt{c_1(f)m + \frac{m^2}{4}}$ $\int_{c_1(0)}^{c_1(F)} \frac{Gdc_1}{(1 - c_1^2)k\sqrt{c_1m + \frac{m^2}{4}}} = F$	$\sigma^* = \int_{c_1(F)}^{c_1(0)} \frac{RG}{(1 - c_1)^2} \ln \frac{c_1}{c_1 + \frac{m}{2} - \sqrt{c_1m + \frac{m^2}{4}}} dc_1$
Двусторонний изотермический эквимолярный массоперенос (бинарная ректификация)	$\frac{\partial g}{\partial c_1} / \frac{\partial c_2}{\partial c_1} = m \frac{c_2(f)(1 - c_2(f))}{c_1(f)(1 - c_1(f))}$ $\frac{dg}{dc_1} = -\frac{G_1}{G_1}$ $c_1(0) = C_{10}, c_1(F) = c_{1F}$	$\sigma^* = R \int_0^F g(c_1, c_2) \ln \left[ \frac{c_1(1 - c_2)}{c_2(1 - c_1)} \right] df$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \sum_j \left[ J_{+j}(u_+, u) x_{+j}(u_+, u) + J_{-j}(u, u_-) x_{-j}(u, u_-) + J_{pj}(u) x_{pj}(u) \right] dt. \quad (2.86)$$

Промежуточная система может быть неоднородна, в этом случае векторы интенсивных переменных для входящего и выходящего потоков различны. Этой неоднородности в выражении (2.86) соответствует слагаемое  $J_p x_p$ .

Так как для любой равновесной подсистемы справедливы соотношения

$$\dot{v}_k = \sum_j J_{kj}(u_j, u_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.87)$$

а состояния подсистем в среднем неизменны, то среднее значение правой части равенства (2.87) равно нулю:

$$\int_0^{\tau} \sum_j J_{kj}(u_j, u_k) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.88)$$

В том случае, когда усредненная задача о минимуме  $\sigma$  при условии (2.88) выпукла вниз, она имеет стационарное решение  $u^*$ , на котором подинтегральное выражение в (2.88) равно нулю.

При малом отклонении от состояния равновесия предполагают, что потоки линейно зависят от движущих сил, т.е. могут быть записаны в форме Онзагера

$$J_j = \sum_{\nu} \gamma_{j\nu} x_{\nu}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.89)$$

Причем для кинетических коэффициентов справедливы условия

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji},$$

а матрица коэффициентов  $||\gamma_{ij}||$  положительно-определенная. Под интегралом в (2.86) в этом случае оказывается положительно-определенная квадратичная форма. Условия ее минимума по составляющим вектора  $u$  при фиксированных значениях  $u_+$ ,  $u_-$  совпадают с условиями стационарности состояния подсистем

$$\sum_{j\nu} \gamma_{\nu j} x_{\nu}(u_{\nu}, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.90)$$

Так, для теплового потока и одной промежуточной подсистемы поток тепла пропорционален разности температурных потенциалов  $u_+ = 1/T_+$ ,  $u_- = 1/T_-$ ,  $u = 1/T$ :

$$q_+ = \alpha_+(u - u_+), \quad q_- = -\alpha_-(u_- - u).$$

Производство энтропии:

$$\sigma = q_+ \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_+} \right) - q_- \left( \frac{1}{T_-} - \frac{1}{T} \right) = \alpha_+ (u - u_+)^2 + \alpha_- (u_- - u)^2. \quad (2.91)$$

Условие стационарности состояния промежуточной системы:

$$q_+ + q_- = \alpha_+ (u - u_+) - \alpha_- (u_- - u) = 0. \quad (2.92)$$

Требование минимума  $\sigma$  по  $u$  в силу выпуклости вниз этой функции

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 2\alpha_+ (u - u_+) - 2\alpha_- (u_- - u) = 0$$

совпадает с условием стационарности системы (2.92).

Утверждение о том, что в стационарном состоянии открытой системы, близкой к равновесию, производство энтропии минимально, называют теоремой Пригожина. Ее доказательство для систем с распределенными параметрами приведено, например, в [15].

#### 2.4. Классификация термодинамических систем по типу процессов минимальной диссипации. Условие постоянства производства энтропии

Рассмотрим задачу о выделении на множестве объектов оптимального управления такого класса, для которого оптимальное решение обладает тем или иным свойством. Подобную задачу можно считать обратной по отношению к задаче оптимального управления.

Задачи оптимального управления, относящиеся к той или иной области, часто обладают некоторыми общими свойствами. Например, их критерии оптимальности или характеристики управляемого объекта одинаковы с точностью до вида некоторой функции, входящей в критерий или связывающей друг с другом переменные состояния  $x$  и управляющие воздействия  $u$ . Такой общностью обладают многие задачи механики, где критерием является минимум затрат энергии, а уравнения движения отличны друг от друга лишь видом зависимости сил сопротивления движению от скорости. Аналогично в задачах необратимой термодинамики критерий — минимум необратимых потерь, а динамика процессов характеризуется типом кинетических закономерностей. Во всех этих случаях некоторая зависимость  $n(x, u, t)$  выделяет из множества однотипных конкретную задачу.

Будем предполагать, что оптимальное решение в форме программы  $u^*(t)$  или синтеза  $u^*(x)$  существует и единственно для всех функций  $n$ , тогда между  $u^*$  и  $n$ . В задаче оптимального управления требуется

при известной характеристике управляемого объекта, а значит при известной зависимости  $n(x, u, t)$ , найти оптимальное управление  $u^*$  или выявить его свойства. В обратной задаче нужно найти такой класс управляемых объектов, то есть такой класс зависимостей  $n(x, u, t)$ , для которых  $u^*$  имеет заданные свойства.

В подобной постановке обратная задача носит очень общий характер и мало шансов, что для нее можно предложить некоторую единую схему решения. Ниже предложена последовательность решения этой задачи для одного класса управляемых систем, включающих термодинамические и микроэкономические процессы.

**Схема решения для одного класса задач.** Пусть условие, наложенное на процесс оптимального управления, может быть записано в форме связи между управляющим воздействием  $u(t)$  и переменной состояния  $x(t)$  вида

$$\varphi(x, u^*) = \text{const}, \quad (2.93)$$

где функция  $\varphi$  непрерывна и дифференцируема по совокупности аргументов, величина константы не определена, а  $u(t)$  и  $x(t)$  – скалярные функции.

Будем предполагать, что индивидуальность системы характеризуется функцией  $n(x, u)$ , а условия оптимальности имеют форму

$$F(n(x, u), x, u, n_x, n_u) = \text{const}, \quad (2.94)$$

где через  $n_x, n_u$  обозначены частные производные  $n$  по соответствующим переменным.

На функцию  $n$  могут быть наложены те или иные условия, например, требование вида

$$n(x, u) = 0 \quad \text{при} \quad x = u. \quad (2.95)$$

Требуется выделить класс функций  $n(x, u)$ , для которых решение уравнения (2.94) удовлетворяет требованию (2.93).

Общая схема решения поставленной задачи основана на *утверждение 1*:

*Решение задачи оптимального управления удовлетворяет условию (2.93) тогда и только тогда, когда функция  $n(x, u)$  является решением уравнения*

$$\frac{F_x}{F_u} = \frac{\varphi_x}{\varphi_u}. \quad (2.96)$$

Действительно, из условия (2.93) следует, что

$$\varphi_x dx = -\varphi_u du,$$

а из (2.94) вытекает, что

$$F_x dx = -F_u du,$$

следовательно справедливо (2.96). Очевидно и обратное: если при выполнении условия (2.94) равенство (2.96) не имеет места, то не выполнено и условие (2.93).

Левая часть равенства (2.96) зависит от вида функции  $n$  и ее частных производных, что позволяет получить уравнение в частных производных для функции  $n$ , общее решение которого и является искомым классом зависимостей. Ниже приведены примеры решения обратной задачи оптимального управления для термодинамических систем, ниже в гл.6 рассмотрены микроэкономические системы.

**Управляемые термодинамические системы.** Экстремальные задачи необратимой термодинамики обычно сводятся к тому, чтобы процессы при тех или иных ограничениях (на интенсивность, продолжительность и пр.) имели минимальную диссипацию. Последняя зависит от кинетики процесса и от способа управления им. Функция  $n(x, u)$  характеризует кинетику процесса, например, законы тепло и массопереноса, скорость химической реакции и пр. Условия вида (2.94) являются условиями минимальной диссипации. Рассмотрим первоначально процесс теплообмена, а затем обобщим полученные результаты на более широкий класс термодинамических процессов и получим соотношение, которое необходимо и достаточно для того, чтобы в процессе минимальной диссипации производство энтропии было постоянно.

**Необратимый теплообмен.** Процессом теплообмена минимальной диссипации называют процесс при котором от тела с температурой  $T(t)$  и конечной теплоемкостью за заданное время отбирается заданное количество тепла и при этом прирост энтропии системы оказывается минимальным. Температура охладителя  $T_0(t)$  — является управляющим воздействием. Зависимость теплового потока  $n(T_0, T)$  между охлаждаемым телом и охладителем от их температур  $T$  и  $T_0$  называют законом теплообмена. Формально задача имеет вид

$$\Delta S = \int_0^\tau n(T_0, T)(1/T_0 - 1/T)dt \Rightarrow \min$$

при условиях

$$\int_0^\tau n(T_0, T)dt = 0,$$

$$C \frac{dT}{dt} = -n(T_0, T), \quad T(0) = \text{fix}.$$

Здесь  $C$  — теплоемкость охлаждаемого тела.

Условие минимальной диссипации для необратимого теплообмена, как показано выше, имеет вид

$$\frac{T^2}{n^2(T_0, T)} \frac{\partial n}{\partial T_0} = \text{const}, \quad n(T_0, T) = 0 \quad \text{при} \quad T_0 = T. \quad (2.97)$$



Какого вида должен быть закон теплообмена  $n(T_0, T)$ , чтобы выполнялось условие (2.93) с функцией  $\varphi(T_0, T) = T_0 - T$ ? Т.е. для каких законов теплопереноса минимальной диссипации соответствует постоянная разность температур? Ответ на этот вопрос дает

Утверждение 2: *Условиям минимальной диссипации соответствует постоянная разность температур для тех и только тех законов теплообмена, которые могут быть представлены в форме*

$$n(T_0, T) = \frac{M(T_0 - T)T^2}{1 + R(T)M(T_0 - T)}, \quad (2.98)$$

где  $M$  и  $R$  — произвольные дифференцируемые функции, причем  $M(0) = 0$ .

Примером может служить закон теплопереноса с коэффициентом теплопроводности, зависящем от температуры, вида

$$n(T_0, T) = \alpha T^2 (T_0 - T).$$

Нетрудно показать, что для функции  $\varphi$ , зависящей от отношения температур  $T$  и  $T_0$ , класс законов теплопереноса, обеспечивающих минимальную диссипацию, включает ньютоновский закон, при котором поток пропорционален разности температур.

Условие (2.96) может быть использовано как для проверки того, выполнено ли в процессе минимальной диссипации при заданной кинетике некоторое соотношение между переменными, так и для того, чтобы найти весь класс кинетических зависимостей, для которых заданное соотношение выполнено. Чтобы показать последовательность рассуждений приведем доказательство утверждения 2.

*Доказательство Утверждения 2.* Введем функцию  $m(T_0, T)$

$$m(T_0, T) = \frac{n(T_0, T)}{T^2}, \quad (2.99)$$

предполагая ее как и  $n(T_0, T)$  непрерывно дифференцируемой, и подставим в (2.97). После несложных преобразований перепишем это условие в форме

$$F = \frac{1}{m^2(T_0, T)} \frac{\partial m}{\partial T_0} = \text{const}, \quad m(T_0, T) = 0 \quad \text{при} \quad T_0 = T. \quad (2.100)$$

Из (2.96) с учетом вида функции  $\varphi(T_0, T)$  следует, что

$$\frac{F_T}{F_{T_0}} = \frac{\varphi_T}{\varphi_{T_0}} = -1, \quad (2.101)$$

или

$$F_T + F_{T_0} = 0. \quad (2.102)$$

Найдем  $F_T$  и  $F_{T_0}$

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{1}{m^2(T_0, T)} \frac{\partial^2 m}{\partial T_0 \partial T} - \frac{2}{m^3(T_0, T)} \frac{\partial m}{\partial T} \frac{\partial m}{\partial T_0}, \\ F_{T_0} &= \frac{1}{m^2(T_0, T)} \frac{\partial^2 m}{\partial T_0 \partial T_0} - \frac{2}{m^3(T_0, T)} \left( \frac{\partial m}{\partial T_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.103)$$

После подстановки (2.103) в (2.102) получим

$$m_{T_0 T} + m_{T_0 T_0} = \frac{2}{m} m_{T_0} (m_{T_0} + m_T)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial T_0} (m_T + m_{T_0}) = \frac{2}{m} m_{T_0} (m_T + m_{T_0}). \quad (2.104)$$

Преобразуем (2.104) следующим образом

$$\frac{\frac{\partial}{\partial T_0} (m_{T_0} + m_T)}{m_{T_0} + m_T} = 2 \frac{m_{T_0}}{m}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \ln |m_{T_0} + m_T| = 2 \frac{\partial}{\partial T_0} \ln |m|.$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \ln \left| \frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} \right| = 0. \quad (2.105)$$

Из (2.105) следует, что выражение, стоящее под знаком производной, является произвольной непрерывной функцией от  $T$ , т.е.

$$\ln \left| \frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} \right| = \xi(T)$$

или

$$\frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} = -f(T). \quad (2.106)$$

Уравнение (2.106) решаем методом характеристик

$$\dot{T}_0 = 1, \quad \dot{T} = 1, \quad \dot{m} = -f(T)m^2.$$

Решения этих уравнений

$$\begin{aligned} T_0(t) &= t + r_1, \quad T(t) = t + r_2, \\ \dot{m} &= -f(t + r_2)m^2 \Rightarrow \frac{1}{dt} \left( \frac{1}{m} \right) = f(t + r_2), \\ &\Rightarrow m(t) = \frac{1}{\int f(t + r_2) dt + c}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

где  $c$  — константа, а  $f(t)$  — непрерывная функция. С учетом (2.107), исключая  $t$  и заменяя  $dt$  через  $dT$ , получим общее решение в форме

$$m(T_0, T) = \frac{1}{\int f(T) dT + \mu(T_0 - T)}, \quad (2.108)$$

где  $f$  и  $\mu$  — произвольные функции. Здесь учтено, что в силу (2.107) разность  $(T_0 - T)$  и произвольная функция от нее постоянны.

Будем искать функцию  $\mu(T_0 - T)$  в виде

$$\mu(T_0 - T) = \frac{1}{M(T_0 - T)}.$$

В силу произвольности функций  $f$  и  $\mu$  в (2.107) перепишем решение в эквивалентной форме

$$m(T_0, T) = \frac{M(T_0 - T)}{1 + R(T)M(T_0 - T)}, \quad (2.109)$$

где  $R(T) = \int f(T)dT$  дифференцируемая функция.

Чтобы учесть дополнительное требование  $m(T_0, T) = 0$  при  $T_0 = T$ , наложим на функцию  $M(T_0 - T)$  дополнительное условие  $M(0) = 0$  и с учетом (2.99) и (2.109) получим общий вид зависимости  $n(T_0, T)$  в форме (2.98).

**Условия постоянства производства энтропии в процессе минимальной диссипации.** Задача о минимуме диссипации для термодинамического процесса со скалярным потоком имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau n(x, u) R(x, u) dt \rightarrow \min_u \quad (2.110)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (2.111)$$

$$\int_0^\tau n(x, u) dt = \Delta N. \quad (2.112)$$

Здесь  $\bar{\sigma}$  — производство энтропии, условие (2.111) характеризует скорость изменения интенсивной переменной системы (температуры, давления, химического потенциала),  $R(x, u)$  — движущая сила процесса,  $n(x, u)$  — поток. Условие (2.112) определяет среднюю интенсивность потока. Необходимые условия оптимальности задачи (2.110)–(2.112) имеют вид (см. п.2.1)

$$F = \frac{n^2(x, u)}{n_u} R_u = \text{const}. \quad (2.113)$$

Требуется найти, для каких зависимостей  $n(x, u)$  в оптимальном процессе выполнено условие

$$\varphi(x, u) = \text{const},$$

где  $\varphi$  — задана. В соответствии с (2.96) имеем условие

$$\frac{2\frac{n_x}{n} + \frac{R_{ux}}{R_u} - \frac{n_{ux}}{n_u}}{2\frac{n_u}{n} + \frac{R_{uu}}{R_u} - \frac{n_{uu}}{n_u}} = \frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad (2.114)$$

определяющие все функции  $n$  и  $R$ , для заданной  $\varphi$ .

В том частном случае, когда  $\varphi = \sigma = n(x, u)R(x, u)$  условия (2.114) выделяют процессы, у которых минимальной диссипации при заданной средней интенсивности соответствует постоянство производства энтропии.

## Глава 3

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ТЕПЛО- И МАССОБМЕННЫХ СИСТЕМ

Во многих технологических процессах центральную роль, определяющую их эффективность, играют процессы тепло- и массопереноса. К ним относятся тепловые и холодильные машины, процессы разделения, сушки, кристаллизации, химические реакторы, теплообменники и другие.

Параметры входных и выходных потоков в таких системах связаны друг с другом уравнениями энергетического, материального и энтропийного балансов. Эти соотношения в несколько упрощенной форме для открытой стационарной системы имеют вид

$$\begin{aligned}\sum_j g_j h_j + \sum_i q_i - p &= 0, \\ \sum_j g_j x_{kj} + \sum_\nu \alpha_{k\nu} W_\nu &= 0 \quad \forall k, \\ \sum_j g_j s_j + \sum_i \frac{q_i}{T_i} + \sigma &\leq \sigma_{\min}.\end{aligned}$$

Здесь обозначено:  $g_j$  — интенсивность  $j$ -го материального потока;  $h_j$  — удельная энтальпия,  $x_{kj}$  — концентрация в нем  $k$ -го вещества;  $q_i$  — интенсивность  $i$ -го потока тепла,  $T_i$  — температура этого потока на контрольной границе системы;  $W_\nu$  — скорость  $\nu$ -й химической реакции,  $\alpha_{k\nu}$  — стехиометрический коэффициент, с которым  $k$ -я компонента входит в уравнение  $\nu$ -й реакции ( $\alpha_{k\nu} > 0$  для образующихся и  $\alpha_{k\nu} < 0$  для расходуемых веществ);  $\sigma$  — производство энтропии (диссипация) в системе.

Переменные, входящие в условия термодинамических балансов, как и значение  $\sigma_{\min}$ , в свою очередь могут зависеть от внешних факторов и от параметров самой системы (поверхности контакта, характер гидродинамики потоков и пр.). Таким образом, эти уравнения выделяют в плоскости параметров некоторую область, которую будем называть областью реализуемых значений параметров или *областью реализуемости*. Будем обозначать область реализуемости для  $\sigma \geq 0$  через  $D^0$ , а для случая  $\sigma \geq \sigma_{\min}$  через  $D^* \subset D_0$  и покажем на примере некоторых систем последовательность построения этих областей.

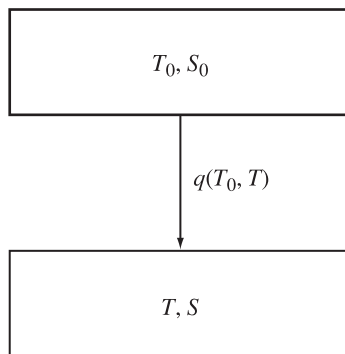
Технологическая система может быть разбита на отдельные подсистемы, для каждой из которых построена область реализуемости.

Область реализуемости системы предполагает реализуемость каждой из подсистем, т.е. является пересечением этих областей. Как правило наибольшей эффективности системы соответствует режим, лежащий на границе ее области реализуемости.

### 3.1. Предельные возможности теплообменных систем

Оценить степень совершенства теплообмена с использованием методов термодинамики обратимых процессов нельзя, так как теплообменник с нулевой интенсивностью потоков тепла или с бесконечными коэффициентами теплопереноса не имеет смысла. Иное дело — термодинамика при конечном времени. Здесь можно ставить вопрос о степени термодинамического совершенства теплообмена при заданном коэффициенте теплопереноса, заданной продолжительности процесса и количестве переданного тепла.

**Постановка задачи и условие минимальной диссипации.** Будем рассматривать теплообменник как систему, состоящую из источника с температурой  $T_0$ , энтропией  $S_0$ , теплоемкостью  $c$ , и рабочего тела с энтропией  $S$  и температурой  $T$  (рис. 3.1).



Р и с. 3.1. Структура теплообменной системы, состоящей из источника с конечной емкостью и рабочего тела

При контакте двух этих элементов системы возникает поток тепла  $q(T_0, T)$ . Если теплообмен протекает во времени, то температура источника изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dT_0}{dt} = -\frac{q(T_0, T)}{c}, \quad T_0(0) = T_{0b}. \quad (3.1)$$

Когда процесс теплообмена стационарен и распределен по длине теплообменника  $l$ , температура источника (горячего потока) изменяется

так, что

$$\frac{dT_0}{dt} = -\frac{q(T_0, T)}{W}, \quad T_0(0) = T_{0b}. \quad (3.2)$$

Здесь для определенности принято, что  $T_0 > T$ , а через  $W$  обозначен водяной эквивалент горячего потока (произведение расхода на теплоемкость). В первом случае считаем заданной продолжительность процесса  $\tau$ , во втором — длину аппарата  $L$ . Так как уравнения (3.1) и (3.2) не отличаются друг от друга ничем, кроме обозначений, то будем рассматривать только первое из них. При замене  $c$  на  $W$  и  $\tau$  на  $L$  во всех результирующих соотношениях они оказываются справедливыми для непрерывного теплообмена. При этом тепловая нагрузка  $Q$  и прирост энтропии  $D$  имеют смысл теплового потока и производства энтропии для всей поверхности теплообменника.

Рассмотрим задачу о таком законе изменения отбора тепла  $q$  от времени, для которого прирост энтропии системы минимален:

$$\Delta S_{\Sigma} = D = \int_0^{\tau} q(T_0, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dt \rightarrow \min, \quad (3.3)$$

при условиях заданной интенсивности теплопереноса

$$\int_0^{\tau} q(T_0, T) dt = Q \quad (3.4)$$

и при изменении температуры источника во времени в соответствии с уравнением (3.1).

Задача (3.1), (3.3), (3.4) представляет собой задачу оптимального управления. При использовании для ее решения принципа максимума Понтрягина функция Гамильтона для этой задачи имеет вид

$$H = q(T_0, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{c} \right). \quad (3.5)$$

Условия оптимальности можно записать в форме:

$$H(T_0, T, \lambda, \psi) = \text{const} = m, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{c} \right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \quad (3.7)$$

При записи этих соотношений принято, что управлением является температура  $T$  рабочего тела. Фактически управлением может быть другая переменная, например, объем рабочего тела  $V$ . Но если состояние рабочего тела удовлетворяет условию внутреннего равновесия, то объем и температура в каждый момент времени связаны уравнением состояния. Поскольку эта связь монотонная, можно сначала найти оптимальный закон изменения температуры  $T^*(t)$ , а уже затем — соответствующую ему функцию  $V^*(t)$ . Способ реализации найденного

оптимального закона охлаждения источника определяется конструкцией теплообменника. От нее зависит, насколько мы приблизимся к найденному пределу.

Для решения задачи запишем равенство, вытекающее из условий оптимальности (3.6), (3.7):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{c} = \frac{m}{q(T_0, T)}, \quad (3.8)$$

что позволяет упростить условие (3.7). Если функция  $H$  выпукла вверх по  $T$ , то, переписав (3.7) в виде

$$\frac{\partial q}{\partial T} \frac{m}{q(T_0, T)} - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0,$$

получим, что в оптимальном процессе для любого момента  $t$  (в любом сечении теплообменника  $l$ ) должно быть выполнено условие

$$\left( \frac{q(T_0, T)}{T} \right)^2 : \frac{\partial q}{\partial T} = m. \quad (3.9)$$

Полученное условие (3.9) термодинамического совершенства процесса необратимого теплообмена позволяет найти связь между минимальной диссипацией, тепловой нагрузкой  $Q$ , теплоемкостью (водяным эквивалентом) источника и коэффициентом теплопереноса, пропорциональным величине поверхности.

Поскольку выражения для минимальной диссипации оказываются компактнее, если использовать в качестве аргумента не  $Q$ , а прирост энтропии источника  $\Delta S_0$ , предварительно найдем связь между  $Q$  и  $\Delta S_0$ . Для любого закона теплопереноса

$$\Delta S_0 = - \int_0^\tau \frac{q(T_0, T)}{T_0} dt.$$

В свою очередь для источника с постоянной теплоемкостью  $c$  справедливо уравнение (3.1). Проведя замену  $dt = -c(dT_0/q(T_0, T))$ , получим

$$\Delta S_0 = \int_{T_{0b}}^{T_{0b}-Q/c} c \frac{dT_0}{T_0} = c \ln \left( 1 - \frac{Q}{cT_{0b}} \right). \quad (3.10)$$

Связь, аналогичную равенству (3.10), нетрудно получить и для любой заданной зависимости  $c(T_0)$  теплоемкости от температуры источника.

**Области достижимости для конкретных законов теплопередачи.** Для ньютоновского закона  $q(T_0, T) = k(T_0 - T)$  условие (3.9), как нетрудно видеть, приводит к постоянству отношения температур [22]:

$$\frac{T}{T_0} = \text{const}. \quad (3.11)$$



Обозначим это отношение  $\tilde{m}$ . Тогда  $q(T_0) = kT_0(1 - \tilde{m})$ . Скорость изменения энтропии источника постоянна во времени:

$$\dot{S}_0 = -\frac{q(T_0)}{T_0} = k(\tilde{m} - 1),$$

следовательно, ее приращение за время  $\tau$

$$\Delta S_0 = k(\tilde{m} - 1)\tau. \quad (3.12)$$

Из сравнения равенств (3.10) и (3.12) следует, что

$$\tilde{m} = 1 + \frac{1}{ck} \ln \left( 1 - \frac{Q}{cT_{0b}} \right).$$

Диссипацию в этом случае рассчитывают следующим образом:

$$D = \int_0^\tau q(T_0) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dt = \frac{q(T_0)}{T_0} \frac{1 - \tilde{m}}{\tilde{m}} \tau = \frac{k(1 - \tilde{m})^2}{\tilde{m}} \tau. \quad (3.13)$$

После исключения константы  $\tilde{m}$  из равенств (3.12), (3.13) получим выражение для минимальной диссипации

$$D_{\min} = \frac{\Delta S_0^2}{\Delta S_0 + k\tau}, \quad (3.14)$$

откуда следует, что для произвольного процесса теплопереноса с ньютоновским законом теплопередачи между двумя внутренне обратимыми системами справедливо неравенство

$$\frac{1}{D} - \frac{k\tau}{\Delta S_0^2} - \frac{1}{\Delta S_0} \leq 0, \quad (3.15)$$

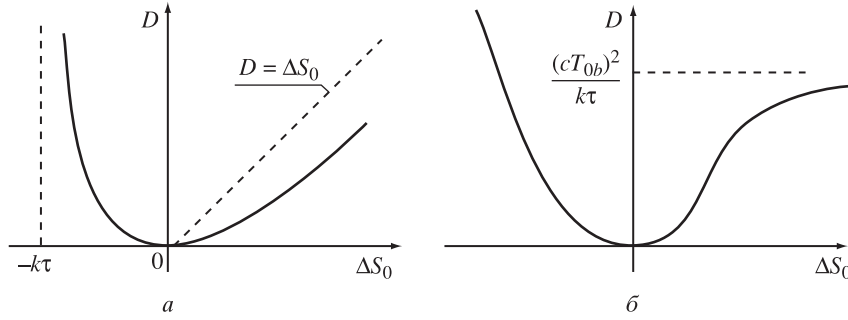
определяющее область достижимости на плоскости с координатами  $D$  и  $\Delta S_0$  (рис. 3.2, а). Из условия неотрицательности  $D_{\min}$  следует, что  $\Delta S_0 \geq -k\tau$ . При этом, как следует из (3.13), производство энтропии в каждом сечении или в каждый момент времени постоянно.

Для закона теплопередачи Фурье, линейного относительно термодинамических потенциалов

$$q(T_0, T) = k \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

проделаем аналогичные выкладки. В этом случае из условия минимальной диссипации (3.9) следует, что для любого момента времени тепловой поток  $q$  постоянен. Обозначим его величину через  $\bar{q} = Q/\tau$ . Температура источника подчиняется уравнению

$$\dot{T}_0 = -\frac{\bar{q}}{c} \Rightarrow T_0(t) = T_{0b} - \frac{\bar{q}}{c} t.$$



Р и с. 3.2. Области достижимости для процесса теплообмена с ньютоновским законом теплопередачи (а) и законом теплопередачи Фурье (б)

Минимальный прирост энтропии для периодической и минимальное производство для непрерывной системы:

$$D = \int_0^{\tau} q(T_0, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dt = \frac{Q^2}{k\tau}.$$

Из этого равенства и соотношения (3.10) получим

$$\sqrt{D_{\min} k\tau} = cT_{0b} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\Delta S_0}{c} \right) \right].$$

Области достижимых режимов теплообмена в пространстве с координатами  $(\Delta S_0, D)$  определяются границами неравенства

$$\frac{\sqrt{Dk\tau}}{cT_{0b}} + \exp \left( -\frac{\Delta S_0}{c} \right) \geq 1. \quad (3.16)$$

Вид этой границы показан на рис. 3.2, б. Как и для ньютоновского закона в процессе минимальной диссипации для закона Фурье производство энтропии в каждом сечении теплообменника или в каждый момент времени постоянно.

Для источника бесконечной емкости при любом законе теплопередачи зависимость минимальной диссипации от  $\Delta S_0$  квадратичная ( $T_0 = T_{0b}$ ):

$$D_{\min} = \frac{T_0^2}{k\tau} \Delta S_0^2.$$

Источнику бесконечной емкости соответствует для распределенного стационарного теплообмена бесконечно большой поток горячего теплоносителя.

Таким образом, для оценки степени термодинамического совершенства теплообменника необходимо по заданной тепловой нагрузке

$Q$ , теплоемкости источника  $c$  (водяному эквиваленту потока  $W$ ) рассчитать  $\Delta S_0$  по формуле (3.10), а также фактическую диссипацию  $D$  как разность между энтропией системы в начале и в конце процесса (разность суммарной энтропии входящих и выходящих потоков). Полученные данные соответствуют точке на плоскости с координатами  $(\Delta S_0, D)$ . Она лежит заведомо выше границы, определяемой неравенствами типа (3.15) или (3.16). Разность ординат изображающей точки и соответствующей точки границы области позволяет утверждать, есть ли резервы для улучшения термодинамической организации процесса. Отметим, что найденные оценки не являются грубыми, так как для ньютоновского закона теплообмена в трубчатом противоточном теплообменнике оценка (3.15) может быть достигнута (неравенство становится равенством) за счет подбора водяных эквивалентов потоков.

**Оптимальное распределение поверхности в теплообменных системах.** Распределение поверхности между теплообменниками в системах с большим количеством нагреваемых и охлаждаемых потоков представляет собой непростую задачу, для решения которой неоднократно предлагались разного рода эмпирические алгоритмы. Полученные выше соотношения позволяют сформулировать правило, облегчающее расчет таких систем.

Пусть закон теплообмена близок к ньютоновскому и каждый  $i$ -ый теплообменник в рассматриваемой системе близок к идеальному, т.е. к такому, что при заданных значениях температур входных потоков и тепловой нагрузке  $Q_i$  производство энтропии в нем близко к минимально-возможному, определяющемся выражениями (3.10), (3.14). Функция  $D_{i \min}$  выпуклая вниз по эффективному коэффициенту теплопроводности  $K_i = k_i L$  ( $K_i = k_i \tau$ ). Задача оптимального распределения поверхности теплообмена сводится к такому выбору коэффициентов  $K_i \geq 0$ , чтобы при заданной их сумме диссипация в системе теплообмена была минимальна:

$$D = \sum_i D_{i \min}(K_i) \min / \sum_i K_i = K. \quad (3.17)$$

По условиям оптимальности этой задачи для всех теплообменников с ненулевой поверхностью производные по  $k_i$  должны быть одинаковы:

$$\frac{dD_{i \min}}{dK_i} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

После дифференцирования (3.14) по  $K_i = k_i \tau_i$  получим

$$\frac{\Delta S_{i0}}{\Delta S_{i0} + K_i} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

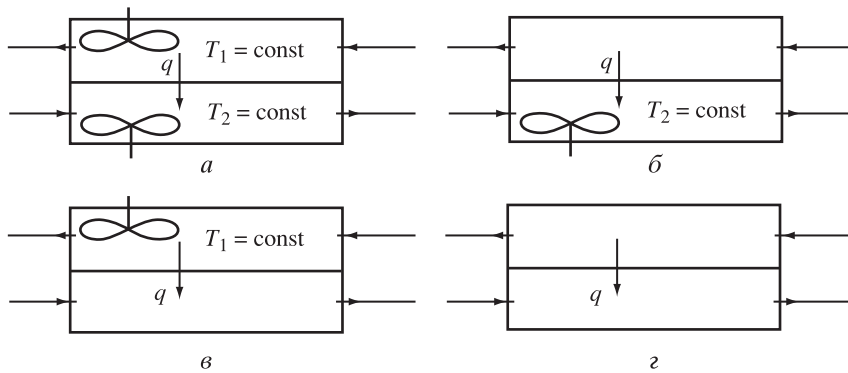
Условие (3.19) можно переписать в эквивалентной форме

$$d_i(K_i) = \frac{D_{i \min}(K_i)}{\Delta S_{i0}} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Назовем величину  $d_i$  приведенной диссипацией для  $i$ -го теплообменника и сформулируем правило для оптимального распределения поверхностей: *В теплообменной системе с оптимально спроектированными теплообменниками поверхности теплообмена между ними надо распределять так, чтобы приведенные диссипации для всех теплообменников оказались одинаковы.* Это правило позволяет организовать вычислительную процедуру, на каждом шаге которой увеличивают поверхность того теплообменника, для которого приведенная диссипация наибольшая, за счет уменьшения поверхности того, для которого она наименьшая.

### 3.2. Предельные возможности теплообменных систем в зависимости от гидродинамики потоков

Для реальных теплообменников часто те или иные технологические требования определяют гидродинамику потоков. Можно менять лишь параметры потока (температуру, концентрацию, скорость) на входе в аппарат.



Р и с. 3.3. Теплообменные аппараты, различающихся моделями описания потоков: а) «смешение — смешение», б) «вытеснение — смешение», в) «смешение — вытеснение», г) «вытеснение — вытеснение»

Рассмотрим четыре типа теплообменников, различающихся моделями описания потоков (рис. 3.3). Естественно, что при сопоставимых

условиях производство энтропии в таком аппарате будет больше оценок, полученных выше. Далее, для различных вариантов конструктивного оформления найдены нижние границы показателя необратимости  $D$  и соответствующие им связи между параметрами потоков. В каждом сечении аппарата интенсивность процесса переноса зависит от параметров потоков в этом сечении. Параметры одного из потоков заданы; назовем этот поток фиксированным. Параметры второго — управляемого — потока на входе в аппарат ( $l = 0$ ) должны быть выбраны таким образом, чтобы минимизировать производство энтропии. Для теплообменных аппаратов рассмотрим случай, когда кинетика теплообмена определяется ньютоновским законом теплопереноса. Общее количество переданного тепла задано:

$$\int_0^L k_l [T_0(l) - T_1(l)] dl = Q. \quad (3.21)$$

где  $k_l$  — коэффициент теплопередачи, отнесенный к единице длины аппарата (далее будем использовать также интегральный коэффициент теплопередачи  $K = k_l L$ );  $T_0(l), T_1(l)$  — температуры фиксированного и управляемого потоков соответственно.

В случае, когда фиксированный поток описывается моделью идеального вытеснения, изменение его энтропии рассчитывается как

$$\Delta S_0 = W_0 \ln \frac{T_{0K}}{T_{0B}} = W_0 \ln \frac{T_{0H} - Q/W_0}{T_{0H}}, \quad (3.22)$$

где  $W_0$  — водяной эквивалент фиксированного потока. Если же фиксированный поток описывается моделью идеального смешения, то температура теплоносителя в камере постоянна и равна его температуре на выходе, так что

$$\Delta S_0 = -\frac{Q}{T_{0K}} = \frac{W_0 Q}{Q - W_0 T_{0H}}. \quad (3.23)$$

Поскольку скорость изменения энтропии фиксированного потока определена и не зависит от управляемых параметров — температуры  $T_{1H}$  и водяного эквивалента  $W_1$  управляемого потока — то задачу о предельных возможностях теплообменников можно формализовать как

$$\Delta S = \int_0^L \frac{q(T_0, T_1)}{T_1(l)} dl \rightarrow \min_{T_{1H}, W_1} \quad (3.24)$$

при условии (3.21), а также

$$\frac{dT_i}{dl} = \frac{q(T_0, T_1)}{W_i}, \quad i \in \{0, 1\} \quad (3.25)$$

при фиксированном  $T_i(0)$ , если  $i$ -ый поток описывается моделью идеального вытеснения.

Схема «вытеснение — вытеснение». Условие (3.9) для ньютоновского случая соответствует тому, что для любого сечения аппарата оптимальное отношение температур теплоносителей должно быть постоянно:

$$\frac{T_1}{T_0} = \tilde{m} = \left[ 1 - \frac{W_0}{K} \ln \frac{T_{0H}}{T_{0K}} \right].$$

С другой стороны, из уравнений (3.25) видно, что это отношение обратно пропорционально отношению водяных эквивалентов потоков, откуда

$$W_1 = \frac{W_0}{\tilde{m}},$$

а для сечения  $l = 0$  имеем

$$T_{1H} = \tilde{m}T_{0K} = \tilde{m}[T_{0H} - Q/W_0].$$

Минимальная скорость изменения энтропии управляемого потока при таком выборе равна

$$\Delta S^* = W_1 \ln \frac{T_{1K}}{T_{1H}} = \frac{W_0}{\tilde{m}} \ln \frac{T_{0H}}{T_{0H} - Q/W_0}. \quad (3.26)$$

Схемы «смешение — смешение» и «смешение — вытеснение». Если фиксированный поток описывается моделью идеального смешения, то его температура внутри аппарата постоянна. Для поддержания оптимального режима, характеризующегося постоянным отношением температур потоков, температура управляемого потока в аппарате должна быть также постоянной. Это соответствует режиму идеального смешения. При этом температура  $T_1$  внутри аппарата определяется из условия (3.21):

$$T_1 = T_{0K} - \frac{Q}{K},$$

а скорость изменения энтропии управляемого потока

$$\Delta S^* = \frac{Q}{T_{0H} - Q \left[ \frac{1}{W_0} + \frac{1}{K} \right]}. \quad (3.27)$$

Схема «вытеснение — смешение». В этой схеме гидродинамика фиксированного потока соответствует модели идеального вытеснения. Скорость изменения энтропии управляемого потока имеет вид

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{1K}} = \frac{W_1 Q}{T_{1H} W_1 + Q}. \quad (3.28)$$

Для определения вектора управления  $(T_{1H}, W_1)$ , решим уравнение (3.25) для фиксированного потока с учетом постоянства температуры управляемого потока:

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{K}{LW_0}[T_0(l) - T_{1K}], \quad T_0(0) = T_{0K}.$$

Решение этого уравнения:

$$T_0(l) = T_{1K} + [T_{0K} - T_{1K}] \exp\left(\frac{K}{W_0} \frac{l}{L}\right)$$

подставим в (3.21) и выразим из полученного уравнения  $W_1$ :

$$\frac{1}{W_1} = \frac{1}{Q}[T_{0K} - T_{1H}] - \frac{1}{W_0[\exp(K/W_0) - 1]} \quad (3.29)$$

Подставив (3.29) в выражение для скорости изменения энтропии управляемого потока (3.28), получим

$$\Delta S^* = \frac{Q}{T_{0H} - Q \left[ \frac{1}{W_0} + \frac{1}{W_0[\exp(K/W_0) - 1]} \right]}. \quad (3.30)$$

Сравнение эффективности теплообменных аппаратов. Для сравнения эффективности различных теплообменных аппаратов требуется сравнить производство энтропии в каждом из аппаратов в зависимости от тепловой нагрузки. Для рассмотренных теплообменников получены зависимости минимального прироста энтропии управляемого потока от  $Q$  (3.26), (3.27), (3.30). Зависимости прироста энтропии фиксированного потока от  $Q$  заданы уравнениями (3.22), (3.23). Введем безразмерные параметры, характеризующие интенсивность и необратимость процесса теплообмена:

$$\tilde{K} = K/W_0, \quad \tilde{q} = Q/KT_{0H}, \quad \tilde{d} = \frac{D^*}{K},$$

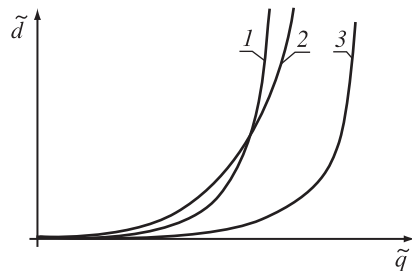
где  $D^*$  — минимальное производство энтропии в системе:  $D^* = \Delta S_0^* + \Delta S^*$ . Зависимости  $\tilde{d}(\tilde{q})$  для различных теплообменных аппаратов приведены в таблице 3.1, а их графики показаны на рис. 3.4.

Следует отметить, что графики  $\tilde{d}(\tilde{q})$  являются границей области допустимых значений вектора  $(\tilde{d}, \tilde{q})$  для реальных аппаратов. По степени приближения действительных значений этого вектора к найденной границе можно судить о термодинамическом совершенстве аппарата.

Т а б л и ц а 3.1

**Зависимость минимального производства энтропии от  
потока тепла для различных типов  
теплообменных аппаратов**

Фиксированный поток		
Управляемый поток	Идеальное смешение	Идеальное вытеснение
Идеальное смешение	$\tilde{d} = \tilde{q} \left[ \frac{1}{1 - \tilde{q}[1 + \tilde{K}]} - \frac{1}{1 - \tilde{K}\tilde{q}} \right]$	$\tilde{d} = \tilde{q} \frac{1 - e^K}{1 - e^K(1 - \tilde{q}\tilde{K})} + \frac{1}{\tilde{K}} \ln(1 - \tilde{K}\tilde{q})$
Идеальное вытеснение	$\tilde{d} = \tilde{q} \left[ \frac{1}{1 - \tilde{q}[1 + \tilde{K}]} - \frac{1}{1 - \tilde{K}\tilde{q}} \right]$	$\tilde{d} = \frac{1}{\tilde{K}} \frac{\ln^2(1 - \tilde{K}\tilde{q})}{\tilde{K} + \ln(1 - \tilde{K}\tilde{q})}$



Р и с. 3.4. Зависимости производства энтропии от количества переданного тепла для различных теплообменных аппаратов: 1 — «вытеснение — вытеснение», 2 — «смешение — смешение» и «смешение — вытеснение», 3 — «вытеснение — смешение»

### 3.3. Регенеративный теплообмен

В процессе регенеративного теплообмена горячий и холодный потоки поочередно контактируют с насадкой. Состояние насадки циклически изменяется, а тепло передается от горячего к холодному потоку. При заданных теплоемкостях насадки и потоков и заданном коэффициенте теплопередачи требуется определить то отношение длительности контакта насадки с горячим и холодным потоками, при котором количество передаваемого за цикл тепла будет максимально. Кроме того, рассмотрена задача, возникающая в случае, когда количество тепла, передаваемого за цикл, фиксировано, но можно менять температуры потоков в течение цикла при ограниченной температуре насадки. Требуется нагреть холодный поток до максимально возможной температуры. Покажем, что требование максимума выходной температуры холодного потока соответствует требованию минимума



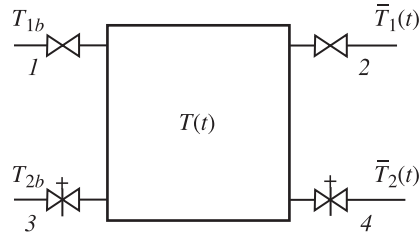
прироста энтропии за цикл работы системы. Задачи рассмотрим на примере ньютоновского закона теплопередачи.

**Определение предельной тепловой нагрузки регенеративного теплообменника.** Схематично регенеративный теплообменник изображен на рис. 3.5. В полуцикле нагрева  $t \in [0, t_1]$  горячий поток при открытых заслонках 1, 2 и закрытых заслонках 3, 4 проходит через насадку, отдавая ей тепло. Температуры насадки и горячего потока при этом изменяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{T} = \frac{k_1(T_1 - T)}{c}, \quad T(0) = T_b, \quad (3.31)$$

$$\dot{T}_1 = -\frac{k_1(T_1 - T)}{c_1}, \quad T_1(0) = T_{1b}, \quad (3.32)$$

где  $c$  и  $c_1$  — теплоемкости насадки и горячего потока;  $k$  — коэффициент теплопередачи между ними.



Р и с. 3.5. Схема регенеративного теплообменника

В полуцикле охлаждения  $t \in [t_1, \tau]$  закрыты заслонки 1, 2, открыты заслонки 3, 4, и холодный поток охлаждает насадку, забирая от нее тепло. Температуры насадки и холодного потока изменяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{T} = -\frac{k_2(T - T_2)}{c}, \quad T(t_1) = \bar{T}_b, \quad (3.33)$$

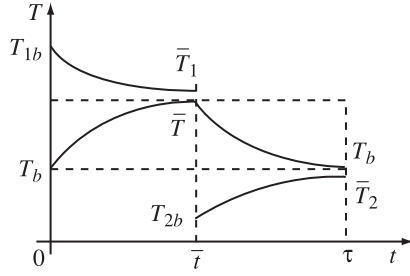
$$\dot{T}_2 = \frac{k_2(T - T_2)}{c_2}, \quad T_2(t_1) = T_{2b}, \quad (3.34)$$

где  $c_2$  — теплоемкость холодного потока;  $k_2$  — коэффициент теплопередачи между насадкой и холодным потоком.

Характер изменения температур показан на рис. 3.6. Требуется при заданном времени цикла  $\tau$  выбрать продолжительности полуциклов нагрева и охлаждения  $t_1$  и  $t_2 = \tau - t_1$  таким образом, чтобы общее количество переданного тепла было максимально:

$$Q = c(\bar{T}_b - T_b) \rightarrow \max, \quad (3.35)$$

при условии, что температура насадки в конце цикла  $T(\tau)$  равна ее температуре в начале цикла  $T(0)$ . Следует подчеркнуть, что ни величина  $T(0)$ , ни величина  $\bar{T}_b$  не заданы и определяются вместе с  $t_1$ ,  $t_2$  в процессе решения.



Р и с. 3.6. Характер изменения температур в регенеративном теплообменнике

Вначале найдем, как связаны температуры горячего потока и насадки. Из уравнений (3.31), (3.32) следует, что  $dT_1/dT = -c/c_1 = a$ . Тогда

$$T_1(t) = T_{1b} + aT_b - aT(t).$$

Подставив это выражение в уравнение (3.32), запишем решение полученного уравнения, описывающее изменение температуры насадки в полуцикле нагрева:

$$T(t) = \frac{1}{1+a} \left[ T_{1b} + aT_b + (T_b - T_{1b}) \exp\left(-\frac{(1+a)k_1 t}{c}\right) \right], \quad 0 \leq t < t_1. \quad (3.36)$$

Аналогичным образом в полуцикле охлаждения

$$T(t) = \frac{1}{1+b} \left[ T_{2b} + b\bar{T}_b + (\bar{T}_b - T_{2b}) \exp\left(-\frac{(1+b)k_2(t-t_1)}{c}\right) \right], \quad t_1 \leq t < \tau, \quad (3.37)$$

где  $b = c/c_2$ .

Выражения (3.36), (3.37) при подстановке в них конечных значений времени  $t_1$ ,  $\tau$  позволяют найти зависимости граничных значений температуры насадки  $T_b$  и  $\bar{T}_b$  от характеристик теплообмена и времени полуциклов:

$$T_b = \frac{T_{2b}(1+A)(1+a) + T_{1b}(b+A)(1-MA^r)}{(1+a)(1+b) - (b-A)(MA^r + a)}, \quad (3.38)$$

$$\bar{T}_b = \frac{T_{1b}(1+b)(1-MA^r) + T_{2b}(1-A)(a+MA^r)}{(1+a)(1+b) - (b-A)(MA^r + a)}, \quad (3.39)$$

где

$$\frac{k_1(1+a)}{c} = n_1, \quad \frac{k_2(1+b)}{c} = n_2, \quad -\frac{n_1}{n_2} = r, \\ e^{-n_1\tau} = M, \quad e^{-n_2 t_1} = A.$$

Подстановка (3.38), (3.39) в (3.35) и максимизация полученного выражения по  $A$  приводит к уравнению

$$(1+b) + rM(1+a)A^{r-1} - 2M[1+b+r(1+a)]A^r + \\ + (1+a)rMA^{r+1} + (1+b)M^2A^{2r} = 0. \quad (3.40)$$

Численное решение уравнения (3.40) позволяет найти оптимальное значение  $A$  и по нему  $t_2^*$ . Например, при расчете по уравнению (3.40) для исходных данных:  $c = 887$  кДж/К,  $c_1 = 337$  кДж/К,  $c_2 = 419$  кДж/К,  $k_1 = 1,047 \cdot 10^{-6}$  Вт/К,  $k_2 = 1,57 \cdot 10^{-6}$  Вт/К,  $\tau = 30$ с — оптимальное значение времени полциклов  $t_2^* = 18,4$ с,  $t_1^* = 11,6$ с, значение  $Q^* = 2400$  кДж.

Отметим, что при больших расходах газа можно принять, что  $c_1 = c_2 = \infty$ ; в этом случае  $a = b = 0$ , и уравнение (3.40) упрощается.

**Определение цикла с минимальным приростом энтропии.**

Рассмотрим задачу о выборе характеристик цикла регенеративного теплообмена, которые при заданных тепловой нагрузке  $Q$ , времени цикла  $\tau$  и заданной максимальной температуре насадки обеспечат минимальный прирост энтропии системы  $\Delta S_\Sigma$ . При этом будем считать искомыми законы изменения температур потоков  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$ .

Прежде чем формализовать постановку задачи, рассмотрим физическую интерпретацию энтропийного критерия. Так как процесс происходит циклически, то общее приращение энтропии системы определится изменением энтропии потоков. Пусть температура горячего потока изменяется от  $T_{1b}$  до  $\bar{T}_1(t)$ , а холодного — от  $T_{2b}$  до  $\bar{T}_2(t)$ . Если потоками являются идеальные газы, теплоемкость которых не зависит от температуры, то изменение энтропии одного моля  $i$ -го потока равно

$$\Delta s_i = c_{pi} \ln \frac{\bar{T}_i}{T_{ib}}, \quad i = 1, 2.$$

Производство энтропии в системе составит

$$\sigma = \Delta S_\Sigma = G_1 \Delta s_1 + G_2 \Delta s_2, \quad (3.41)$$

где  $G_i$  — мольный расход  $i$ -го потока. Тепловой поток за тот же период времени связан с расходами теплоносителей как

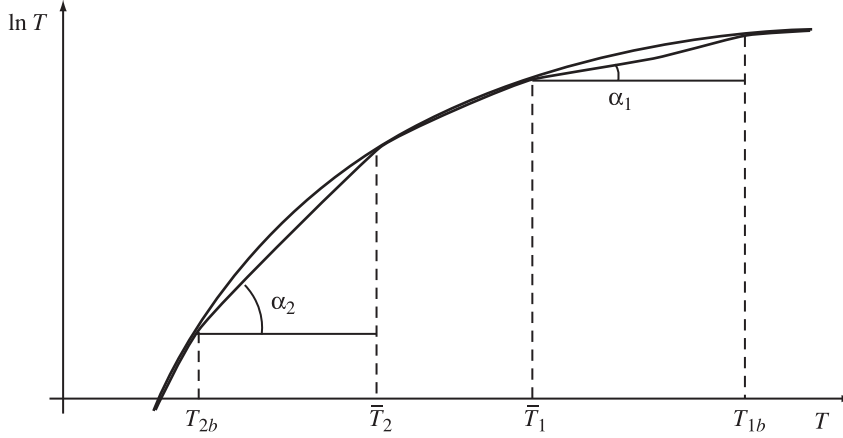
$$q = c_{p1}[T_{1b} - \bar{T}_1]G_1 = c_{p2}[\bar{T}_2 - T_{2b}]G_2.$$

Выражая из последней зависимости значения расходов и подставляя их в уравнение энтропийного баланса (3.41), получаем

$$\sigma = q \left( \frac{\ln \bar{T}_2 - \ln T_{2b}}{\bar{T}_2 - T_{2b}} - \frac{\ln T_{1b} - \ln \bar{T}_1}{T_{1b} - \bar{T}_1} \right).$$

Для каждого значения теплового потока  $q$  минимизация  $\Delta S_\Sigma$  означает минимизацию выражения, стоящего в скобках. Как видно из рис. 3.7, каждая дробь в круглых скобках равна тангенсу угла  $\alpha_i$  наклона отрезка, соединяющего точки с абсциссами  $T_{ib}, \bar{T}_i$  на кривой  $\ln T_i$ . Характер логарифмической функции таков, что с ростом  $T$  ее наклон уменьшается,  $\alpha_1 < \alpha_2$ , и значение  $\sigma$  всегда больше нуля. Уменьшению

$\sigma$  при заданных начальных температурах потоков  $T_{1b}, T_{2b}$  соответствует сближение конечных температур потоков. Таким образом, при заданных начальной и конечной температурах холодного потока минимизация  $\Delta S_{\Sigma} = \sigma \tau$  означает, что его нагрев осуществляется потоком с минимально возможной температурой. При заданных же начальной и конечной температурах горячего потока максимизируется среднее значение конечной температуры холодного.



Р и с. 3.7. Зависимость  $\ln T_i$ ; уменьшение угла  $\alpha$  соответствует уменьшению производства энтропии  $\sigma$

Задача о поиске термодинамически совершенного режима регенеративного теплообмена может быть сформулирована следующим образом: *определить такие законы изменения температур потоков  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$  и такое отношение длительности полуциклов  $\gamma = t_2/t_1$ , для которых при заданных тепловой нагрузке  $Q$ , времени цикла  $\tau$  и максимальной температуре насадки  $\bar{T}_b$  прирост энтропии системы (необратимые потери работоспособной тепловой энергии) минимален.*

При изменяющихся температурах потоков и насадки прирост энтропии в предположении, что в каждый момент времени потоки и насадка находятся в состоянии внутреннего равновесия (система же в целом неравновесна — температуры насадки и потока различаются на конечную величину), составляет

$$\Delta S = \int_0^{t_1} q_1(T_1, T) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) dt + \int_{t_1}^{\tau} q_2(T_2, T) \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T} \right) dt \rightarrow \min. \quad (3.42)$$

Условие заданной тепловой нагрузки:

$$\int_0^{t_1} q_1(T_1, T) dt = \int_{t_1}^{\tau} q_2(T_2, T) dt = Q. \quad (3.43)$$

Температура насадки изменяется в соответствии с уравнениями

$$\dot{T} = \begin{cases} \frac{1}{c} q_1(T_1, T), & 0 \leq t < t_1, \\ -\frac{1}{c} q_2(T_2, T), & t_1 \leq t < \tau. \end{cases} \quad (3.44)$$

Выделим три этапа в решении поставленной задачи.

*Первый этап.* Определяется оптимальный режим полцикла нагрева. При этом находится такой закон изменения температуры горячего потока  $T_1(t)$ , при котором минимизируется прирост энтропии системы в этом полцикле (заданы количество передаваемого тепла  $Q$  и закон изменения температуры рабочего тела (3.44)). При решении этой задачи  $t_1$  и  $T_b$  рассматриваются как параметры.

*Второй этап.* Определяется оптимальный режим полцикла охлаждения. При этом решается аналогичная задача определения закона изменения температуры холодного потока  $T_2(t)$ .

*Третий этап.* Проводится стыковка полциклов — определение оставшихся неизвестными параметров, в частности, длительностей полциклов с учетом связей, общих для полциклов.

Задачи, решаемые на первых двух этапах, являются задачами об оптимальном тепловом контакте двух тел. Выше было показано (см. формулу (3.9)), что их решения должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\partial q_1}{\partial T_1} = m_1 \left( \frac{q_1}{T_1} \right)^2, \quad \frac{\partial q_2}{\partial T_2} = m_2 \left( \frac{q_2}{T_2} \right)^2, \quad (3.45)$$

где  $m_1, m_2$  — константы. Отсюда находятся оптимальные законы изменения температур потоков. Использование этих зависимостей существенно упрощает решение всей задачи, сводя ее к решению задачи нелинейного программирования. Дальнейшую процедуру поиска решения будем описывать применительно к конкретному закону теплопередачи.

Пусть закон теплопередачи линеен относительно температур:

$$q_1 = k_1(T_1 - T), \quad q_2 = k_2(T - T_2). \quad (3.46)$$

В этом случае из условия (3.45) следует, что оптимальные законы изменения температур должны быть такими, чтобы для любого момента времени отношение температур было постоянным (см. (3.11)):

$$\frac{T_1(t)}{T(t)} = \overline{m}_1 = \text{const}, \quad \frac{T_2(t)}{T(t)} = \overline{m}_2 = \text{const}, \quad (3.47)$$

$$\overline{m}_1 > 1, \quad \overline{m}_2 < 1.$$

Уравнения (3.44) в этом случае имеют решения

$$T = \begin{cases} T_b \exp \frac{k_1(\overline{m}_1 - 1)t}{c}, & 0 \leq t < t_1, \\ T_b \exp \frac{k_2(\overline{m}_2 - 1)(t - t_1)}{c}, & t_1 \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

Эти соотношения описывают изменение температуры насадки в течение цикла. Таким образом, задача сводится к задаче нелинейного программирования

$$\Delta S_{\Sigma} = \frac{k_1(\overline{m}_1 - 1)^2}{\overline{m}_1} t_1 + \frac{k_2(1 - \overline{m}_2)^2}{\overline{m}_2} t_2 \rightarrow \min_{t_1, t_2} \quad (3.48)$$

при условиях

$$t_1 + t_2 = \tau, \quad (3.49)$$

$$c(\overline{T}_b - T_b) = Q, \quad (3.50)$$

$$\frac{\exp[k_1(\overline{m}_1 - 1)t_1]}{c} = \frac{\overline{T}_b}{T_b}, \quad (3.51)$$

$$\frac{\exp[-k_2(\overline{m}_2 - 1)t_2]}{c} = \frac{\overline{T}_b}{T_b}. \quad (3.52)$$

Выразив  $\overline{m}_1$  и  $\overline{m}_2$  из соотношений (3.51), (3.52),  $T_b$  из условия (3.50), а  $t_2$  — из условия (3.49) и подставив в критерий оптимальности (3.48), получим задачу безусловной минимизации

$$\Delta S_{\Sigma} = \tau \left( \frac{1}{\frac{1}{cx} - \frac{1}{k_2} + \gamma} - \frac{1}{\frac{1}{cx} + \frac{1}{\gamma k_2}} \right) \rightarrow \min_{\gamma},$$

где

$$x = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\overline{T}_b}{T_b} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\overline{T}_b c}{\overline{T}_b c - Q}, \quad \gamma = \frac{t_1}{t_2}$$

Так как  $\overline{T}_b$  и  $\tau$  фиксированы, то  $x$  — заданная величина, и производство энтропии  $\sigma = \Delta S_{\Sigma} / \tau$  зависит только от  $\gamma$ . Из условия минимума  $\sigma$  по  $\gamma$  получим

$$\gamma^* = \frac{k_2 \sqrt{k_1} - cx(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}{k_1 \sqrt{k_2} + cx(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})} = \frac{\sqrt{k_0 k_2} - cx}{\sqrt{k_0 k_1} + cx},$$

где

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^2}.$$

Минимальное значение производства энтропии при линейном законе теплопередачи составляет

$$\sigma^* = \frac{[cx(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})]^2}{k_1 k_2 + cx(k_2 - k_1)}. \quad (3.53)$$

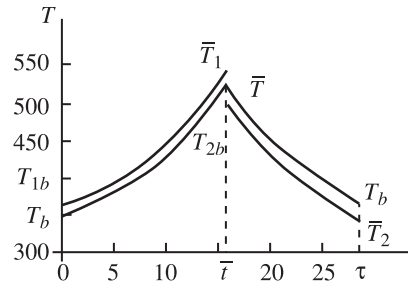
Для определения оптимальных законов изменения температуры потоков вначале находят

$$\begin{aligned} \overline{m}_1^* &= \frac{k_1 k_2 + (k_2 - k_1)cx}{k_1 k_2 - \sqrt{k_1}(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})cx}, \\ \overline{m}_2^* &= \frac{k_1 k_2 + (k_2 - k_1)cx}{k_1 k_2 + \sqrt{k_2}(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})cx}, \end{aligned}$$

а затем  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  по соотношениям (3.47), (3.51), (3.52). Полученные соотношения использовались для расчета оптимального режима работы регенеративного теплообменника при следующих исходных данных:  $k_1 \cdot 10^{-6} = 1,047$  Вт/К,  $k_2 \cdot 10^{-6} = 1,57$  Вт/К,  $c = 837,4$  кДж/К,  $\overline{T}_b = 500$  К,  $\tau = 30$  с,  $Q \cdot 10^{-6} = 1,256$  кДж/К.

В результате расчета получено:  $x = 0,0119$  с<sup>-1</sup>,  $\gamma^* = 1,187$ ,  $\sigma^* = 256,46$  Вт/К,  $T_b = 350$  К. Соответствующие оптимальному режиму законы изменения температур показаны на рис. 3.8.

Р и с. 3.8. Законы изменения температур, соответствующие оптимальному режиму работы регенеративного теплообменника



Естественно, что подобные законы изменения температур нереализуемы, если расходы потоков постоянны во времени, так как температура горячего потока должна расти по мере отдачи им тепла, а температура холодного уменьшаться, несмотря на получение им тепла от насадки. Следовательно, расходы потоков должны изменяться в течение цикла. Закон изменения расходов определяется из уравнений теплового баланса для потоков. Найденное минимально возможное значение производства энтропии  $\sigma^*$  может служить показателем термодинамического совершенства организации регенеративного теплообмена. Величина отношения  $\eta = \sigma^*/\sigma$  всегда меньше единицы, если  $\sigma$  — производство энтропии в реальном теплообменнике при фиксированных параметрах цикла  $\tau$ ,  $Q$ ,  $\overline{T}_b$ ,  $c$ . Значение  $\sigma$  находится с использованием формулы (3.53).

### 3.4. Изотермический массоперенос

Процесс массопереноса можно представить той же схемой, что и теплоперенос. Различие заключается в том, что движущей силой является разница химических потенциалов перераспределяемого (активного) компонента смеси в потоках, а также то, что обмен активным компонентом меняет не только концентрацию этого компонента, но и массовые расходы потоков.

Введем обозначения:  $G_i(l)$ ,  $x_i(l)$ ,  $\mu_i(x_i)$  — расход, концентрации активного компонента и его химический потенциал в  $i$ -м потоке,  $g(\mu_1, \mu_2)$  — поток обмена активного компонента.

Производство энтропии:

$$\sigma = \frac{1}{T} \int_0^L g(\mu_1, \mu_2)(\mu_1 - \mu_2) dl. \quad (3.54)$$

Расход перераспределяемого компонента:

$$G_0 = \int_0^L g(\mu_1, \mu_2) dl. \quad (3.55)$$

Изменения расходов  $G_i$  и концентраций  $C_i$  определяются условиями

$$\frac{d(G_1 x_1)}{dl} = -\frac{d(G_2 x_2)}{dl} = \frac{dG_1}{dl} = -\frac{dG_2}{dl} = -g(\mu_1, \mu_2). \quad (3.56)$$

Нетрудно показать, что из условий (3.56) следуют зависимости потоков  $G_i(x_i)$  вида

$$G_i = \frac{\tilde{G}_i}{1 - x_i(l)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.57)$$

где  $\tilde{G}_i$  — расход инертного компонента в  $i$ -м потоке,

$$\tilde{G}_i = G_i(0)(1 - x_i(0)).$$

После подстановки выражений (3.57) в уравнения (3.56) они примут форму

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dl} &= -\frac{1}{\tilde{G}_1} (1 - x_1)^2 g(\mu_1, \mu_2), \\ \frac{dx_2}{dl} &= \frac{1}{\tilde{G}_2} (1 - x_2)^2 g(\mu_1, \mu_2). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Уравнения термодинамических балансов процесса массообмена запишутся как:



— материальный баланс по активному компоненту и общему потоку

$$(G_{10}x_{10} - G_{1L}x_{1L}) + (G_{20}x_{20} - G_{2L}x_{2L}) = 0, \quad (3.59)$$

$$G_{10} - G_{1L} = G_{2L} - G_{20} = G_0;$$

— энтропийный баланс

$$(G_{10}s_{10} - G_{1L}s_{1L}) + (G_{20}s_{20} - G_{2L}s_{2L}) + \sigma = 0. \quad (3.60)$$

Здесь удельная энтропия  $i$ -го потока

$$s_i = \frac{1}{T} \left( h_i - \sum_k \mu_{ki} x_{ki} \right).$$

Для смеси из двух компонент и химических потенциалов, имеющих форму

$$\mu_{ki} = \mu_k^0(T, P) + RT_i \ln x_{ki}, \quad (3.61)$$

уравнение (3.60) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^2 (G_{i0}h_{i0} - G_{iL}h_{iL}) - R \sum_{i=1}^2 \{ G_{i0} [x_{i0} \ln x_{i0} + (1 - x_{i0}) \ln(1 - x_{i0})] - \\ - G_{iL} [x_{iL} \ln x_{iL} + (1 - x_{iL}) \ln(1 - x_{iL})] \} + \sigma = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

По условиям энергетического баланса первое слагаемое в левой части этого равенства равно нулю. При некотором минимально возможном значении  $\sigma = \sigma_{\min}$  из (3.62) следует неравенство, определяющее наряду с (3.59) область возможных значений параметров массообменной системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \{ G_i (x_{i0} \ln x_{i0} + (1 - x_{i0}) \ln(1 - x_{i0})) - \\ - G_{iL} + (1 - x_{iL}) \ln(1 - x_{iL}) \} \geq \frac{\sigma_{\min}}{R}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Условие минимальной диссипации для процесса массообмена имеет форму (см. гл. 2)

$$\frac{\partial g(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = \lambda \frac{g^2(\mu_1, \mu_2)}{T} \quad \forall l, \quad (3.64)$$

где  $\lambda$  — некоторая константа, определяющаяся величиной  $G_0$ ;

$$\sigma_{\min} = \frac{G_0^2}{T \alpha L}. \quad (3.65)$$

В том случае, когда  $\frac{\partial g}{\partial \mu_2} = \text{const}$ , из (3.64) следует, что поток диффузии  $g^*$  должен быть постоянным, так что

$$g^*(\mu_1, \mu_2) = \frac{G_0}{L} \quad \forall l. \quad (3.66)$$

Это равенство связывает  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Минимум производства энтропии определяется решением задачи нелинейного программирования

$$f_0 = \mu_1 - \mu_2 \rightarrow \min / g(\mu_1, \mu_2) - \frac{G_0}{L} = 0. \quad (3.67)$$

После подстановки решения  $\mu_1^*, \mu_2^*$  задачи (3.67) в выражение (3.54) получим

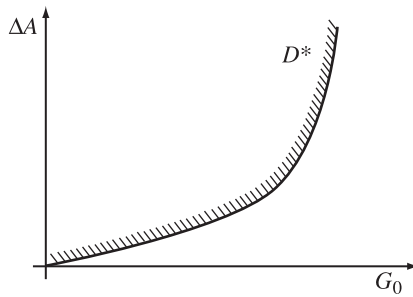
$$\sigma_{\min} = \frac{G_0}{T}(\mu_1^* - \mu_2^*).$$

Пусть  $g(\mu_1, \mu_2) = \alpha(\mu_1 - \mu_2)$ . Для этого случая введем обозначения:

$$A_0 = -RT \sum_{i=1}^2 G_{i0}(x_{i0} \ln x_{i0} - (1 - x_{i0}) \ln(1 - x_{i0})),$$

$$A_L = -RT \sum_{i=1}^2 G_{iL}(x_{iL} \ln x_{iL} - (1 - x_{iL}) \ln(1 - x_{iL}));$$

$A_0$  и  $A_L$  представляют собой обратимые работы разделения смеси на чистые компоненты в начальном и конечном сечении соответственно.



Р и с. 3.9. Вид области реализуемости процесса необратимого массопереноса

Так как массоперенос сопровождается смешением потоков, то  $A_L > A_0$ . Неравенство (3.63) с учетом (3.65) можно переписать как

$$\Delta A = A_L - A_0 \geq \frac{G_0^2}{\alpha L T^2}, \quad (3.68)$$

учтя при этом, что

$$G_{1L} = G_{10} - G_0, \quad G_{2L} = G_{10} + G_0.$$

Область реализуемости процесса изотермического массопереноса показана на рис. 3.9.

## Глава 4

### Тепломеханические системы

В этой главе рассмотрены задачи о предельных возможностях систем, преобразующих тепловую энергию в работу и работу в тепло. К таким системам относятся тепловые и холодильные машины, тепловые насосы и преобразователи тепловой энергии в работу разделения. Важный класс задач связан с минимизацией затрат энергии на поддержание заданной конфигурации поля температур.

#### 4.1. Задача о максимальной работе

Одной из классических задач термодинамики является задача о максимальной работе, которую можно извлечь из термически неоднородной системы. Отдельные элементы системы могут иметь различные температуры, а значит можно, включив в эту систему тепловую машину, получить работу. Максимум такой работы достигается в обратимом процессе. При этом процесс длится сколь угодно долго или, если его продолжительность ограничена, то коэффициенты теплопередачи сколь угодно велики. В реальных системах ни то ни другое не имеет места.

**Эксергия.** При термодинамическом анализе технологических систем широко используют эксергетический подход. При этом под *эксергией* понимают максимальное количество работы, которое может быть получено при переходе системы из исходного состояния в состояние равновесия с окружающей средой [10]. Так как продолжительность процесса или его интенсивность не оговорены, то максимальной работе соответствует обратимый процесс.

Найдем работу, которую может произвести система в обратимом процессе, если она находится в среде с температурой  $T^0$  и давлением  $p^0$ . Для простоты считаем, что химические процессы отсутствуют. Обратимый процесс должен состоять из двух участков: изменения температуры  $T$  в адиабатическом процессе от начальной температуры до температуры окружения и изменения давления в изотермическом процессе при  $T = T^0$  от начального давления в системе до  $p^0$ . Работа на каждом участке процесса:

$$A^0 = -\Delta E - T^0 \Delta S + p^0 \Delta V,$$

где  $\Delta E$ ,  $\Delta S$ ,  $\Delta V$  — изменения внутренней энергии, энтропии и объема системы.

На адиабатическом участке энтропия системы не меняется и работа

$$A_a = -\Delta E_a + p^0 \Delta V_a = \Delta I_a$$

равна изменению энтальпии системы. На изотермическом участке неизменна внутренняя энергия, так что изменение энтальпии равно  $\Delta I_t = p^0 \Delta V_t$ , а работа  $A_t = \Delta I_t - T^0 \Delta S$ . Общая работа

$$A = A_a + A_t = \Delta I - T^0 \Delta S.$$

Если ввести обозначение  $L = I - TS$  и учесть, что при совпадении начального состояния системы с состоянием окружающей среды никакой работы получить нельзя, то максимальная работа, которую может совершить система при выравнивании своих параметров с параметрами окружения, есть  $A = \Delta L$ .

Эксергия зависит не только от состояния системы, но и от состояния окружающей среды. Так как процесс при подсчете  $A$  предполагался обратимым, то она не учитывает значений кинетических коэффициентов (тепло- и массообмена, скоростей реакций и пр.). При эксергетическом анализе термодинамическое совершенство процесса или его отдельной стадии определяется потерями эксергии. Такие потери равны нулю в обратимых процессах.

Эксергетический метод имеет два недостатка:

1. Сравнение с обратимым процессом не учитывает объективной необратимости, связанной с интенсивностью потоков, конечными коэффициентами тепло- и массопередачи.

2. Рассматриваются только системы с резервуаром, интенсивные переменные которого совпадают с интенсивными переменными окружающей среды (температуры, концентрации и пр.). Они изменяются и не всегда могут быть точно найдены. Кроме того, многие системы вообще не содержат резервуара.

В необратимом процессе изменяется суммарная энтропия системы и окружения на величину  $\Delta S_\Sigma$ . При этом работа системы в необратимом процессе может быть выражена через обратимую работу и прирост энтропии как

$$L_n = L - T^0 \Delta S_\Sigma.$$

Второе слагаемое учитывает потери от диссипации, которые всегда положительны. Записанное равенство называют *уравнением Гюй-Стодола*. Оно справедливо для систем, содержащих резервуар с  $T = T^0$ ,  $p = p^0$  и пр.

В термодинамике при конечном времени решают задачи о максимуме извлеченной работы для систем, как содержащих, так и не содержащих резервуара, при ограниченной продолжительности процесса или при заданной интенсивности потоков. Максимальную работу

(работоспособность), найденную при этих ограничениях, будем обозначать через  $L_T$  или  $L_p$  соответственно. Таким образом работоспособность совпадает с эксергией, если мощность процесса сколь угодно мала, продолжительность сколь угодно велика и в системе имеется резервуар.

Рассмотрим задачи о расчете работоспособности для ряда систем и покажем, какова структура оптимального решения в подобных задачах.

**Формальная постановка и характер оптимального решения задач о максимальной работе.** Разобьем все подсистемы, входящие в рассматриваемую термодинамическую систему, на три категории:

- 1) источники бесконечной емкости (резервуары);
- 2) источники конечной емкости (пассивные подсистемы);
- 3) подсистемы с управляемыми интенсивными переменными (рабочие тела).

Векторы интенсивных переменных подсистем каждого типа будем обозначать соответственно как  $z_n, z_e, z_p$ . Составляющими этих векторов являются температуры, давления и химические потенциалы подсистем. Вектор экстенсивных переменных каждой  $i$ -й подсистемы характеризуется внутренней энергией  $E_i$ , энтропией  $S_i$  и количеством каждого из веществ  $N_{ij}$  ( $j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ ). При наличии контакта между подсистемами возникают энергетические и материальные потоки  $q_{i\nu}(z_i, z_\nu)$  и  $g_{i\nu}(z_i, z_\nu)$ . Здесь индексы означают, что поток направлен от  $i$ -й подсистемы к  $\nu$ -й. При этом поток  $g_{i\nu}$  векторный и содержит  $m$  составляющих — по числу веществ, содержащихся в системе. Функции  $q_{i\nu}$  и  $g_{i\nu}$  равны нулю при  $z_i = z_\nu$ . В силу законов сохранения вещества и энергии

$$\begin{aligned} q_{i\nu}(z_i, z_\nu) &= -q_{\nu i}(z_\nu, z_i) \\ g_{i\nu}(z_i, z_\nu) &= -g_{\nu i}(z_\nu, z_i) \quad \forall i, \nu. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Интенсивные переменные резервуаров  $z_n$  предполагаются заданными и неизменными; интенсивные переменные рабочего тела  $z_p$  для каждого момента  $t$  принадлежат некоторому множеству  $D_z$  и являются в задаче управляющими воздействиями; наконец, интенсивные переменные пассивных подсистем являются функциями их экстенсивных переменных

$$z_e = f(E_e, S_e, N_e). \tag{4.2}$$

Наряду с вектором  $z_p(t)$  управляющими воздействиями являются и функции контакта  $U_{i\nu}^q(t)$  и  $U_{i\nu}^g(t)$ , принимающие значения ноль или единица. Если функция контакта равна единице, то соответствующий поток возможен, если она равна нулю, поток отсутствует.

Для рабочего тела с распределенными параметрами интенсивные переменные  $z_{pi}(t)$  при контакте с каждой подсистемой могут быть различны. В этом случае нет смысла вводить функции контакта, так как выбор  $z_{pi}(t) = z_i(t)$  соответствует нулевому значению потока.

Экстенсивные переменные каждой из подсистем удовлетворяют уравнениям термодинамических балансов:

Условию энергетического баланса:

$$\dot{E}_\nu = \sum_{i=1}^n \left[ U_{i\nu}^q q_{i\nu}(z_i, z_\nu) + U_{i\nu}^g \mu_{i\nu} g_{i\nu}(z_i, z_\nu) \right] - r_\nu(t), \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Здесь суммирование производится по всем  $i$ , включая  $i = \nu$ , с учетом того, что  $q_{\nu\nu} = g_{\nu\nu} = 0$ ;  $r_\nu(t)$  — получаемая от  $\nu$ -й подсистемы механическая работа, если  $r > 0$ , и затрачиваемая, если  $r < 0$ ; второе слагаемое в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение, т.е. сумму по индексу  $j$  от единицы до  $m$  для каждого сочетания  $i$  и  $\nu$ .

Условиям материального баланса по каждому из веществ:

$$\dot{N}_j = \sum_{i=1}^n U_{ij}^g g_{ij}(z_i, z_j) = n_j(u, z), \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Балансу по энтропии:

$$\dot{S}_\nu = \frac{1}{T_\nu} \sum_{i=1}^n \left[ U_{i\nu}^q q_{i\nu}(z_i, z_\nu) + U_{i\nu}^g \mu_{i\nu} g_{i\nu}(z_i, z_\nu) \right] = \sigma_\nu(u, z), \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

На функции контакта кроме упомянутых условий могут быть наложены дополнительные требования, так что будем предполагать, что  $U \in D_u$ , где множество  $D_u$  представляет собой подмножество вершин куба с единичными гранями, расположенного в положительном квадранте с вершиной в начале координат.

Критерием оптимальности задачи является работа  $A$ , полученная от системы,

$$A_n = \int_0^\tau \sum_{\nu=1}^n r_\nu(t) dt \rightarrow \max,$$

или, через приращение внутренней энергии,

$$E_n = \sum_{\nu=1}^n (E_\nu(0) - E_\nu(\tau)) \rightarrow \max. \quad (4.6)$$

Начальное состояние системы задано, поэтому критерий (4.6) соответствует условию

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu(\tau) \rightarrow \min.$$

Так как внутренняя энергия каждой из подсистем зависит от  $S_\nu, V_\nu, N_\nu$ , то приходим к требованию

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu \left[ (S_{\nu 0} + \tau \overline{\sigma_\nu(u, z)}), (N_{\nu 0} + \tau \overline{n_\nu(u, z)}), V_\nu(\tau) \right] \rightarrow \min_{u, z_p, V}. \quad (4.7)$$

Здесь черта означает усреднение соответствующей функции на интервале  $(0, \tau)$ . Так,

$$\overline{n_\nu(u, z)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau n_\nu(u(t), z(t)) dt.$$

Минимум внутренней энергии нужно искать при заданном начальном состоянии системы с учетом уравнений (4.4), (4.5), связей (4.2) для пассивных подсистем, ограничений, наложенных на объем подсистем,

$$V(t) \in D_V, \quad (4.8)$$

на переменные  $U$  и  $z_p$  —

$$U(t) \in D_u, \quad z_p(t) \in D_z \quad (4.9)$$

и на конечные значения энтропии и состава для некоторых подсистем:

$$S_\nu(\tau) = S_\nu^k, \quad \nu = 1, 2, \dots, x \leq n, \quad (4.10)$$

$$\mu_{\nu j}(\tau) = \bar{\mu}_{\nu j}, \quad P_\nu(\tau) = \bar{P}_\nu, \quad T_\nu(\tau) = \bar{T}_\nu, \quad (j, \nu) \in \Omega.$$

Здесь  $\Omega$  — множество сочетаний индексов  $j, \nu$ , для которых содержание  $j$ -го компонента в  $\nu$ -й подсистеме фиксировано.

Пусть общее число условий типа (4.10) равно  $m$ . При этом справедливы соотношения

$$\left( \frac{\partial E_\nu}{\partial S_\nu} \right)_{t=\tau} = T_\nu(\tau), \quad - \left( \frac{\partial E_\nu}{\partial V_\nu} \right)_{t=\tau} = P_\nu(\tau), \quad \left( \frac{\partial E_\nu}{\partial N_{\nu j}} \right)_{t=\tau} = \mu_{\nu j}(\tau), \quad (4.11)$$

где  $P_\nu$  — давление, а  $\mu_{\nu j}$  — химический потенциал  $j$ -го вещества в  $\nu$ -й подсистеме.

Остановимся на математических особенностях задачи, позволяющих в ряде случаев существенно упростить ее решение.

1. Объемы  $V_\nu(\tau)$  входят только в критерий оптимальности (4.7) и ограничения (4.8) и никак не влияют на  $S(\tau)$  и  $N(\tau)$ , поэтому для их оптимального выбора достаточно решить задачу

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu(S_\nu^*(\tau), N_\nu^*(\tau), V_\nu) \rightarrow \min_{V \in D_V}. \quad (4.12)$$

В частности, если задан суммарный объем системы в конце процесса

$$\sum_{\nu=1}^n V_{\nu}(\tau) = V_0 \quad (4.13)$$

и зависимость  $E_{\nu}$  выпукла вниз по  $V_{\nu}$ , то требование (4.11), (4.13) приводит к условиям

$$\left( \frac{\partial E_{\nu}}{\partial V_{\nu}} \right)_{\tau} = -P_{\nu}(\tau) = \text{const} \quad \forall \nu. \quad (4.14)$$

Таким образом, в конечный момент объемы подсистем при оптимальных либо заданных значениях  $S_{\nu}(\tau)$  и  $N_{\nu}(\tau)$  должны выбираться из условия равенства давлений. Если среди подсистем имеется резервуар, давление в котором неизменно, то из условия (4.14) следует, что в момент  $\tau$  давления всех подсистем, объемы которых можно менять, должны совпадать с давлением этого резервуара  $P_n$ .

2. Если среди подсистем отсутствуют пассивные подсистемы, то задача (4.7), (4.4), (4.5) оказывается не задачей оптимального управления, а усредненной задачей нелинейного программирования [63]. Действительно, в этом случае уравнения (4.4), (4.5) не содержат в своих правых частях переменных состояния  $N$  и  $S$ . Эти уравнения могут быть отброшены и заменены условиями (4.10), которые приводят к  $m$  равенствам

$$\overline{\sigma_{\nu}}(u, z) = \frac{1}{\tau} (S_{\nu}^k - S_{\nu 0}) = \overline{\sigma_{\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, x \leq n, \quad (4.15)$$

$$\overline{n_{\nu j}}(u, z) = \frac{1}{\tau} (N_{\nu j}^k - N_{\nu j 0}), \quad (j, \nu) \in \Omega.$$

Оптимальное решение  $W^*(t) = (U^*(t), z^*(t))$  задачи (4.7), (4.15) [63] представляет собой кусочно-постоянную вектор-функцию, принимающую на  $(0, \tau)$  не более  $(m+1)$ -го значения  $W^l$ . Каждое из этих базовых значений управление  $W^*(t)$  принимает в течение доли  $\gamma_l$  интервала  $(0, \tau)$ . При этом  $\gamma_l \geq 0$ ,  $\sum_{l=0}^m \gamma_l = 1$ , последовательность, в которой следуют значения  $W^l$ , роли не играет. Каждое из базовых решений удовлетворяет условию

$$L = \left\{ \left[ \sum_{\nu=x+1}^n T_{\nu}(\tau) \sigma_{\nu}(u, z) + \sum_{\nu, j \notin \Omega} \mu_{\nu j}(\tau) n_{\nu j}(u, z) + \sum_{\nu=1}^x \lambda_{\nu} (\sigma_{\nu}(u, z) - \overline{\sigma_{\nu}}) + \sum_{\nu, j \in \Omega} \lambda_{\nu j} (n_{\nu j}(u, z) - \overline{n_{\nu j}}) \right] \right\} \rightarrow \min_{u, z}, \max_{\lambda}. \quad (4.16)$$



Здесь множители  $T_\nu(\tau)$  и  $\mu_{\nu j}(\tau)$  обязаны своим появлением свойству (4.11) уравнения состояния.

Для определения значений этих переменных, которые в общем случае отличаются от оптимальных значений  $T_\nu(t)$  и  $\mu_{\nu j}(t)$  на интервале  $(0, \tau)$ , условие (4.16) нужно дополнить равенствами

$$S_\nu(T_\nu(\tau), V_\nu^*, \mu_\nu(\tau), N_\nu(\tau)) = S_\nu(0) + \tau \sigma_\nu(u, z), \quad \nu = x+1, \dots, n,$$

$$N_{\nu j}(\tau) = N_{\nu j}(0) + \tau n_{\nu j}(u, z), \quad \nu, j \notin \Omega. \quad (4.17)$$

В задачах о предельной мощности  $r$  время  $\tau^*$  определяется по условию

$$r(\tau) = \frac{A_n^*(\tau)}{\tau} \rightarrow \max_{\tau > 0},$$

что для дифференцируемой и выпуклой вверх зависимости полученной работы от продолжительности процесса приводит к уравнению для  $\tau^*$

$$\left( \frac{dA_n^*}{d\tau} \right)_{\tau^*} = \frac{A_n^*(\tau^*)}{\tau^*}. \quad (4.18)$$

Если условия (4.5) отсутствуют ( $m = 0$ ), то решение  $W^*(t)$  определяется из условия

$$\sum_{\nu=1}^n T_\nu(\tau) \sigma_\nu(u, z) + \sum_{\nu, j} \mu_{\nu j}(\tau) n_{\nu j}(u, z) \rightarrow \min_{u \in D_u, z \in D_z} \quad (4.19)$$

совместно с равенствами (4.17). Оно постоянно во времени для любых кинетических зависимостей, определяющих  $\sigma_\nu$  и  $n_{\nu j}$ .

Если функция  $L$  в (4.16) при всех значениях  $\lambda$  выпукла вниз по  $W$ , то базовое значение единственно; если, наконец, множество  $D_w = D_u \times D_z$  можно разбить на несколько подмножеств, число которых  $M^0$  меньше  $m+1$  и на каждом из которых  $L$  выпукла вниз, то число базовых решений не превосходит числа  $M^0$ . Справедливость этого утверждения следует из (4.16).

Доли  $\gamma_l$  определяют из условий (4.15), которые после подстановки в них базовых решений примут форму

$$\sum_l \gamma_l \sigma_\nu(W^l) = \overline{\sigma_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, x,$$

$$\sum_l \gamma_l n_{\nu j}(W^l) = \overline{n_{\nu j}}, \quad (j, \nu) \in \Omega, \quad \gamma_l \geq 0, \quad \sum_l \gamma_l = 1. \quad (4.20)$$

В качестве вывода из вышеизложенного сформулируем определяющее структуру оптимального решения в задаче о максимальной работе

**У т в е р ж д е н и е 4.1:** *В термодинамической системе, состоящей из резервуаров и рабочих тел с заданным начальным состоянием, для любых законов тепло и массопереноса, максимальная полученная работа за время  $\tau$ , если внутренняя энергия системы уменьшается,*

или минимальная затраченная, если внутренняя энергия увеличивается, достигаются в процессе, для которого:

— вектор интенсивных переменных и функций контакта на интервале  $(0, \tau)$  кусочно постоянен, причем число значений, которые он принимает, не превосходит  $m + 1$ , где  $m$  — число фиксированных значений энтропии и количества вещества для рабочих тел в момент  $\tau$ ;

— в начале и в конце процесса интенсивные переменные рабочих тел изменяются скачком до некоторых оптимальных значений;

— энтропия системы растет на интервале  $(0, \tau)$  как кусочно линейная функция.

**С л е д с т в и е:** Когда на состав и энтропию рабочих тел при  $t = \tau$  ограничений не наложено ( $m = 0$ ), энтропия системы в оптимальном процессе при любых законах тепло- и массопереноса растет с постоянной скоростью, а каждое из рабочих тел на протяжении всего процесса контактирует только с одним из резервуаров.

При наличии подсистем конечной емкости задача о максимальной работе оказывается задачей оптимального управления с целочисленными переменными  $U(t)$ . При этом справедливо утверждение:

При каждом контакте между рабочим телом и подсистемой конечной емкости закон изменения вектора  $z_p(t)$  интенсивных переменных рабочего тела в оптимальном процессе должен удовлетворять условиям минимальной диссипации.

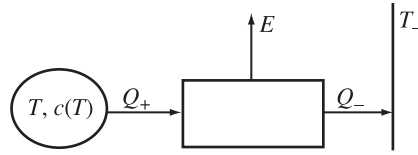
Конкретизируем полученные условия для некоторых структур тепломеханических систем.

**Система со стационарным резервуаром и источниками конечной емкости.** Продолжительность процесса не ограничена, расчет эксергии системы. Пусть система содержит резервуар с температурой  $T_-$ ,  $k$  подсистем конечной емкости с начальными температурами  $T_{i0}$  и теплоемкостями  $c_i (i = 1, \dots, k)$  и рабочее тело, которое может вступать с подсистемами в тепловой, но не механический, как предполагалось выше, контакт. Будем далее предполагать, что объемы подсистем постоянны, работа может быть получена за счет изменения объема, а значит и температуры рабочего тела при контакте с подсистемами.

Найдем  $A_\infty$  для одной подсистемы. Для этого запишем уравнения баланса по энергии и энтропии для обратимой тепловой машины, работающей за счет обмена энергией подсистемы и резервуара (рис. 4.1):

$$dQ_+ - dQ_- - dE = 0, \quad \frac{dQ_+}{T} - \frac{dQ_-}{T_-} = 0 \Rightarrow dQ_- = dQ_+ \frac{T_-}{T}. \quad (4.21)$$

Р и с. 4.1. Система, состоящая из подсистемы конечной емкости, рабочего тела и резервуара



Последнее равенство соответствует тому, что прирост энтропии рабочего тела равен нулю. Из уравнений (4.21) следует, что

$$dE = dQ_+ \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) = -c(T) \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) dT,$$

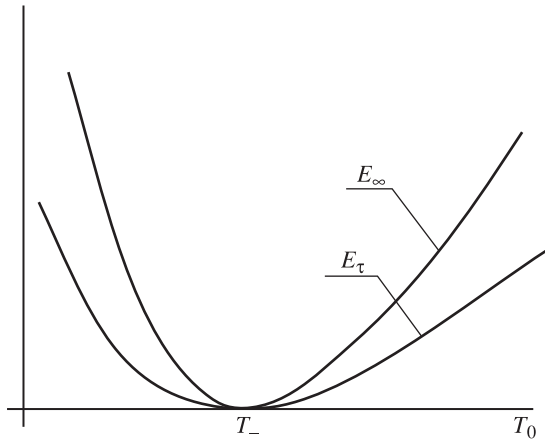
так что

$$A_\infty = \int_{T_-}^{T_0} c(T) \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) dT. \quad (4.22)$$

При постоянной теплоемкости

$$A_\infty = c \left( T_0 - T_- \left(1 + \ln \frac{T_0}{T_-}\right) \right).$$

Эта функция неотрицательна и равна нулю в точке  $T_0 = T_-$  (рис. 4.2).



Р и с. 4.2. Работоспособность системы (рис. 4.1) при ограниченной и неограниченной продолжительности процесса

Для  $k$  подсистем  $A_\infty = \sum_{i=1}^n A_{i\infty}$ . При  $c_i = \text{const}$

$$A_\infty = \sum_{i=1}^n c_i \left( T_{0i} - T_- \left(1 + \ln \frac{T_{i0}}{T_-}\right) \right). \quad (4.23)$$

*Продолжительность процесса задана.* В этом случае для каждой подсистемы (индекс  $i$  опускаем) нужно решить задачу о выборе таких температур рабочего тела  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$ , чтобы извлеченная работа была максимальной:

$$A_\tau = \int_0^\tau (q_+(T, T_1) - q_-(T_2, T_-)) dt \rightarrow \max_{T_1, T_2}, \quad (4.24)$$

при условии неизменности в среднем энтропии и других параметров состояния рабочего тела:

$$\int_0^\tau \left( \frac{q_+(T, T_1)}{T_1} - \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2} \right) dt = 0, \quad (4.25)$$

и изменения температуры подсистемы при отборе тепла в соответствии с уравнением

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{q_+(T, T_1)}{c(T)}, T(0) = T_0. \quad (4.26)$$

Здесь выражение (4.24) следует из энергетического, а условие (4.25) — из энтропийного баланса рабочего тела, через  $q_+$  и  $q_-$  обозначены тепловые потоки от подсистемы к машине и от машины к резервуару.

Обозначим прирост энтропии рабочего тела при получении тепла через  $\Delta S$ , тогда задачу (4.24)–(4.26) можно разбить на две подзадачи:

$$Q_+ = \int_0^\tau q_+(T, T_1) dt \rightarrow \max_{T_1(t)} \quad (4.27)$$

при условиях (4.26) и условии

$$\int_0^\tau \frac{q_+(T, T_1)}{T_1} dt = \Delta S. \quad (4.28)$$

Вторая подзадача в силу постоянства  $T_-$ , а значит, и  $T_2$ , примет вид

$$Q_- = q_-(T_2, T_-)\tau \rightarrow \min_{T_2} \quad (4.29)$$

при условии

$$\frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2} = \frac{\Delta S}{\tau}. \quad (4.30)$$

Условие (4.30) связывает  $T_2$  и  $\Delta S$ , так что  $Q_-$  зависит от  $\Delta S$ , как и максимум  $Q_+$ . Величину  $\Delta S$  надо выбрать так, чтобы

$$A_\tau(\Delta S) = [Q_+^*(\Delta S) - Q_-^*(\Delta S)] \rightarrow \max_{\Delta S > 0}. \quad (4.31)$$

Задача (4.29), (4.30), (4.31) рассмотрена выше. Условия оптимальности этой задачи с точностью до обозначений совпадают с условиями минимальной диссипации процесса теплообмена:

$$\frac{\partial q_+}{\partial T_1} \left( \frac{T_1^*(T)}{q_+(T, T_1^*(T))} \right)^2 = \text{const} \quad \forall T. \quad (4.32)$$

Они определяют  $T_1(T)$  с точностью до константы  $k$ .

Величину константы  $k$  находят после подстановки найденной из (4.32) зависимости  $T_1^*(T, k)$  в (4.26), (4.28). Она зависит от  $\Delta S$ , что и приводит к зависимости  $Q_+^*$  от  $\Delta S$ , или, что то же самое, от  $k$ .

Для ньютоновских законов теплообмена

$$q_- = \alpha_-(T_2 - T_-), \quad q_+ = \alpha_+(T - T_1) \quad (4.33)$$

и постоянной теплоемкости  $c$  равенство (4.32) примет форму

$$\frac{T_1^2}{\alpha_+(T - T_1)^2} = \text{const} \Rightarrow T_1 = kT,$$

где  $k$  — некоторая константа ( $0 < k < 1$ ).

Условия (4.26), (4.28) после подстановки в них  $T_1(T, k)$  приводят к уравнениям, связывающим  $k$ ,  $\Delta S$  и  $\bar{T}$ :

$$\Delta S = \frac{c}{k} \ln \frac{T_0}{\bar{T}}, \quad \tau = \frac{c}{\alpha_+(1-k)} \ln \frac{T_0}{\bar{T}}, \quad (4.34)$$

или

$$\bar{T} = T_0 \exp \left( -\frac{\tau \alpha_+(1-k)}{c} \right). \quad (4.35)$$

После подстановки  $\bar{T}$  в условие (4.34) получим

$$\Delta S = \frac{\tau \alpha_+(1-k)}{k}, \quad (4.36)$$

а после подстановки  $T_1 = kT$  и  $\bar{T}$  в (4.27) найдем

$$Q_+^*(k) = T_0 c \left( 1 - \exp \left( -\frac{\tau \alpha_+(1-k)}{c} \right) \right). \quad (4.37)$$

Из условия (4.30)

$$\alpha_-(T_2 - T_-) = \frac{\Delta S T_2}{\tau} = \frac{\alpha_+(1-k)}{k} T_2$$

следует, что

$$T_2 = T_- \frac{\alpha_- k}{\alpha_- k - \alpha_+(1-k)}.$$

Так как  $T_2 > 0$ , то  $\alpha_- k - \alpha_+(1-k) > 0$ , откуда  $k > \frac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+}$ . Величина

$$Q_-^*(k) = \frac{\tau T_- \alpha_+ \alpha_- (1-k)}{\alpha_- k - \alpha_+(1-k)}. \quad (4.38)$$

По условию (4.31) получим уравнение для  $k$

$$\frac{\partial Q_+^*}{\partial k} = \frac{\partial Q_-}{\partial k} \Rightarrow T_0 \exp\left(-\frac{\alpha_+ \tau}{c}(1-k)\right) = \frac{T_- \alpha_-^2}{(\alpha_- k - \alpha_+(1-k))^2}. \quad (4.39)$$

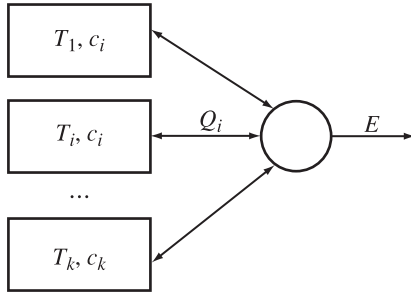
Левая часть этого уравнения монотонно растет с изменением  $k$  от нуля до единицы, а правая испытывает разрыв при  $k^0 = \frac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+}$ . При  $k < k^0$  правая часть уравнения отрицательна, а при  $k > k^0$  она монотонно уменьшается от бесконечности до  $T_-$ . Решение уравнения (4.39) существует, единственно и при  $T_0 > T_-$ , удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\alpha_+}{\alpha_+ + \alpha_-} < k \leq 1.$$

После того, как для каждой подсистемы найдено значение  $k_i$ , доставляющее максимум  $A_{i\tau}(\Delta S_i(k_i))$ , работоспособность системы может быть найдена как

$$A_\tau = \sum_i A_{i\tau}^*.$$

**Системы без резервуара.** *Продолжительность процесса не ограничена.* При отсутствии ограничения на продолжительность процесса максимальной работе, извлеченной из системы (см. рис. 4.3), соответствует обратимый процесс, в котором температуры всех подсистем выравниваются и в пределе становятся равными некоторому значению  $\Theta$ .



Р и с. 4.3. Термодинамическая система с идеальной тепловой машиной, не содержащая резервуара

Энтропия системы при этом не возрастает, так как рабочее тело получает и отдает тепло при температуре, сколь угодно близкой к температуре подсистемы. Работоспособность системы  $A_\infty$  равна уменьшению ее внутренней энергии

$$A_\infty = \sum_{i=1}^k \int_{\Theta}^{T_{i0}} c_i(T) dT.$$

Значение  $\Theta$  определяется из условия постоянства энтропии рабочего тела

$$\sum_{i=1}^k \Delta S_i = \sum_{i=1}^k \int_{\Theta}^{T_{i0}} \frac{c_i(T)}{T} dT = 0. \quad (4.40)$$

В частности, для постоянных теплоемкостей из равенства (4.40) следует, что конечная температура

$$\Theta = \prod_{i=1}^k T_{i0}^{\gamma_i}, \quad \gamma_i = \frac{c_i}{\sum_{\nu=1}^k c_{\nu}},$$

так что

$$A_{\infty} = \sum_{i=1}^k c_i (T_{i0} - \Theta) = (\bar{T} - \Theta) \sum_{i=1}^k c_i. \quad (4.41)$$

*Связь потерь работоспособности с изменением энтропии системы.* При определении эксергии как потенциальной работоспособности энергии в системе с резервуаром потери эксергии в необратимом процессе пропорциональны приросту энтропии системы. Так, для тепловой системы, содержащей резервуар с температурой  $T_-$ , и подсистем с теплоемкостями  $c_i$  и начальными температурами  $T_{i0}$  при необратимом выравнивании температур потеря эксергии равна:

$$A_{\infty} = T_- \Delta S,$$

где прирост энтропии

$$\Delta S = \sum_i c_i \left( \frac{T_{i0}}{T_-} - \ln \frac{T_{i0}}{T_-} - 1 \right).$$

Найдем аналогичную зависимость для системы, состоящей из подсистем с теплоемкостями  $c_i$  и начальными температурами  $T_{i0}$  и не содержащей резервуара. Работоспособность такой системы определяется выражением (4.41), в котором  $\bar{T} = \sum_i T_{i0} \gamma_i$  — средняя начальная

температура подсистем, а  $\gamma_i = \frac{c_i}{\sum_{\nu} c_{\nu}}$  — относительная теплоемкость  $i$ -й подсистемы.

Прирост энтропии системы в необратимом процессе выравнивания температур подсистем от  $T_{i0}$  до  $\bar{T}$  равен

$$\Delta S = \sum_i \Delta S_i = \sum_i c_i \ln \frac{\bar{T}}{T_{i0}} = \ln \frac{\bar{T}}{\Theta} \sum_i c_i,$$

откуда

$$\frac{\bar{T}}{\Theta} = \exp \frac{\Delta S}{\sum_i c_i}.$$

После подстановки этого отношения в выражение (4.41) получим работоспособность системы в форме

$$A_{\infty} = \sum_i c_i \bar{T} \left(1 - \frac{\Theta}{\bar{T}}\right) = \sum_i c_i T_{i0} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta S}{\sum_i c_i}\right)\right]. \quad (4.42)$$

Эта зависимость монотонна, а ее наклон при  $\Delta S = 0$  есть

$$\left(\frac{dA_{\infty}}{d\Delta S}\right)_{\Delta S=0} = \bar{T}.$$

*Продолжительность процесса задана.* Рассмотрим ту же задачу при фиксированной продолжительности процесса  $\tau$ . Она отличается от рассмотренной выше тем, что температуры каждой подсистемы в конце процесса  $\bar{T}_i$  различны и прирост энтропии системы положителен. Нулю равны приращения внутренней энергии и энтропии рабочего тела. Формально задача примет вид

$$A_{\tau} = \sum_{i=1}^k \int_{\bar{T}_i}^{T_{i0}} c_i(T) dT \rightarrow \max_{\bar{T}_i, T_{pi}(T)} \quad (4.43)$$

при условиях

$$\Delta S_p = \sum_{i=1}^k \int_{\bar{T}_i}^{T_{i0}} \frac{c_i(T)}{T_{pi}(T)} dT = 0, \quad (4.44)$$

$$\int_{\bar{T}_i}^{T_{i0}} \frac{c_i(T) dT}{q_i(T, T_p)} = \tau, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.45)$$

Здесь  $T_{pi}$  — температура рабочего тела при контакте с  $i$ -й подсистемой, условие (4.43) соответствует максимальному уменьшению внутренней энергии системы, условие (4.44) — равенству нулю прироста энтропии рабочего тела, а (4.45) — ограничению на продолжительность процесса.

Задача (4.43)–(4.45) сепарабельна и может быть разбита на  $k$  задач об оптимальном контакте рабочего тела с каждой из подсистем. При этом первоначально считаем прирост энтропии рабочего тела при контакте с  $i$ -й подсистемой  $\Delta S_i$  фиксированным.

Задача об оптимальном контакте примет форму (индекс  $i$  опускаем)

$$A_{\tau} = \int_{\bar{T}}^{T_0} c(T) dT \rightarrow \max_{\bar{T}, T_p(T)} \quad (4.46)$$



при условиях

$$\int_{\bar{T}}^{T_0} \frac{c(T)}{T_p(T)} dT = \Delta S, \quad (4.47)$$

$$\int_{\bar{T}}^{T_0} \frac{c(T) dT}{q(T, T_p)} = \tau. \quad (4.48)$$

Задача (4.46)–(4.48) с точностью до обозначений совпадает с задачей (4.36)–(4.38), поэтому температура рабочего тела при контакте с  $i$ -й подсистемой удовлетворяет условию (4.32), определяющему  $T_{pi}(T_i, k_i)$ . После подстановки этой зависимости в (4.47), (4.48) получим систему из двух уравнений с тремя неизвестными  $\bar{T}_i, \Delta S_i, k_i$ .

На втором этапе нужно решать задачу о таком выборе этих переменных, чтобы

$$A_\tau = \sum_{i=0}^m A_{\tau i}(\Delta S_i, k_i, \bar{T}_i) \rightarrow \max_{\Delta S_i, \bar{T}_i, k_i} \quad (4.49)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \Delta S_i(k_i, \bar{T}_i) = \Delta S_p = 0, \quad (4.50)$$

$$\varphi_i(\Delta S_i, k_i, \bar{T}_i) = \tau, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.51)$$

Здесь через  $\varphi_i$  обозначена функция, которая получается в результате взятия интеграла в (4.48) при подстановке туда зависимости  $T_{pi}(T, k)$ , найденной по условию (4.32).

В частности, для ньютоновских законов теплообмена

$$q_i = \alpha_i(T_i - T_{pi}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.52)$$

условия (4.32), как было показано, приводят к зависимости

$$T_{pi}(T_i) = k_i T_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.53)$$

После подстановки этого выражения в (4.47) и (4.48) получим для постоянных теплоемкостей зависимости  $\bar{T}_i(k_i)$  и  $\Delta S_i(k_i)$  в форме (4.35), (4.36).

Задача (4.49)–(4.51) состоит в таком выборе  $k_i, \Delta S_i, \bar{T}_i$ , чтобы достичь максимума

$$A_\tau = \sum_{i=1}^m c_i(T_{i0} - \bar{T}_i) \rightarrow \max_{\bar{T}_i, \Delta S_i, k_i} \quad (4.54)$$

при условиях (4.50), (4.35), (4.36), которые после исключения  $\Delta S_i$  можно привести к виду

$$\bar{T}_i(k_i) = T_{i0} \exp\left(-\frac{\tau \alpha_i(1-k_i)}{c_i}\right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.55)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i(1-k_i)}{k_i} = 0. \quad (4.56)$$

Подставляя  $\bar{T}_i(k_i)$  в (4.54), получим сепарабельную задачу (4.54), (4.56) с  $m$  неизвестными  $k_i$ . Условия стационарности  $i$ -го слагаемого функции Лагранжа этой задачи

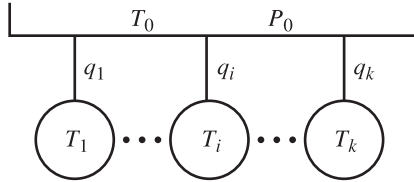
$$R_i = c_i(T_{i0} - \bar{T}_i(k_i)) - \lambda \frac{\alpha_i(1-k_i)}{k_i}$$

по  $k_i$  приводят к системе уравнений

$$k_i^2 \bar{T}_i(k_i) = \text{const} = \frac{\lambda}{\tau}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.57)$$

определяющих  $k_i(\lambda)$ . Значение  $\lambda$  находят после подстановки этих зависимостей в (4.56).

*Независимые подсистемы, контактирующие с резервуаром.* Рассмотрим систему, показанную на рис. 4.4, когда  $n$  рабочих тел, изолированных друг от друга, контактируют с источником, имеющим температуру  $T_0$  и давление  $P_0$ . Считаем заданными начальные состояния всех подсистем и параметры источника. Суммарный объем всей системы неизменен.



Р и с. 4.4. Структура термодинамической системы, состоящей из изолированных подсистем и резервуара

Каждый из тепловых потоков  $q_\nu(T_0, T_\nu)$ , как и  $\sigma_\nu(T_\nu) = \frac{1}{T_\nu} q_\nu(T_0, T_\nu)$ , зависит только от одного управляющего воздействия  $T_\nu$ , причем для рабочего тела выбором  $T_\nu = T_0$  этот поток можно сделать равным нулю, поэтому вводить функции контакта  $U_\nu$  для рабочего тела не имеет смысла.

Задача о максимальной работе в рассматриваемой системе распадается на  $n$  подзадач оптимального контакта каждой из подсистем с резервуаром. При этом давления всех подсистем в момент  $\tau$  равно  $P_0$ . Задача о максимальной мощности требует учета характеристик всех подсистем.

Рассмотрим первоначально одну из них (индекс  $\nu$  опускаем). Если при контакте резервуара с рабочим телом, энтропия рабочего тела  $S(\tau)$  в конце процесса задана, а объем  $V^*$  определен условием  $P = P_0$ , то внутренняя энергия рабочего тела  $E(\tau)$  фиксирована и минимуму внутренней энергии системы соответствует минимум  $E_0$ . Мы приходим к постановке

$$\overline{q(T_0, T)} \rightarrow \max_T / \left( \frac{q(T_0, T)}{T} \right) = \frac{\Delta S}{\tau}. \quad (4.58)$$

Эта подзадача для линейного закона теплопереноса

$$q(T_0, T) = \alpha(T_0, T) \quad (4.59)$$

рассмотрены выше, как и для более общего закона

$$q(T_0, T) = \alpha(T_0^k - T^k), \quad (4.60)$$

в котором  $\alpha$  и  $k$  имеют одинаковый знак.

Для линейного закона теплопереноса задача (4.58) выпукла, оптимальное решение единственно

$$T^* = \frac{T_0}{1 + \Delta S / \alpha \tau}, \quad \alpha \tau + \Delta S > 0.$$

Оптимальная работа имеет вид

$$A^*(\tau) = \frac{T_n \Delta S \alpha \tau}{\alpha \tau + \Delta S} - \Delta E. \quad (4.61)$$

Здесь  $\Delta E = E(S(\tau), V^*(\tau)) - E(S(0), V(0))$ .

Для того чтобы конкретизировать зависимость (4.61), будем предполагать, что каждая из подсистем близка к идеальному газу, при этом

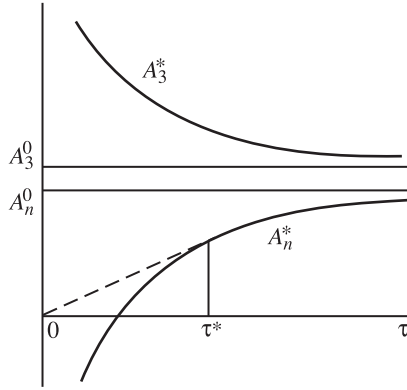
$$\Delta S = C_p \ln \frac{T(\tau)}{T(0)} - R \ln \frac{P_0}{P(0)}. \quad (4.62)$$

Здесь учтены условия равенства давлений подсистем в момент  $\tau$  давлению источника.

Равенство (4.62) позволяет найти  $T(\tau)$  через  $\Delta S$  и выразить  $\Delta E = C_\nu(T(\tau) - T(0))$ :

$$\Delta E(\Delta S) = C_\nu T(0) \left[ \left( \frac{P_0}{P(0)} \right)^{R/C_p} \exp \left( \frac{\Delta S}{C_p} \right) - 1 \right]. \quad (4.63)$$

После подстановки (4.63) в (4.61) получим зависимость  $A^*(\tau, \Delta S)$ . Характер зависимости работоспособности системы от  $\tau$  показан на рис. 4.5.



Р и с. 4.5. Характер зависимости работоспособности системы от продолжительности контакта

Когда величина  $\Delta E$ , подсчитанная по формуле (4.63), положительна, то существует такое  $\tau_0$ , что за время, меньшее  $\tau_0$ , никакой работы получить в системе нельзя.

Если энтропия  $S(\tau)$  не задана, то вместо задачи (4.58) имеем задачу о минимуме суммарной внутренней энергии системы, что приводит к требованию

$$\left(\frac{T(\tau)}{T} - 1\right) q(T_0, T) \rightarrow \min_{T > 0} \quad (4.64)$$

совместно с равенством

$$\Delta S = S(\tau) - S(0) = \tau \frac{q(T_0, T^*)}{T^*}.$$

Это равенство для идеального газа и линейного закона теплообмена с учетом (4.62) переписывается как

$$C_p \ln \frac{T(\tau)}{T(0)} - R \ln \frac{P_0}{P(\tau)} = \tau \alpha \left(\frac{T_0}{T} - 1\right). \quad (4.65)$$

По условию (4.64) для  $q = \alpha(T_0 - T)$  имеем

$$\frac{T(\tau)}{T} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow T(\tau) = \frac{T^2}{T_0}, \quad (4.66)$$

что после подстановки в (4.65) приводит к уравнению для  $T^*$

$$2C_p \ln \frac{T^*}{T_0 T(0)} - R \ln \frac{P_0}{P(0)} = \tau \alpha \left(\frac{T_0}{T^*} - 1\right). \quad (4.67)$$

Правая часть этого равенства монотонно возрастает, а левая убывает с ростом  $T^*$ , так что решение единственно и определяет предельную работу:

$$A_n^*(\tau) = -\Delta E_{\min} = C_\nu \left(T(0) - \frac{(T^*)^2}{T_0}\right) + \alpha \tau (T_0 - T^*). \quad (4.68)$$

В задаче о максимальной мощности

$$n(\tau) = \frac{\sum_i A_i(\tau)}{\tau} \rightarrow \max_{\tau > 0}$$

условие оптимальности для выпуклых вверх дважды дифференцируемых функций  $n(\tau)$ , т.е. для функций  $A_i(\tau)$ , удовлетворяющих неравенству

$$\sum_i \left( \frac{d^2 A_i}{d\tau^2} \tau^2 - 2A_i(\tau) \right) < 2\tau \sum_i \frac{dA_i(\tau)}{d\tau},$$

примет вид

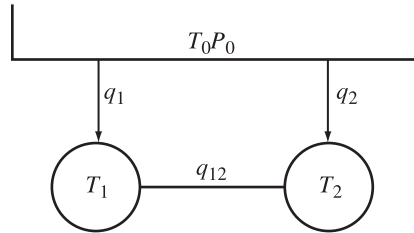
$$\sum_i \left( \frac{dA_i}{d\tau} - \frac{A_i(\tau)}{\tau} \right) = 0.$$

С учетом (4.63), (4.64) для рассмотренных выше законов теплопереноса и характеристик рабочего тела получим уравнение для  $\tau^*$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \Delta S_i}{\alpha_i \tau + \Delta S_i} \left( \frac{\Delta S_i}{\alpha_i \tau + \Delta S_i} - 1 \right) = \frac{T_0}{\tau} \sum_{i=1}^n \Delta E_i(\Delta S_i).$$

Мощность  $n(\tau^*)$ , которую можно получить в процессе конечного времени, ограничена, затрачиваемая же мощность может быть сколь угодно велика.

*Рабочие тела могут контактировать друг с другом.* Рассмотрим первоначально систему, изображенную на рис. 4.6.



Р и с. 4.6. Подсистемы, контактирующие с резервуаром и друг с другом

Для простоты будем предполагать объемы подсистем в момент  $\tau$  фиксированными, а  $S_i(\tau)$  заданными. Задача о минимуме внутренней энергии системы в момент  $\tau$  приводит к условиям

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[ U_i q_i(T_0, T_i) + \lambda_i \left( \frac{U_i q_i(T_0, T_i) + U_{21} q_{21}(T_2, T_1)(-1)^i}{T_i} - \Delta S_i \right) \right] \rightarrow \max_{U, T} \right\} \rightarrow \min_{\lambda},$$

где  $\Delta S_i = S_i(\tau) - S_i(0)$ .

Предельная работа в системе, показанной на рис. 4.6, заведомо не меньше, чем предельная работа в системе, изображенной на рис. 4.4, так как при  $U_1 = U_2 = 1, U_{21} = 0$  эти системы совпадают. Множители  $\lambda_i$  по физическому смыслу задачи положительны, так как предельная работа  $A_n^*$  монотонно уменьшается с ростом  $\Delta S_i$ , а  $\lambda_i = -\frac{\partial A_n^*}{\partial \Delta S_i}$ .

Для линейных законов теплопереноса

$$q_i = \alpha_i(T_0 - T_i), \quad q_{21} = \alpha_{21}(T_2 - T_1)$$

функция  $L$  выпукла вверх по  $T_1$  и  $T_2$ , базовое значение вектора  $T$  единственно. Функция контакта  $U_i^* = 1$ , если  $q_i(T_0, T_i)(1 + \lambda_i/T_i) > 0$ , т.е. если  $T_0 > T_i$ . С учетом этого оптимальные значения  $T_1$  и  $T_2$  определяются как

$$T_i^* = \frac{\alpha_i T_0 - \tilde{q}_{21}(-1)^i}{\alpha_i + \Delta S_i}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $\tilde{q}_{21} = U_{21}q_{21}(T_2, T_1)$ . Полученная работа

$$A_n = \tau(q_1(T_0, T_1^*) + q_2(T_0, T_2^*)) = \tau \left\{ T_0 \left[ \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \Delta S_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \Delta S_2} \right] + U_{21}\alpha_{21}(T_2 - T_1) \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \Delta S_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \Delta S_1} \right) \right\}. \quad (4.69)$$

Нетрудно показать, что при любом знаке  $q_{21}$  множитель при  $U_{21}$  в (4.69) положителен, и, следовательно,  $U_{21}^* = 1$ . Температуры  $T_1^*$  и  $T_2^*$  на интервале  $(0, \tau)$  постоянны и определяются из системы

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{T_1^2}(T_1^2 - T_1(\tau)T_0) &= \alpha_{21} \left( \frac{T_2 T_1(\tau)}{T_1^2} - \frac{T_2(\tau)}{T_2} \right), \\ \frac{\alpha_2}{T_2^2}(T_2^2 - T_2(\tau)T_0) &= \alpha_{21} \left( \frac{T_1 T_2(\tau)}{T_2^2} - \frac{T_1(\tau)}{T_1} \right). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Для подсистем, близких к идеальным газам, и для  $V_i(\tau) > V_{i0}$  условия (4.70) нужно дополнить соотношениями

$$\Delta S_i = C_{vi} \ln \frac{T_i(\tau)}{T_i(0)} = \frac{1}{T_i} (\alpha_i(T_n - T_i) - \alpha_{12}(-1)^i(T_2 - T_1)), \quad i = 1, 2, \quad (4.71)$$

что определяет  $T_i^*$  и  $T_i^*(\tau)$ .

Максимальная работа  $A_n^*$  определяется как сумма приращений внутренней энергии подсистем и источника

$$A^* = |(E_0(0) - E_0(\tau)) + \sum_i (E_i(0) - E_i(\tau))|_{T=T^*, T(\tau)=T^*(\tau)}.$$

Случай, когда резервуар отсутствует, соответствует тому, что  $U_1 = U_2 = 0$ . Из условий (4.70) следует, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{T_1(\tau)}{T_2(\tau)}} = \omega. \quad (4.72)$$

Условия (4.71) переписываются как

$$C_{v1} \ln \frac{T_1(\tau)}{T_{10}} = \frac{\alpha_{21}}{T_1} (T_2 - T_1) = \alpha_{21} \left( \frac{1}{\omega} - 1 \right), \quad (4.73)$$

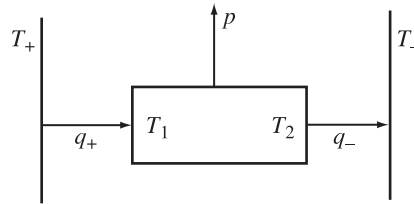
$$C_{v2} \ln \frac{T_2(\tau)}{T_{20}} = -\frac{\alpha_{21}}{T_2} (T_2 - T_1) = \alpha_{21} (\omega - 1).$$

Равенства (4.72)–(4.73) определяют  $T_1^*(\tau)$ ,  $T_2^*(\tau)$  и  $\omega^*$ . Значения температур  $T_1^*$  и  $T_2^*$  на интервале  $(0, \tau)$  при этом однозначно не определены, а значит, на систему может быть наложено дополнительное условие, которое доопределит  $T_1^*$  и  $T_2^*$ . Таким условием может быть, например, задание средней интенсивности теплового потока  $\bar{q}$ . В этом случае

$$T_1^* = \frac{\bar{q}\omega^*}{\alpha_{21}(1-\omega^*)}, \quad T_2^* = \frac{\bar{q}}{\alpha_{21}(1-\omega^*)}.$$

## 4.2. О связи между потоками тепла и работы в системах с распределенными параметрами рабочего тела

Рассмотрим систему преобразования тепловой энергии в работу (рис. 4.7), состоящую из двух резервуаров (источников) с температурами  $T_+$  и  $T_-$  ( $T_+ > T_-$ ) и рабочего тела, контактирующего с резервуарами и вырабатывающего или получающего извне работу.



Р и с. 4.7. Система преобразования тепла в работу

Такую систему называют *прямым преобразователем*, если рабочее тело получает тепло от источника с большей температурой  $T_+$ , часть его передает источнику с меньшей температурой  $T_-$  и генерирует работу. Если же рабочее тело получает работу извне, а тепловой поток

направлен от холодного источника к горячему, то преобразователь *обратный* (работа  $\rightarrow$  тепло).

Если рабочее тело контактирует с обоими источниками одновременно, то его называют *рабочим телом с распределенными параметрами*, а если поочередно, то *рабочим телом с сосредоточенными параметрами*. В первом случае мы будем считать поток внутри рабочего тела конвективным и пренебрегать необратимостью, связанной с распределенностью параметров.

**Прямой преобразователь (тепло  $\rightarrow$  работа).** Обозначим температуры контакта рабочего тела с источниками через  $T_1$  и  $T_2$ , ( $T_1 > T_2$ ); тепловые потоки от горячего и холодного источников —  $q_+(T_+, T_1)$ ,  $q_-(T_2, T_-)$ ; мощность —  $p$ . Балансовые соотношения по энергии и энтропии для рабочего тела запишутся как:

$$q_+(T_+, T_1) = q_-(T_2, T_-) + p, \quad (4.74)$$

$$\frac{q_+(T_+, T_1)}{T_1} = \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2}. \quad (4.75)$$

Последнее равенство связано с тем, что энтропия рабочего тела не изменяется и необратимость процессов внутри рабочего тела не учитывается. Диссипация в системе равна изменению энтропии источников

$$\sigma = \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_-} - \frac{q_+(T_+, T_1)}{T_+}. \quad (4.76)$$

Обозначим КПД преобразователя как

$$\eta = \frac{p}{q_+(T_+, T_1)} \quad (4.77)$$

и найдем связь между мощностью  $p$ , КПД и расходом тепла  $q_+$ .

Исключим из равенств (4.74), (4.75)  $q_-$ . Получим

$$q_- = q_+ \frac{T_2}{T_1}, \quad (4.78)$$

$$q_+ \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = p \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.79)$$

В свою очередь  $T_2 = T_2(q_-, T_-)$ ,  $T_1 = T_1(q_+, T_+)$ . С учетом этих зависимостей, и условия (4.78) можно найти связь  $p$  с  $\eta$  и  $q_+$  для конкретных законов теплопереноса.

*Ньютоновские законы теплопереноса.*

$$q_+ = \alpha_+(T_+ - T_-), \quad q_- = \alpha_-(T_2 - T_-) \quad (4.80)$$



Откуда

$$T_1 = T_+ - \frac{q_+}{\alpha_+}, \quad T_2 = T_- + \frac{q_-}{\alpha_-} = T_- + \frac{q_+}{\alpha_-} \frac{T_2}{T_1}.$$

Откуда

$$T_2 = \frac{T_-}{1 - \frac{q_+}{\alpha_- T_1}} = \frac{T_-}{1 - \frac{p}{\eta \alpha_- T_1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta = \frac{T_-}{T_1 - \frac{p}{\alpha_- \eta}} = \frac{T_-}{T_+ - \frac{p}{\eta \alpha_+} - \frac{p}{\eta \alpha_-}}.$$

Таким образом мощность и КПД прямого преобразователя для ньютоновских законов теплопереноса (4.80) связаны равенством

$$\frac{(1 - \eta)}{\eta} = \frac{T_-}{T_+ \eta - \frac{p}{\bar{\alpha}}} \quad (4.81)$$

где  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-}$ . Так, что

$$p(\eta) = \bar{\alpha} \eta \left( T_+ - T_- \frac{1}{1 - \eta} \right) \quad (4.82)$$

Очевидно, что для случая, когда  $\eta$  равен КПД Карно обратимой тепловой машины

$$\eta = \eta_k = 1 - \frac{T_-}{T_+},$$

мощность  $p(\eta_k) = 0$ , как и для  $\eta = 0$ .

Найдем значение  $\eta$ , для которого мощность прямого преобразователя максимальна, и величину  $p_{\max}$ . Нетрудно показать, что функция  $p(\eta)$  выпукла вверх (рис. 4.8), так что условие ее стационарности определяет точку максимума

$$\frac{dp}{d\eta} = 0 \rightarrow T_+ - T_- \frac{1}{1 - \eta} - \eta T_- \frac{1}{(1 - \eta)^2} = 0,$$

откуда с учетом того, что  $p > 0$ , получим

$$\eta_{nka} = 1 - \sqrt{T_-/T_+}. \quad (4.83)$$

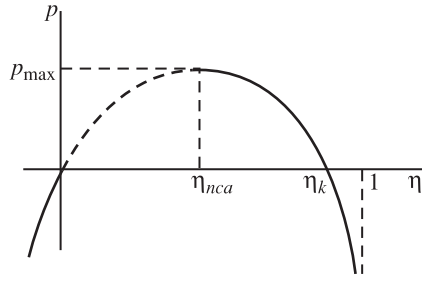
Это значение КПД было получено Новиковым [125], а позднее независимо Курзоном и Альбурном [94]. Соответствующее этому КПД значение предельной мощности преобразования тепла в работу получим после подстановки в (4.82)  $\eta_{nka}$

$$p_{\max} = \bar{\alpha} (\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2. \quad (4.84)$$

Разрешая уравнение (4.82) относительно  $\eta$ , получим КПД прямого преобразователя тепла в работу в функции мощности

$$\eta(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\bar{\alpha} T_+} + \eta_k \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{p}{\bar{\alpha} T_+} + \eta_k \right)^2 - \frac{p}{\alpha T_+}}. \quad (4.85)$$

Пунктирная часть кривой на рис. 4.8. соответствует знаку минус перед квадратным корнем в выражении (4.85). Она реализуется, когда тепловой поток  $q_+$  больше того, который соответствует мощности  $p_{\max}$ .



Р и с. 4.8. Характер связи между мощностью и КПД тепловой машины

Закон теплопереноса в форме Фурье.

$$q_+ = \alpha_+ \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_+} \right), \quad q_- = \alpha_- \left( \frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_2} \right),$$

С учетом равенства (4.78) получим

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_+} + \frac{q_+}{\alpha_+}, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_-} - \frac{q_-}{\alpha_-},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta = \frac{\frac{1}{T_+} + \frac{q_+}{\alpha_+}}{\frac{1}{T_-} - \frac{q_-}{\alpha_-} (1 - \eta)}.$$

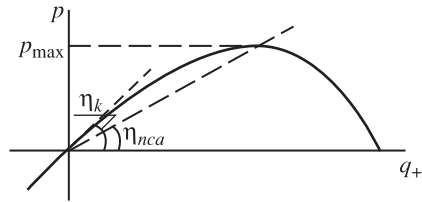
Таким образом

$$1 - \eta = \frac{\frac{1}{T_+} + \frac{p}{\alpha_+ \eta}}{\frac{1}{T_-} - \frac{p}{\alpha_- \eta} (1 - \eta)},$$

а

$$p(\eta) = \frac{\eta \left( \frac{1-\eta}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right) \alpha_- \alpha_+}{\alpha_+ (1-\eta)^2 + \alpha_-}. \quad (4.86)$$

Эта зависимость аналогична зависимости (4.82) для ньютоновского теплопереноса. Мощность обращается в нуль при  $\eta = 0$  и при  $\eta = \eta_k$ , и при некотором  $\eta = \eta_0$  достигает максимума.



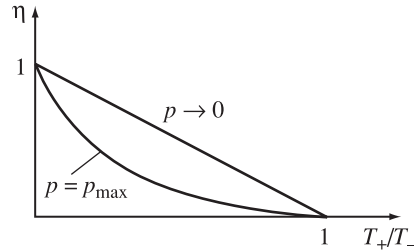
Р и с. 4.9. Характер зависимости мощности от затрат тепла

Зависимость между мощностью  $p$  и расходом тепла  $q_+$  вытекает

из выражений (4.82), (4.86) после замены в них  $\eta = p/q_+$ . С ростом  $q_+$  мощность первоначально увеличивается, достигает своего максимального значения, а потом падает (рис. 4.9).

Наклон зависимости  $p(q_+)$  в начале координат равен КПД Карно, а наклон отрезка, соединяющего начало координат с точкой максимума, равен  $\eta_{mka}$ . На рисунке 4.10 показана зависимости  $\eta_k$  и  $\eta_{mka}$  от отношения температур источников.

Р и с. 4.10. Зависимость КПД тепловой машины от отношения температур источников для максимальной и сколь угодно малой мощности



После замены в формуле (4.76)  $q_-$  через  $\eta$  и  $q_+$  получим связь между КПД преобразования и производством энтропии

$$\eta = \eta_k - \frac{T_- \sigma}{q_+} = \frac{p \eta_k}{p + \sigma T_-}. \quad (4.87)$$

С ростом  $\sigma$  КПД монотонно уменьшается.

При выводе зависимостей между мощностью и затратами тепла и между мощностью и КПД мы использовали гипотезу внутреннего равновесия рабочего тела, считая производство энтропии в нем равным нулю (см. условие (4.75)). При учете дополнительного производства энтропии в системе, не связанного с теплообменом между рабочим телом и источниками, величина  $\sigma$  будет больше, а следовательно при том же потоке тепла  $q_+$  значения  $\eta$  и мощности  $p$  уменьшатся. Так что зависимость  $p(q_+)$ , построенная на рис. 4.9, представляет собой границу области реализуемости для необратимого преобразования тепловой энергии в работу в системе с распределенными параметрами рабочего тела. Ни одна реальная тепловая машина с ненулевой мощностью не может работать в области, лежащей выше кривой  $p(q_+)$ , и иметь больший КПД, чем тот, который соответствует граничным точкам этой области реализуемости. Фактической границей разумных режимов является, естественно, левая ветвь этой зависимости, соответствующая росту  $p$  с ростом  $q_+$ .

Отметим одно важное обстоятельство: полученные зависимости не включают в себя уравнения состояния рабочего тела. Они требуют знания только коэффициентов теплообмена. Поэтому эти зависимости справедливы не только в случае, когда тепло преобразуется в

механическую работу, но и тогда когда оно преобразуется в работу разделения. Вследствие этого в системах разделения, использующих тепловую энергию (*термические системы разделения*) вырабатываемая мощность, а значит и производительность, ограничена. Подробнее оценки предельных возможностей систем разделения рассмотрены в главе 5.

**Обратный преобразователь (работа  $\rightarrow$  тепло).** В этом случае мощность  $p$  направлена в систему извне, т.е. при принятых выше допущениях о знаке потоков отрицательна. Потоки тела  $q_+$  и  $q_-$  также имеют другой знак, поэтому температура  $T_2 < T_-$ , а  $T_1 > T_+$ . Внутреннюю необратимость рабочего тела как и выше не учитываем. В этом случае балансовые соотношения (4.74) и (4.75) остаются в силе, так как изменятся на противоположные знаки правой и левой частей этих равенств. Эффективность системы оценивается *отопительным коэффициентом* теплового насоса

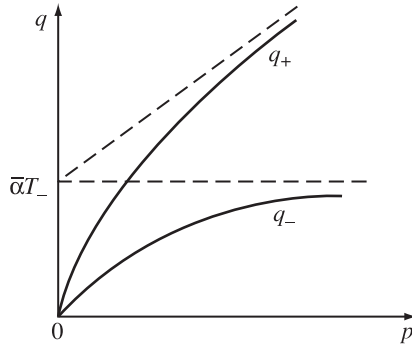
$$r = \frac{|q_+|}{|p|} = \frac{1}{\eta} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1/\eta_k \quad (4.88)$$

Это равенство следует из выражения (4.79).

Для ньютоновских законов теплообмена (4.80), проведя выкладки, аналогичные тем, что были использованы выше для прямого преобразования тепла в работу, получим связь между затрачиваемой мощностью и отопительным коэффициентом  $r$  в форме

$$r = \frac{T_+ + rp/\bar{\alpha}}{T_+ - T_- + rp/\bar{\alpha}}.$$

При  $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$  или  $\bar{p} \rightarrow \infty$  величина  $r$  стремится к  $r_0 = 1/\eta_k = \frac{T_+}{T_+ - T_-}$ .



Р и с. 4.11. Характер зависимости потоков тепла от затрачиваемой мощности в обратном преобразователе

После замены  $r$  на отношение  $|q_+|/|p|$  получим связь между затра-

чиваемой мощностью и потоком тепла

$$|p| = |q_+| \left( 1 - \frac{T_-}{T_+ + |q_+|/\bar{\alpha}} \right). \quad (4.89)$$

При фиксированном значении  $\bar{\alpha}$  эта зависимость монотонна (рис.4.11). При увеличении  $q_+$  ее наклон стремится к единице.

**Обратный преобразователь (работа  $\rightarrow$  холод).** В ряде случаев целью обратного преобразователя является отбор тепла у холодного источника. Его эффективность характеризуют *холодильным коэффициентом*

$$\epsilon = \frac{|q_-|}{p} = \frac{|q_+| - |p|}{|p|} = r - 1. \quad (4.90)$$

После замены в равенстве (4.89)  $|q_+| = |q_-| + |p|$ , получим связь между мощностью и потоком отбираемого тепла

$$|p| = \frac{|q_-|[\bar{\alpha}(T_+ - T_-) + |q_-|]}{\bar{\alpha}T_- - |q_-|}. \quad (4.91)$$

Условие положительности температуры  $T_2$  приводит к тому, что знаменатель в выражении (4.91) положителен (он равен  $\alpha T_2$ ), а тепловой поток  $q_-$  ограничен ( $q_- < \alpha T_-$ ). Из (4.91) следует, что

$$q_-(p, \bar{\alpha}) = -\frac{1}{2}[\bar{\alpha}(T_+ - T_-) + p] + \sqrt{\frac{[\bar{\alpha}(T_+ - T_-) + p]^2}{4} + \bar{\alpha}T_-p} \quad (4.92)$$

Зависимость  $q_-(p)$  показана на рис. 4.11.

### 4.3. Предельные возможности тепловых и холодильных машин с сосредоточенными параметрами рабочего тела

В предыдущем параграфе мы рассматривали преобразователи, в которых рабочее тело непрерывно контактирует с горячим и холодным источниками, а параметры рабочего тела являются распределенными. К устройствам такого рода можно отнести идеализированную турбину или колонну ректификации, в которых необратимость процессов, протекающих внутри рабочего тела, пренебрежимо мала.

В этом параграфе мы рассмотрим циклы тепловой машины, в которой рабочее тело периодически изменяет свои параметры во времени или по времени пребывания, циркулируя по замкнутому контуру и поочередно контактируя с источниками. Для оценки предельных возможностей такой машины нужно сформулировать и решить задачу об оптимальной форме изменения параметров рабочего тела, так как в отличие от предыдущей постановки его температура может изменяться по времени или по длине.

**Источники бесконечной емкости.** Температуры источников  $T_+$  и  $T_-$  будем считать фиксированными (т.е. они являются резервуарами). Обозначим температуру источника через  $T_n(f)$  и будем считать, что она принимает значения  $T_+$  либо  $T_-$ . Если обозначить зависимость теплового потока  $q$  от температур источника и рабочего тела как  $q(T_n, T)$ , задача о предельной мощности примет форму

$$\bar{p} = \overline{q(T_n, T)} \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \left( \frac{q(T_n, T)}{T} \right) = 0, \\ T_n = (T_+, T_-); T > 0. \end{array} \right. \quad (4.93)$$

Это усредненная задача нелинейного программирования с одним условием, соответствующем тому, что энтропия рабочего тела за один цикл не изменяется. Одному условию (см. [63]) соответствуют два базовых значения температуры рабочего тела  $T_1$  и  $T_2$ , для каждого из которых значение функции Лагранжа  $L = q(T_n, T)(1 + \frac{\lambda}{T})$  задачи (4.93) достигает максимума. При этом

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \arg \max_T q(T_+, T)(1 + \frac{\lambda}{T}), \\ T_2 = \arg \max_T q(T_-, T)(1 + \frac{\lambda}{T}). \end{array} \right\} \quad (4.94)$$

Величина же  $\lambda$ -множителя выбирается из условия равенства этих максимумов

$$q(T_+, T_1)(1 + \frac{\lambda}{T_1}) = q(T_-, T_2)(1 + \frac{\lambda}{T_2}). \quad (4.95)$$

Таким образом независимо от закона теплопереноса цикл предельной мощности состоит из двух изотерм и двух адиабат.

В том случае, когда закон теплопереноса линеен:

$$q(T_+, T) = \alpha_+(T_+ - T), \quad q(T_-, T) = \alpha_-(T_- - T), \quad (4.96)$$

результаты расчетов по формулам (4.95), (4.96) приводят к соотношениям

$$p_{\max} = \frac{\alpha}{4}(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2, \quad (4.97)$$

где

$$\alpha = \frac{4\alpha_+\alpha_-}{(\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-})^2}. \quad (4.98)$$

При этом производство энтропии в системе

$$\sigma = \frac{\alpha}{4} \frac{(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2}{\sqrt{T_+ T_-}}$$

Для закона теплопереноса Фурье

$$q = \alpha \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right)$$

предельная мощность тепловой машины, найденная из решения системы (4.95), (4.96), равна

$$\bar{p}_{\max} = \frac{\alpha}{8} \frac{T_+ - T_-}{T_+ T_-},$$

а

$$\sigma = \frac{\alpha}{16} \left( \frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right)^2.$$

*Задача о предельном термическом КПД* тепловой машины при заданной мощности  $p_0$  эквивалентна задаче о минимальном производстве энтропии в системе. Так как энтропия рабочего тела за цикл не изменяется, то производство энтропии определяется ростом энтропии источников. Мы приходим к постановке

$$-\sigma = \left( \frac{\overline{q(T_n, T)}}{T_n} \right) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \overline{q(T_n, T)} = p_0, \\ \left( \frac{\overline{q(T_n, T)}}{T} \right) = 0, \quad T_n = \{T_+, T_-\}, \quad T > 0. \end{array} \right. \quad (4.99)$$

В этой задаче два усредненных условия, а значит в принципе возможно три базовых значения температуры  $T$ . Однако, если для  $T_n = T_+$  и для  $T_n = T_-$  функция Лагранжа, соответствующая задаче (4.99), имеет единственный максимум по  $T$ , а это почти всегда так, то базовых значений только два. Одно из них  $T_1$  соответствует контакту с горячим источником ( $T_n = T_+$ ) другое  $T_2$  - контакту с холодным источником ( $T_n = T_-$ ). При этом

$$\begin{aligned} T_1 &= \arg \max_T \left[ q(T_+, T) \left( \frac{1}{T_+} + \lambda + \frac{\mu}{T} \right) - \lambda p_0 \right], \\ T_2 &= \arg \max_T \left[ q(T_-, T) \left( \frac{1}{T_-} + \lambda + \frac{\mu}{T} \right) - \lambda p_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Значения функции Лагранжа в этих базовых точках одинаковы

$$q(T_+, T_1) \left( \frac{1}{T_+} + \lambda + \frac{\mu}{T_1} \right) = q(T_-, T_2) \left( \frac{1}{T_-} + \lambda + \frac{\mu}{T_2} \right). \quad (4.101)$$

Кроме того выполнены усредненные ограничения задачи (4.99)

$$\begin{aligned} \gamma q(T_+, T_1) + (1 - \gamma) q(T_-, T_2) &= p_0, \\ \gamma \frac{q(T_+, T_1)}{T_1} + (1 - \gamma) \frac{q(T_-, T_2)}{T_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Уравнения (4.100)-(4.102) позволяют найти пять неизвестных  $T_1, T_2, \lambda, \mu$  и  $\gamma$ . Значение множителя  $\gamma$ , соответствующего доле времени контак-

та рабочего тела с горячим источником, удовлетворяет неравенству  $0 < \gamma < 1$ .

Для линейного закона теплопередачи решение задачи (4.99) приводит к следующим результатам

$$\eta_{\max} = \max_{\gamma q(T_+, T_1)} \frac{p_0}{\gamma q(T_+, T_1)} = 1 - \frac{1}{2T_+} \left( T_+ + T_- - \frac{4p}{\alpha} - \sqrt{(T_+ - T_-)^2 + \left(\frac{4p}{\alpha}\right)^2 - 8\frac{p}{\alpha}(T_+ - T_-)} \right), \quad (4.103)$$

где  $\alpha$  соответствует равенству (4.98). Нетрудно проверить, что при  $p \rightarrow 0$  величина  $\eta_{\max}$  стремится к КПД Карно, а при  $p \rightarrow p_{\max}$  она стремится к значению термического КПД, найденного Новиковым, Курзюном и Альбурном

$$\eta_{msa} = 1 - \sqrt{\frac{T_-}{T_+}}.$$

Оптимальные продолжительности контакта с горячим и холодным источниками относятся друг к другу, как

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} = \sqrt{\frac{\alpha_-}{\alpha_+}}. \quad (4.104)$$

### Предельные возможности обратных циклов

В обратных циклах холодильников и тепловых насосов механическая работа подводится к системе, за счет чего тепло отбирается от холодного и передается горячему источнику. Отличие холодильного цикла от цикла теплового насоса заключается в том, что в первом случае оценкой экономичности служит холодильный коэффициент  $\epsilon$ , равный отношению потока отбираемого у холодного источника тепла к подводимой мощности

$$\epsilon = \frac{(1 - \gamma)q(T_-, T)}{p_0}, \quad (4.105)$$

а во втором случае КПД теплового насоса (отопительный коэффициент)

$$\eta = \frac{\gamma q(T_+, T)}{p_0} \quad (4.106)$$

— отношение потока тепла, передаваемого горячему источнику к затрачиваемой мощности. Из энергетического баланса следует, что  $\eta = 1 + \epsilon$ , поэтому достаточно найти предельное значение холодильного коэффициента.

Нетрудно показать, что предельному значению значению холодильного коэффициента соответствует при заданной средней мощности  $p_0$  минимальное значение производства энтропии в системе. Получим



задачу, совпадающую с задачей (4.99) с той разницей, что температура рабочего тела не должна принадлежать отрезку  $[T_-, T_+]$ . При контакте с холодным источником  $T < T_-$ , а при контакте с горячим  $T > T_+$ . Последовательность решения этой задачи совершенно аналогична задаче (4.99), поэтому приведем его результаты для линейного закона теплопереноса:

$$\epsilon_{\text{нр}} = \frac{1}{2p_0} \left( \sqrt{p_0^2 + \frac{\alpha(T_+ + T_-)}{2} p_0 + \frac{\alpha^2(T_+ - T_-)^2}{16}} - p_0 - \frac{\alpha(T_+ - T_-)}{4} \right). \quad (4.107)$$

В [46] рассмотрена та же задача для других законов теплопереноса.

**Предельная мощность тепловой машины в системе с несколькими резервуарами.** Обозначим температуры источников через  $T_{i0}$ , а тепловой поток от  $i$ -го источника к рабочему телу через  $u_i q_i(T_{i0}, T)$ . Функции контакта  $u_i(t)$ , как и температура  $T(t)$  подлежат оптимальному выбору в задаче

$$\bar{p} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i u_i q_i(T_{i0}, T) dt \rightarrow \max \left/ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\sum u_i q_i(T_{i0}, T)}{T} dt = \bar{\sigma} \right. \\ u_i = [0; 1], \quad T > 0. \quad (4.108)$$

Среднюю скорость изменения энтропии рабочего тела будем первоначально считать параметром. При фиксированной продолжительности процесса  $\tau$  множители  $\frac{1}{\tau}$  перед интегралами могут быть опущены, однако в дальнейшем будет рассматриваться задача, в которой  $\tau$  стремится к бесконечности, в этом случае усреднение теплового потока и скорости изменения энтропии рабочего тела необходимо. Функции  $q_i$  монотонно уменьшаются по  $T$  и увеличиваются по  $T_{i0}$ . При равенстве температур рабочего тела и источника эти функции равны нулю.

Условия оптимальности задачи (4.108)) примут форму [63]

$$L = \sum_{i=1}^n u_i q_i(T_{i0}, T) \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right) \rightarrow \max_{u_i, T} \min_{\lambda}$$

С учетом того, что функции контакта  $u_i$  входят в  $L$  линейно, получим

$$u_i^* = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad \text{если} \quad \text{sign } q_i = \text{sign} \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right), \\ 0, \quad \text{если} \quad \text{sign } q_i = -\text{sign} \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right). \end{array} \right\} \quad (4.109)$$

Таким образом с учетом свойств функций  $q_i$  тело должно контактировать со всеми источниками, у которых  $T_{i0} > T$  пока  $T > \lambda$ , получая тепло от «горячих» источников, и контактировать со всеми источниками, у которых  $T_{i0} < T$ , отдавая тепло, когда  $T < \lambda$ . Если в

некоторый момент времени рабочее тело контактирует с  $i$ -ым источником и  $T_{i0} > T$ , то оно контактирует с любым  $j$ -м источником, у которого  $T_{j0} > T_{i0}$ . То же касается отдачи тепла. Далее будем полагать, что  $T_{j0} > T_{i0}$ , если  $j > i$ .

Условия (4.109) разбивают множество источников на два подмножества «горячих» и «холодных». Границей между ними служит величина  $\lambda$ , зависящая от  $\bar{\sigma}$ .

Обозначим через  $q^+(T)$  суммарный тепловой поток при подводе тепла, через  $q^-(T)$  — то же при отводе тепла от рабочего тела

$$q^+(T) = \sum_i q_i^+(T_{i0}, T),$$

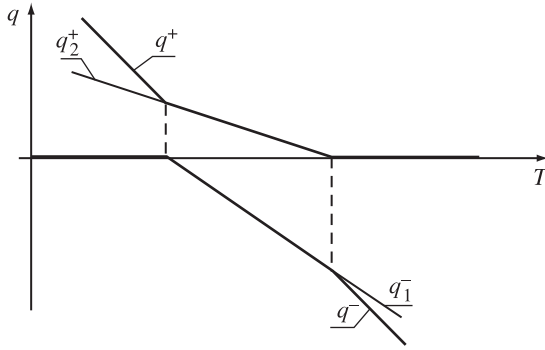
$$q^-(T) = \sum_i q_i^-(T_{i0}, T).$$

В свою очередь функции подвода и отвода тепла для  $i$ -го источника

$$q_i^+ = \frac{1}{2}(q_i + |q_i|),$$

$$q_i^- = \frac{1}{2}(q_i - |q_i|).$$

(см. рис. 4.12).



Р и с. 4.12. Функции подвода и отвода тепла ( $q^+$  и  $q^-$ ) в зависимости от температуры рабочего тела

Оптимальные значения температуры рабочего тела при подводе и отводе тепла обозначим через  $T_+ > \lambda$  и  $T_- < \lambda$  соответственно. Так как эти значения являются базовыми в усредненной задаче оптимизации (4.108), то для каждого из них функция Лагранжа  $L$  достигает максимума. Откуда следуют в предположении гладкости функций  $q^+$  и  $q^-$  равенства

$$\frac{\partial L^+}{\partial T^+} \Rightarrow \frac{dq^+}{dT_+} - \frac{\lambda}{T_+} \left( \frac{dq^+}{dT_+} - \frac{q^+}{T_+} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial L^-}{\partial T^-} \Rightarrow \frac{dq^-}{dT_-} - \frac{\lambda}{T_-} \left( \frac{dq^-}{dT_-} - \frac{q^-}{T_-} \right) = 0,$$

$$L^+(\lambda, T_+) = L^-(\lambda, T_-) \rightarrow q^+(T_+) \left( 1 - \frac{\lambda}{T_+} \right) = q^-(T_-) \left( 1 - \frac{\lambda}{T_-} \right). \quad (4.110)$$

Условия (4.110) определяют  $\lambda, T_+$  и  $T_-$ , ограничение на среднюю интенсивность изменения энтропии рабочего тела позволяет найти доли времени  $\tau$ , в течении которых происходит его нагрев и охлаждение

$$\left. \begin{aligned} \gamma_+ \frac{q^+(T_+)}{T_+} + \gamma_- \frac{q^-(T_-)}{T_-} &= \bar{\sigma}, \\ \gamma_+ + \gamma_- &= 1; \quad \gamma_+ \geq 0; \quad \gamma_- \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

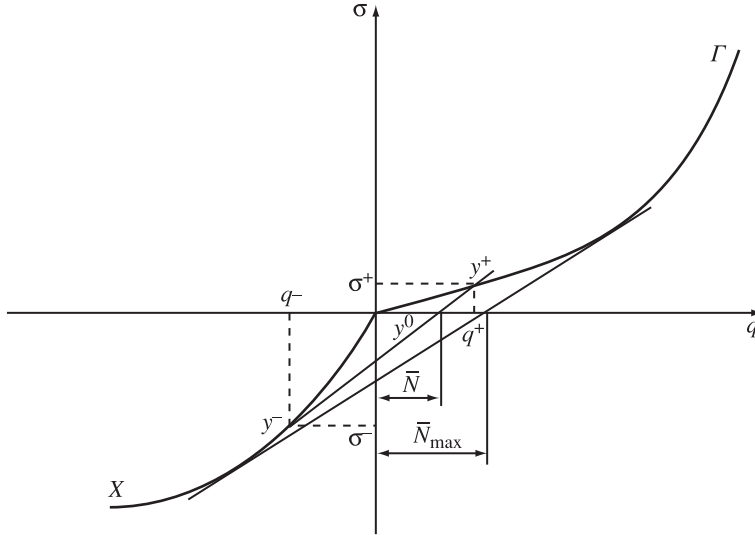
Функции  $q^+(T)$  и  $q^-(T)$  испытывают изломы в точках  $T_{i0}$ , поэтому, если  $T_+^*$  или  $T_-^*$  совпадают с температурой одного из источников, то уравнения (4.110) неприменимы. В этом случае левая часть соответствующего уравнения имеет разрыв при  $T = T^*$ , причем меняет знак в этой точке.

Чтобы исследовать зависимость оптимального решения задачи (4.108) от изменения  $\bar{\sigma}$ , перепишем ее как

$$\bar{p} = \gamma_+ q^+(T_+) + \gamma_- q^-(T_-) \rightarrow \max \left/ \gamma_+ \frac{q^+(T_+)}{T_+} + \gamma_- \frac{q^-(T_-)}{T_-} = \bar{\sigma} \right.$$

и, исключая  $T_+$  и  $T_-$ , построим зависимости  $\sigma_+(q^+)$  и  $\sigma_-(q^-)$ , где  $\sigma_+ = \frac{q^+}{T_+}$  и  $\sigma_- = \frac{q^-}{T_-}$ . Первая из этих функций определена при  $q^+ > 0$ , а вторая при  $q^- < 0$  (см. рис.4.13). Зависимость предельного значения среднего потока тепла  $p^*$  (мощности тепловой машины) от среднего приращения энтропии рабочего тела представляет собой выпуклую оболочку функции  $\sigma(q)$ , равной  $\sigma^+$  при  $q > 0$  и  $\sigma^-$  при  $q < 0$ . Выпуклая оболочка совпадает с этой функцией при  $\bar{\sigma} > \sigma_2$  и  $\bar{\sigma} < \sigma_1$ , что говорит о том, что базовое решение единственно ( $\gamma_- = 0$  при  $\bar{\sigma} > \sigma_2$  и  $\gamma_+ = 0$  при  $\bar{\sigma} < \sigma_1$ ). В противном случае базовых значений температуры рабочего тела два, одно из них,  $T_+$ , соответствует  $\bar{\sigma} = \sigma_2$ , другое,  $T_-$ , соответствует  $\bar{\sigma} = \sigma_1$ . При  $\sigma_1 < \bar{\sigma} < \sigma_2$  базовые значения температуры не меняются, а меняются лишь  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ , доли времени нагрева и охлаждения рабочего тела.

Особенно важен случай, когда  $\bar{\sigma} = 0$ , что соответствует циклическому изменению состояния рабочего тела в тепловой машине. В этом



Р и с. 4.13. Зависимость теплового потока от скорости изменения энтропии источников, и ее выпуклая оболочка

случае из условий (4.110), (4.111) следует, что для любых законов теплопередачи выполнено условие

$$\gamma_+(\lambda - T_-) = \gamma_-(T_+ - \lambda),$$

причем отношение температур рабочего тела в полуциклах нагрева и охлаждения равно

$$\frac{T_-}{T_+} = \frac{\frac{dq^+}{dT_+} \left( \frac{dq^-}{dT_-} - \frac{q^-}{T_-} \right)}{\frac{dq^-}{dT_-} \left( \frac{dq^+}{dT_+} + \frac{q^+}{T_+} \right)}. \quad (4.112)$$

В свою очередь

$$\frac{dq^+}{dT_+} : \frac{dq^-}{dT_-} = \frac{q^-(T)}{T_-^2} : \frac{q^+(T)}{T_+^2}. \quad (4.113)$$

Условия (4.112), (4.113) определяют базовые значения температуры рабочего тела в том случае, когда оно поочередно нагревается и охлаждается.

Для задачи с числом источников большим двух понятие термического КПД как отношения полученной работы к теплу, отобранному у горячего источника, теряет смысл, так как источников несколько и их температуры различны. В этом случае целесообразно решать задачу о цикле с заданной мощностью и минимальной диссипацией энергии. Решение такой задачи показывает, что в оптимальном цикле рабочее

тело должно получать тепло только от тех источников температуры которых лежат в пределах некоторых оптимально найденных значений  $T_{+1} \leq T_0 \leq T_{+2}$  (верхний интервал контактирования), аналогично рабочее тело должно отдавать тепло источникам, температуры которых удовлетворяют неравенствам  $T_{-1} \leq T_0 \leq T_{-2}$  (нижний интервал контактирования). Чем ближе  $p$  к  $p_{\max}$ , тем интервалы контактирования шире.

#### 4.4. Тепловая машина в нестационарной системе

**Система с одним источником.** На первый взгляд кажется, что получение работы в системе с одним источником невозможно и противоречит второму закону термодинамики. Это действительно так, если источник является резервуаром или он не имеет контакта ни с одной системой кроме рабочего тела, состояние которого удовлетворяет условиям цикличности. Но если температура источника по тем или иным внешним причинам изменяется, или рабочее тело в начале и в конце процесса может иметь различное состояние, то, выбирая соответствующим образом температуру рабочего тела, можно получить работу.

Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из источника с температурой  $T_0(t)$  и рабочего тела с температурой  $T(t)$ , взаимодействующих конечное время  $\tau$ . Время  $\tau$  может стремиться к бесконечности, однако при этом фиксируем среднюю интенсивность процесса. И в том и в другом случае процессы необратимы.

Рабочее тело, получая от источника тепло в количестве  $Q$ , производит работу  $A$  со средней мощностью  $\bar{p} = \frac{A}{\tau}$ . Обозначим через  $E$  и  $S$  внутреннюю энергию и энтропию рабочего тела, те же обозначения с индексом «0» относятся к источнику. Закон теплопередачи обозначим через  $q(T_0, T)$ , и будем конкретизировать полученные результаты для закона

$$q = \alpha(T_0^n - T^n), \quad (4.114)$$

где  $\alpha$  и  $n$  имеют одинаковые знаки.

В этих обозначениях запишем уравнения термодинамических балансов для источника и рабочего тела в предположении отсутствия между ними механического контакта.

$$\begin{cases} \dot{E} = q(T_0, T) - p(t), & \dot{E}_0 = -q(T_0, T), \\ \dot{S} = \frac{q(T_0, T)}{T}, & \dot{S}_0 = -\frac{q(T_0, T)}{T_0}. \end{cases} \quad (4.115)$$

Здесь  $p(t)$  — мощность, отбираемая от рабочего тела в момент  $t$ . Из (4.115) следуют выражения для мощности и работы:

$$p(t) = q(T_0, T) - \dot{E}, \quad (4.116)$$

$$A = \int_0^{\tau} p(t) dt = \int_0^{\tau} q(T_0, T) dt - \quad (4.117)$$

$$- [E(S(\tau), V(\tau)) - E(S(0), V(0))] = Q - \Delta E.$$

Зависимость внутренней энергии от энтропии и объема  $E(S, V)$  определяется уравнением состояния рабочего тела.

Изучение предельных возможностей тепломеханических систем сводится к задаче о получении предельной работы при фиксированном количестве полученного тепла:

$$Q = \int_0^{\tau} q(T_0, T) dt = Q_0.$$

Задача имеет форму

$$A \rightarrow \max_{T(t)} \quad / \quad \begin{array}{l} \tau = \text{fix}, \\ Q = Q_0. \end{array}$$

Из формулы (4.127) следует, что максимальная работа соответствует минимуму внутренней энергии рабочего тела в конце процесса.

$$E(S(\tau), V(\tau)) \rightarrow \min_{T(t)} \quad / \quad \int_0^{\tau} q(T_0, T) dt = Q_0. \quad (4.118)$$

Объем рабочего тела в момент  $\tau$  не влияет на  $S(\tau)$  и выбирается из условия

$$V^*(\tau) = \arg \min_{V(\tau)} E(S^*(\tau), V(\tau)), \quad (4.119)$$

где  $S^*(\tau)$  — оптимальное решение задачи (4.118) по  $S$ .

Зависимость  $E$  от  $S$  для любого уравнения состояния монотонно возрастает при всех  $V$ , так как

$$\frac{\partial E}{\partial S} = T > 0.$$

Минимуму  $E(\tau)$  соответствует минимум  $S(\tau)$ , так что на оптимальном решении задачи (4.118) выполнено условие

$$\Delta S = \int_0^{\tau} \dot{S} dt = \int_0^{\tau} \frac{q(T_0, T)}{T} dt \rightarrow \min \quad / \quad Q = Q_0. \quad (4.120)$$

Управляющей переменной в задаче о минимуме  $\Delta S$  при фиксированном значении  $Q$  является объем рабочего тела, изменения которого в силу уравнения состояния меняют его температуру  $T$ . Но, так как зависимость  $T(V)$  монотонна и при изменении  $V$  от 0 до  $\infty$  температура изменяется от бесконечности до нуля, в то же время объем не

входит непосредственно в условия задачи (4.119), удобно выбрать в качестве управления температуру рабочего тела, оптимальная форма изменения которой  $T^*(t)$  не зависит от уравнения состояния. Зная же  $T^*(t)$  из уравнения состояния для конкретного рабочего тела может быть найдена зависимость  $V^*(t)$ . В силу сказанного общая структура оптимального процесса в резервуарной системе такова:

1. При заданных начальной температуре и начальном объеме рабочего тела  $T(0)$  и  $V(0)$  объем мгновенно меняется так, чтобы температура оказалась равной значению  $T^*(0)$ , найденному в результате решения задачи (4.120) (первый адиабатический участок).
2. Изменение объема  $V^*(t)$ , соответствующее найденному при решении задачи (4.120) значению температуры  $T^*(t)$ .
3. Мгновенному изменению объема в момент  $t = \tau$  в соответствии с условием (4.119) (второй адиабатический участок).

В силу фиксированности  $\tau$  перепишем задачу (4.120) в усредненной форме как

$$\bar{\sigma} = \bar{S} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \dot{S} dt = \int_0^{\tau} \frac{q(T_0, T)}{T} dt \rightarrow \min_{T(t)} \left/ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} q(T_0, T) dt = \bar{q} = \frac{Q_0}{\tau} \right. \quad (4.121)$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что задача получения предельной работы при фиксированном количестве тепла имеет на интервале  $(0, \tau)$  то же оптимальное решение, что и задача минимизации средней скорости производства энтропии. Зная минимальную величину энтропии  $S^*(\tau)$ , можно найти предельную работу  $A^*$  как:

$$A^* = Q_0 + E(S(0), V(0)) - E(S^*(\tau), V^*(\tau)) \quad (4.122)$$

Выбор объема по формуле (4.119) приводит к тому, что часть работы получается за счет уменьшения внутренней энергии рабочего тела по отношению к начальному ее значению. Чтобы охарактеризовать предельные возможности рассматриваемой системы целесообразно принять

$$V(\tau) = V(0) = V_0,$$

где величина  $V_0$  либо фиксирована, либо подлежит оптимальному выбору. В последнем случае она должна выбираться из условия минимума по  $V_0$  приращения внутренней энергии рабочего тела  $\Delta E = E(S^*(\tau), V_0) - E(S(0), V_0)$ . Это условие приводит к требованию

$$\frac{\partial E(\tau)}{\partial V_0} = \frac{\partial E(0)}{\partial V_0} \Rightarrow P(\tau) = P(0),$$

где  $P$  — давление рабочего тела.

Между величиной минимально возможного прироста энтропии  $\Delta S^*$  и количеством тепла  $Q_0$ , переданного рабочему телу, существует монотонная зависимость. Чем больше  $Q_0$ , тем больше  $\Delta S^*$ . Ввиду этого задаче (4.121) можно сопоставить эквивалентную задачу:

$$\bar{q} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} q(T_0, T) dt \rightarrow \max \left/ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{q(T_0, T)}{T} dt = \bar{\sigma} \right. \quad (4.123)$$

Постановка (4.123) для  $\bar{\sigma} = 0$  и с условием равенства давлений рабочего тела в начале и в конце процесса имеет смысл и для случая, когда  $T_0(t)$  периодический или стационарный случайный процесс, в этом случае усреднение в (4.123) проводится на сколь угодно большом интервале времени.

Если изменение температуры источника  $T_0$  не зависит от  $T$ , то обе задачи являются усредненными. Однако и в том случае, когда  $T_0(t)$  зависит от  $T(t)$ , методы усредненной оптимизации позволяют судить о характере связи  $T^*$  и  $T_0$  в зависимости от закона теплопередачи  $q$ .

Так как время явно не входит в условия задачи (4.123), то условия оптимальности определяют связь между  $T^*$  и  $T_0$ . Причем, как следует из [63], каждому значению  $T_0$  могут соответствовать не более двух значений  $T^*$  (базовых). Число базовых значений (одно либо два) определяется (видом) функции  $q$ .

Рассмотрим этот вопрос подробнее. При фиксированной температуре  $T_0$  условие

$$\overline{q(T, T_0)} = \frac{Q_0}{\tau}$$

соответствует заданию средней скорости изменения энтропии источника

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\overline{q(T, T_0)}}{T_0} = -\frac{Q_0}{\tau T_0}, \quad (4.124)$$

а минимум прироста энтропии рабочего тела — минимуму производства энтропии в системе, т.е. процессу с минимальной диссипацией.

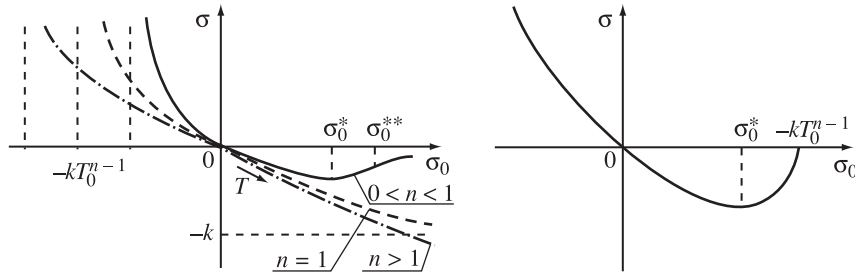
Оптимальное решение задачи (4.123) определяется (см. [60]) условием

$$L = \sigma + \lambda \left( \sigma_0 + \frac{Q_0}{\tau T_0} \right) = \frac{q(T, T_0)}{T} + \lambda \left( \frac{q(T, T_0)}{T_0} + \frac{Q_0}{\tau T_0} \right) \rightarrow \max_{\lambda} \min_{T}$$

Исследуем зависимость  $\sigma(T_0, \sigma_0)$  для закона теплопередачи (4.114). Эта зависимость имеет вид

$$\sigma = -\frac{\sigma_0 T_0}{(T_0^n + \frac{\sigma_0 T_0}{\alpha})^{1/n}} = \frac{q}{(T_0^n - \frac{q}{2})^{1/n}} \quad (4.125)$$





Р и с. 4.14. Зависимость скорости изменения энтропии рабочего тела от скорости изменения энтропии источника для  $n > 0$  (а) и  $n < 0$  (б)

Характер этой функции для различных  $n$  показан на рис. 4.14. Область допустимых значений  $\sigma_0$  определяется условием неотрицательности температуры  $T$ .

$$\sigma_0 > -\frac{T_0^{n-1}}{\alpha} = \sigma_0^{\min}$$

Значение  $\sigma_0^{\max}$  определяется величиной предельно допустимой температуры рабочего тела. Исследование второй производной зависимости  $\sigma(\sigma_0)$  показывает, что эта функция выпукла вниз, значит базовое решение единственно, для всех  $n \leq 0$  и  $n \geq 1$ . Причем ее минимум достигается в точке

$$\sigma_0^* = \alpha \frac{n}{1-n} T_0^{n-1}.$$

Лишь при  $0 < n < 1$  происходит изменение знака второй производной в точке

$$\sigma_0^{**} = 2\sigma_0^*.$$

Из сказанного следует утверждение: *оптимальный режим взаимодействия с резервуаром для закона теплопереноса (4.114) соответствует переключению температуры рабочего тела между двумя значениями лишь тогда, когда*

а)  $0 < n < 1$  и

б) *происходит охлаждение рабочего тела со средней интенсивностью*

$$-\frac{Q_0}{\tau} > T_0 \sigma_0^{**} = \frac{2\alpha n}{1-n} T_0^n.$$

При этом одно из базовых значений  $T^*$  соответствует предельно возможной температуре рабочего тела  $T = T_{\max}$ , а второе, вместе с множителем  $\lambda$  находится из условия стационарности по  $T$  функции Лагранжа  $L$  и равенства значения  $L$  в точке стационарности значению в точке  $T_{\max}$ .

Для всех остальных  $n$ , когда базовое значение температуры единственно, оно, как следует из (4.114) и (4.125), равно

$$T^* = \left( T_0^n - \frac{Q_0}{\tau \alpha} \right)^{1/n}. \quad (4.126)$$

Когда базовое решение единственно и определяется равенством (4.126), оптимальный процесс состоит из двух адиабатических и одного изотермического участка с  $T = T^*$ . Для случая, когда базовых решений два, оптимальный процесс состоит из трех адиабатических участков и двух изотермических участков. Каждый из изотермических участков соответствует базовой температуре рабочего тела. Продолжительность их такова, чтобы среднее на интервале  $\tau$  приращение энтропии источника  $\bar{\sigma}_0$  удовлетворяло условию (4.124). Переход же с одной изотермы на другую происходит адиабатически. Отметим, что так как в этом последнем случае существенны лишь значения температур изотерм и доли времени, которое система пребывает на каждом из таких значений, то оптимальное решение не единственно.

Тот факт, что оптимальный процесс теплового контакта с источником постоянной температуры может иметь больше чем один изотермический участок, обнаружен В.Н.Орловым [37] для весьма экзотического закона теплопереноса

$$q(T_0, T) = \alpha_1 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + \alpha_2 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)^9.$$

Максимальная работа  $A^*$  вычисляется по формуле (4.127) как

$$A^* = Q_0 + E(0) - E(S^*(\tau), V^*(\tau)), \quad (4.127)$$

где

$$S^*(\tau) = S(0) + \tau \cdot \overline{\sigma(T_0, T^*)}$$

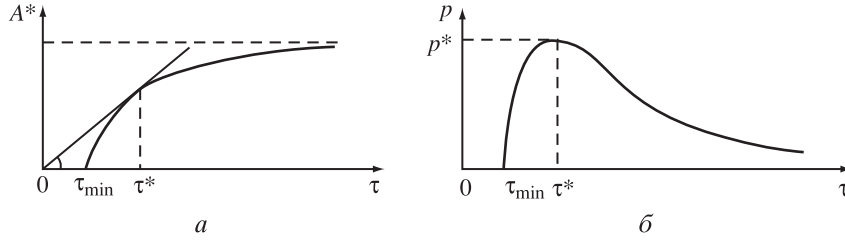
Если рабочее тело — идеальный газ, то, используя его уравнение состояния (см. гл.1), можно конкретизировать формулу (4.127).

$$A^*(\tau^*) = Q_0 - E(0) \cdot \left[ \left( \frac{V^*(\tau)}{V(0)} \right)^{-\frac{R}{C_v}} \exp\left( \frac{\Delta S^*(\tau)}{C_v} \right) - 1 \right], \quad (4.128)$$

где  $\Delta S^*(\tau) = \frac{Q_0}{T^*(\tau)}$ ;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $C_v$  — теплоемкость газа при постоянном объеме.

Функция  $A^*(\tau)$ , подсчитанная согласно равенству (4.128), показана на рис. 4.15. Она определена при  $\tau > \tau_{\min} = \frac{Q_0}{\alpha T_0^n}$ , что соответствует положительности температуры  $T^*$ . Предельная мощность процесса, имеющего продолжительность  $\tau$

$$p(\tau) = \frac{A^*(\tau)}{\tau}$$



Р и с. 4.15. Максимальная работа (а) и средняя мощность (б) в зависимости от продолжительности процесса

равна тангенсу угла наклона прямой, соединяющей начало координат с точкой графика  $A^*(\tau)$ . Значение  $p(\tau)$  достигает максимума в точке  $\tau^*$ , для которой

$$\left(\frac{dA^*}{d\tau}\right)_{\tau^*} = \frac{A^*(\tau^*)}{\tau^*}$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  работа  $A^*$  стремится к своему значению в обратимом процессе, а  $p(\tau)$  стремится к нулю.

**Источник конечной емкости.** Рассмотрим случай, когда температура источника изменяется, причем скорость ее изменения зависит от теплового потока  $q$ .

$$\dot{T}_0 = -\frac{1}{C}q(T_0, T); \quad T_0(0) = T_0^0, \quad (4.129)$$

здесь  $C$  — теплоемкость источника.

Будем искать оптимальный закон изменения температуры рабочего тела для достижения максимальной работы  $A$  при фиксированном времени процесса  $\tau$  и количестве тепла  $Q_0$ , переданного (отданного) источником рабочему телу. При этом уравнение (4.129) нужно добавить к ограничениям задачи (4.121).

Полученную задачу удобнее решать, переходя к усреднению по множеству значений  $T_0$ . Для этого заменим  $dt$  на  $dT_0$ , с использованием уравнения (4.129), предполагая, что для почти всех  $t$  функция  $q(T_0, T)$  знакопостоянная. Критерий оптимальности примет вид

$$\Delta S = \int_{T_0(\tau)}^{T_0^0} \frac{C}{T(T_0)} dT_0 \rightarrow \min_{T(T_0)} \quad (4.130)$$

при условии

$$\int_0^\tau dt = \int_{T_0(\tau)}^{T_0^0} \frac{C}{q(T_0, T)} dT_0 = \tau, \quad (4.131)$$

где  $T_0(\tau) = T_0^o - \frac{Q_0}{C}$ .

Функционал Лагранжа задачи (4.130), (4.131) имеет вид

$$L = \int_{T_0(\tau)}^{T_0^o} C \left( \frac{1}{T} - \lambda \frac{1}{q(T_0, T)} \right) dT_0,$$

а ее оптимальное решение удовлетворяет требованию

$$\max_{\lambda} \left[ \int_{T_0(\tau)}^{T_0^o} \left\{ \min_T \left[ C \left( \frac{1}{T} - \lambda \frac{1}{q(T_0, T)} \right) \right] \right\} dT_0 - \lambda \tau \right].$$

Если функция

$$F(T, T_0, \lambda) = \frac{1}{T} - \lambda \frac{1}{q(T_0, T)}$$

имеет единственный минимум по  $T$ , причем  $q(T_0, T)$  дифференцируема, то  $T_0^*(T, \lambda)$  определяется условием стационарности  $F$ . Получим

$$\left( \frac{T}{q(T_0, T)} \right)^2 \frac{\partial q}{\partial T} = \text{const} = \frac{1}{\lambda} \quad \forall t. \quad (4.132)$$

Решение  $T^*$ , удовлетворяющее соотношению (4.132), зависит от  $T_0$  и  $\lambda$ . Для того, чтобы исключить  $\lambda$  и найти  $T^*(T_0)$ , следует решить (4.132) совместно с интегральным условием (4.131).

Применим описанный алгоритм для закона теплопередачи (4.114), считая теплоемкость источника  $C$  не зависящей от  $T_0$ . Условия (4.132) и (4.131) примут вид

$$T^{n+1} = \frac{\alpha}{n\lambda} (T_0^n - T^n)^2, \quad (4.133)$$

$$\int_{T_0^o - \frac{Q_0}{C}}^{T_0^o} \frac{dT_0}{\alpha(T_0^n - T^n)} = \frac{\tau}{C}.$$

Уравнение (4.133) решается аналитически относительно  $T(T_0, \lambda)$  лишь при некоторых  $n$  ( $n = \pm 1$ ), для других  $n$  возможно численное решение.

*Пример.* Решение для случая  $n = 1$ .

Уравнение (4.133) примет вид

$$T^2 = \frac{\alpha}{\lambda} (T_0 - T)^2,$$

откуда с учетом того, что  $T_0 > T^*$ , получим

$$T^* = mT_0 \quad \forall t,$$

где  $m$  — некоторая константа.

Исключая  $m$  с использованием (4.131), получим

$$T^*(T_0) = T_0 \cdot \frac{\left( \alpha\tau - C \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \frac{Q_0}{C}} \right)}{\alpha\tau}.$$

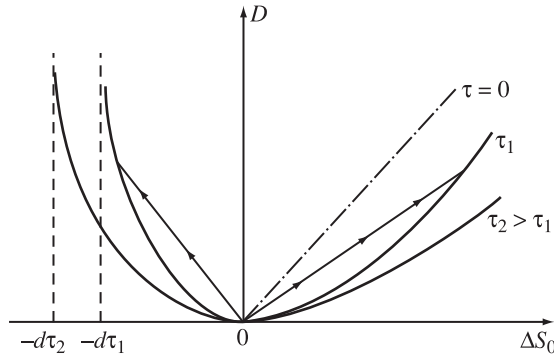
После подстановки  $T^*(T_0)$  в уравнение (4.129), можно также найти зависимость  $T^*(t)$

$$T^*(t) = \left( T_0^0 - \frac{Q_0}{C} \right) \cdot \frac{\alpha\tau - C \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \frac{Q_0}{C}}}{\alpha\tau} \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right); \quad t \in (0, \tau).$$

Найдем связь между продолжительностью процесса  $\tau$ , приращением энтропии системы  $D$  и приращением энтропии источника  $\Delta S_0$ . На оптимальном процессе скорости изменения  $D$  и  $\Delta S_0$  постоянны, так что

$$\Delta S_0 = \alpha(m-1)\tau; \quad D = \Delta S + \Delta S_0 = \frac{\alpha(1-m)^2}{m}\tau.$$

Зависимость  $D$  от  $\Delta S_0$  при различных  $\tau$  показана на рис.4.16.



Р и с. 4.16. Зависимость минимальной диссипации от прироста энтропии источника и продолжительности процесса

Оптимальные траектории — прямые линии, выходящие из начала координат, так как  $\frac{dD}{d\Delta S_0} = 1 - \frac{1}{m}$ .

В том случае, когда рабочее тело — идеальный газ, максимальная работа  $A^*$  определяется, как нетрудно показать, выражением

$$A^* = Q_0 - E(V(0), T_0^0) \left[ \left( \frac{V^*(\tau)}{V(0)} \right)^{R/C} \exp \frac{\Delta S}{C} - 1 \right],$$

где  $C$  — объемная теплоемкость рабочего тела,  $\Delta S$  — прирост его

энтропии, равный

$$\Delta S = \frac{\alpha \tau C \ln(1 + \frac{Q_0}{CT_0^n - Q_0})}{\alpha \tau - C \ln(1 + \frac{Q_0}{CT_0^n - Q_0})}.$$

**Нестационарный источник.** Рассмотрим систему, в которой температура источника изменяется во времени. Это может быть заданная функция времени  $T_0(t)$  или случайный стационарный процесс. Применительно к рассматриваемой системе будем решать задачу о максимальной средней мощности  $\bar{p}$ , которой эквивалентна постановка (4.123) о максимальной интенсивности теплового потока при заданной интенсивности изменения энтропии рабочего тела. Оптимальное решение этой усредненной задачи удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \max_T \left[ q(T_0, T) + \lambda \left( \frac{q(T_0, T)}{T} - \bar{\sigma} \right) \right] dt \rightarrow \min_\lambda. \quad (4.134)$$

Достигается ли максимум подинтегрального выражения в (4.134) в одном или двух базовых значениях зависит от того, выпукла ли вверх зависимость  $q(T_0, T)$  от  $\sigma = \frac{q(T_0, T)}{T}$ , полученная после исключения из этих выражений  $T$ . Нетрудно видеть, что как и в случае постоянной температуры источника для законов теплопереноса вида (4.114) неединственность базового значения возможна лишь при  $0 < n < 1$ . В остальных случаях оптимальное решение соответствует стационарности по  $T$  подинтегрального выражения в (4.134). Отсюда следует, что для любого значения  $t$  температуры  $T^*(t)$  и  $T_0(t)$  связаны соотношением

$$\frac{1}{T^2} \cdot \frac{q(T_0, T)}{\frac{\partial q(T_0, T)}{\partial T}} - \frac{1}{T} = \text{const}. \quad (4.135)$$

Для законов теплопереноса вида (4.114) получим равенство

$$\frac{T_0^n}{T^{n+1}} + \frac{n-1}{T} = \text{const}.$$

В частности, для линейного закона ( $n = 1$ ) имеем

$$T^*(T_0) = m \sqrt{T_0}. \quad (4.136)$$

В задаче с переменной температурой источника в постановке (4.123) целесообразно перейти от усреднения по времени к усреднению по множеству значений  $T_0$ . Как регулярной так и случайной функции  $T_0(t)$  может быть сопоставлена вероятностная мера  $f(T_0) \geq 0$ , а задача (4.123) переписана в форме

$$\bar{q} = \int_0^\infty f(T_0) q(T_0, T) dT_0 \rightarrow \max / \int_0^\infty f(T_0) \frac{q(T_0, T)}{T} dT_0 = \bar{\sigma}. \quad (4.137)$$

Функция  $f(T_0)$  такова, что величина

$$\gamma = \int_{T_{01}}^{T_{02}} f(T_0) dT_0$$

равна доле времени, в течение которой температура источника удовлетворяет неравенству  $T_{01} < T_0 \leq T_{02}$ . Для случайной функции  $T_0(t)$  это плотность распределения вероятности ее значений.

Величина  $m$  определяется после подстановки в условие задачи (4.137) зависимости  $T_0^*(T, \text{const})$ , найденной из (4.135). Для линейного закона, подставляя (4.136) в (4.137), получим

$$\int_0^{\infty} f(T_0) \sqrt{T_0} dT_0 = m.$$

Так что  $m$  представляет собой среднее значение квадратного корня температуры источника, а

$$T^*(t) = \sqrt{\overline{T_0}} \sqrt{T_0(t)}. \quad (4.138)$$

Для закона (4.114) и  $n = -1$  условия оптимальности приводят к выражению

$$T^*(T_0) = 2\lambda \frac{T_0}{T_0 + \lambda},$$

где

$$\lambda = \sqrt{\overline{T_0^2}}.$$

Здесь, как и выше черта соответствует усреднению квадрата функции  $T_0(t)$  по времени либо по множеству.

Пусть, например,  $f(T_0)$  равномерное распределение значений  $T_0$ , определенное на  $(T_{01}, T_{02})$ , что соответствует линейному изменению температуры источника вида

$$T_{01} = T_{01} + \frac{t}{\tau}(T_{02} - T_{01}).$$

Тогда для  $n = 1$  по формуле (4.138) получим

$$T^*(T_0) = \frac{2(T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2})}{3(T_{02} - T_{01})} \sqrt{T_0}.$$

Для  $n = -1$

$$T^*(T_0) = \frac{2T_0(T_{02}^3 - T_{01}^3)}{3T_0(T_{02} - T_{01}) + (T_{02}^3 - T_{01}^3)}.$$

При  $\bar{\sigma} = 0$  предельная средняя мощность  $\bar{p}$  для  $n = 1$

$$\bar{p}_{\max} = \alpha \left[ \frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{4}{9} \left( \frac{(T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2})}{(T_{02} - T_{01})} \right)^2 \right].$$

К системам с одним источником относятся тепловые машины, нагрев и охлаждение рабочего тела в которых осуществляется потоком жидкости или газа с переменной температурой, системы, в которых рабочее тело нагревается днем и охлаждается ночью в горных районах с интенсивной солнечной радиацией, и др.

**Системы с несколькими источниками.** Для сокращения записи введем обозначения:

$T_0(t)$  — вектор температур источников,  
 $q_\Sigma(T_0, T, u)$  — суммарный тепловой поток от источников к рабочему телу  $\left( q_\Sigma = \sum_{i=1}^n u_i q_i(T_{i0}(t), T(t)) \right)$ .

Вектор-функция  $T_0(t)$  принимает значения из множества  $V$ ; она может быть регулярной либо случайной функцией времени. И в том и в другом случае ей можно сопоставить распределение ее значений  $f(T_0) \geq 0$ , определенное на  $V$  и такое, что величина

$$\mu = \int_{\delta V} f(T_0) dT_0$$

представляет собой долю времени  $\tau$ , в течение которой вектор  $T_0 \in \delta V$ . С использованием этих обозначений задачу о максимуме средней мощности при заданной средней скорости изменения энтропии рабочего тела можно записать в форме

$$\bar{p} = \int_V f(T_0) \sum_{V=1}^2 q_\Sigma(T_0, T, u) dT_0 \rightarrow \max_{T, u}$$

при условии

$$\int_V f(T_0) \sum_{V=1}^2 \frac{q_\Sigma(T_0, T, u)}{T} dT_0 = \bar{\sigma}. \quad (4.139)$$

Эту задачу в свою очередь можно решать в два этапа:

Первый — определение оптимальных значений вектора

$$\nu = (T, u)$$

для фиксированных значений вектора  $T_0$  и величины  $\bar{\sigma}(T_0)$ .

Второй — определение такого вектора  $\bar{\sigma}(T_0)$ , для которого

$$\bar{p} = \int_V f(T_0) \xi(T_0, \sigma) dT_0 \rightarrow \max_{\sigma} \quad (4.140)$$

при условии, что среднее значение функции  $\bar{\sigma}(T_0)$  задано

$$\bar{p} = \int_V f(T_0) \bar{\sigma}(T_0) dT_0 = \bar{\sigma}. \quad (4.141)$$

Здесь через  $\xi(T_0, \sigma)$  обозначено значение функции  $q_\Sigma$ , в которую подставлено оптимальное решение  $\nu^*(\bar{\sigma}(T_0))$ , полученное на первом этапе.



Задача первого этапа, когда вектор температур источников фиксирован, в точности совпадает с задачей (4.108), следовательно для нее справедливо правило разбиения источников на «горячие» и «холодные», а также условия (4.112), (4.113) для оптимального выбора температуры рабочего тела.

Для задачи о максимуме средней мощности функция Лагранжа запишется в виде

$$L_2 = \xi(T_0, \bar{\sigma}) - \lambda_2 \bar{\sigma}.$$

Условие оптимальности по  $\sigma$  приводит к равенству

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\sigma}} = \lambda_2, \quad (4.142)$$

которое совместно с условием (4.141) определяет  $\bar{\sigma}^*(T_0)$  и  $\lambda_2$ .

В том случае, когда для каждого  $T_0$ , значение  $T^*(T_0)$  единственно

$$\begin{aligned} \xi(T_0) &= q_\Sigma(T_0, T^*), \\ \bar{\sigma}^*(T_0) &= \frac{1}{T^*} q_\Sigma(T_0, T^*) \end{aligned}$$

условие (4.142) примет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial T^*} q_\Sigma(T_0, T^*) : \frac{\partial}{\partial T^*} \left[ \frac{1}{T^*} q_\Sigma(T_0, T^*) \right] = \frac{T^* \left( \frac{\partial q_\Sigma}{\partial T^*} \right)}{\frac{\partial q_\Sigma}{\partial T^*} - \frac{q_\Sigma(T_0, T^*)}{T^*}} = \lambda_2. \quad (4.143)$$

Это соотношение связывает  $T^*$  с вектором  $T_0$  и множителем  $\lambda_2$ , значение которого определяется из условия (4.140) и зависит от величины  $\bar{\sigma}$  и распределения  $f(T_0)$  вектора температур источников. В том случае, когда  $T_0(t)$  — стационарный случайный процесс, его распределение может быть известно априори, что позволяет найти оптимальную зависимость  $T^*(T_0)$ .

Справедливо следующее Утверждение:

*Если вектор-функция  $T_0(t)$  на  $[0, \tau]$  не содержит участков постоянства (соответственно  $f(T_0)$  не содержит  $\delta$ -составляющих), то решение  $T^*(T_0)$ , найденное по условиям (4.141), (4.143), оптимально. Если  $f(T_0)$  содержит  $\delta$ -составляющие, сосредоточенные в точках  $T_{0k}$  ( $k = \overline{1, m}$ ), то найдется оптимальное решение, для которого  $T^*(T_0)$  может принимать два базовых значения лишь для одной из температур  $T_{0k}$ .*

Доказательство: Обозначим множество значений вектора  $T_0$ , для которых  $\min_{\lambda} \max_T L(T_0, T, \lambda)$  имеет два базовых решения, через  $V_0^*$  и назовем его множеством расщепления (здесь  $L = q_\Sigma(T_0, T) + \lambda \sigma(T_0, T)$ ). Условия стационарности  $L$  по  $T$  позволяют выразить  $T^*$  через  $T_0, \lambda$  и перейти к функции  $L^*(T_0, \lambda) = q_\Sigma^*(T_0, \lambda) + \lambda \sigma^*(T_0, \lambda)$ . На множестве расщепления каждому из двух базовых значений  $T^*$  соответствует

своя функция  $L_1^*(T_0, \lambda)$  и  $L_2^*(T_0, \lambda)$  соответственно. Причем

$$L_1^*(T_0, \lambda) = L_2^*(T_0, \lambda)$$

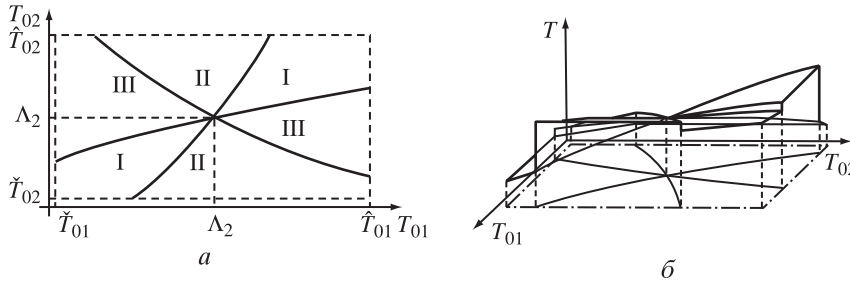
В силу непрерывности и гладкости функций  $q_\Sigma$  и  $\sigma$  и их монотонности по  $T_0$  и  $T$  это уравнение имеет дискретные корни  $T_{0k}$  и, если  $f(T_0)$  не содержит в этих точках  $\delta$ -составляющих, то множество  $V_0^*$  имеет нулевую меру и расщепление никак не влияет на критерий оптимальности и значение  $\bar{\sigma}$ .

Если  $f(T_0)$  содержит  $\delta$ -составляющие в точках  $T_{0k}$  вида  $\mu\delta(T_0 - T_{0k})$  и в этих точках температура  $T$  имеет два базовых решения  $T_1(T_0, \lambda)$  и  $T_2(T_0, \lambda)$ , то конечная часть производства энтропии  $\tilde{\sigma}$  приходится на долю множества  $V_0^*$ . С учетом (4.139) получим

$$\sum_{k=1}^m \mu_k [\gamma_k \sigma_1(T_{0k}) + (1 - \gamma_k) \sigma_2(T_{0k})] = \tilde{\sigma}$$

Здесь  $0 \leq \gamma_k \leq 1$ .

Это равенство выделяет плоскость в  $m$ -мерном пространстве переменных  $\gamma_k$ . Наличие "расщепленного" решения говорит о том, что пересечение этой плоскости с единичным кубом со сторонами  $[0, 1]$  не пусто. А значит найдется ее пересечение и с одним из ребер куба. В точке этого пересечения все множители  $\gamma$  кроме одного равны нулю или единице. Один же множитель  $\gamma_\nu$  принадлежит интервалу  $(0, 1)$ . Это значит, что найдется такое оптимальное решение, для которого температура рабочего тела переключается между двумя базовыми значениями лишь на участке постоянства вектора  $T_0 = T_{0\nu}$ . Утверждение доказано.



Р и с. 4.17. Области постоянства функции контакта для системы с двумя источниками переменной температуры (а) и зависимость температуры рабочего тела от температур источников (б)

В качестве примера рассмотрим систему с двумя источниками,

распределение температур которых имеет вид

$$f(T_0) = 1/(\hat{T}_{01} - \check{T}_{01})(\hat{T}_{02} - \check{T}_{02}) \text{ при } T_{01} \in [\hat{T}_{01}, \hat{T}_{01}] \text{ или } T_{02} \in [\check{T}_{02}, \hat{T}],$$

$$f(T_0) = 0 \text{ при } T_{01} \notin [\hat{T}_{01}, \hat{T}_{01}] \text{ или } T_{02} \notin [\check{T}_{02}, \hat{T}]$$

Коэффициенты  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . Результаты численного расчета представлены на рис. 4.17. На этом рисунке показаны области  $V_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , в которых значения функции контакта  $u^*(T_0)$  постоянны. Области  $V_j$  расположены симметрично относительно линии  $T_{10} = T_{20}$ . При температурах источников, больших  $\lambda_2$ , реализуется подвод тепла, а при температурах, меньших  $\lambda_2$  — отвод.

**Источники конечной емкости.** Задача о предельных возможностях термодинамических систем с несколькими источниками конечной емкости существенно сложнее задачи с одним источником, рассмотренной выше, так как здесь замена независимой переменной времени, на температуру одного из источников не упрощает задачу. Условия ее оптимальности могут быть записаны в форме принципа максимума Понтрягина.

Постановка задачи для фиксированной длительности  $\tau$  примет вид

$$f = \sum_{i=1}^n \int_0^\tau u_i q_i(T_{i0}, T) dT \rightarrow \max$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\tau \frac{u_i q_i(T_{i0}, T)}{T} dT = \Delta S$$

$$T_{i0} = -\frac{u_i q_i(T_{i0}, T)}{T}; \quad T_{i0}(0) = T_{i0}^0; \quad i = \overline{1, n}$$

Функция Гамильтона для этой задачи

$$H = \sum_{i=1}^n u_i q_i(T_{i0}, T) (\psi_0 - \frac{\lambda}{T} - \psi_i/T)$$

В предложении невырожденного решения будем считать  $\psi_0 = 1$ . Уравнения для сопряженных переменных

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial T_{i0}} = -\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial q_i}{\partial T_{i0}} (1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T}); \quad i = \overline{1, n} \quad (4.144)$$

В силу того, что граничные условия для температур источников свободны,

$$\psi_i(\tau) = 0; \quad i = 1, n$$

Из условия максимума  $H$  по функциям контакта  $u(t)$  имеем

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } q_i(T_{i0}, T)(1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T}) > 0 \\ 0 & \text{при } q_i(T_{i0}, T)(1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T}) < 0 \end{cases}$$

Таким образом рабочее тело контактирует с  $i$ -м «горячим» источником, когда его температура меньше  $T_{i0}(t)$  и больше  $\lambda - \psi_i(t)$ . Аналогично, оно отдает тепло  $j$ -му «холодному» источнику, когда его температура больше  $T_{j0}(t)$  и меньше  $\lambda + \psi_j(t)$ . С учетом условий (4.144) эти требования в момент  $\tau$  совпадают с условиями оптимального контакта для источников бесконечной емкости.

Условия оптимальности по  $T$  приводят к соотношениям

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n u_i \left\{ \frac{\partial q_i}{\partial T} \left( 1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T} \right) + q_i(T_{i0}, T) \frac{\lambda + \psi_i}{T^2} \right\} = 0$$

Задача существенно упрощается, когда источников два, причем один из них «горячий», а второй — «холодный». Она может быть решена посредством разбиения интервала  $[0, \tau]$  на два подинтервала, на каждом из которых рабочее тело контактирует с одним источником.

#### 4.5. Предельные возможности тепломеханических систем с двумя источниками конечной емкости

Рассмотрим две задачи о предельных возможностях тепловой машины при ограниченной продолжительности цикла  $\tau$  и конечных теплоемкостях горячего источника  $r_1$  и холодного  $r_2$ . Такие циклы обычно называют циклами Лоренца. Будем предполагать известными температуры этих источников до начала их контакта с рабочим телом  $T_1^0$  и  $T_2^0$ , законы теплопередачи от горячего и от холодного источника к рабочему телу  $q^+(T_1, T)$  и  $q^-(T_2, T)$ . Состояние рабочего тела будем характеризовать энтропией  $S$  и внутренней энергией  $E$ , которые изменяются в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{q(T_u, T)}{T}, \\ \dot{E} &= q(T_u, T) - p(t). \end{aligned} \quad (4.145)$$

Тепловой поток  $q$  в этих уравнениях равен  $q^+$  или  $q^-$  в зависимости от того, с каким источником, горячим или холодным, находится в контакте рабочее тело;  $p(t)$  - мощность, отбираемая от рабочего тела.

На переменные состояния наложены условия цикличности:

$$S(\tau) - S(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\tau \frac{q(T_u, T)}{T} dt = 0, \quad (4.146)$$

$$E(\tau) - E(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\tau q(T_u, T) dt = \int_0^\tau p dt = A. \quad (4.147)$$

Ниже решены две задачи, определяющие предельные возможности тепловых машин с источниками ограниченной емкости:

а) задача о максимальной работе или, что то же самое, о максимальной мощности, так как  $A_{\max} = N_{\max} \tau$ . Как следует из (4.147), максимальной работе соответствует критерий оптимальности вида

$$I = \int_0^{\tau} q(T_u, T) dt = (Q^+ - Q^-) \rightarrow \max, \quad (4.148)$$

б) задача о предельном КПД при заданной работе

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} \rightarrow \max \quad (4.149)$$

при условии

$$Q^+ - Q^- = A_0. \quad (4.150)$$

Требуется найти такой закон изменения температуры рабочего тела во времени  $T^*(t)$ , для которого функционалы (4.148) или (4.149) достигают максимума. В первой задаче — при условиях (4.145)–(4.147), во второй к перечисленным условиям добавляется равенство (4.150).

Для обеих постановок примем следующую последовательность решения:

— рассмотрим контакт рабочего тела с горячим источником (горячий полуцикл), считая его продолжительность, температуру источника в конце полуцикла и приращение энтропии рабочего тела неопределенными параметрами;

— аналогичным образом рассмотрим холодный полуцикл, в котором рабочее тело отдает тепло холодному источнику;

— состыкуем результаты оптимизации полуциклов, выбирая неопределенные параметры так, чтобы добиться максимума критериев оптимальности;

— покажем, что полученные результаты нельзя улучшить за счет увеличения числа контактов рабочего тела с источниками.

Так как на стадии оптимизации полуциклов начальные и конечные температуры источников предполагаются фиксированными, то максимальной работе соответствует в таких системах минимальная скорость роста энтропии.

*А. Горячий полуцикл.* Обозначим время горячего полуцикла через  $\bar{t}_1$ , а температуру горячего источника в конце полуцикла — через  $\bar{T}_1 = T_1(\bar{t}_1)$ . Фиксация  $\bar{T}_1$  при заданной начальной температуре  $T_1^0$  эквивалентна заданию количества тепла  $Q^+$ , переданного рабочему телу.

Задача имеет вид

$$\Delta S_1 = \int_0^{\bar{t}_1} \frac{q^+(T_1, T)}{T} dt \rightarrow \min$$

при условиях

$$\int_0^{\bar{t}_1} q^+(T_1, T) dt = Q^+,$$

$$\dot{T}_1 = -q^+(T_1, T)/r_1, \quad T_1(0) = T_1^0. \quad (4.151)$$

Здесь вместо приращения энтропии системы минимизируется приращение энтропии рабочего тела, что не повлияет на оптимальное решение.

Б. *Холодный полуцикл.* Аналогично горячему полуциклу приходим к постановке задачи

$$\Delta S_2 = \int_0^{\bar{t}_2} \frac{q^-(T_2, T)}{T} dt \rightarrow \max$$

при условиях

$$\int_0^{\bar{t}_2} q^-(T_2, T) dt = Q^-,$$

$$\dot{T}_2 = -q^-(T_2, T)/r_2, \quad T_2(0) = T_2^0. \quad (4.152)$$

В холодном полуцикле в отличие от горячего требуется максимизировать приращение энтропии рабочего тела, так как знак теплового потока отрицателен и минимуму прироста энтропии системы соответствует максимум  $\Delta S_2$ .

Каждая из поставленных задач представляет собой задачу об оптимальном тепловом контакте, и для них справедливо условие минимальной диссипации теплообмена, которое для Ньютоновского закона теплопередачи приводит к равенствам  $T = T_1 v_1$  в горячем полуцикле ( $v_1 < 1$ ),  $T = T_2 v_2$  в холодном полуцикле ( $v_2 < 1$ ). Ниже будем рассматривать этот закон теплопередачи.

С учетом пропорциональности температур источника и рабочего тела получим для горячего полуцикла  $q^+ = \alpha_+(1 - v_1)T_1 = k_1 T_1$ , для холодного полуцикла  $q_- = \alpha_-(1 - v_2)T_2 = -k_2 T_2$ . Минимальное приращение энтропии рабочего тела в  $i$ -м полуцикле

$$\Delta S_i^* = \bar{t}_i \frac{\alpha_i}{v_i} (1 - v_i), \quad i = 1, 2.$$

В. *Стыковка полуциклов.* Перепишем задачу о максимальной работе, считая  $v_1$  и  $v_2$  наряду с  $\bar{t}_1$  и  $\bar{t}_2$  неизвестными параметрами. Получим

$$A = Q^+ - Q^- = r_1(T_1^0 - \bar{T}_1) + r_2(T_2^0 - \bar{T}_1) \rightarrow \max \quad (4.153)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \tau, \quad \bar{t}_i > 0, \quad i = 1, 2, \\ \Delta S_1^* + \Delta S_2^* = \bar{t}_1 \frac{\alpha_1}{v_1} (1 - v_1) + \bar{t}_2 \frac{\alpha_2}{v_2} (1 - v_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.154)$$

Выразим из решения дифференциальных уравнений (4.151) и (4.152) температуры источников в конце полуциклов через их продолжительность

$$\bar{T}_1 = T_1^0 \exp\left(-\frac{k_1}{r_1} \bar{t}_1\right), \quad T_2 = T_2^0 \exp\left(\frac{k_2}{r_2} \bar{t}_2\right),$$

что позволяет переписать задачу (4.153) и (4.154) как

$$A = r_1(T_1^0 - T_1) + r_2(T_2^0 - \bar{T}_2) \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \frac{r_1}{k_1} \ln \frac{T_1^0}{T_1} + \frac{r_2}{k_2} \ln \frac{\bar{T}_2}{T_2^0} = \tau \\ \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{r_1 \alpha_1}{\alpha_1 - k_1} \ln \frac{T_1^0}{T_1} - \frac{r_2 \alpha_2}{\alpha_2 + k_2} \ln \frac{\bar{T}_2}{T_2^0} = 0 \end{aligned} \quad (4.155)$$

Для краткости обозначим относительные изменения температуры источников как  $\Delta_1 = \bar{T}_1/T_1^0$ ,  $\Delta_2 = \bar{T}_2/T_2^0$  ( $\Delta_1 < 1$ ,  $\Delta_2 > 1$ ) и запишем функцию Лагранжа этой задачи, отбросив постоянные слагаемые

$$\begin{aligned} R = r_1 T_1^0 \Delta_1 + r_2 T_2^0 \Delta_2 + \Lambda_1 \left( \frac{r_2}{k_2} \ln \Delta_2 - \frac{r_1}{k_1} \ln \Delta_1 \right) - \\ - \Lambda_2 \left( \frac{r_1 \alpha_1}{\alpha_1 - k_1} \ln \Delta_1 + \frac{r_2 \alpha_2}{\alpha_2 + k_2} \ln \Delta_2 \right). \end{aligned}$$

Условия ее стационарности по искомым переменным  $\Delta_1, \Delta_2, k_1, k_2$  приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1} = T_1^0 - \Lambda_1 (k_1 \Delta_2)^{-1} - \Lambda_2 \alpha_1 [\Delta_1 (\alpha_1 - k_1)]^{-1} = 0, \\ R_{\alpha_2} = T_2^0 + \Lambda_1 (k_2 \Delta_2)^{-1} - \Lambda_2 \alpha_2 [\Delta_2 (\alpha_2 + k_2)]^{-1} = 0, \\ R_{k_1} = \Lambda_1 k_1^{-2} - \Lambda \alpha_1 (\alpha_1 - k_1)^{-2} = 0, \\ R_{k_2} = -\Lambda_1 k_2^{-2} + \Lambda_2 \alpha_2 (\alpha_2 + k_2)^{-2} = 0. \end{aligned}$$

Из двух последних равенств получаем

$$\frac{k_2}{k_1} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1} (\alpha_2 + k_2)}{\sqrt{\alpha_2} (\alpha_1 - k_1)} \Rightarrow k_1 = \pm \frac{k_2 \alpha_1 \sqrt{\alpha_2}}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1} + k_2 (\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}, \quad (4.156)$$

а условие цикличности по энтропии (4.155) примет вид

$$\frac{\ln \Delta_2}{\ln \Delta_1} = -\frac{r_1 \alpha_1 (\alpha_2 + k_2)}{r_2 \alpha_2 (\alpha_1 - k_1)},$$

Так как в этом равенстве знак левой части отрицательный ( $\Delta_1 < 1$ ), то разность  $(\alpha_1 - k_1)$  положительна, а значит, положительна и правая часть в (4.156), так что

$$\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} = -\frac{k_1 r_2 \ln \Delta_2}{k_2 r_1 \ln \Delta_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}},$$

а так как сумма  $\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \tau$  то оптимальные продолжительности контакта

$$\bar{t}_1 = \tau \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \bar{t}_2 = \tau \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}.$$

Выразим  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  через  $\bar{t}_1$  и  $\bar{t}_2$ :

$$\Delta_1 = \exp\left(-\bar{t}_1 \frac{k_1}{r_1}\right), \quad \alpha_2 = \exp\left(\bar{t}_2 \frac{k_2}{r_2}\right) \quad (4.157)$$

и подставим их в критерий оптимальности, учтя, что согласно (4.156)  $k_1$  есть функция  $k_2$ . Получим

$$A = T_1^0 r_1 \left[1 - \exp\left(-\bar{t}_1 \frac{k_1(k_2)}{r_1}\right)\right] + T_2^0 r_2 \left[1 - \exp\left(\bar{t}_2 \frac{k_2}{r_2}\right)\right] \rightarrow \max.$$

Условия максимума этого выражения по  $k_2$  с учетом (4.156) приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{T_{10}}{T_{20}} = & \left[1 + \frac{k_2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}}\right]^2 \times \\ & \times \exp\left\{k_2 \left[\frac{\bar{t}_2}{r_2} + \frac{t_1}{r_1} \frac{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1} + k_2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Так как правая часть этого уравнения при  $k_2 > 0$  монотонно зависит от  $k_2$ , то оно имеет единственное решение  $k_2^*$ . Из (4.156) определяем  $k_1^*$ , из (4.157)  $\Delta_1^*$  и  $\Delta_2^*$ , а по ним  $\bar{T}_i^* = \Delta_i^* T_i^0$ ,  $i = 1, 2$ . Максимальная работа подсчитывается согласно (4.153), а соответствующий ей КПД как

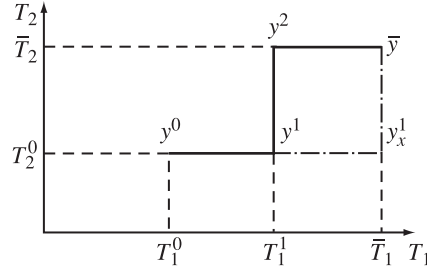
$$\eta_{A_{\max}} = \frac{A_{\max}(\tau)}{r_1(T_1^0 - \bar{T}_1^*)}.$$

**Доказательство оптимальности цикла типа Лоренца, состоящего из двух контактов.** Выше упоминалось о том, что задачи о минимальном приращении энтропии системы  $\Delta S_c$  при фиксированной продолжительности контакта  $\bar{t}$  и о минимальном времени контакта  $\bar{t}$  при фиксированном значении  $\Delta S_c$  имеют одно и то же оптимальное



решение. Однако для задачи об оптимальном быстродействии удается в явной форме выразить минимальное время  $\bar{t}^*$  через  $Q$  и  $\Delta S$ , что облегчает доказательство того факта, что увеличение числа контактов между рабочим телом и источниками не дает преимущества по сравнению с двумя контактами.

Р и с. 4.18. Изменение температур источников вдоль траекторий с двумя контактами (штрихпунктир) и с тремя контактами (сплошная линия)



Рассмотрим пространство  $Y$  с координатами  $T_1, T_2, S$  и поставим задачу о переводе системы из начального состояния  $Y^0 = (T_1^0, T_2^0, 0)$  в конечное  $\bar{Y} = (\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{S})$  за минимальное время  $\tau$  с использованием управления  $T(t)$ . Здесь, как и ранее  $T_1$  и  $T_2$  — температуры источников,  $S$  — прирост энтропии, а  $T$  — температура рабочего тела. Пусть некоторая траектория (на рис.4.18 показана ее проекция  $Y^0, Y^1, Y^2, \bar{Y}$  на плоскость  $T_1, T_2$ ) состоит из трех контактов — с горячим, холодным и вновь с горячим источниками. Покажем, что без ущерба для быстродействия число контактов может быть уменьшено на единицу. Такая траектория  $Y^0, Y^1, \bar{Y}$  также приведена на рис. 4.18. Задача оптимального быстродействия при контакте с горячим источником запишется как

$$t_1 \rightarrow \min \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{t_1} \frac{q(T_1, T)}{T} dt = S^0, \quad \dot{T}_1 = -\frac{q}{r}, \\ T_1(0) = T_1^0, \quad \int_0^{t_1} q(T_1, T) dt = Q. \end{array} \right.$$

Повторяя те же выкладки, что и в задачах оптимизации полуциклов, получим  $t_1$  и  $T_1^1$  на оптимальном решении как функции  $S^0$  в виде

$$T_1^1 = T_1^0 \exp\left(-\frac{T^0, S^0}{r_1 T_1^0}\right), \quad t_1 = \frac{S^0}{\alpha_1} \left(\frac{T_1^0}{T^0} - 1\right)^{-1}.$$

Исключая  $T^0$ , найдем

$$t_1 = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \frac{1}{r_1 \ln(T_1^0/T_1^1)} - \frac{1}{S^0} \right]^{-1}.$$

Контакт с холодным источником переводит изображающую точку из состояния  $Y^1 = (T_1^1, T_2^0, S^0)$  в состояние  $Y^2 = (T_1^1, \bar{T}_2, S^0 - S^1)$  за

минимальное время

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \frac{1}{S^1} - \frac{1}{r_2 \ln(\bar{T}_2/T_2^0)} \right]^{-1}.$$

В следующем контакте с горячим источником система переходит в точку  $\bar{Y} = (\bar{T}_1, \bar{T}_2, S_0^0 - S_1 + S_2)$  за минимальное время

$$\bar{t}_3 = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \frac{1}{S^1 r_2 \ln(\bar{T}_2/T_2^0)} \right]^{-1}.$$

Общее время перехода определится как  $\tau = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \bar{t}_3$ , при этом параметры конечной точки  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ , как и энтропию

$$\bar{S} = S^0 - S^1 + S^2, \quad (4.158)$$

считаем заданными. Минимизировать величину  $\tau$  по  $S^0, S^1, S^2$  и  $T_1^1$  нужно при условии (4.158).

Проводя минимизацию, получим (стандартные, но довольно громоздкие выкладки опускаем), что величина оптимальной продолжительности цикла:

$$\begin{aligned} \tau^* &= \left( \frac{r_1}{\alpha_1} \ln \frac{T_1^0}{T_1} + \frac{r_2}{\alpha_2} \ln \frac{T_2^0}{\bar{T}_2} \right) + \left( \frac{r_1}{\sqrt{\alpha_1}} \ln \frac{T_1^0}{\bar{T}_1} - \frac{r_2}{\sqrt{\alpha_2}} \ln \frac{T_2^0}{\bar{T}_2} \right)^2 \times \\ &\times \left( \bar{S} - r_2 \ln \frac{T_2^0}{\bar{T}_2} - r_1 \ln \frac{T_1^0}{\bar{T}_1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.159)$$

причем это значение одно и то же при всех  $T_1^1 \in [T_1^0, \bar{T}_1]$ . Значит, при оптимальном выборе  $S^0, S^1, S^2$  параметр  $T_1^1$  может быть произволен и, в частности, можно принять его равным  $\bar{T}_1$ , что приведет к оптимальному переходу из  $Y^0$  в  $\bar{Y}$  всего с двумя контактами. В цикле Лоренца приращение энтропии рабочего тела равно нулю, что позволяет из (4.159) найти связь между временем цикла и параметрами задачи в виде

$$\tau^* = \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right)^2 \left[ \frac{1}{r_1 \ln T_1^0 / \bar{T}_1} + \frac{1}{r_2 \ln T_2^0 / \bar{T}_2} \right]^{-1}. \quad (4.160)$$

Из очевидного требования  $\tau > 0$  с учетом (4.160) следует, что множество состояний, достижимых с использованием цикла Лоренца на плоскости  $T_1, T_2$ , выделяется условием

$$\bar{T}_1^{r_1} \bar{T}_2^{r_2} > (T_1^0)^{r_1} (T_2^0)^{r_2}.$$

Кривая  $T_1^{r_1} T_2^{r_2} = (T_1^0)^{r_1} (T_2^0)^{r_2}$  соответствует времени  $\tau = \infty$ .

Условие (4.160) при фиксированном значении  $\tau^*$  выделяет на плоскости  $T_1, T_2$  множество точек, достижимых за время  $\tau^*$  (рис. 4.19). Обозначим его как  $G_{\tau^*}$ . Точка касания прямых из семейства  $A = \text{const}$  к границе множества  $G_{\tau^*}$  определяет предельную работу, которую

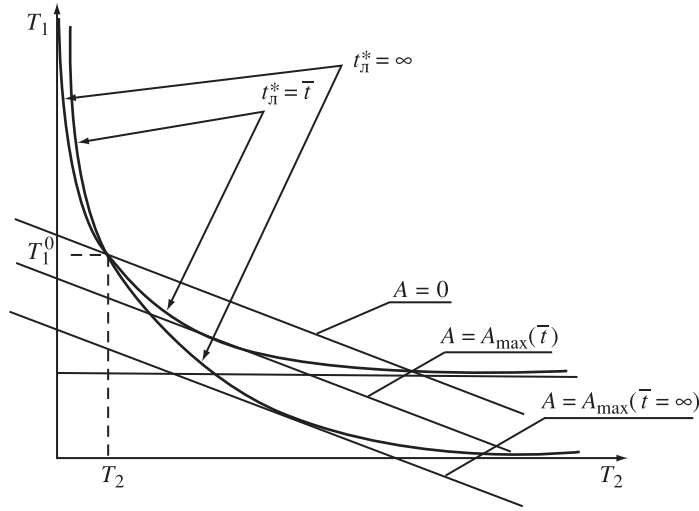
можно получить с использованием цикла Лоренца за фиксированное время  $\tau$ . При  $\tau \rightarrow \infty$  она оказывается равной

$$A_{\max}(Y^0, \infty) = r_1 T_1^0 + r_2 T_2^0 - (r_1 + r_2) (T_1^0)^{r_1/(r_1+r_2)} (T_2^0)^{r_2/(r_1+r_2)}. \quad (4.161)$$

В этом случае температуры источников в конце полуциклов  $T_1$  и  $T_2$  равны друг другу:  $\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = (T_1^0)^{r_1/(r_1+r_2)} (T_2^0)^{r_2/(r_1+r_2)}$ . КПД, соответствующий максимальной работе,

$$\eta_{A_{\max}} = \frac{1 - (T_2^0/T_1^0)^{r_2/(r_1+r_2)}}{(T_1^0/T_2^0)^{r_1/(r_1+r_2)} - 1} = 2 - \frac{\eta_k}{1 - (1 - \eta_k)^{r_1/(r_1+r_2)}}. \quad (4.162)$$

В последней формуле  $\eta_k$  — КПД цикла Карно, имеющего температуры горячего и холодного источников  $T_1^0$  и  $T_2^0$  соответственно.



Р и с. 4.19. Взаимное расположение областей, достижимых за время  $\tau$ , и линий постоянной работы

*Особенности задачи о предельном КПД при заданной работе.* Используем для решения этой задачи тот же подход, что и в задаче о максимальной работе. При этом подзадачи оптимизации горячего и холодного полуциклов не изменяются, так как  $Q^+$  и  $Q^-$  в них считаются фиксированными. Условие же (4.150) необходимо учесть на стадии стыковки полуциклов. Ввиду этого в каждом из полуциклов температуры источника и рабочего тела пропорциональны и, как следствие,  $q^+ = k_1 T_1$ ,  $q^- = -k_2 T_2$ . Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ , естественно, окажутся иными, чем в задаче о максимальной работе.

С учетом заданной работы максимуму КПД соответствует минимум тепла  $Q^+$ , отданного горячим источником, и задача стыковки полуциклов запишется как

$$I = Q^+ = r_1 T_1^0 \alpha_1 \rightarrow \min_{k_i, T_i}, \quad i = 1, 2$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 &= -\frac{r_1}{k_1} \ln \Delta_1 + \frac{r_2}{k_2} \ln \Delta_2 = \bar{t}, \\ \bar{S}_1 + \bar{S}_2 &= \frac{r_1 \alpha_1}{\alpha_1 - k_1} \ln \Delta_2 + \frac{r_2 \alpha_2}{\alpha_2 + k_2} \ln \Delta_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.163)$$

$$Q^+ - Q^- = r_1 T_1^0 (1 - \Delta_1) + r_2 T_2^0 (1 - \Delta_2) = A_0.$$

Здесь, как и выше, обозначение  $\Delta_1 = \bar{T}_1/T_1^0$ ,  $\Delta_2 = \bar{T}_2/T_2^0$ . Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} R_1 &= r_1 T_1^0 \Delta_1 + \Lambda_1 \left( \frac{r_2}{k_2} \ln \Delta_2 - \frac{r_1}{k_1} \ln \Delta_1 \right) - \\ &- \Lambda_2 \left( \frac{r_1 \alpha_1 \ln \Delta_1}{\alpha_1 - k_1} + \frac{r_2 \alpha_2 \ln \Delta_2}{\alpha_2 + k_2} \right) + \Lambda_3 [r_1 T_1^0 (1 - \Delta_1) + r_2 T_2^0 (1 - \Delta_2)]. \end{aligned}$$

Сравнение этой функции с функцией  $R$  в задаче о предельной работе показывает, что

$$\frac{\partial R_1}{\partial k_1} = \frac{\partial R}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial R_1}{\partial k_2} = \frac{\partial R}{\partial k_2} = 0.$$

А так как из этих условий и из равенства (4.155), которое также остается без изменений в нашей задаче, следуют формулы (4.157), то оптимальные продолжительности полуциклов такие же, как и в задаче о предельной работе. Оптимальные значения  $k_1$  и  $k_2$  определяются в данном случае из совместного решения уравнения (4.156), которое остается без изменения, и последнего из условий (4.163), которое после исключения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  примет вид

$$r_1 T_1^0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\bar{t}_1 k_1}{r_1} \right) \right] + r_2 T_1^0 \left[ 1 - \exp \left( \frac{\bar{t}_2 k_2}{r_2} \right) \right] = A_0, \quad (4.164)$$

$k_1$  и  $k_2$  оказываются несколько меньше, чем в задаче о предельной работе.

Отметим, что задача о максимуме КПД цикла типа Лоренца эквивалентна задаче о получении максимальной работы, при условии, что горячий источник охладится до заданной температуры  $\bar{T}_1$ . На рис. 4.20 заштрихована область реализуемости системы, т.е. область температур источников, в которую можно перевести систему из начальной точки  $T_1^0, T_2^0$  за время  $\tau \geq \tau^*$ . Ее граница определена равенством

(4.160). На том же рисунке нанесены прямые, соответствующие полученной работе. Ясно, что при фиксированном значении  $\bar{T}_1$  максимуму работы соответствует граница области реализуемости и для нахождения максимальной работы нужно подставить в уравнение (4.160) значения  $\bar{T}_1$  и  $\tau$  и разрешить его относительно  $\bar{T}_2(\bar{T}_1, \tau)$ . Максимальная работа при заданном потреблении тепла

$$Q_+ = r_1(T_1^0 - \bar{T}_1)$$

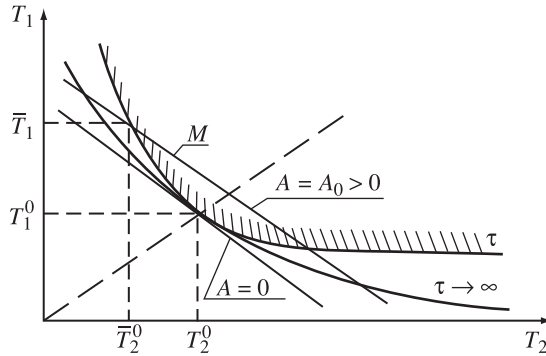
равна

$$A^0 = Q_+ - r_2(\bar{T}_2(\bar{T}_1, \tau) - T_{20}),$$

а

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{r_2(\bar{T}_2(\bar{T}_1, \tau) - T_{20})}{r_1(T_1^0 - \bar{T}_1)} \quad (4.165)$$

**Обратные циклы типа Лоренца.** Задача о предельных возможностях обратных циклов типа Лоренца сводится к вопросу о том, какую минимальную работу нужно затратить для того, чтобы два тела с фиксированными теплоемкостями и начальными температурами  $T_1^0$  и  $T_2^0$  перевести в заданное конечное состояние за фиксированное время  $\tau$ . Если  $T_1^0 = T_2^0 = T^0$ , то это задача *разделения термически однородной системы* на подсистемы с заданными температурами.



Р и с. 4.20. Области реализуемости в задаче о разделении термически однородной системы

Пусть затраченная работа  $A = A^0$  задана, тогда (см. рис. 4.20) при заданном  $\tau$  возможности системы разделения ограничены теми значениями температуры, которые лежат на линии

$$r_1(\bar{T}_1 - T_0) + r_2(\bar{T}_2 - T_0) = A^0$$

и находятся внутри области реализуемости. При этом, если точка с координатами  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$  лежит строго внутри области реализуемости (т. М

на рис. 4.20), то при той же затрате работы разделение может быть проведено за меньшее время. Разделение на подсистемы, конечные температуры которых лежат за пределами области, соответствующей  $\tau \rightarrow \infty$ , не может быть проведено в циклическом процессе. При фиксированной конечной температуре  $\bar{T}_1$  одного из источников и заданной продолжительности цикла  $\tau$  минимальной затраченной работе соответствует выбор  $\bar{T}_2$  на границе области реализуемости, соответствующей данной продолжительности, т.е.  $\bar{T}_2$  находится из уравнения (4.160).

Когда одна из температур в конечный момент времени стремится к бесконечности, то при ограниченном  $\tau$  вторая стремится к конечному пределу. Т.е. нагреть при соответствующей мощности можно до сколь угодно большой температуры, а охладить лишь до некоторого предела, какую бы мощность мы не затратили.

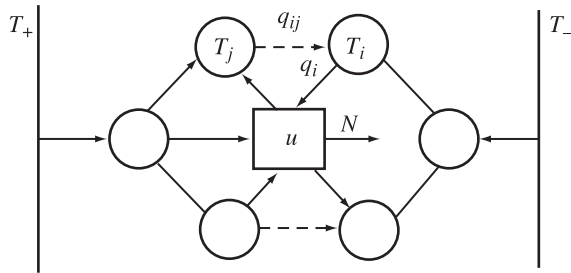
#### 4.6. Предельные возможности тепломеханических преобразователей в открытых системах

Выше были рассмотрены предельные возможности преобразователей тепла в работу и работы в тепло (холод) в системе с двумя резервуарами. В этом параграфе мы рассмотрим подобную задачу в более общей постановке, а именно будем предполагать, что система состоит из двух или более резервуаров и подсистем с конечной емкостью. В такой системе устанавливается стационарное неоднородное поле температур, а следовательно возможно получение работы. Требуется выяснить какую максимальную мощность можно извлечь в подобной системе.

Обратная задача заключается в том, чтобы в аналогичной системе (резервуар в ней может быть и один) поддерживать температурное поле заданной конфигурации с минимальными затратами мощности. Такая задача (см. 4.7) возникает, например, при отоплении или кондиционировании зданий, в некоторых помещениях которых нужно поддерживать заданную температуру.

**Открытая система, машина с распределенными параметрами.** Рассмотрим открытую термодинамическую систему, состоящую из нескольких резервуаров с постоянными температурами и подсистем, температуры которых определяются запасом их внутренней энергии. Тепловая машина контактирует с термодинамическими подсистемами, получая от них или отдавая им потоки тепла и вырабатывая работу. Требуется найти такие температуры контакта  $u = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_n\}$  тепловой машины с каждой из подсистем, при которых получаемая в единицу времени работа, т.е. мощность тепловой машины  $N$ , максимальна. При этом общее число термодинамических подсистем равно  $n$ , из них не менее двух представляют собой

резервуары (рис. 4.21). Система с одним резервуаром не может функционировать в стационарном режиме.



Р и с. 4.21 Структура открытой системы с тепловой машиной

Задача о предельной мощности для системы, состоящей из двух резервуаров и тепловой машины, решена Новиковым [125], позднее Курзоном, Альбурном [94], Бежаном [81] и другими исследователями. Рассматриваемая постановка обобщает эту задачу на системы произвольной структуры.

Обозначим через  $T_i$  температуру  $i$ -й подсистемы, через  $q_{ji}(T_j, T_i)$  — тепловой поток между  $i$ -й и  $j$ -й подсистемами, через  $q_i(T_i, u_i)$  — тепловой поток между  $i$ -й подсистемой и рабочим телом тепловой машины. Тепловую машину будем предполагать внутренне обратимой, так что производство энтропии в ней равно нулю. Задача о предельной мощности запишется в форме

$$N = \sum_{i=m}^n q_i(T_i, u_i) \rightarrow \max_{u_i} \quad (4.166)$$

при условиях

$$\sum_{i=m}^n \frac{q_i(T_i, u_i)}{u_i} = 0, \quad (4.167)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{ji}(T_j, T_i) = q_i(T_i, u_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.168)$$

Условия (4.166), (4.167) следуют из энергетического и энтропийного балансов рабочего тела, а условие (4.168) — энергетический баланс для  $i$ -й подсистемы, число которых  $m \leq n - 2$ . Температуры резервуаров  $T_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) заданы и неизменны.

Условия, определяющие  $u_i$  и  $T_i$  для  $i \leq m$ , следуют из требований

стационарности функции Лагранжа задачи (4.166)–(4.168)

$$L = \sum_{i=1}^n \left\{ q_i(T_i, u_i) \left( 1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) + \lambda_i \sum_{j=1}^n q_{ji}(T_j, T_i) \right\}$$

по  $u_i, T_i$ , причем  $\lambda_i = 0$  для  $i > m$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial u_i} \left( 1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) = \Lambda \frac{q_i(T_i, u_i)}{u_i^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.169)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial T_i} \left( 1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) + \lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_{ji}}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.170)$$

Уравнения (4.167)–(4.170) позволяют найти  $n$  температур  $u_i$  рабочего тела,  $m$  температур  $T_i$  подсистем и  $(m+1)$ -н множитель Лагранжа.

Чаще всего форму зависимости теплового потока от температур контактирующих тел задают в форме Ньютона

$$q = \alpha(T_1 - T_2),$$

либо в форме Фурье

$$q = \beta \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

В том случае, когда потоки ньютоновские,  $q_i = \alpha_i(T_i - u_i)$ ,  $q_{ji} = \alpha_{ji}(T_j - T_i)$ , уравнения (4.167)–(4.170) переписутся как

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \frac{T_i}{u_i} = 1, \quad \text{где} \quad \tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad (4.171)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}(T_j - T_i) = \alpha_i(T_i - u_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.172)$$

$$u_i^2(1 - \lambda_i) = \Lambda T_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.173)$$

$$\alpha_i \left( 1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) = \lambda_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.174)$$

Из этих условий в том частном случае, когда  $n = 2$ ,  $m = 0$ ,  $T_1 = T_{0h}$ ,  $T_2 = T_{0c}$ , вытекают упомянутые выше результаты о предельной мощности тепловой машины. Действительно, в этом случае

$$\lambda_i = 0, \quad u_1^* = \sqrt{\Lambda T_{0h}}, \quad u_2^* = \sqrt{\Lambda T_{0c}},$$

и из уравнений (4.171)–(4.174) следует, что КПД тепловой машины

$$\eta = 1 - \frac{u_2^*}{u_1^*} = 1 - \sqrt{\frac{T_{0c}}{T_{0h}}},$$



а максимальная мощность

$$N_{\max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left( \sqrt{T_{0h}} - \sqrt{T_{0c}} \right)^2.$$

В табл. 4.1 приведены значения предельной мощности и соответствующего ей КПД для машины с распределенными параметрами в системе с двумя резервуарами, имеющими температуры  $T_{0h}$  и  $T_{0c}$ .

Таблица 4.1.

**Максимальная мощность и соответствующий ей КПД тепловых машин с распределенными параметрами рабочего тела**

Закон теплопереноса	Максимальная мощность	КПД
Ньютоновский (линейный)	$\frac{k_h k_c}{k_h + k_c} \left[ \sqrt{T_{0h}} - \sqrt{T_{0c}} \right]^2$	$1 - \sqrt{\frac{T_{0c}}{T_{0h}}}$
Фурье	$\frac{1}{2} \left[ \xi(k_h + k_c) - \left( \frac{k_h}{T_{0h}} - \frac{k_c}{T_{0c}} \right) \right]$	$1 - \frac{1/T_{0h} + \xi}{1/T_{0c} + \xi},$ $\xi = \sqrt{\frac{\frac{k_h}{T_{0h}^2} + \frac{k_c}{T_{0c}^2}}{k_h + k_c}}$

#### 4.7. Задача оптимального потенциалостатирования

В этой задаче нужно оценить снизу затраты энергии на поддержание заданной конфигурации температурного или иного поля. Мы рассмотрим первоначально два практически-важных частных случая этой задачи, а затем ее общую постановку.

**Активная изоляция.** В криогенной технике нужно поддерживать заданную низкую температуру в камере. При этом возможно два подхода:

— изолировать термостатируемую камеру и с использованием теплового насоса отбирать из нее тепло, поступающее извне (пассивная изоляция);

— разбить слой изоляции, выделив промежуточные камеры, и часть тепла отбирать из промежуточных камер (активная изоляция).

Целесообразность использования активной изоляции, как показано ниже, зависит от закона теплообмена. Для каждого закона теплопереноса условие постоянства теплового потока определяет профиль температур по сечению слоя изоляции. Этот профиль далеко не всегда соответствует минимуму производства энтропии. Ниже показано, что если закон теплообмена имеет форму Фурье (поток пропорционален разности температур в степени минус единица), то активная изоляция нецелесообразна. Если поток пропорционален разности температур (ньютоновский), то активная изоляция эффективна. Задача об оптимальной активной изоляции для ньютоновского теплообмена поставлена и решена Мартыновским [29], затем обобщена в [49], [154].

Обозначим температуру внешней среды через  $T_0$ , а температуру в камере через  $T_k$ . Разность температур сопровождается тепловым потоком  $q(T_0, T_k)$ . Для определенности будем предполагать, что температура внешней среды  $T_0$  больше, чем температура в камере. Найдем затраты энергии на поддержание температуры  $T_k$  в системе с пассивной изоляцией, имеющей коэффициент теплопроводности  $k_0$ . Будем считать, что тепловой поток пропорционален коэффициенту теплопроводности:

$$q(T_0, T_k) = k_0 \hat{q}(T_0, T_k).$$

Запишем энергетический и энтропийный балансы системы

$$\begin{aligned} q(T_0, T_k) + P - q_0 &= 0, \\ \frac{q(T_0, T_k)}{T_0} - \frac{q_0}{T_0} + \sigma &= 0. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Здесь  $\sigma$  — производство энтропии, связанное с потоком тепла  $q$ . Из условий (4.175) следует, что затрачиваемая мощность  $P$  пропорциональна производству энтропии

$$P = \sigma T_0.$$

Аналогичным образом выглядят уравнения термодинамических балансов для активной теплоизоляции с той разницей, что вместо  $q_0$  фигурирует  $\sum_i q_{0i}$ , а вместо  $P$  сумма  $P_i$ . Получим

$$\sum_{i=1}^M P_i = \sigma T_0.$$

Таким образом минимуму затрачиваемой мощности холодильных циклов соответствует минимум производства энтропии в системе.

Найдем производство энтропии в системе с пассивной изоляцией, для теплового потока вида

$$\hat{q}(T_0, T_k) = (T_0^n - T_k^n),$$

приняв толщину стенки за единицу. Величина

$$\sigma = -k_0 \int_0^1 \frac{d}{dx} [T^n(x)] \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{T(x)} \right] dx = k_0 |n| \int_0^1 T^{n-3}(x) \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx. \quad (4.176)$$

Здесь  $\left[ -k_0 \frac{d}{dx} (T^n(x)) \right]$  — тепловой поток,  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T(x)} \right)$  — движущая сила процесса теплопереноса в сечении  $x$ .

Распределение температур по координате  $x$  найдем из условия постоянства теплового потока

$$\frac{d}{dx} (T^n(x)) = T_0^n - T_k^n.$$

Откуда

$$T^n(x) = T_0^n(1-x) + T_k^n x. \quad (4.177)$$

После подстановки (4.177) в (4.176) получим производство энтропии в слое теплоизоляции  $\sigma_n$ .

Отбросим теперь условие постоянства теплового потока и попытаемся найти такой закон изменения температуры по координате  $x$ , для которого производство энтропии  $\sigma$  оказалось бы минимальным при соблюдении условий на границах. Задача оценки минимальной диссипации в слое примет форму

$$\frac{\sigma}{k_0} = I = \int_0^1 T^{n-3}(x) \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx \rightarrow \min, \quad T(0) = T_0, \quad T(1) = T_k.$$

Решение существенно упрощается, если воспользоваться переходом от переменной  $x$  к переменной  $T$ . Обозначим производную  $dT/dx = T_x(T)$ , так что  $dx = dT/T_x$ . Поскольку толщина стенки задана, должно выполняться равенство

$$\int_0^1 dx = \int_{T_0}^{T_k} \frac{dT}{T_x} = 1, \quad (4.178)$$

а функционал  $I$  примет вид

$$I = \int_{T_0}^{T_k} T^{n-3} T_x(T) dT \rightarrow \min_{T_x(T)} \quad (4.179)$$

при условии (4.178). Функция Лагранжа для задачи (4.178) – (4.179):

$$L = T_x T^{n-3} + \frac{\lambda}{T_x}.$$

Условия ее стационарности позволяют выразить  $T_x$  через  $T$  и  $\lambda$

$$T_x^*(T) = \sqrt{\lambda T^{\frac{3-n}{2}}} = \frac{n-1}{2} \frac{T^{\frac{3-n}{2}}}{T_0^{\frac{n-1}{2}} - T_k^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (4.180)$$

Для определения  $T^*(x)$  имеем теперь уравнение

$$\frac{dT}{T_x^*(T)} = dx, \quad T(0) = T_0.$$

Нетрудно видеть, что для линейного закона теплопередачи ( $n = 1$ ) имеем

$$T^*(x) = T_0 e^{-rx}, \quad (4.181)$$

где  $r = \ln(T_0/T_k)$ , а оценка минимальной диссипации

$$\sigma^* = k_0 \left( \ln \frac{T_0}{T_k} \right)^2. \quad (4.182)$$

Соответствующая минимальной диссипации зависимость теплового потока  $q$  от температуры в сечении  $x$  с учетом (4.180) равна

$$q^*(T(x)) = k_0 |n| T^{n-1} T_x^*(T) = k_0 |n| \frac{n-1}{2} \frac{T(x)^{\frac{n+1}{2}}}{T_0^{\frac{n-1}{2}} - T_k^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (4.183)$$

При  $n = 1$  после раскрытия неопределенности в (4.183) получим, что оптимальный тепловой поток пропорционален абсолютной температуре в каждом сечении. Добиться его постоянства можно только сделав коэффициент теплопроводности обратно пропорциональным температуре  $k_0(T) = \beta/T$ . При этом величина  $\beta$  такова, что

$$\int_{T_k}^{T_0} \frac{\lambda T}{\beta} dT = \frac{1}{k_0}.$$

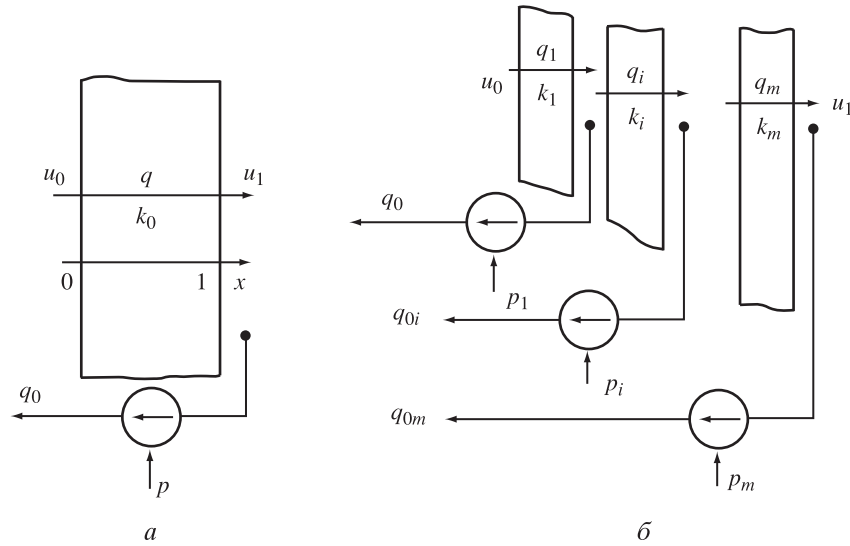
В отличие от этого для закона теплопереноса Фурье ( $n = -1$ ) оптимальный тепловой поток  $q^*$  не зависит от температуры. Он постоянен для постоянного коэффициента теплопередачи  $k_0$ . Это означает, что для закона теплопереноса, соответствующего  $n = -1$  пассивная изоляция по схеме рис. 4.22 а оптимальна.

При  $n > -1$  производство энтропии может быть уменьшено, если перейти к активной изоляции, расположив промежуточные камеры и выбрав отбор тепла из этих камер так, чтобы зависимость теплового потока от температуры соответствовала условию (4.183).

Следуя [49], покажем, какого выигрыша можно ожидать от использования активной изоляции при  $n = 1$ .

Диссипация в системе с пассивной изоляцией равна

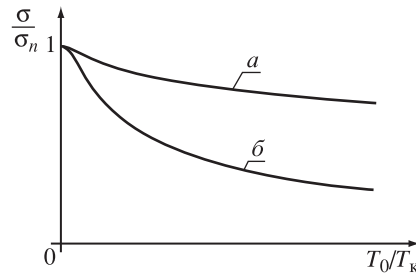
$$\sigma_n = q \left( \frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{k_0 (T_0 - T_k)^2}{T_0 T_k} = k_0 \left( \frac{T_0}{T_k} + \frac{T_k}{T_0} - 2 \right). \quad (4.184)$$



Р и с. 4.22. Структуры систем с пассивной (а) и активной (б) изоляцией

Отношение  $\sigma$  к  $\sigma_n$  в функции  $T_0/T_k$  показано на рис 4.23. Выигрыш тем больше, чем больше отношение температур.

Р и с. 4.23. Отношение  $\sigma/\sigma_n$  для схем с пассивной изоляцией (а) и активной с одной промежуточной камерой (б)



Значительный выигрыш дает введение уже одной промежуточной камеры в точке с некоторой температурой  $T_1$  ( $T_0 > T_1 > T_k$ ). Эту температуру несложно найти из решения следующей экстремальной задачи

$$\sigma = k_1 \frac{(T_0 - T_1)^2}{T_0 T_1} + k_2 \frac{(T_1 - T_k)^2}{T_1 T_k} \rightarrow \min_{T_1, k_1, k_2} \quad (4.185)$$

при условии

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_0}. \quad (4.186)$$

Ее решение очевидно уже в силу симметрии по искомым переменным

$$T_1^* = \sqrt{T_0 T_k}, \quad k_1^* = k_2^* = 2k_0. \quad (4.187)$$

Производство энтропии в системе с одной промежуточной камерой при таком выборе

$$\sigma_1^* = 4k_0 \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_k})^2}{\sqrt{T_0 T_k}}.$$

Отношение  $\sigma^*/\sigma_1^*$  показано на рис. 4.23. Видно, что активная изоляция с одной промежуточной камерой снижает избыток диссипации по сравнению с минимально возможным примерно втрое.

Мощности холодильных машин для схемы с одной промежуточной камерой равны

$$P_1 = 2k_0 \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_k})^2 (T_0 - \sqrt{T_0 T_k})}{\sqrt{T_0 T_k}};$$

$$P_2 = 2k_0 \frac{(T_0 - T_k)(\sqrt{T_0 T_k} - T_k)}{T_k}.$$

При дальнейшем увеличении числа камер, каждый слой изоляции делится в соответствии с формулами (4.187).

В приведенных выше результатах не учитывалась необратимость холодильных циклов. Эта необратимость зависит от величины поверхностей контакта рабочего тела с газом в охлаждаемой камере и с внешней средой и от мощности  $P_i$ . Оценки для такой необратимости приведены в параграфе 4.5.

Отметим в заключение, что с ростом степени  $n$  в законе теплопереноса выигрыш от использования активной изоляции возрастает.

**Потенциалостатирование.** Очевидно, что использование многослойной изоляции может дать эффект и при создании глубокого вакуума и при необходимости сохранения большого положительного или отрицательного заряда и пр.

Во всех этих случаях термодинамические балансы подобные (4.175), показывают, что суммарные затраты энергии на потенциалостатирование пропорциональны производству энтропии. Обозначим интенсивную переменную, определяющую движущую силу потока, проникающего через изоляцию, через  $U$ . Поток  $g$  в сечении  $x$  можно задать в форме

$$g = k_0 r(U) \frac{dU}{dx}. \quad (4.188)$$

Потенциал  $\mu$  также зависит от  $U$ . Например, тепловой потенциал есть обратная величина температуры, химический потенциал пропор-

ционален логарифму концентрации и пр. Производство энтропии

$$\sigma = k_0 \int_0^1 r(U) \left( \frac{d\mu}{dU} \right) \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dx. \quad (4.189)$$

Значения  $U_0$  и  $U_k$  фиксированы.

Перейдем от переменной  $x$  к переменной  $U$ , введя обозначения для производных

$$U_x = \frac{dU}{dx}, \quad \mu_U = \frac{d\mu}{dU}.$$

Получим задачу о выборе оптимальной зависимости  $U_x(U)$

$$\sigma = k_0 \int_{U_0}^{U_1} r(U) \mu_U(U) U_x dU \rightarrow \min \quad (4.190)$$

при условии

$$\int_0^1 dx = \int_{U_0}^{U_k} \frac{dU}{U_x} = 1. \quad (4.191)$$

Из условий стационарности функции Лагранжа для этой задачи

$$\frac{\partial}{\partial U_x} \left[ r(U) \mu_U(U) U_x + \frac{\lambda}{U_x} \right] = 0$$

следует

$$U_x^*(U) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{r(U) \mu_U(U)}}.$$

С учетом (4.191)

$$\sqrt{\lambda} = \int_{U_0}^{U_k} \sqrt{r(U) \mu_U(U)} dU.$$

Поток, минимизирующий диссипацию, с учетом принятых обозначений запишется в виде

$$g^*(U) = k_0 r(U) U_x^*(U) = k_0 \left( \int_{U_0}^{U_k} \sqrt{r(U) \left( \frac{d\mu}{dU} \right)} dU \right) \sqrt{\frac{r(U)}{d\mu/dU}}. \quad (4.192)$$

Зависимость (4.192) позволяет сформулировать **Условие целесообразности потенциалостатирования**: Если

$$\frac{r(U_k)}{\left( \frac{d\mu}{dU} \right)_{U_k}} < \frac{r(U_0)}{\left( \frac{d\mu}{dU} \right)_{U_0}}, \quad (4.193)$$

то активное потенциалостатирование позволяет уменьшить затраты энергии. В противном случае оно нецелесообразно.

В частности, для рассмотренного выше случая тепловой изоляции,  $U$  соответствует температуре  $T$ ,

$$r(T) = -|n|T^{m-1}, \quad \mu(T) = \frac{1}{T}, \quad \frac{d\mu}{dT} = -\frac{1}{T^2}.$$

Подставляя эти зависимости в условие целесообразности использования активной изоляции, получим

$$T_k^{n+1} < T_0^{n+1}.$$

Так как по условию  $T_0 > T_k$ , то из этого неравенства следует, что  $n \geq -1$ .

Неравенство (4.193) имеет простой физический смысл: оптимальный поток, поступающий в камеру, должен быть меньше потока на границе изоляции с внешней средой, т.е. его надо «откачивать» из промежуточных камер. Чем больше разница между правой и левой частями неравенства, тем большего эффекта можно ожидать от активного потенциалостатирования.

#### 4.7.1. Задача термостатирования в строительстве

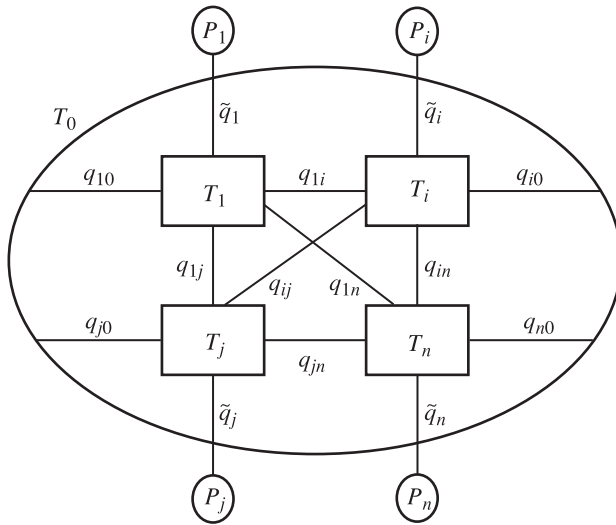
**Введение и постановка задачи.** Энергосбережение в строительстве является одним из основных источников экономии энергии, так как около сорока процентов энергии, потребляемой человечеством, тратится на отопление и кондиционирование помещений. Строительство энергосберегающих зданий стало одним из главных направлений энергосбережения. Экономия энергии достигается за счет целого ряда мероприятий: забор воздуха для вентиляции через подземный теплообменник, полная регенерация тепла выходящего воздуха, солнечные батареи на крыше здания, отопление с использованием тепловых насосов, многослойная и отражательная изоляция и пр. В результате энергопотребление таких зданий в пять — восемь раз меньше, чем для зданий обычной конструкции. Повышение стоимости энергии делает строительство энергосберегающих зданий весьма актуальным.

Одним из факторов энергосбережения является термостатирование помещений в таком энергосберегающем здании. Задача оптимального термостатирования состоит в том, чтобы поддерживать заданные температуры только в части помещений (камер) при произвольных температурах в остальных (промежуточных) камерах, затрачивая при этом минимальное количество энергии. Как состав термостатируемых помещений, так и заданные значения температур могут зависеть от сезона и времени суток.

Рассмотрим задачу оптимального термостатирования в системе общей структуры с несколькими взаимосвязанными помещениями при двух вариантах подачи энергии:



- А.** Задача отопления (подача тепла за счет электрического, газового, водяного, воздушного обогрева).
- В.** Задача кондиционирования (обогрев или охлаждение помещений с использованием цикла теплового насоса или холодильного цикла).



Р и с. 4.24. Общая структура системы термостатирования

Рассматриваемая структура изображена на рис. 4.24, где обозначено:

$T_i$  — температура  $i$ -ой камеры ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $^{\circ}\text{C}$ ;

$\alpha_{ij}(T_i, T_j)$  — коэффициенты теплопередачи между  $i$ -ой и  $j$ -ой камерами, которые могут зависеть от температур в этих камерах ( $\alpha_{ji} = \alpha_{ij} \geq 0$ ), Вт/ $^{\circ}\text{C}$ ;

$q_{ij} = \alpha_{ij}(T_i, T_j)(T_j - T_i)$  — тепловой поток от  $i$ -ой камеры к  $j$ -ой;

$q_{i0} = \alpha_{i0}(T_i, T_0)(T_0 - T_i)$  — тепловой поток от  $i$ -ой камеры к окружающей среде с температурой  $T_0$ ;

$\tilde{q}_i$  — тепло, подаваемое (отбираемое) в  $i$ -ю камеру. Положительным считается направление потока тепла к камере.

**Постановка задачи:**

Пусть температуры в  $m$  камерах  $T_1, \dots, T_m$  фиксированы ( $m < n$ ), как и температура окружающей среды  $T_0$ . Требуется так выбрать потоки тепла  $\tilde{q}_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), чтобы для варианта «А» общее количество подводимого тепла, а для варианта «В» — общая мощность, затрачиваемая на привод тепловых и холодильных машин, были минимальны.

### Минимизация затрат тепла на отопление

Запишем формальную постановку задачи для случая минимизации затрат тепла.

Критерий оптимальности

$$I_A = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \rightarrow \min \quad (4.194)$$

при условиях теплового баланса для каждой камеры

$$\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) + \tilde{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.195)$$

ограничениях на тепловые потоки

$$\tilde{q}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.196)$$

и условиях, наложенных на температуры термостатируемых камер

$$T_i = T_i^0 > T_0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.197)$$

Задачу (4.194)–(4.197) можно упростить, исключив условия (4.195) и записав с их использованием критерий (4.194) как

$$I_a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) \rightarrow \max \quad (4.198)$$

при условиях

$$\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.199)$$

Переменными в этой задаче являются температуры промежуточных камер  $T_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ).

Запишем функцию Лагранжа задачи (4.198) и (4.199)

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j)(1 + \lambda_i). \quad (4.200)$$

По условиям теоремы Куна-Таккера получим условия оптимальности. Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} \delta T_i = (1 + \lambda_i) \sum_{j=0}^n \frac{\partial q_{ij}(T_i, T_j)}{\partial T_i} \delta T_i \leq 0, \quad (4.201)$$

$$\lambda_i \leq 0, \quad \sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) \lambda_i = 0, \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (4.202)$$

Здесь  $\delta T_i$  — допустимая вариация температуры  $T_i$ .

Условия дополняющей нежесткости (4.202) соответствуют тому, что  $\lambda_i = 0$  для тех помещений, у которых  $\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) < 0$ , и  $\lambda_j < 0$ , если  $\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) = 0$ . Так как  $\sum_{j=1}^n q_{ij} < 0$  для помещений, в которые тепло подается ( $\tilde{q}_i > 0$ ),  $\frac{\partial q_{ij}}{\partial T_i} < 0$  для всех  $j$ , то из условий (4.201), (4.202) следует, что тепло должно подводиться лишь к тем помещениям, температуры в которых заданы. При этом оптимальные потоки тепла  $\tilde{q}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) однозначно определяются уравнениями тепловых балансов (4.195), которые примут вид

$$\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) + \tilde{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.203)$$

$$\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) = 0, \quad i = m + 1, \dots, n, \quad (4.204)$$

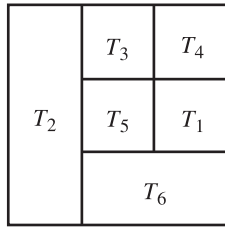
$$T_i = T_i^0, \quad i = 0, \dots, m. \quad (4.205)$$

Условия (4.203), (4.205) позволяют найти потоки  $\tilde{q}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $(n - m)$  температур промежуточных камер.

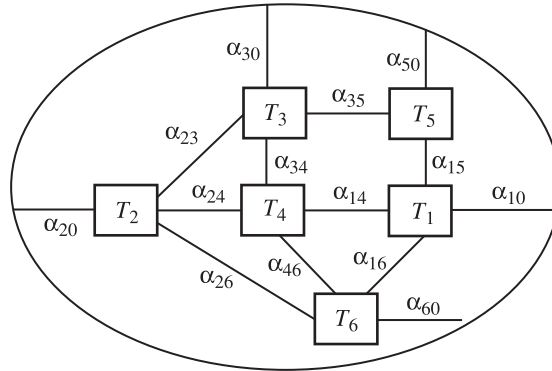
Для ньютоновских законов теплопереноса  $\alpha_{ij}$  постоянны и задача (4.197)–(4.199) становится задачей линейного программирования, а условия (4.203), (4.204) превращаются в систему линейных уравнений, размерность которой равна  $(n - m)$ . Решение  $(n - m)$  уравнений (4.204) определяет величины вектора потоков  $\tilde{q}$ . Если один из потоков  $\tilde{q}_i$  окажется отрицательным, то для данных коэффициентов теплообмена решение задачи отопления отсутствует и следует использовать кондиционеры.

#### Пример.

Рассмотрим здание, план которого и соответствующая ему расчетная схема приведены на рис. 4.25. Температуры окружающей среды  $T_0$ , а также температуры в первом  $T_1$  и втором  $T_2$  помещениях заданы и равны  $-20^\circ\text{C}$ ,  $18^\circ\text{C}$  и  $20^\circ\text{C}$  соответственно. Коэффициенты теплопередачи между помещениями и окружающей средой приведены в таблице. Требуется найти количество подводимого тепла  $\tilde{q}_1$ ,  $\tilde{q}_2$  и температуры  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $T_5$ ,  $T_6$  в остальных помещениях.



$$\begin{aligned}
 T_0 &= -20 \text{ }^\circ\text{C} \\
 T_1 &= 18 \text{ }^\circ\text{C} \\
 T_2 &= 20 \text{ }^\circ\text{C} \\
 T_3, T_4, T_5, T_6 &- ? \\
 \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 &- ?
 \end{aligned}$$



Р и с. 4.25. План и расчетная схема здания (1 этап)

Пользуясь (4.203)–(4.205) составим систему линейных уравнений тепловых балансов

$$\begin{cases}
 q_{10}(T_1, T_0) + q_{14}(T_1, T_4) + q_{15}(T_1, T_5) + q_{16}(T_1, T_6) + \tilde{q}_1 = 0, \\
 q_{20}(T_2, T_0) + q_{23}(T_2, T_3) + q_{24}(T_2, T_4) + q_{26}(T_2, T_6) + \tilde{q}_2 = 0, \\
 q_{30}(T_3, T_0) + q_{32}(T_3, T_2) + q_{34}(T_3, T_4) + q_{35}(T_3, T_5) = 0, \\
 q_{41}(T_4, T_1) + q_{42}(T_4, T_2) + q_{43}(T_4, T_3) + q_{46}(T_4, T_6) = 0, \\
 q_{50}(T_5, T_0) + q_{51}(T_5, T_1) + q_{53}(T_5, T_3) = 0, \\
 q_{60}(T_6, T_0) + q_{61}(T_6, T_1) + q_{62}(T_6, T_2) + q_{64}(T_6, T_4) = 0.
 \end{cases}$$

Т а б л и ц а 4.2.

Значения коэффициентов теплопередачи  $\alpha_{ij}$ , Вт/  $^\circ\text{C}$ .

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$j$							
0	–	16,8	84	16,8	0	33,6	50,4
1	16,8	–	0	0	33,6	33,6	33,6
2	84	0	–	33,6	33,6	0	33,6
3	16,8	0	33,6	–	33,6	33,6	0
4	0	33,6	33,6	33,6	–	0	33,6
5	33,6	33,6	0	33,6	0	–	0
6	50,4	33,6	33,6	0	33,6	0	–

Подставляя в систему заданные значения температур  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и

коэффициенты из таблицы 1 перепишем ее в виде

$$\begin{cases} 33,6 T_4 + 33,6 T_5 + 33,6 T_6 + \tilde{q}_1 = 2453, \\ 33,6 T_3 + 33,6 T_4 + 33,6 T_6 + \tilde{q}_2 = 5376, \\ -117,6 T_3 + 33,6 T_4 + 33,6 T_5 = -336, \\ 33,6 T_3 - 134,4 T_4 + 33,6 T_6 = -1277, \\ 33,6 T_3 - 100,8 T_5 = 67,2, \\ 33,6 T_4 - 151,2 T_6 = -268,8, \end{cases}$$

Решая эту задачу линейного программирования получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= 1832 \text{ Вт}; & \tilde{q}_2 &= 4579 \text{ Вт}; \\ T_3 &= 6,8 \text{ }^\circ\text{C}; & T_4 &= 12,3 \text{ }^\circ\text{C}; & T_5 &= 1,6 \text{ }^\circ\text{C}; & T_6 &= 4,5 \text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

**Минимизация затрат энергии при использовании тепловых насосов (задача кондиционирования).** Системы кондиционирования все шире используются для поддержания заданной температуры в помещениях, а для стран с жарким климатом это один из основных потребителей энергии.

Задача о минимуме суммарных затрат энергии при кондиционировании имеет вид

$$I = \sum_{i=1}^n P_i \rightarrow \min, \quad (4.206)$$

при условиях (4.195), (4.197).

Обозначим коэффициенты полезного действия тепловых насосов ( $r_i = \tilde{q}_i/P_i$ ), которые зависят от конструкции насоса (коэффициентов теплопередачи в нагревателе и холодильнике  $K_0$  и  $K_i$ ), формы цикла, температур на холодной и горячей стороне цикла  $T_0$  и  $T_i$  и от подводимой мощности  $P_i$ . Обратимая оценка КПД теплового насоса не зависит от  $P_i$

$$r_i^0 = \frac{T_i}{T_i - T_0}. \quad (4.207)$$

Здесь и далее температуры измеряются в градусах Кельвина.

Оценка для КПД теплового насоса и холодильного цикла с учетом необратимости процесса теплопереноса получена в [46]. Для ньютоновского закона теплообмена с коэффициентами  $K_0$  при отборе тепла от окружающей среды и  $K_i$  при передаче тепла в  $i$ -е помещение эта оценка имеет форму

$$\begin{aligned} r_i(T_0, T_i, P_i) = 1 + \frac{1}{2P_i} \left[ \sqrt{P_i^2 + \frac{\bar{K}_i(T_i + T_0)}{2} P_i + \frac{\bar{K}_i^2(T_i - T_0)^2}{16}} \right. \\ \left. - P_i - \frac{\bar{K}_i(T_i - T_0)}{4} \right], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.208)$$

Здесь  $\bar{K}_i = \frac{4K_i K_0}{(\sqrt{K_i} + \sqrt{K_0})^2}$  — эквивалентный коэффициент теплопередачи.

Условия (4.195) перепишем в форме

$$\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) + P_i r_i(T_0, T_i, P_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.209)$$

Искомые переменными в задаче (4.206), (4.209), (4.197) являются подводимые мощности  $P_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и температуры промежуточных камер  $T_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ). Если в уравнениях (4.209)  $\sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) < 0$ , то кондиционер для  $i$ -го помещения работает как

тепловой насос и  $r_i$  имеет форму (4.208). Если же  $\sum_{j=0}^n q_{ij} > 0$ , то кондиционер работает как охладитель, причем температура  $T_i < T_0$ . В этом случае КПД обратимого холодильного цикла

$$\tilde{r}_i^0 = \frac{T_i}{T_0 - T_i} = r_i^0 - 1.$$

Для необратимого цикла в условиях (4.209) и в вытекающих из них соотношениях вместо  $r_i(T_0, T_i, P_i)$  фигурирует

$$\tilde{r}_i = r_i(T_i, T_0, P_i) - 1. \quad (4.210)$$

Отметим, что в выражении (4.210) температуры  $T_0$  и  $T_i$  в  $r_i$  поменялись местами. Равенство (4.210) вытекает из известной связи между КПД холодильного цикла и теплового насоса.

Условия оптимальности задачи (4.206), (4.209), (4.197), сформулированные через ее функцию Лагранжа,

$$L = \sum_{i=1}^n \left\{ P_i [1 + \lambda_i r_i(T_0, T_i, P_i)] + \lambda_i \sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j) \right\}$$

приводят к соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = 0 \Rightarrow r_i(T_0, T_i, P_i) + P_i \frac{\partial r_i}{\partial P_i} = -\frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.211)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_\nu} = 0 \Rightarrow P_\nu \lambda_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial T_\nu} + \lambda_\nu \sum_{j=0}^n \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^n \lambda_i \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} = 0, \quad (4.212)$$

$$\nu = m + 1, \dots, n,$$

которые вместе с условиями (4.209), выражениями (4.208) и (4.210) определяют искомые переменные.

При использовании обратимой оценки КПД задача упрощается и система (4.209), (4.211), (4.212) приводит к уравнениям

$$P_i = -\frac{T_i - T_0}{T_i} \sum_{j=0}^n q_{ij}(T_i, T_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.213)$$

$$\lambda_i = -\frac{T_i - T_0}{T_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.214)$$

$$\lambda_\nu \sum_{j=0}^n \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^n \lambda_i \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} - P_\nu \lambda_\nu \frac{T_0}{(T_\nu - T_0)^2} = 0, \quad \nu = m+1, \dots, n. \quad (4.215)$$

Откуда для температур промежуточных камер имеем

$$\frac{T_\nu - T_0}{T_\nu} \sum_{j=0}^n \frac{\partial q_{\nu j}}{\partial T_\nu} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^n \frac{T_i - T_0}{T_i} \frac{\partial q_{i\nu}}{\partial T_\nu} + \frac{T_0}{T_\nu^2} \sum_{j=0}^n q_{\nu j}(T_\nu, T_i) = 0, \quad (4.216)$$

$$\nu = m+1, \dots, n.$$

Эта система позволяет найти все температуры, так как для  $i \leq m$  их значения заданы (см. (4.205)). После этого из условий (4.213) могут быть найдены оптимальные значения мощностей  $P_i$  для всех  $i$  от 1 до  $n$ .

#### Пример.

Рассмотрим здание, план которого и соответствующая ему расчетная схема приведены на рис. 4.26. Температуры  $T_0$  и  $T_1$ , равны соответственно 253 К и 293 К; коэффициенты теплопередачи  $K_0 = K_1 = K_2 = 3000$  Вт/К; коэффициенты теплопередачи  $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 94,08$  Вт/К и  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 180$  Вт/К. Требуется найти температуру  $T_2$  во втором помещении и мощности, затрачиваемые на привод тепловых машин. Задача о минимуме затрат энергии на привод тепловых насосов будет иметь вид

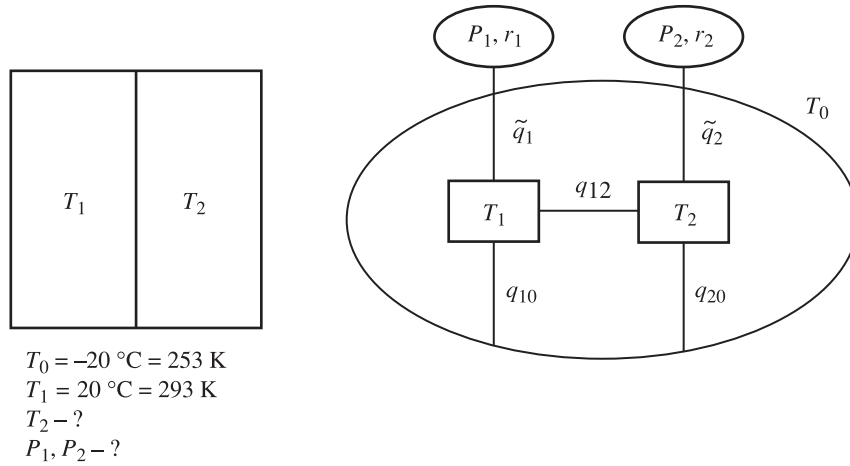
$$I = P_1 + P_2 \rightarrow \min,$$

при условиях теплового баланса

$$\begin{cases} q_{10}(T_1, T_0) + q_{12}(T_1, T_2) + P_1 r_1(T_0, T_1, P_1) = 0, \\ q_{20}(T_2, T_0) + q_{21}(T_2, T_1) + P_2 r_2(T_0, T_2, P_2) = 0. \end{cases}$$

Подставим в полученную систему заданные величины и выразим мощности  $P_1$  и  $P_2$  через температуру  $T_2$

$$\begin{cases} P_1(T_2) = 1,6 \frac{848560349 - 4468950 \cdot T_2 + 5625 \cdot T_2^2}{76737 - 50 \cdot T_2}, \\ P_2(T_2) = 0,48 \frac{2436457 \cdot T_2^2 - 1313982242 \cdot T_2 + 176932331113}{4267 \cdot T_2 - 318926}. \end{cases}$$



Р и с. 4.26. План и расчетная схема здания (2 этап)

Таким образом, критерий оптимальности  $I$  зависит только от температуры  $T_2$  и достигает минимума в точке  $T_2 = 282\text{ K}$ .

Подставляя найденную температуру  $T_2$  в выражения для мощностей находим затраты энергии на привод тепловых насосов  $P_1 = 910,36\text{ Вт}$  и  $P_2 = 79,32\text{ Вт}$ .

Таким образом для любого закона теплопереноса при обогреве здания за счет прямой подачи тепла (электрообогрев, подача горячей воды или воздуха, газовый обогрев) его целесообразно подавать только в помещения с фиксированной температурой. Температуры в промежуточных помещениях определяются условиями теплообмена. При кондиционировании здания целесообразно часть энергии тратить на промежуточные помещения, поддерживая в них некоторые оптимальные температуры.

**Связь задачи термостатирования с задачей о предельной мощности тепловой машины в открытой системе.** Вернемся к системе общего вида, рассмотренной выше в связи с задачей о максимальной мощности, структура которой изображена на рис. 4.22. Будем предполагать фиксированными кроме температур резервуаров  $T_i (i = m + 1, \dots, n)$  также температуры некоторых подсистем  $T_i (i = k + 1, \dots, m)$ . Температуры же остальных (пассивных) подсистем  $T_i (i = 1, \dots, k)$  свободны. Все обозначения сохраним теми же, что в задаче (4.166)-(4.168). Очевидно, что максимум  $N$  в (4.166) соответствует минимальной затрачиваемой мощности, условие энтропийного баланса рабочего тела (4.167) справедливо, как и условие (4.168) энер-

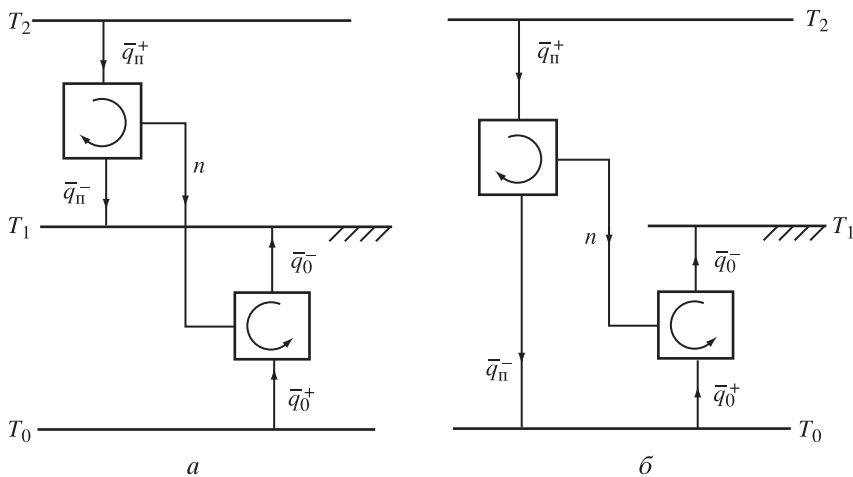


гетического баланса. Разница заключается лишь в том, что максимум в (4.166) ищется не по температурам всех подсистем, а по меньшему их числу  $k$  (температурам «пассивных» подсистем). Соответственно в условиях (4.170), (4.174) значение  $i$  будет меняться от единицы до  $k$ , а не от единицы до  $m$ .

Решение системы (4.171), (4.174) определяет минимально возможные затраты мощности для поддержания фиксированных температур в части подсистем открытой термодинамической системы заданной конфигурации. В частном случае из нее следуют приведенные выше результаты для активной изоляции и термостатирования зданий.

#### 4.8. Теплотрансформаторы

Рассмотрим систему с тремя резервуарами, имеющими температуры  $T_0, T_1, T_2$ , связанные неравенствами  $T_0 < T_1 < T_2$ . Между этими резервуарами установлены прямой и обратный преобразователи. Один из них преобразует тепло высокого потенциала  $T_2$  в работу с мощностью  $p$ , а второй, используя эту работу, отбирает тепло у источника с низкой температурой  $T_0$ . Таким образом вся схема представляет собой преобразователь тепло  $\rightarrow$  холод (рис. 4.27).



Р и с. 4.27. Схема теплоиспользующей холодильной машины (теплотрансформатора)

Такие схемы названы в [29] теплотрансформаторами. Если средняя из температур источников  $T_1$  совпадает с температурой окружающей среды, то между источниками с температурами  $T_2$  и  $T_1$  реали-

зается прямой цикл, а между источниками с температурами  $T_0$  и  $T_1$  - обратный (рис. 4.27). Коэффициентом трансформации тепла в этом случае является величина отношения потока  $\bar{q}_0^+$  тепла, отобранного у холодильника, к потоку тепла  $\bar{q}_\Pi^+$  отбираемому у горячего источника в прямом цикле. Эту величину

$$K_{TX} = \bar{q}_0^+ / \bar{q}_\Pi^+ \quad (4.217)$$

называют коэффициентом трансформации тепла теплоиспользующей холодильной машины, коротко — коэффициентом тепло-холод.

В том случае, когда интенсивность тепловых потоков, как и мощность  $p$  прямого цикла сколь угодно малы, или коэффициенты теплопередачи в прямом и обратном цикле бесконечно велики, передача тепла от источников к рабочему телу в каждом цикле протекает обратимо и коэффициент трансформации принимает значение, равное произведению термического КПД Карно  $\eta^*$  прямого цикла на холодильный коэффициент  $\epsilon^*$  обратного

$$K_{TX}^* = \eta^* \epsilon^* = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \cdot \frac{T_0}{T_1 - T_0} = \frac{T_2/T_1 - 1}{T_2/T_1} \cdot \frac{T_0/T_1}{1 - T_0/T_1} \quad (4.218)$$

Здесь и ниже звездочкой будем отмечать показатели, соответствующие обратимым процессам.

Выражение (4.218) характеризует относительную ценность тепла, отбираемого от источника с температурой  $T_2$ , и тепла, отбираемого от холодильника с температурой  $T_0$ , в зависимости от отношений этих температур к температуре окружающей среды.

Однако обратимое значение коэффициента  $K_{TX}^*$  может оказаться сильно завышенным, если задана интенсивность тепловых потоков или, что то же самое — мощность  $p$ , а коэффициенты теплопереноса в прямом и обратном циклах ограничены. Кроме того важно получить зависимость  $K_{TX}$  от кинетики теплопереноса.

Задача оценки коэффициентов трансформации тепла возникает и применительно к тепловым насосам. В этом случае температура окружающей среды равна  $T_0$ . Прямой цикл организуется между источниками с температурами  $T_2$  и  $T_1$ . А обратный цикл — между источниками с температурами  $T_0$  и  $T_1$ . При этом коэффициент трансформации тепла в тепло равен

$$K_{TT} = \frac{\bar{q}_\Pi^- + \bar{q}_0^-}{\bar{q}_\Pi^+} = \frac{\bar{q}_\Pi^-}{\bar{q}_\Pi^+} + \frac{\bar{q}_0^-}{\bar{q}_\Pi^+}$$

Используя, как и выше, звездочку для обозначения обратимых оценок, запишем выражения для  $K_{TT}^*$

$$K_{TT}^* = \eta^* \varphi^* = \left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right) \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right), \quad (4.219)$$

где  $\varphi^*$  — термический коэффициент теплового насоса. Действительно, в обратимом случае

$$\left(\frac{\bar{q}_{\Pi}^-}{\bar{q}_{\Pi}^+}\right)^* = \frac{T_1}{T_2},$$

а

$$\left(\frac{\bar{q}_0^-}{\bar{q}_{\Pi}^+}\right)^* = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) / \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right).$$

Их сумма равна правой части равенства (4.219).

Между коэффициентами  $K_{TX}$  и  $K_{TT}$  существует связь

$$K_{TT} = 1 + K_{TX},$$

поэтому оптимальному выбору структуры и параметров схем с холодильными машинами соответствуют оптимальные характеристики и схем с тепловыми насосами. В последних температура  $T_0$  может быть выше, чем  $T_1$  и даже выше, чем  $T_2$ , а тепловой поток направлен от  $T_1$  к  $T_0$ .

Учесть такие факторы необратимости как законы теплопереноса, заданная интенсивность процессов и получить более реалистические, чем (4.218) и (4.219) оценки коэффициентов трансформации тепла позволяют приведенные выше результаты. Они же позволяют найти предельную производительность теплотрансформатора с учетом заданных коэффициентов теплопередачи.

### Постановки задач и характеристики оптимальных необратимых циклов

Приведем точные постановки упомянутых задач. Будем предполагать, что теплообмен между источниками и рабочими телами как в прямом, так и в обратном циклах совершается необратимо в соответствии с линейными законами теплопереноса

$$\left. \begin{aligned} q_{\Pi}^+(T_2, T_{p\Pi}^+) &= \alpha_{\Pi}^+(T_2 - T_{p\Pi}^+) \\ q_{\Pi}^-(T_1, T_{p\Pi}^-) &= \alpha_{\Pi}^-(T_{p\Pi}^- - T_1) \\ q_0^-(T_1, T_{p0}^-) &= \alpha_0^-(T_{p0}^- - T_1) \\ q_0^+(T_0, T_{p0}^+) &= \alpha_0^+(T_0 - T_{p0}^+) \end{aligned} \right\} \quad (4.220)$$

В формулах (4.220) фигурируют потоки тепла  $q_{\Pi}^+$ ,  $q_{\Pi}^-$ ,  $q_0^+$ ,  $q_0^-$  в момент контакта рабочего тела с источниками. Они отличаются от средних потоков тепла  $\bar{q}_{\Pi}^+$ ,  $\bar{q}_{\Pi}^-$ ,  $\bar{q}_0^+$  и  $\bar{q}_0^-$  учетом доли времени контакта  $\gamma$  с соответствующим источником. Так,

$$\bar{q}_{\Pi}^+ = q_{\Pi}^+ \gamma_{\Pi}^+; \quad \bar{q}_0^- = q_0^- \gamma_0^-$$

и т.д.

Индекс «+» соответствует подводу тепла к рабочему телу, а индекс «-» отводу тепла;  $T_{p\Pi}$  и  $T_{p0}$  — температуры рабочих тел в прямом и обратном циклах соответственно при контакте с тем или иным источником. Величины коэффициентов теплопередачи в законах теплопереноса (4.220) определяются свойствами и величиной поверхностей контакта, а также свойствами рабочих тел. Косвенно эти коэффициенты отражают размеры машины.

Выше показано, что в оптимальных необратимых циклах т.е. в циклах, соответствующих предельным значениям термического КПД при заданной величине мощности  $p$ , температуры рабочего тела должны быть постоянны в течение всего времени контакта с источником.

Так как температуры источников  $T_2, T_1$  и  $T_0$  считаем заданными, как и коэффициенты теплопередачи  $\alpha$ , то оптимальные температуры рабочего тела определяются условиями (4.220) через тепловые потоки  $q$ , которые для оптимальных необратимых циклов равны (см. п. 4.2):

а) В прямом цикле

$$\left. \begin{aligned} q_{\Pi}^+ &= \frac{\alpha_{\Pi} (T_2 - T_1)}{4} \left[ 1 + K_{\Pi} \delta_{\Pi} - \sqrt{(1 - K_{\Pi})(1 - K_{\Pi} \delta_{\Pi}^2)} \right] \\ q_{\Pi}^- &= \frac{\alpha_{\Pi} (T_2 - T_1)}{4} \left[ 1 - K_{\Pi} \delta_{\Pi} - \sqrt{(1 - K_{\Pi})(1 - K_{\Pi} \delta_{\Pi}^2)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.221)$$

Здесь  $\alpha_{\Pi}$  — эквивалентный коэффициент теплопередачи прямого цикла

$$\alpha_{\Pi} = \frac{\alpha_{\Pi}^* \alpha_{\Pi}^-}{(\sqrt{\alpha_{\Pi}^*} + \sqrt{\alpha_{\Pi}^-})^2},$$

$K_{\Pi}$  — коэффициент, характеризующий интенсивность процессов

$$K_{\Pi} = \frac{4p}{\alpha_{\Pi} (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2}$$

$$\delta_{\Pi} = \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}}$$

Предельное значение термического КПД необратимого цикла

$$\eta = \frac{p}{\dot{q}_{\Pi}^+} = 1 - \frac{q_{\Pi}^-}{q_{\Pi}^+} \sqrt{\frac{\alpha_{\Pi}^+}{\alpha_{\Pi}^-}}, \quad (4.222)$$

где  $q_{\Pi}^+$  и  $q_{\Pi}^-$  имеют вид (4.221).

Оптимальные доли времени контакта с горячим и холодным источниками

$$\gamma_{\Pi}^+ = \frac{\sqrt{\alpha_{\Pi}^-}}{\sqrt{\alpha_{\Pi}^+} + \sqrt{\alpha_{\Pi}^-}}; \quad \gamma_{\Pi}^- = \frac{\sqrt{\alpha_{\Pi}^+}}{\sqrt{\alpha_{\Pi}^+} + \sqrt{\alpha_{\Pi}^-}}. \quad (4.223)$$

б) В обратном цикле

$$\left. \begin{aligned} q_0^+ &= \frac{\alpha_0(T_1 - T_0)}{4} \left[ \sqrt{(1 - K_0)(1 + K_0\delta_0^2)} - 1 - K_0\delta_0 \right] \\ q_0^- &= \frac{\alpha_0(T_1 - T_0)}{4} \left[ \sqrt{(1 - K_0)(1 + K_0\delta_0^2)} - 1 + K_0\delta_0 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.224)$$

Здесь эквивалентный коэффициент теплопередачи обратного цикла

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_0^+ \alpha_0^-}{\left( \sqrt{\alpha_0^+} + \sqrt{\alpha_0^-} \right)^2};$$

$$K_0 = \frac{4p}{\alpha_0 (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_0})^2};$$

$$\delta_0 = \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_0}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_0}}.$$

Предельное значение холодильного коэффициента в необратимом цикле, потребляющем мощность  $p$ ,

$$\epsilon = \frac{\bar{q}_0^+}{p} = \frac{q_0^+ \sqrt{\alpha_0^-}}{q_0^- \sqrt{\alpha_0^+} - q_0^+ \sqrt{\alpha_0^-}}. \quad (4.225)$$

Доли времени контакта определяются формулами (4.223), в которых коэффициенты теплопередачи  $\alpha_{\text{II}}^-$  и  $\alpha_{\text{II}}^+$  заменены на  $\alpha_0^-$  и  $\alpha_0^+$  соответственно.

Параметры оптимального необратимого цикла для теплового насоса те же, что и для холодильной машины, а соответствующий предельный термический коэффициент теплового насоса

$$\varphi = \frac{\bar{q}_0^-}{p} = 1 + \epsilon = \frac{q_0^- \sqrt{\alpha_0^+}}{q_0^- \sqrt{\alpha_0^+} - q_0^+ \sqrt{\alpha_0^-}}.$$

Отметим, что величина  $p$  в прямом цикле не может превышать (см. п. 4.2) некоторого предельного значения

$$p_{\text{max}} = \frac{\alpha_{\text{II}}}{4} \left( \sqrt{T_2} - \sqrt{T_1} \right)^2. \quad (4.226)$$

Причем, при  $p = p_{\text{max}}$  коэффициент  $K_{\text{II}}$  в формулах (4.221) оказывается равным единице. Ограничением на мощность прямого цикла определяет и ограничение на производительность теплоиспользующих обратных циклов.

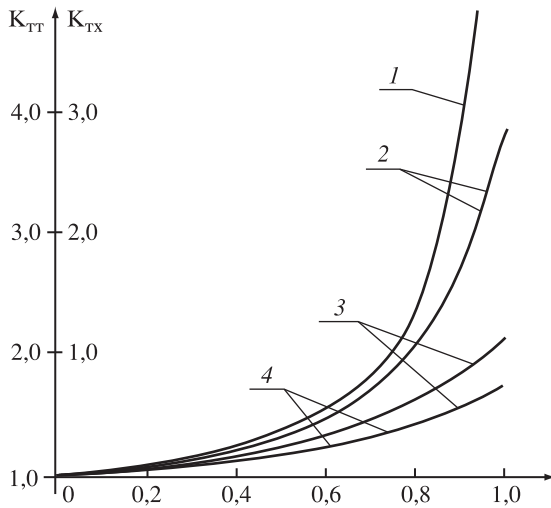
Приведенные выше соотношения позволяют рассчитать предельные возможности установок и соответствующие предельные значения коэффициентов трансформации тепла.

### Предельные коэффициенты трансформации тепла в необратимых термодинамических процессах

Коэффициент трансформации тепло-холод, как следует из (4.218), (4.222), (4.224) равен

$$K_{TX} = \eta\epsilon = \frac{q_{II}^+ \sqrt{\alpha_{II}^-} - q_{II}^- \sqrt{\alpha_{II}^+}}{q_{II}^+ \sqrt{\alpha_{II}^-}} \cdot \frac{q_0^+ \sqrt{\alpha_0^-}}{q_0^- \sqrt{\alpha_0^+} - q_0^+ \sqrt{\alpha_0^-}}. \quad (4.227)$$

Это выражение после подстановки в него тепловых потоков прямого и обратного цикла определяет предельные возможности превращения тепловой энергии источника с температурой  $T_1$  в энергию, отбираемую у холодильника с температурой  $T_0$ . При этом заданием мощности  $p$  учитывается и хладопроизводительность установки, как и влияние коэффициентов теплопередачи. На рис. 4.28 сплошными линиями показаны результаты расчетов коэффициента  $K_{TX}$  по формуле (4.227). При этом оказалось удобным перейти к безразмерным переменным  $T_2/T_1$ ,  $T_0/T_1$  и  $\alpha_{II}/\alpha_0$ . Величины коэффициентов  $\alpha_{II}^+$  и  $\alpha_{II}^-$  были приняты при расчетах одинаковыми, как и  $\alpha_0^+ = \alpha_0^-$ .



Р и с. 4.28. Коэффициенты трансформации тепла в тепло  $K_{TT}$  и тепла в холод  $K_{TX}$  в зависимости от отношения температур  $T_0$  и  $T_1$  для  $\alpha_{II}/\alpha_0 = 1$ ,  $T_2/T_1 = 1,5$  ( $1 \sim k_{II} = 0$ ,  $2 \sim k_{II} = 0,2$ ,  $3 \sim k_{II} = 0,6$ ,  $4 \sim k_G = 1,0$ )

### Предельная производительность теплотрансформатора

Производительность теплоиспользующих холодильных машин равна тепловому потоку, отбираемому от холодильника, имеющего температуру  $T_0$ . В тепловых насосах под производительностью будем понимать тепловой поток, подводимый к источнику с температурой  $T_1$ .

$$\bar{q}_0^+ = n^a \eta^a; \quad \bar{q}_0^- + \bar{q}_\Pi^- = n^a \left( \epsilon^a + \frac{1}{\eta^a} \right) \quad (4.228)$$

Предельная производительность определяется при заданных коэффициентах теплопередачи ограничением на величину мощности  $p$  прямого цикла. При подстановке в (4.228) вместо  $p$  ее предельного значения (см. выражение (4.226)), а также коэффициентов  $\hat{\eta}^a$  и  $\hat{\epsilon}^a$ , получим предельные значения производительности. При этом коэффициент  $K_\Pi$  при расчете  $\eta$  по формуле (4.222) равен единице, а значения термического КПД

$$\hat{\eta} = \eta(p_{\max}) = 1 - \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}$$

Коэффициент  $K_0$ , используемый при расчете  $\hat{\epsilon}$ , равен

$$K_0 = \frac{\alpha_\Pi}{\alpha_0} \left[ \frac{\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_0}} \right]^2$$

## Глава 5

### Оценки предельных возможностей систем разделения

Процессы разделения являются энергоемкими и очень разнообразными по своему конструктивному исполнению: мембранные, абсорбционно- и адсорбционно-десорбционные процессы, ректификация, центрифугирование, выпарка, вымораживание и пр. Оценка минимальной энергии, потребной для разделения смеси того или иного состава, представляет большой интерес. Такую оценку работы разделения дают методы обратимой термодинамики, однако обратимые оценки очень грубы, поэтому важно приблизить оценки к реальности за счет учета конечной продолжительности процессов или задания их интенсивности, что позволит учесть значения коэффициентов тепло- и массопереноса и связанные с их увеличением затраты. Кроме того учет необратимости позволяет ставить и задачи о предельной производительности или о наилучшей последовательности разделения, которые в обратимой постановке не имеют смысла.

Методы термодинамики при конечном времени позволяют разбить потери от необратимости на две категории: неизбежные и избыточные. Первые можно уменьшить, только увеличив коэффициенты переноса или уменьшив производительность, вторые же связаны с несовершенной термодинамической организацией процесса. Именно их следует избегать при проектировании установки. Оценки затрат энергии на процессы разделения с учетом неизбежных необратимых потерь не только количественно отличаются от обратимых, но имеют и качественное отличие. Они, например, не стремятся к нулю, когда концентрация одного из компонентов в разделяемой смеси стремится к единице (бедные смеси).

Постановка задачи о минимуме затраченной работы  $A$  совпадает с задачей о максимальной работе, рассмотренной в параграфе 4.1. Здесь так же при заданном начальном состоянии системы, а значит и заданном начальном значении внутренней энергии  $E(0)$ , требуется достичь минимума  $E(\tau)$ . Разница в том, что  $E_{\min}(\tau)$  оказывается больше, чем  $E(0)$  и их разность  $A = E(0) - E(\tau)$  отрицательна. Минимуму работы разделения  $A_\tau = |A|$  соответствует минимум  $E(\tau)$ . Утверждение 4.1, определяющее эту структуру оптимального решения, остается справедливым.

В некоторых случаях, когда, например, система состоит из рабочего тела и подсистем конечной емкости и все значения интенсивных



переменных  $Z(\tau)$  в конце процесса заданы, как  $E(0)$  так и  $E(\tau)$  оказываются известными, а следовательно задана и величина работы разделения  $A_r$ . В этом случае может быть найдена минимальная продолжительность процесса  $\tau_{\min}$ , для которой заданное состояние  $Z(\tau)$  может быть достигнуто. Так как общий объем или число молей исходной смеси фиксировано, то решение, соответствующее  $\tau_{\min}$ , соответствует максимальной средней производительности.

Если в систему разделения поступает поток смеси, а из нее выходят потоки, различающиеся своими значениями температур, химических потенциалов и пр., то можно говорить не о работе, а о мощности, затрачиваемой на разделение. Ниже показано, что в механических системах разделения с ростом затрачиваемой мощности производительность системы монотонно возрастает, а в термических с ростом интенсивности затрат тепла производительность достигает некоторого предела, а затем уменьшается.

Мы предполагаем, что все составляющие вектора интенсивных переменных  $Z_p(t)$  рабочего тела с сосредоточенными параметрами можно изменить при поиске оптимального решения. Это предположение в действительности близко к истине для систем, рабочим телом в которых является газ, а изменяемая интенсивная переменная — скалярная. Температуру газа или его химический потенциал можно достаточно быстро менять, изменяя его объем. Для систем, у которых  $Z_p$  — вектор, составляющими которого являются температура, химические потенциалы и пр., считать их независимыми управлениями допустимо лишь в целях получения оценки предельных возможностей системы, так как, вообще говоря, может не найтись законов изменения ее объема или давления, реализующих найденное решение.

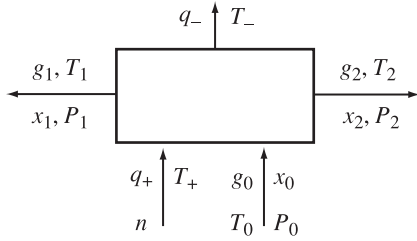
Это замечание не относится к рабочему телу с распределенными параметрами, вектор интенсивных переменных у которого может быть выбран различным при контакте с каждым из источников и в стационарном режиме его значение постоянно. Именно по такой схеме действуют большинство технологических процессов разделения.

### 5.1. Термодинамические балансы процессов разделения. Связь затрат энергии с производством энтропии

Рассмотрим систему разделения потока смеси с интенсивностью  $g_0$ , составом  $x_0$ , температурой  $T_0$  и давлением  $P_0$  на два потока с параметрами  $g_i, x_i, T_i, P_i$  ( $i = 1, 2$ ), показанную на рис. 5.1. К установке может подводиться поток тепла  $q_+$  при температуре  $T_+$ , отводиться поток тепла  $q_-$  при температуре  $T_-$ , а также затрачиваться механи-

ческая работа с интенсивностью  $p$ .

В установках центрифугирования, мембранного разделения, в циклах адсорбции-десорбции, работающих за счет изменения давления, затрачивается только работа (механическое разделение), в процессах абсорбционно-десорбционных, ректификации и др. — только тепло (термическое разделение). В некоторых случаях число отводимых потоков может быть больше (равно  $m$ ). Это не внесет никаких изменений в приведенные ниже выражения за исключением того, что индекс  $i$  будет изменяться не до двух, а до  $m$ . Мы ограничились двумя потоками только для простоты рисунка и промежуточных выкладок отдельных блоков, каждый из которых имеет структуру, представленную на рис. 5.1.



Р и с. 5.1. Расчетная структура процесса разделения

**Термическое разделение.** Запишем уравнения термодинамических балансов для системы термического разделения ( $p = 0$ ), считая, что каждый из векторов  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{ik})$ ,  $i = 0, 1, 2$ , состоит из  $k$  компонент, каждая из которых представляет собой мольную долю  $j$ -го вещества в  $i$ -м потоке. Термодинамические балансы примут вид:

— материальный баланс

$$g_0 x_{0j} - g_1 x_{1j} - g_2 x_{2j} = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^k x_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, 2; \quad (5.2)$$

— энергетический баланс

$$q_+ - q_- + g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0, \quad (5.3)$$

где  $h_i$  — мольная энтальпия  $i$ -го потока;

— энтропийный баланс

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0. \quad (5.4)$$

Из (5.1), (5.2) следует, что  $g_0 = g_1 + g_2$ . Исключив  $g_0$  из равенств (5.3), (5.4), можно перейти к приращениям энтальпии  $\Delta h$  и энтропии  $\Delta s$ :

$$q_+ - q_- + g_1 \Delta h_{01} + g_2 \Delta h_{02} = 0, \quad (5.5)$$

$$g_2 \Delta s_{02} + g_1 \Delta s_{01} + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0. \quad (5.6)$$

Здесь  $\Delta h_{0i} = h_0 - h_i$ ,  $\Delta s_{0i} = s_0 - s_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Исключим из уравнения (5.5)  $q_-$  и подставим полученное выражение в (5.6). Получим

$$\sum_{i=1}^2 g_i \left( \Delta s_{0i} - \frac{\Delta h_{0i}}{T_-} \right) + q_+ \left( \frac{1}{T_+} - \frac{1}{T_-} \right) + \sigma = 0,$$

откуда поток затрачиваемого тепла при термическом разделении

$$q_+ = \frac{T_+}{T_+ - T_-} \left[ \sum_{i=1}^2 g_i (\Delta s_{0i} T_- - \Delta h_{0i}) + \sigma T_- \right]. \quad (5.7)$$

Первое из слагаемых в квадратных скобках зависит только от параметров входных и выходных потоков и представляет собой обратимые затраты работы разделения в единицу времени (обратимую мощность разделения), а второе отражает кинетику процесса и связанную с ней диссипацию энергии.

Для смесей, близких к идеальным газам и идеальным растворам, молярные энтальпии и энтропии  $h_i$  и  $s_i$ , входящие в уравнения (5.3) и (5.4), могут быть записаны в форме

$$h_i(T_i, P_i, x_i) = \sum_{j=1}^k x_{ij} h_j(T_i, P_i), \quad (5.8)$$

$$s_i(T_i, P_i, x_i) = \sum_{j=1}^k x_{ij} \left[ s_j^0(T_i, P_i) - R \ln x_{ij} \right], \quad i = 0, 2,$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная. В этом случае обратимые затраты тепла равны

$$q_+^0 = \frac{1}{\eta_K} \sum_{i=1}^2 g_i \sum_{j=1}^k [x_{0j} s_j^0(T_0, P_0) - x_{ij} s_j^0(T_i, P_i) - R(x_{0j} \ln x_{0j} - x_{ij} \ln x_{ij})] T_- + x_{ij} h_j(T_i, P_i) - x_{0j} h_j(T_0, P_0). \quad (5.9)$$

Здесь использовано обозначение для КПД Карно обратимой тепловой машины

$$\eta_K = \frac{T_+ - T_-}{T_+}.$$

Условие (5.7) можно переписать как

$$q_+ = \frac{1}{\eta_K} (p^0 + \sigma T_-). \quad (5.10)$$

Здесь  $p^0$  — обратимая мощность разделения, равная  $q_+^0$ , а  $\sigma$  — производство энтропии.

Для тех или иных допущений (постоянство теплоемкостей, бинарная смесь и др.) выражения (5.9), (5.10) и уравнение (5.7) могут быть конкретизированы, как это сделано ниже для механического разделения и бинарной ректификации. Если в состав системы разделения включены все устройства, изменяющие температуры и давления потоков по отношению к температуре  $T$  и давлению  $P$  окружающей среды, за исключением источников тепла, то в приведенных выше соотношениях для любого  $i$  можно принять  $T_i = T, P_i = P$ . Тогда

$$p_0 = -RT \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k g_i x_{ij} \ln x_{ij},$$

$$q^+ = \frac{1}{\eta_K} [p_0(g, x) + T\sigma(g, x, \alpha)]. \quad (5.11)$$

В последнем равенстве обозначены через  $g, x, \alpha$  — вектора потоков, составов и коэффициентов тепло- и массопереноса соответственно.

**Механическое разделение.** Рассмотрим систему разделения, использующую работу с интенсивностью  $p$  без подвода и отвода тепла ( $q_+ = q_- = 0$ ), при этом входные и выходные потоки имеют одинаковые температуры  $T$  и давления. Умножим уравнение (5.6) на  $T$  и вычтем полученное выражение из уравнения энергетического баланса (5.5), в котором вместо разности  $q_+ - q_-$  фигурирует подводимая мощность  $p$ . Получим

$$p = T\sigma + g_0 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i (T\Delta s_{0i} - \Delta h_{0i}). \quad (5.12)$$

Здесь  $\varepsilon_i = g_i/g_0$  — доля  $i$ -го потока.

С учетом (5.9) и того факта, что при механическом разделении изменения энтальпии  $\Delta h_{0i}$  равны нулю, получим

$$p = g_0 RT \left[ \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \sum_{j=1}^k x_{ij} \ln x_{ij} - \sum_{j=1}^k x_{0j} \ln x_{0j} \right] + T\sigma = p^0 + T\sigma. \quad (5.13)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет обратимую мощность разделения ( $\sigma = 0$ ). Эта мощность  $p^0$  равна разности обратимой мощности при полном разделении исходного потока  $p_0^0 = -g_0 RT \sum_j x_{0j} \ln x_{0j}$  и сумме обратимых мощностей разделения выходных потоков  $p_i^0$ , равных

$$p_i^0(x_i) = -RT\varepsilon_i g_0 \sum_{j=1}^k x_{ij} \ln x_{ij}, \quad i = 1, 2. \quad (5.14)$$

Для каждого из веществ имеем

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i x_{ij} = x_{0j}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.15)$$

В составе производства энтропии можно выделить слагаемые, связанные с теплообменом и с массопереносом,  $\sigma_T$  и  $\sigma_M$ . Из сравнения (5.14) и (5.11) видно, что термическое разделение можно рассматривать как необратимую тепловую машину с коэффициентами теплообмена  $\alpha_T$ , вырабатывающую мощность

$$p_M = p_0(g, x) + \sigma_M(g, x, \alpha_M).$$

Поток тепла, потребляемый от горячего источника

$$q^+ = \frac{1}{\eta_K} [p_M + \sigma_T(g, x, \alpha_M)]. \quad (5.16)$$

## 5.2. Извлечение работы в массообменных системах

Для систем, близких по своим свойствам к идеальным газам, химический потенциал  $i$ -го компонента [42] равен

$$\mu_i(T, P) = \mu_{i0}(T) + RT \ln P_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $P_i$  — порционное давление  $i$ -го компонента. Обозначая через  $V$  объем подсистемы и предполагая, что в каждый момент времени объем и давление связаны друг с другом уравнением

$$PV = NRT,$$

где  $N$  — число молей в подсистеме, а

$$P_i = P x_i = P \frac{N_i}{N}, \quad i = 1, \dots, k,$$

выразим  $\mu_i$  через  $V$ :

$$\mu_i(T, V) = \mu_{i1}(T) + RT \ln \frac{N_i}{V}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.17)$$

Здесь  $\mu_{i1}(T) = \mu_{i0}(T) + RT \ln RT$  и для простоты принято, что процесс массопереноса изотермический, температуры всех подсистем равны  $T$  и теплообмен отсутствует. Химическими потенциалами можно управлять, меняя давление или объем подсистемы.

**Оценки для максимальной работы. Резервуарный процесс.** Пусть система состоит из резервуара с температурой  $T$ , давлением  $P^0$  и химическим потенциалом  $\mu^0$  и рабочего тела с той же температурой, объемом  $V > 0$  и химическим потенциалом  $\mu$ .

Задано начальное состояние рабочего тела  $E_0, S_0, N_0, V_0$ . Для простоты будем предполагать, что число веществ  $k = 1$ . Т.е. в некоторой части системы требуется изменить химический потенциал за ограниченное время. Перечисленные выше переменные связаны друг с другом уравнением состояния

$$E_0 = E(S_0, N_0, V_0).$$

В конечный момент времени задана  $S(\tau)$ . Суммарный объем источника и рабочего тела неизменен.

В задаче о максимальной работе (см. п. 4.1) требуется достичь минимума внутренней энергии системы в момент  $\tau$ :

$$A = \Delta E = [E(0) - E(\tau) + E_0(0) - E_0(\tau)] \rightarrow \max. \quad (5.18)$$

Здесь  $E_0$  и  $E$  — внутренние энергии источника и рабочего тела соответственно. Максимум ищется по  $V(\tau)$  и по  $\mu(t)$  на интервале  $(0, \tau)$ . Условие максимума по  $V(\tau)$  приводит к тому, что в момент  $\tau$  давление рабочего тела должно стать равным давлению резервуара. Из условия

$$[\Delta E_0 + E(S(\tau), N(\tau), V^*(\tau))] \rightarrow \min, \quad (5.19)$$

где

$$\Delta E_0 = \int_0^\tau (h_0 + \mu_0) g(\mu_0, \mu) dt,$$

и требования

$$\int_0^\tau \mu(t) g(\mu_0, \mu) dt = T \Delta S \quad (5.20)$$

получим для расчета базовых значений  $\mu$

$$L = \left\{ g(\mu_0, \mu) (\lambda_1 (h_0 + \mu_0) - \lambda \mu) + \lambda \frac{\Delta S T}{\tau} \right\} \rightarrow \min_{\mu} \max_{\lambda}. \quad (5.21)$$

Найдя из (5.21) одно или два базовых значения  $\mu^*$ , нужно найти  $N^*(\tau)$  и по условию

$$S(\mu(\tau), N^*(\tau), V^*(\tau)) = S(\tau) \quad (5.22)$$

определить  $\mu(\tau)$ .

Базовое значение единственно, если функция Лагранжа  $L$  выпукла вниз по  $\mu$ , т.е. если

$$\frac{d^2 g}{d\mu^2} > 2\lambda \frac{dg}{d\mu}.$$

Можно показать, что по смыслу задачи  $\lambda > 0$ , а  $dg/d\mu < 0$ , так что для большинства реальных зависимостей  $g(\mu)$  условие выпуклости  $L$  выполнено и  $\mu^*$  определяется равенством

$$\mu g(\mu_0, \mu) = \frac{(S(\tau) - S(0))T}{\tau},$$

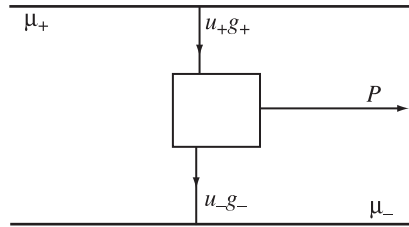
$$N^*(\tau) = N_0 + g(\mu_0, \mu^*)\tau,$$

$$\Delta E_0 = (h_0 + \mu_0)g(\mu_0, \mu^*)\tau.$$

После подстановки этих выражений в (5.18) получим искомое значение  $A^*$ .

*Диффузионно-механический цикл.* Рассмотрим прямой цикл извлечения работы в системе, состоящей из рабочего тела и двух резервуаров с разными химическими потенциалами, в одном из которых химический потенциал ключевого компонента равен  $\mu_+$ , а в другом  $\mu_-$  (для определенности  $\mu_+ > \mu_-$ ) (рис. 5.2).

Р и с. 5.2. Структура диффузионно-механического цикла с источниками бесконечной емкости



Процесс циклический, так что прирост энтропии, внутренней энергии и массы ключевого компонента рабочего тела за цикл равен нулю. Температуры всех подсистем одинаковы.

Изменение внутренней энергии системы равно изменению внутренней энергии резервуаров. Обозначим через  $\mu_0$  химический потенциал источника, который может принимать значения  $\mu_+$  и  $\mu_-$ , а через  $\mu$  — химический потенциал рабочего тела. Работа

$$A = E_0(0) - E_0(\tau) = \int_0^\tau h(\mu_0)g(\mu_0, \mu)dt \rightarrow \max_{\mu_0, \mu} \quad (5.23)$$

при ограничениях на прирост энтропии и количества вещества рабочего тела (условиях цикличности)

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_0^\tau g(\mu_0, \mu)(h(\mu_0) - \mu)dt = 0, \quad (5.24)$$

$$\Delta N = \int_0^\tau g(\mu_0, \mu)dt = 0. \quad (5.25)$$

Из (5.24) следует, что максимуму работы соответствует максимум критерия

$$A = \int_0^{\tau} \mu g(\mu_0, \mu) dt \rightarrow \max \quad (5.26)$$

при условии (5.25).

Для расчета базовых значений  $\mu$  и  $\mu_0$  в задаче (5.25), (5.26) запишем функцию Лагранжа и потребуем ее минимума по  $\mu_0$ ,  $\mu$  и максимума по  $\lambda$ :

$$L = \left\{ g(\mu_0, \mu)(\mu - \lambda) \rightarrow \max_{\mu_0, \mu} \right\} \rightarrow \min_{\lambda}.$$

Число базовых значений равно двум, одно из них соответствует  $\mu_0 = \mu_+$ , другое  $\mu_0 = \mu_-$ . Для строго выпуклой по  $\mu$  функции  $L$  базовые значения  $\mu$  удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \mu}(\mu - \lambda) + g(\mu_0, \mu) = 0$$

или

$$\frac{g(\mu_0, \mu)}{\mu - \lambda} = -\frac{\partial g}{\partial \mu}.$$

Корень этого уравнения для  $\mu_0 = \mu_-$  обозначим через  $\mu_1$ , а для  $\mu_0 = \mu_+$  через  $\mu_2$ . Так как в базовых точках  $L$  максимальна, то

$$L(\mu_+, \mu_1, \lambda) = L(\mu_-, \mu_2, \lambda), \quad (5.27)$$

что и определяет величину  $\lambda$ .

Конкретизируем полученные зависимости для

$$g(\mu_0, \mu) = \alpha(\mu_0)(\mu_0 - \mu). \quad (5.28)$$

Из условия (5.27) имеем

$$\mu_1 = \frac{\mu_+ + \lambda}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\mu_- + \lambda}{2}. \quad (5.29)$$

Подставляя  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в функцию  $L$ , найдем ее зависимость от  $\lambda$  для каждого из базовых решений

$$L_+ = L(\mu_+, \mu_1) = \frac{\alpha_+}{4}(\mu_+ - \lambda)^2,$$

$$L_- = L(\mu_-, \mu_2) = \frac{\alpha_-}{4}(\mu_- - \lambda)^2.$$

Минимум по  $\lambda$  из максимума  $L$  по  $\mu_0, \mu$  достигается (см. рис. 5.3), когда

$$L_+(\lambda) = L_-(\lambda) \Rightarrow \lambda^* = \frac{\sqrt{\alpha_+}\mu_+ + \sqrt{\alpha_-}\mu_-}{\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-}}. \quad (5.30)$$



Доли времени контакта с резервуарами определяются требованием (5.25) и равны

$$\gamma_+ = \frac{\alpha_- \sqrt{\alpha_+}}{\alpha_- \sqrt{\alpha_+} + \alpha_+ \sqrt{\alpha_-}},$$

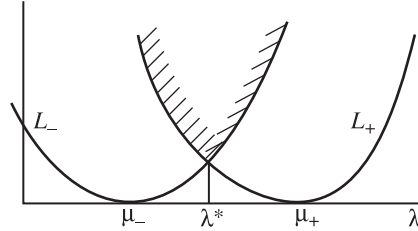
$$\gamma_- = \frac{\alpha_+ \sqrt{\alpha_-}}{\alpha_- \sqrt{\alpha_+} + \alpha_+ \sqrt{\alpha_-}}.$$

Максимальная работа за время  $\tau$

$$A^*(\tau) = \tau[\gamma_+ \mu_1 \alpha_+ (\mu_+ - \mu_1) + \gamma_- \mu_2 \alpha_- (\mu_1 - \mu_2)],$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  находят из (5.29) после подстановки в это выражение значения  $\lambda$  из (5.28).

Р и с. 5.3. Характер зависимости от  $\lambda$  максимума функции Лагранжа по  $\mu$  для  $\mu_0 = \mu_+$  и  $\mu_0 = \mu_-$



Получение работы за счет контакта рабочего тела с источниками, имеющими разные химические потенциалы реализуется в двигателях, «топливом» для которых является, например, поваренная соль, а вторым источником пресная или слабосоленая вода. Проекты таких «диффузионных двигателей», использующих полупроводящую мембрану, предлагались, в частности, для подводных лодок.

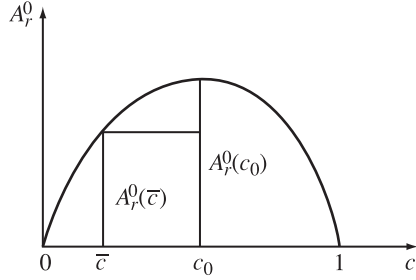
### 5.3. Необратимая работа разделения

**Система, состоящая из резервуара и подсистем конечной емкости.** Будем рассматривать систему, состоящую из резервуара с температурой  $T_0$ , химическим потенциалом  $\mu_0$ , концентрацией  $x_0$ , подсистемы конечной емкости с температурой  $T$ , химическими потенциалами  $\mu(t)$  и рабочего тела с распределенными параметрами. Начальное значение  $\mu(0) = \mu_0$ . Конечные значения химического потенциала  $\mu(\tau)$  и числа молей  $N(\tau)$  заданы. Требуется оценить минимальную работу, требующуюся для перевода системы из однородного начального состояния в заданное конечное в изотермическом процессе разделения. В том случае, когда смесь бинарная, ее состав определяется химическим потенциалом (концентрацией  $x$ ) одного ключевого компонента  $\mu_1 = \mu(x)$ , химический потенциал второго  $\mu_2 = \mu_2(1 - x)$ .

Первоначально будем считать продолжительность процесса неограниченной. В этом случае минимальной затраченной работе  $A_r$  соответствует обратимый процесс. Величину обратимой работы разделения смеси на исходные компоненты  $A_r^0$  можно подсчитать через приращение внутренней энергии системы. Для химических потенциалов, имеющих форму (5.17), получим

$$A_r^0(x_0, x) = -NRT [x_0 \ln x_0 + (1 - x_0) \ln(1 - x_0)]. \quad (5.31)$$

Зависимость работы разделения от концентрации исходной смеси показана на рис. 5.4.



Р и с. 5.4. Зависимость обратимой работы разделения от концентрации исходной смеси

Для случая, когда смесь не бинарная, а многокомпонентная, совершенно аналогично получим, обозначив через  $x_0$  и  $\bar{x}$  концентрации входного и выходного потоков

$$A_r^0 = -NRT \sum_i (x_{0i} \ln x_{0i} - \bar{x}_i \ln \bar{x}_i). \quad (5.32)$$

Чтобы найти оценку снизу работы разделения при конечном времени воспользуемся тем, что потоки и химические потенциалы рабочего тела при контакте с резервуаром и с источником конечной емкости должны удовлетворять условиям минимальной диссипации (см. п. 4.1).

Если разности химических потенциалов могут быть выражены через потоки  $\Delta\mu_i = \varphi(g_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), то дополнительные затраты энергии, связанные с необратимостью, можно записать как

$$\Delta A = \int_0^\tau \sum_i g_i \varphi_i(g_i) dt \rightarrow \min. \quad (5.33)$$

Этот критерий можно минимизировать по  $g_1 \geq 0$  и  $g_2 \geq 0$  с учетом только условий

$$\int_0^\tau g_i dt = N_i, i = 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

Найденное решение позволяет получить оценку  $\Delta A$  снизу.

Структура задачи (5.33), (5.34) такова, что она распадается на подзадачи вида

$$\int_0^{\tau} g_i \varphi_i(g_i) dt \rightarrow \min_{g_i} / \int_0^{\tau} g_i dt = \hat{N}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.35)$$

где  $\hat{N}_1 = N(0)x_1(0)$ ,  $\hat{N}_2 = N(0)x_2(0)$ . Эти задачи являются усредненными задачами нелинейного программирования ( $\overline{\text{НП}}$ ). Решения  $g_i^*(t)$  этих задач — кусочно-постоянные функции времени, принимающие не более двух базовых значений. При этом вектор  $g^* = (g_1^*, g_2^*, \dots)$  решений исходной задачи (5.33), (5.34), число условий в которой равно  $m$ , может принимать не более  $(m + 1)$ -го базового значения.

Для того, чтобы оптимальное значение расхода  $g_i$  было единственным, достаточно, чтобы функция Лагранжа

$$L_i = g_i \varphi_i(g_i) - \lambda_i g_i$$

была строго выпукла вниз. Если эта функция дважды дифференцируема, то условие постоянства оптимального потока имеет вид

$$\frac{d^2 L_i}{dg_i^2} = 2 \frac{d\varphi_i}{dg_i} + \frac{d^2 \varphi_i}{dg_i^2} g_i > 0. \quad (5.36)$$

Отметим, что первое из слагаемых для реальных зависимостей потока от разности химических потенциалов положительно.

Рассмотрим решение поставленной задачи для некоторых частных случаев. Пусть процесс недалек от равновесия и подчиняется условиям Онзагера ( $g_i = \alpha_i \Delta \mu_i$ ). Тогда

$$\Delta \mu_i = \frac{g_i}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.37)$$

Задача (5.33), (5.34) является усредненной задачей нелинейного программирования. Ее функция Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^m g_i \left( \frac{g_i}{\alpha_i} + \lambda_i \right)$$

выпукла вниз по  $g_i$ , а следовательно, оптимальные значения расходов соответствуют стационарности  $L$  по  $g_i$ . Они постоянны и равны

$$g_i^* = N \frac{x_i(0)}{\tau},$$

а минимальная необратимая работа разделения

$$A_{\min} = A^0 + \Delta A_{\min} = A^0 + \frac{N^2}{\tau} \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2(0)}{\alpha_i}, \quad (5.38)$$

где обратимая работа разделения  $A^0$  соответствует выражению (5.32).

В свою очередь, химические потенциалы рабочего тела при контакте с резервуаром и с источником конечной емкости равны

$$\mu_{i0}^p = \mu_{i0}(x_0) - \Delta\mu_{i0}, \quad \mu_{i1}^p = \mu_i(x_i) + \Delta\mu_{i1}. \quad (5.39)$$

Перепишем (5.38) с учетом (5.32), (5.39), разделив обе части этого выражения на  $\tau$ , получим

$$p = \sum_i \left[ g_i(\mu_i(x_i) - \mu_{i0}(x_0)) + g_i^2 \left( \frac{1}{\alpha_{i0}} + \frac{1}{\alpha_{i1}} \right) \right].$$

С учетом того, что температуры и давления в системе одинаковы, разности химических потенциалов вида (5.39) равны

$$\mu_i(x_i) - \mu_{i0}(x_0) = RT \ln \frac{x_i}{x_{i0}}. \quad (5.40)$$

Найдем оптимальный закон изменения вектора концентраций  $x_i(t)$  из условий

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Nx_i) &= \frac{dN}{dt}x_i + N\frac{dx_i}{dt} = g_i = \frac{\bar{x}_i\bar{N}}{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{dN}{dt} &= \sum_i g_i = \frac{\bar{N}}{\tau} \rightarrow N(t) = \frac{\bar{N}t}{\tau}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Так как поток каждого из веществ пропорционален заданной конечной концентрации, то в любой момент времени состав смеси в подсистеме конечной емкости неизменен и равен конечному составу. Минимальная затрачиваемая мощность постоянна и равна

$$p = \frac{RT\bar{N}}{\tau} \sum_i \bar{x}_i \ln \frac{\bar{x}_i}{x_{0i}} + \frac{\bar{N}^2}{\tau^2} \sum_i \frac{\bar{x}_i^2}{\bar{\alpha}_i}, \quad (5.42)$$

где  $\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_{i0}\alpha_{i1}}{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}}$  — эквивалентный коэффициент массопереноса для  $i$ -го компонента. Минимальная работа разделения в необратимом процессе продолжительностью  $\tau$

$$A_r^{\min} = p\tau = RT\bar{N} \sum_i \bar{x}_i \ln \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_{0i}} + \frac{\bar{N}^2}{\tau} \sum_i \bar{x}_i^2 / \alpha_i.$$

В том случае, когда подсистем с конечной емкостью несколько и для каждой  $\nu$ -ой из них задан вектор конечных концентраций  $\bar{x}_\nu$  с составляющими  $\bar{x}_{\nu i}$  и число молей  $\bar{N}_\nu$ , работа разделения равна сумме по  $\nu$   $A_{r\nu}$ :

$$A_r^{\min} = RT \sum_\nu \bar{N}_\nu \sum_i \bar{x}_{\nu i} \ln \frac{\bar{x}_{\nu i}}{\bar{x}_{0i}} + \sum_\nu \frac{\bar{N}_\nu^2}{\tau_\nu} \sum_i \frac{\bar{x}_{\nu i}^2}{\alpha_{\nu i}}. \quad (5.43)$$

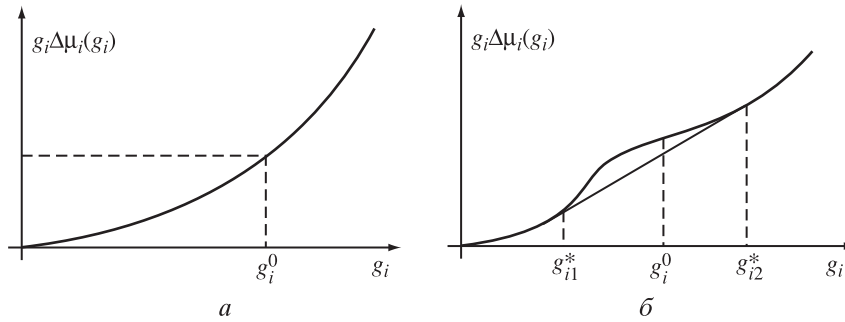
Обобщим этот подход на произвольные зависимости расходов  $g_i$  и разностей химических потенциалов  $\Delta\mu_i$  от парциальных давлений компонентов. Для этого решим следующие вспомогательные задачи нелинейного программирования:

$$\Delta\mu_i(P_0^i, P_i) \rightarrow \min_{P_0^i, P_i} / g_i(P_0^i, P_i) = g_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

Минимум в этих задачах ищется для различных значений константы  $g_i > 0$  и неотрицательных  $P_0^i$  и  $P_i$ . Значения функции достижимости каждой из этих задач  $\Delta\mu_i^{\min}(g_i)$  обозначим через  $\Delta\mu_i^*$ . Теперь можно заменить задачу (5.33), (5.34) усредненными задачами вида

$$\Delta A_i = \overline{g_i \Delta\mu_i^*(g_i)} \rightarrow \min_{g_i} / \bar{g}_i = \frac{Nx_i(0)}{\tau} = g_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (5.45)$$

Оптимальное решение каждой из этих задач либо единственно и равно  $g_i^0$ , либо имеет переключательный характер и меняется между двумя базовыми значениями. В первом случае выпуклая оболочка функции  $\Delta A_i^*(g_i) = g_i \Delta\mu_i^*(g_i)$  на множестве неотрицательных значений  $g_i$  совпадает с графиком этой функции в точке  $g_i^0$ , а во втором — проходит ниже этого графика, касаясь его в базовых точках  $g_{ij}^*$  (рис. 5.5).



Р и с. 5.5. Вид зависимости  $g_i \Delta\mu_i(g_i)$  для случая постоянства оптимального значения потока (а) и его изменения между значениями  $g_{ij}^*$  (б)

Условие выпуклости вниз функции  $g_i \Delta\mu_i^*(g_i)$ , гарантирующее единственность решения  $g_i^*$ , имеет вид

$$\frac{d^2 [g_i \Delta\mu_i^*(g_i)]}{dg_i^2} = 2 \frac{d\Delta\mu_i^*}{dg_i} + g_i \frac{d^2 \Delta\mu_i^*}{dg_i^2} > 0.$$

Оно заведомо выполнено, если выпукла вниз функция  $\Delta\mu_i^*(g_i)$ .

**Пример.** Пусть  $\Delta\mu = RT \ln(P_0/P)$ , а  $g(P_0, P) = (P_0 - P)/\alpha$ , причем  $0 < P < P_{\max}$ . Выразим  $P_0$  через  $g$  и  $P$ :

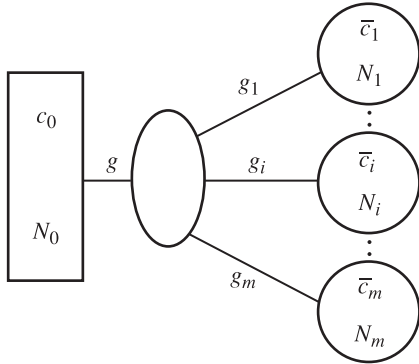
$$P_{0i} = \alpha_i g_i + P_i, \quad i = 1, 2.$$

При каждом  $g \Delta\mu = RT \ln(\alpha g/P + 1)$  достигает минимума при  $P = P_{\max}$ , так что  $\Delta\mu_i^*(g_i) = RT \ln(\alpha_i g_i/P_{i \max} + 1)$ .

Критерий оптимальности (5.33) примет вид

$$\Delta A = \int_0^{\tau} RT \left[ g_1 \ln \left( \alpha_1 \frac{g_1}{P_{1 \max}} + 1 \right) + g_2 \ln \left( \alpha_2 \frac{g_2}{P_{2 \max}} + 1 \right) \right] dt \rightarrow \min_{g_1, g_2}.$$

Функция Лагранжа для этой задачи с условиями (5.34), как легко показать, выпукла вниз по  $g_1, g_2$  и достигает минимума в единственной точке. Это значит, что оптимальные значения потоков  $g_1^*$  и  $g_2^*$  постоянны и определяются выражениями (5.34).



Р и с. 5.6. Структура системы разделения подсистемы конечной емкости на  $m$  подсистем

#### Разделение системы с конечной емкостью на $m$ подсистем.

Рассмотрим систему, показанную на рис. 5.6. Ее начальное состояние характеризуется вектором концентраций  $x_0$ , числом молей смеси  $N_0$ , а состояние в конце процесса числом молей  $\bar{N}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) в каждой из подсистем и векторами концентраций  $\bar{x}_j$ . При этом должны быть выполнены условия материального баланса

$$\sum_{j=1}^m \bar{N}_j = N_0, \quad (5.46)$$

$$\sum_{j=1}^m \bar{N}_j \bar{x}_{ji} = N_0 x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

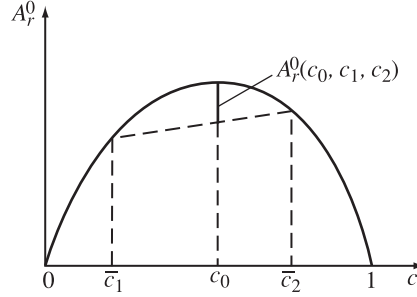
Как и выше, первоначально найдем работу разделения в обратимом процессе  $A_r^0$  через изменение внутренней энергии системы:

$$A_r^0(x_0, \bar{x}) = RT \left[ \sum_{j=1}^m N_j \sum_i \bar{x}_{ji} \ln \bar{x}_{ji} - N_0 \sum_i x_{0i} \ln x_{0i} \right] = \quad (5.47)$$

$$= A_{r0}^0(x_0, N_0) - \sum_{j=1}^m A_{rj}^0(\bar{x}_j, N_j).$$

Таким образом обратимая работа разделения равна разности обратимой работы разделения на чистые компоненты исходной смеси и смеси в каждой из подсистем (рис. 5.7.).

Р и с. 5.7. Обратимая работа разделения системы с концентрацией  $x_0$  на две подсистемы



Для оценки снизу той же работы в необратимом случае будем как и выше предполагать потоки  $g_j$  с составляющими  $g_{ij}$  пропорциональными разнице химических потенциалов подсистемы и рабочего тела с коэффициентом  $\alpha_{ij}$

В этом случае по условию минимальной диссипации минимуму работы разделения соответствует постоянство потоков, так что

$$g_{ij} = \frac{\bar{N}_j \bar{x}_{ij}}{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.48)$$

$$\Delta\mu_{ij} = \frac{g_{ij}}{\alpha_{ij}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (5.49)$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано выше для системы, состоящей из резервуара и одной подсистемы конечной емкости, можно показать, что для потоков в форме (5.48) векторы концентраций в разделяемой подсистеме и в каждой из подсистем, на которые происходит разделение, неизменны во времени и равны  $x_0, \bar{x}_j$  соответственно, а число молей  $N_j(t)$  изменяется линейно. При этом мощность  $p$  постоянна и равна

$$p = \frac{RT}{\tau} \sum_{j=1}^m \bar{N}_j \sum_i \bar{x}_{ij} \ln \frac{\bar{x}_{ij}}{x_{i0}} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{j=1}^m N_j^2 \sum_i \bar{x}_{ij}^2 / \bar{\alpha}_{ij}. \quad (5.50)$$

Минимальная работа разделения смеси с концентрацией  $x_0$  на две подсистемы с заданными концентрациями  $\bar{x}_i$  за время  $\tau$  равна

$$A_r = RTN_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_i \bar{x}_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} + \frac{N_0^2}{\tau} \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \sum_i \bar{x}_{ij}^2 / \bar{\alpha}_{ij}. \quad (5.51)$$

Здесь  $\gamma_j = \bar{N}_j / N_0$ ,  $\bar{\alpha}_{ij} = \frac{\alpha_{ij} \alpha_{i0}}{\alpha_{i0} + \alpha_{ij}}$ .

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с обратимой работой разделения  $A_r^0$  смеси  $N$  молей с концентрацией  $x_0$  на подсистемы, каждая из которых характеризуется числом молей  $N_j$  и вектором концентраций  $x_j$  (сравн. с (5.47)). Второе слагаемое учитывает необратимость процесса. С ростом продолжительности процесса  $\tau$  и коэффициентов массопереноса  $\bar{\alpha}_{ij}$  величина  $A_r$  монотонно уменьшается, стремясь к  $A_r^0$ .

Даже в тех случаях, когда трудно оценить значения  $\bar{\alpha}_{ij}$ , выражение (5.51) позволяет оценить характер влияния на необратимую работу разделения таких факторов, как концентрации  $\bar{x}_j$ , коэффициенты массопереноса, продолжительность  $\tau$ .

*Выбор величины отборов.* Пусть размерность вектора концентраций  $n < m$ . Обозначим через

$$\beta_j = \sum_i \frac{\bar{x}_{ij}^2}{\bar{\alpha}_{ij}}, \quad \mu_j = \sum_i \bar{x}_{ij} \ln \frac{\bar{x}_{ij}}{x_{i0}},$$

будем предполагать заданными вектора концентраций  $\bar{x}_j$  после разделения, а значит  $\beta_j$  и  $\mu_j$ . Найдем, каким условиям должны удовлетворять доли  $\gamma_j$  от общего числа молей, чтобы работа  $A_r$  была минимальна. Мы приходим к экстремальной задаче

$$A_r = RTN_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \mu_j + \frac{N_0^2}{\tau} \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \beta_j \rightarrow \min_{\gamma_j} \quad (5.52)$$

при условиях, вытекающих из (5.46)

$$\sum_j \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0, \quad (5.53)$$

$$\sum_j \gamma_j \frac{\bar{x}_{ji}}{x_{0i}} = 1, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.54)$$

Условие (5.54) для  $n$ -ой составляющей вектора концентраций всегда удовлетворяется.

Если число отборов  $m$  больше размерности вектора концентраций  $n$ , то есть свобода выбора  $\gamma$ .



Решение этой задачи с использованием функции Лагранжа

$$L = A_r(\gamma) + \lambda_0 \sum_j \gamma_j = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_j \gamma_j \frac{\bar{x}_{ji}}{x_{0i}}$$

приводит к уравнениям для выбора оптимальных значений  $\gamma_j$

$$\gamma_j = \frac{\left( \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\bar{x}_{ij}}{x_{0i}} - RTN_0 \mu_j \right) \tau}{2N_0^2 \beta_j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.55)$$

Для расчета множителей Лагранжа  $\lambda_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) имеем систему  $n$  линейных уравнений, получающихся после подстановки  $\gamma_j$  в условия (5.53)

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \varphi_{i\nu} = \frac{2N^2}{\tau} = RTN_0 \Phi_\nu, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (5.56)$$

Здесь

$$\varphi_{i\nu} = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{x}_{ji} \bar{x}_{j\nu}}{x_{0i} x_{0\nu} \beta_j}, \quad \Phi_\nu = \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j \bar{x}_{j\nu}}{\beta_j x_{0\nu}},$$

причем для  $\nu = 0$  в этих выражениях  $\bar{x}_{j\nu} = x_{0\nu}$ .

Рассмотрим частный случай разделения бинарной смеси на чистые компоненты за время  $\tau$ . В этом случае  $N_1 = x_0 N_0$ ,  $N_2 = (1 - x_0) N_0$ , где  $x_0$  — концентрация ключевого компонента,  $\bar{x}_{22} = 1$ . Получим по формуле (5.56)

$$A_r = -RTN_0(x_0 \ln x_0 + (1 - x_0) \ln(1 - x_0)) + \quad (5.57)$$

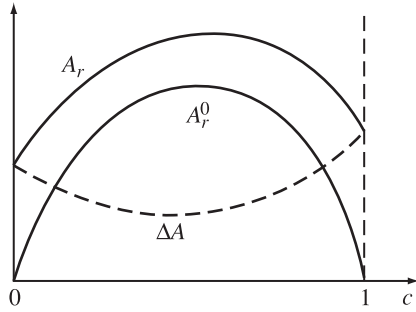
$$+ \frac{N_0^2}{\tau} \left( \frac{x_0^2}{\bar{\alpha}_{11}} + \frac{(1 - x_0)^2}{\bar{\alpha}_{22}} \right) = A_r^0(x_0) + \frac{N_0^2}{\tau} \left( \frac{x_0^2}{\bar{\alpha}_{11}} + \frac{(1 - x_0)^2}{\bar{\alpha}_{22}} \right).$$

Оценка (5.57) получена в [28] решением задачи об оптимальном разделении бинарной смеси за время  $\tau$  в схеме Вант-Гоффа с подвижными полупроводящими мембранами, в которых  $\bar{\alpha}_{11}$  и  $\bar{\alpha}_{22}$  — коэффициенты проводимости мембран по первому и второму компоненту.

Выражение (5.56) представляет собой оценку необратимой работы разделения многокомпонентной смеси на  $m$  частей с заданными составами, удовлетворяющими условиям материального баланса (5.46).

Первое слагаемое в (5.56) представляет собой обратимую работу разделения смеси, характеризующейся вектором концентраций  $x_0$ , на смеси с концентрациями  $\bar{x}_j$ . Второе слагаемое связано с необратимостью процесса разделения. Оно учитывает длительность процесса и коэффициенты массообмена.

Наличие второго слагаемого особенно существенно при разделении смесей, у которых концентрация одного из компонентов очень мала (бедных смесей). Для бинарных смесей обратимая работа разделения стремится к нулю, когда концентрация ключевого компонента близка к нулю или единице (см. рис. 5.4). В реальных же процессах работа разделения бедных смесей может быть очень велика. Примером могут служить процессы разделения изотопов, когда реальная работа разделения превосходит обратимую оценку в сотни тысяч раз [67]. Второе слагаемое в (5.56) не стремится к нулю, когда концентрация одного из компонентов очень мала. На рис. 5.8. пунктиром показано, как зависит слагаемое  $\Delta A$  от концентрации ключевого компонента в исходной смеси.



Р и с. 5.8. Зависимость минимальной работы разделения от концентрации исходной смеси при ограниченной продолжительности процесса

Оценка (5.56) позволяет ставить и решать задачи, которые нельзя решить с использованием обратимой оценки  $A_r^0$ . К ним относится задача о выборе оптимальной последовательности разделения смеси при ее многократном делении на два компонента. Здесь важна именно необратимая составляющая затрат, так как обратимая работа не зависит от того в какой последовательности мы делим смесь, она определяется только исходным и конечным составами. Эта задача рассмотрена в следующем параграфе.

*Разделение потоков.* Процессы разделения в большинстве случаев непрерывны. На вход технологического аппарата поступает поток исходной смеси  $g_0$  с составом  $x_0$ , на выходе имеем потоки  $g_j$  с концентрациями  $x_j$ . Условия материального баланса (5.46) примут форму

$$\sum_i x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^m g_j = g_0, \quad \sum_{j=1}^m g_j x_{ij} = g_0 x_{i0}, \quad (5.58)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Выразим мощность  $p$  в непрерывном процессе разделения через потоки, учтя, что

$$g_0 = N_0/\tau, \quad g_j = N_j/\tau.$$

Получим для  $m$  выходных потоков

$$p = RTg_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} + g_0^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}} = p^0 + \Delta p. \quad (5.59)$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  — коэффициент массопереноса при извлечении из исходной смеси  $i$ -го компонента в  $j$ -ый поток,  $x_j$  — вектор концентраций  $j$ -го потока,  $\gamma_j = g_j/g_0$  — доля  $j$ -го потока.

#### 5.4. Последовательное разделение многокомпонентных смесей

На практике разделение многокомпонентных смесей часто реализуется как последовательное разделение смесей на два потока. Так, при полном разделении смесь из трех компонентов разделяется сначала на два потока, второй из которых не содержит одного из компонентов, а затем второй поток вновь делится на два компонента. Как уже упоминалось обратимая работа (соответствующая мощность  $p_0$ ) не зависит от того, в каком порядке организуется разделение, так как  $p_0$  определяется только расходами и составами потоков на входе и выходе схемы в целом. Необратимая же мощность  $\Delta p$  в (5.59) зависит от того в каком порядке происходит выделение компонентов и позволяет выбрать этот порядок.

Рассмотрим смесь из трех компонент с концентрацией  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  и расходом  $g_0$ , который можно принять за единицу. Коэффициенты массопереноса при разделении на первой и на второй стадии обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , они зависят от конструкции аппаратов. Будем первоначально для простоты предполагать, что они не зависят от состава смеси, хотя вообще говоря такая зависимость существует. Найдем необратимые затраты мощности для двух вариантов:

- а) Сначала отделяется первый компонент, затем второй и третий.
  - б) Первым выделяется второй компонент, затем первый и третий.
- Разделение на каждой стадии будем предполагать полным.

$$\Delta p_a = \Delta p_{a1} + \Delta p_{a2} = x_{01}^2/\alpha_1 + \frac{(x_{02} + x_{03})^2}{\alpha_1} + (x_{02} + x_{03})^2 + (x_{02}^2/\alpha_2 + x_{03}^2/\alpha_3). \quad (5.60)$$

Первые два слагаемых в этой сумме представляют собой потери от необратимости на первой стадии разделения. При  $g_0 = 1$  и полном разделении расходы  $g_1$  и  $g_2$  на этой стадии равны  $x_{01}$  и  $(x_{02} + x_{03})$  соответственно.

На первой стадии при  $g_0 = 1$  и полном разделении в варианте а) второй и третий компонент считаем одним веществом с расходом на

выходе  $x_{02} + x_{03} = 1 - x_{01}$ . Необратимые затраты в соответствии с (5.59)

$$\Delta p_{a1} = \frac{x_{01}^2}{\alpha_1} + \frac{(1 - x_{01})^2}{\alpha_1} = \frac{2x_{01}^2 + 1 - 2x_{01}}{\alpha_1}. \quad (5.61)$$

При разделении второго потока на два потока, их расходы равны

$$g_{22} = \frac{x_{02}}{(1 - x_{01})}, \quad g_{23} = \frac{x_{03}}{(1 - x_{01})},$$

а необратимые затраты мощности

$$\Delta p_{a2} = \frac{1}{\alpha_2(1 - x_{01})^2} (x_{02}^2 + x_{03}^2).$$

Суммарные затраты мощности

$$\Delta p_a(x_{01}, x_{02}) = \frac{2x_{01}^2 - 2x_{01} + 1}{\alpha_1} + \frac{x_{02}^2 + (1 - x_{01} - x_{02})^2}{\alpha_2(1 - x_{01})^2}.$$

В варианте б) совершенно аналогично получим

$$\Delta p_b(x_{01}, x_{02}) = \frac{2x_{02}^2 - 2x_{02} + 1}{\alpha_1} + \frac{x_{01}^2 + (1 - x_{01} - x_{02})^2}{\alpha_2(1 - x_{02})^2}.$$

Найдем разность этих затрат

$$\begin{aligned} \Delta p_{ab} = \Delta p_a - \Delta p_b = & \frac{2}{\alpha_1} [(x_{01}^2 - x_{02}^2) - (x_{01} - x_{02})] + \quad (5.62) \\ & + \frac{1}{\alpha_2(1 - x_{01})(1 - x_{02})} [(1 - x_{02})^2(x_{02}^2 + x_{03}^2) - (1 - x_{01})^2(x_{01}^2 + x_{03}^2)]. \end{aligned}$$

Если  $\Delta p_{ab} > 0$ , то вариант разделения б) предпочтительнее.

Аналогичные расчеты можно провести и в том, случае, когда коэффициенты массопереноса на первой и второй ступени зависят от состава смеси. В этом случае в выражении для  $\Delta p_a$  будут фигурировать вместо  $\alpha_{1a}$  и  $\alpha_{2a}$ , при расчете  $\Delta p_b$  коэффициенты  $\alpha_{1b}$  и  $\alpha_{2b}$ . Соответственно изменятся и  $\Delta p_{ab}$ .

Отметим, что нельзя сформулировать общего правила выбора оптимальной последовательности разделения многокомпонентной смеси и тем более нельзя найти такую последовательность, опираясь на обратимую работу разделения. Нужно сравнивать величину необратимых затрат для каждого варианта.

### 5.5. Предельная производительность термических систем разделения

Значительная часть процессов разделения использует для создания разности химических потенциалов между рабочим телом и источниками (движущей силы масопереноса) тепловую энергию. При этом рабочее тело нагревается при контакте с одним источником и охлаждается при контакте с другим. Выше в п. 5.1 было показано, что систему термического разделения можно с точки зрения расчетов представить как соединение преобразователя тепла в работу, вырабатывающего мощность  $p$ , потребляющего от горячего резервуара тепловой поток  $g_+$  и отдающего поток  $g_-$  холодному резервуару, и систему механического разделения. Как показано в гл. 4 возможности прямого преобразователя тепла в работу ограничены и вырабатываемая им мощность имеет максимальное значение, равное для рабочего тела с распределенными параметрами

$$p_{\max} = \bar{\alpha}(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2, \quad (5.63)$$

где  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-}$  — эквивалентный коэффициент теплопередачи, и

$$p_{\max} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{(\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-})^2} (\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2 \quad (5.64)$$

для рабочего тела с соредоточенными параметрами.

Зависимость затрачиваемой мощности от производительности необратимых процессов разделения монотонна (см. выражение (5.59)). Откуда следует, что предельной производительности термических процессов разделения соответствует максимально возможная мощность преобразователя тепла в работу. Дальнейшее увеличение расхода тепла  $g_+$  только уменьшает производительность процесса.

Для преобразователя тепло-работа и ньютоновского закона теплопереноса имеем (см. гл. 4) зависимость минимально-потребляемого тепла от мощности

$$q^+(p) = \frac{p}{\eta(p)} = \frac{2p}{\left(\frac{p}{\bar{\alpha}T_+} + \eta_k\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{\bar{\alpha}T_+} + \eta_k\right)^2 - \frac{4p}{\bar{\alpha}T_+}}}. \quad (5.65)$$

Здесь  $\eta_k = \frac{T_+ - T_-}{T_+}$  — КПД Карно,  $T_+$  и  $T_-$  — температуры горячего и холодного источников,  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-}$  — эквивалентный коэффициент теплопередачи для рабочего тела с распределенными параметрами и

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{(\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-})^2} (\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2$$

для рабочего тела, поочередно контактирующего с источниками.

Оценку минимального расхода тепла  $q_+$  в зависимости от производительности  $g_0$  для системы термического разделения можно получить, подставив в выражение (5.65) вместо  $p$  правую часть равенства (5.59). Полученная зависимость справедлива для  $0 \leq p \leq p_{\max}$ , а следовательно для  $0 \leq g_0 \leq g_{0\max}$ . При этом производительность не должна превышать максимально возможной.

Чтобы найти максимально возможную производительность системы термического разделения, подставим в формулу (5.59) вместо  $p$  правую часть условий (5.63) или (5.64) в зависимости от типа преобразователя, и обозначим через

$$B = RT \sum_j \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}}, \quad D = \sum_j \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}}. \quad (5.66)$$

Получим для преобразователя с распределенными параметрами

$$p_{\max} = \bar{\alpha} \left( \sqrt{T_+} - \sqrt{T_-} \right)^2 = B g_{0\max} + D g_{0\max}^2,$$

откуда для предельной производительности имеем

$$g_{0\max} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\bar{\alpha}D(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2}}{2D} \quad (5.67)$$

Формулы (5.66), (5.67) позволяют оценить предельную производительность системы термического разделения в случае, когда законы теплообмена между рабочим телом и источниками подачи и отбора тепла ньютоновские, потоки массопереноса пропорциональны разности химических потенциалов, а массоперенос близок к изотермическому с температурой  $T$ .

**Пример.** Найдем минимальные затраты тепла для процесса термического разделения газов, например, моноэтаноламиновой очистки, в которой один из компонентов газовой смеси поглощается холодным раствором, а затем при нагревании раствора выделяется. Смесь поступает с температурой  $\bar{T}=350$  К, концентрацией ключевого компонента  $x=0,5$  моль/(моль смеси), расход смеси  $g_0=5$  моль/с. Температуры подвода тепла при нагреве и охлаждении раствора раствора равны соответственно  $T_h=400$  К,  $T_c=300$  К, а коэффициенты теплопередачи  $\alpha_+=2$  ккал/(с К) и  $\alpha_-=4$  ккал/(с К). Концентрации ключевого компонента в выходных потоках, один из которых соответствует газу, прошедшему через холодный раствор, а второй газу, вышедшему после нагрева:  $x_1=0,9$ ;  $x_2=0,1$ ; коэффициенты массопереноса по каждому из компонент для всей поверхности контакта с холодным и горячим раствором  $\alpha_1=0,07$  моль<sup>2</sup>/(кгм с),  $\alpha_2=0,03$  моль<sup>2</sup>/(кгм с).

Так как раствор циркулирует, поочередно охлаждаясь и нагреваясь, то преобразователь тепла в работу разделения является преобразователем с сосредоточенными параметрами и его предельная мощность определяется выражением (5.64)

$$p_{\max} = \frac{2 \times 4}{(\sqrt{2} + 2)^2} (\sqrt{400} - \sqrt{300})^2 = 4,95 \frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Требуемую мощность найдем по формуле (5.59), рассчитав предварительно отдельные слагаемые этого выражения:

$$p^0 = RTg_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} = 549 \frac{\text{кгм}}{\text{с}} = \frac{549}{427} = 1,29 \frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Здесь 427 кгм/ккал — механический эквивалент теплоты. Минимальные необратимые затраты работы для системы, подчиняющейся уравнениям Онзагера, определяются выражением (5.59):

$$\Delta p = g_0^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}} = p^0 + \Delta p = \frac{244}{427} = 0,57 \frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Таким образом,  $p = p^0 + \Delta p = 1,86 \text{ ккал/с} < p_{\max}$ . Затраты работы на разделение не превышают максимально возможных при данных коэффициентах массопереноса.

Найдем оценку для потока тепла, подводимого к установке. По формуле (5.65), получим

$$q_+ = 7,75 \text{ ккал/с}.$$

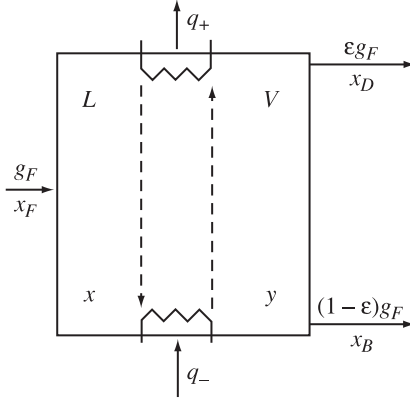
Учет необратимости процесса тепло и массопереноса уточняет обратимую оценку затрат тепла, однако часто важную роль играет различие температур потоков, а так же рапределенный характер процессов. Эти факторы необходимо учитывать, как это сделано ниже для процесса ректификации.

## 5.6. Предельные возможности процесса бинарной ректификации

Процессы ректификации являются наиболее распространенными процессами разделения жидких смесей. В частности, они используются для получения нефтепродуктов. Так как затрачиваемая на проведение этих процессов энергия очень велика, представляется особенно актуальным исследование предельных возможностей таких процессов, выяснение способов их оптимальной организации.

Схема процесса ректификации изображена на рис. 5.9. Поток исходной смеси с расходом  $g_F$  и вектором концентраций  $x_F$  поступает

в колонну. К кубу колонны подводится тепловой поток  $q_+$ , благодаря чему в кубе происходит испарение, и поток пара  $V$  поднимается вверх по колонне, контактируя с опускающимся вниз потоком жидкости (флегмы)  $L$ . При этом легколетучие компоненты переходят из жидкости в пар, а высококипящие — из пара в жидкость. Оставшаяся часть кубовой жидкости отбирается с потоком  $g_B$ .



Р и с. 5.9. Структура потоков процесса разделения жидкости в колонне ректификации

В дефлегматор поступает пар, насыщенный легколетучими компонентами. Там он конденсируется, отдавая охлаждающей жидкости тепло  $q_-$ . Часть конденсата  $g_D = \varepsilon g_F$  отбирается, а оставшаяся часть  $L = V - g_D$  в форме флегмы возвращается в колонну. Величина  $\varepsilon$  (доля отбора) для бинарной смеси полностью определяется составами входного и выходных потоков. Если же только один из выходных потоков является целевым и задана только его концентрация, то степень отбора, или, что то же самое, концентрацию нецелевого потока, выбирают по условию минимума затрат энергии на разделение.

Процесс ректификации основан на условиях равновесия между кипящей жидкостью и образующимся паром. Если предполагать, что жидкая фаза близка по своим свойствам к идеальным растворам, а паровая — к идеальным газам, то парциальное давление  $i$ -го компонента в паре равно произведению его концентрации на общее давление (закон Рауля):

$$P_i = P y_i = y_i \sum_{\nu} P_{\nu}. \quad (5.68)$$

С другой стороны, парциальное давление пара  $i$ -го компонента над раствором в условиях равновесия равно давлению насыщенного пара над чистым компонентом  $P_i^0$ , умноженному на мольную долю этого компонента в растворе:

$$P_i = P_i^0 x_i. \quad (5.69)$$

Здесь давление  $P_i^0$  зависит от температуры. Для низкокипящих (лег-



колетучих) компонентов при одной и той же температуре оно выше, чем для высококипящих.

Уравнения (5.68) и (5.69) при известных зависимостях  $P_i^0(T)$  позволяют найти  $y_i^0(x_i)$  — *кривую равновесия*. Для бинарной смеси давлений паров в соответствии с (5.68) равно

$$P = P_1 + P_2 = P_1^0 x + P_2^0 (1 - x),$$

откуда в условиях равновесия концентрации компонентов в паре и в растворе связаны друг с другом соотношением

$$y^0(x) = \frac{P_1}{P} = \frac{P_1^0 x}{P_2^0 + (P_1^0 - P_2^0)x}.$$

Введя коэффициент относительной летучести

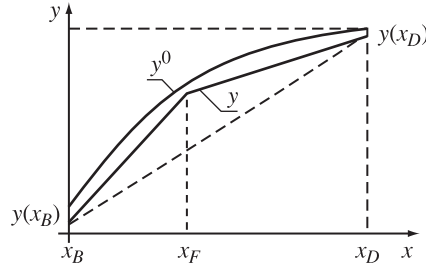
$$\alpha(T) = \frac{P_1^0(T)}{P_2^0(T)},$$

получим кривую равновесия в форме

$$y^0(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}. \quad (5.70)$$

Коэффициент  $\alpha > 1$ , так как через  $y$  обозначена концентрация низкокипящего (легколетучего) компонента. Характер кривой равновесия показан на рис. 5.10.

Р и с. 5.10. Связь между концентрацией легколетучего компонента в жидкости  $x$ , равновесной концентрацией в паре  $y^0$  и рабочей концентрацией  $y$

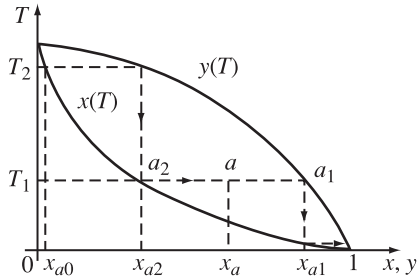


Важную роль играют зависимости равновесных концентраций компонентов в паре  $y(T)$  и в жидкости  $x(T)$  от температуры. Они показаны на рис. 5.8. На этом рисунке нижняя ветвь является кривой кипения, под ней расположена область жидкой фазы, а верхняя — кривой конденсации, и выше нее — область перегретого пара. При температуре  $T_1$  жидкость, имеющая концентрацию легколетучего компонента  $x$ , начинает кипеть, а при температуре  $T_2$  пар с концентрацией легколетучего компонента  $y$  начинает конденсироваться. Между кривыми кипения и конденсации находится область, соответствующая двухфазной смеси, состав которой при каждой температуре в некоторой точке  $a$  (рис. 5.11) определяется как средневзвешенное между составами в

точках  $a_1$  и  $a_2$ , т.е. число мольных долей жидкости  $n_2$  в точке  $a$  относится к числу мольных долей пара  $n_1 = 1 - n_2$  как разности соответствующих концентраций:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{y(T) - x_a}{x_a - x(T)}.$$

Как видно из рис. 5.11, концентрация легколетучего компонента в паровой фазе при фиксированной температуре больше, чем в жидкой фазе. Поэтому если эти фазы разделить и сконденсировать пар, то получившаяся смесь будет иметь бóльшую концентрацию легколетучего компонента. Так, для температуры  $T_2$  такой конденсат будет иметь концентрацию, равную  $x_{a2} > x_{a0}$ . После испарения при температуре  $T_1$  и вторичной конденсации концентрация легколетучего компонента возрастает до  $x_{a1} > x_{a2}$  и т.д.



Р и с. 5.11. Зависимость равновесных концентраций легколетучего компонента в паре  $y$  и в жидкости  $x$  от температуры

В колонне ректификации происходит встречное движение пара и конденсата с многократным испарением и конденсацией. При этом исходная смесь разделяется на конденсат с большой концентрацией легколетучих компонентов и кубовый остаток с малой их концентрацией.

### 5.6.1. Термодинамические балансы ректификации и обратимая оценка затрат энергии

Запишем уравнения термодинамических балансов, используя следующие обозначения:  $T_-$  — температура в дефлегматоре, а  $q_-$  — тепловой поток. Индекс  $j$  соответствует  $j$ -му компоненту смеси. Через  $h_F, h_D$  и  $h_B$  обозначены мольные энтальпии соответствующих потоков, а через  $s_F, s_D$  и  $s_B$  — энтропии. Через  $\sigma$  обозначено производство энтропии. Будем предполагать, что смеси близки к идеальным растворам и теплотой смешения можно пренебречь:

$$g_F x_{jF} - g_D x_{jD} - g_B x_{jB} = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.71)$$

$$q_+ - q_- + g_F h_F - g_D h_D - g_B h_B = 0, \quad (5.72)$$

$$g_F s_F - g_D s_D - g_B s_B + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0, \quad (5.73)$$

где  $k$  — число компонентов в смеси. Из условий (5.71)–(5.73) после исключения  $q_-$  получим

$$q_+ = \frac{T_+}{T_+ - T_-} \left[ g_F (s_F T_- - h_F) - g_D (s_D T_- - h_D) - \right. \\ \left. - g_B (s_B T_- - h_B) \right] + \sigma \frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-} = q_+^0 + \sigma \frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-}. \quad (5.74)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения, которое обозначим через  $q_+^0$ , представляет собой затраты тепла в обратимом процессе, оно зависит только от параметров входных и выходных потоков и от производительности, второе слагаемое соответствует диссипативным затратам энергии.

Проанализируем обратимые затраты тепла, считая, что величина потока из дифлегматора  $g_D$  и его состав фиксированы, давление в процессе ректификации мало меняется и может быть принято постоянным, а для мольных энтальпий и энтропий справедливы соотношения

$$h(T, P, x) = \sum_{j=1}^k x_j h_j(T, P), \\ s(T, P, x) = \sum_{j=1}^k x_j \left( s_j^0(T, P) - R \ln x_j \right).$$

Прирост мольной энтальпии и энтропии с изменением температуры определяется через теплоемкость  $c_{pj}(T)$  как

$$\Delta h_j = h_j(T_2, P) - h_j(T_1, P) = \int_{T_1}^{T_2} c_{pj}(T) dT, \\ \Delta s_j^0 = s_j^0(T_2, P) - s_j^0(T_1, P) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_{pj}(T)}{T} dT.$$

Обратимую оценку для затрат тепла в процессе ректификации перепишем в форме

$$q_+^0 = \frac{RT_+ T_- g_D}{(T_+ - T_-) \varepsilon} \sum_{j=1}^k \left[ \varepsilon x_{jD} \ln x_{jD} + (1 - \varepsilon) x_{jB} \ln x_{jB} - \right. \\ \left. - x_{jF} \ln x_{jF} - \frac{\varepsilon x_{jD}}{RT_-} \int_{T_-}^{T_F} \left( 1 - \frac{T_-}{T} \right) c_{pj}(T) dT + \right.$$

$$+ \frac{(1-\varepsilon)x_{jB}}{RT_-} \int_{T_F}^{T_+} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T) dT \Big]. \quad (5.75)$$

Величина

$$p^0 = \frac{g_D}{\varepsilon} RT_- \sum_{j=1}^k \left[ \varepsilon x_{jD} \ln x_{jD} + (1-\varepsilon)x_{jB} \ln x_{jB} - x_{jF} \ln x_{jF} \right] \quad (5.76)$$

представляет собой обратимую изотермическую мощность разделения потока  $g_F$  с концентрацией  $x_F$  на потоки с концентрациями  $x_B$  и  $x_D$  при температуре  $T_-$ . Если учесть, что работа разделения одного моля потока, имеющего вектор концентраций  $x$ , равна  $\left(-\sum_{j=1}^k x_j \ln x_j\right)$ , то  $p^0$  с точностью до множителя, стоящего перед знаком суммы, представляет собой разность между обратимой мощностью разделения смеси на чистые компоненты и мощностью разделения на чистые компоненты выходных потоков.

Неизотермический характер разделения приводит к появлению дополнительного слагаемого

$$\Delta p^0 = \frac{g_D}{\varepsilon} \sum_{j=1}^k \left[ (1-\varepsilon)x_{jB} \int_{T_F}^{T_+} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T) dT - \varepsilon x_{jD} \int_{T_-}^{T_F} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T) dT \right]. \quad (5.77)$$

Если пренебречь зависимостью теплоемкости от температуры и ввести  $c_{pi}^-$  и  $c_{pi}^+$  как постоянные теплоемкости в интервалах  $(T_-, T_F)$  и  $(T_F, T_+)$  соответственно, то дополнительная обратимая мощность перепишется как

$$\Delta p^0 = \frac{g_D}{\varepsilon} \sum_{j=1}^k \left[ (1-\varepsilon)x_{jB} c_{pj}^+ \left(T_+ - T_F - T_- \ln \frac{T_+}{T_F}\right) - \varepsilon x_{jD} c_{pj}^- \left(T_F - T_- - T_- \ln \frac{T_F}{T_-}\right) \right].$$

Обратимая оценка для потока подводимого тепла

$$q_+^0 = \frac{p^0 + \Delta p^0}{\eta_K}, \quad (5.78)$$

где  $\eta_K = (1 - T_-/T_+)$  — КПД Карно.

В качестве обратимого КПД колонны ректификации может быть принято отношение изотермической обратимой работы разделения  $A^0$

к затраченному теплу  $q_+$ . Как следует из (5.78), такой КПД равен

$$\frac{p^0}{q_+^0} = \eta_p^0 = \eta_K - \frac{\Delta p^0}{q_+^0}. \quad (5.79)$$

**Выбор доли отбора из условия минимума обратимых затрат энергии.** В том случае, когда заданы составы всех потоков на входе и выходе колонны, ее нагрузка определяется расходом любого потока и доля отбора однозначно связана с составами. Если же состав одного из потоков не фиксирован, то доля отбора подлежит выбору по тому или иному критерию. Мы будем считать отбор из дефлегматора  $g_D$  целевым потоком с фиксированным составом, а состав куба и связанную с ним долю отбора выбирать по условию минимума обратимых затрат энергии на разделение.

Обратимая оценка затрат тепла в расчете на один моль целевого потока

$$\frac{q_+^0}{g_D} = \frac{(p^0 + \Delta p^0)}{g_D \eta_K}$$

зависит только от составов входных и выходных потоков и температур в кубе и дефлегматоре. Значение доли отбора в (5.76), (5.77) связано с составами потоков как

$$\varepsilon = \frac{x_F - x_B}{x_D - x_B}. \quad (5.80)$$

При заданном составе верхнего продукта будем выбирать  $\varepsilon$  из условия минимума обратимых затрат тепла  $q_+^0$  (см. (5.75)) при условиях

$$\sum_j x_{Bj} = 1, \quad \varepsilon x_{Dj} + (1 - \varepsilon)x_{Bj} = x_{Fj}, \quad 1 \geq x_{Bj} \geq 0. \quad (5.81)$$

В этом случае решение, как правило, оказывается в точке стационарности функции Лагранжа задачи (5.75), (5.81).

Для бинарной ректификации составы определяются только долей легкокипящего  $x_D$ , так как

$$x_B(\varepsilon) = \frac{x_F - \varepsilon x_D}{1 - \varepsilon}. \quad (5.82)$$

Это выражение может быть подставлено в (5.75), а оптимальная доля отбора соответствует минимуму полученного выражения. Выпишем его и проанализируем характер зависимости обратимых затрат тепла от величины доли отбора:

$$q_+^0(\varepsilon) = \frac{p^0(\varepsilon) + \Delta p^0(\varepsilon)}{\eta_K(\varepsilon)}, \quad (5.83)$$

где

$$p^0(\varepsilon) = \frac{g_D}{\varepsilon} RT_- \left[ \varepsilon x_D \ln x_D + (1 - \varepsilon) x_B(\varepsilon) \ln x_B(\varepsilon) - x_F \ln x_F + \right. \\ \left. + \varepsilon(1 - x_D) \ln(1 - x_D) + (1 - \varepsilon)(1 - x_B(\varepsilon)) \ln(1 - x_B(\varepsilon)) - \right. \\ \left. - (1 - x_F) \ln(1 - x_F) \right],$$

$$\Delta p^0(\varepsilon) = \frac{g_D}{\varepsilon} \left[ (1 - \varepsilon) x_B(\varepsilon) c_{p1}^+ \left( T_+(\varepsilon) - T_F - T_- \ln \frac{T_+(\varepsilon)}{T_F} \right) - \right. \\ \left. - \varepsilon(x_D c_{p1}^- + (1 - x_D) c_{p2}^-) \left( T_F - T_- - T_- \ln \frac{T_F}{T_-} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon)(1 - x_B(\varepsilon)) c_{p2}^+ \left( T_+(\varepsilon) - T_F - T_- \ln \frac{T_+(\varepsilon)}{T_F} \right) \right],$$

$$\eta_K = 1 - \frac{T_-}{T_+(\varepsilon)}.$$

В отличие от фиксированного состава дистиллята, состав кубового продукта, а значит, и температура в кубе, зависит от степени отбора. Для бинарной ректификации эта зависимость достаточно точно может быть выражена формулой

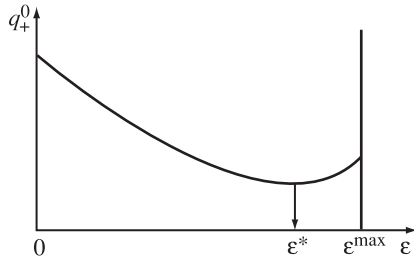
$$T_+(\varepsilon) = T_1 + x_B(\varepsilon) \frac{T_F - T_k}{x_F}, \quad (5.84)$$

где  $T_k$  — температура кипения высококипящего компонента.

В силу условий (5.81) величина  $\varepsilon$  при минимизации выражения (5.83) должна для любого значения  $j$  удовлетворять неравенствам

$$\min \left[ \frac{x_{Fj}}{x_{Dj}}, \frac{(1 - x_{Fj})}{(1 - x_{Dj})} \right] \geq \varepsilon \geq 0.$$

Зависимость  $q_+^0(\varepsilon)$  выпукла вниз и имеет минимум при промежуточном значении  $\varepsilon$ . Результаты расчета этой зависимости для колонны разделения бензола и толуола приведены на рис. 5.12.



Р и с. 5.12. Характер зависимости обратимых затрат энергии от доли отбора при заданном составе целевого потока  $g_D$

В дальнейшем мы будем предполагать составы потоков, а значит, и степень отбора выбранными.

### 5.6.2. Минимизация затрат энергии с учетом необратимых потерь

Обратимая оценка энергетических затрат занижена и не учитывает кинетики тепло- и массопереноса. Согласно (5.74) затраты энергии включают, кроме  $q_+^0$ , необратимую составляющую, пропорциональную производству энтропии  $\sigma$ . Ниже задача о минимальных необратимых затратах энергии решена для бинарной ректификации в предположении эквимолярности массообмена и близости растворов к идеальным. Температура в каждом сечении колонны  $l$  для пара и жидкости предполагается одинаковой, а теплота смешения — пренебрежимо малой, как и потери тепла в окружающую среду, состав и температура потока сырья совпадают с составом и температурой жидкости в сечении  $l_F$ .

Концентрации легколетучего компонента в паровом и жидкостном потоках обозначим как  $y(l)$  и  $x(l)$  соответственно. При этом паровой и жидкостной потоки постоянны в каждой из частей колонны (до и после ввода питания). Высоту колонны обозначим через  $H$  ( $0 \leq l \leq H$ ).

*Необратимость бинарной ректификации при подаче тепла в куб и отборе из дефлегматора.* В большинстве случаев все тепло, потребляемое в процессе ректификации, подается в куб, а отбирается из дефлегматора. Ниже для краткости такую организацию процесса будем называть традиционной. В промежуточных точках при такой схеме организации в колонну поступает только поток сырья, причем его температуру и состав стремятся сделать равным составу смеси в колонне в точке ввода питания. Это обстоятельство помогает избежать необратимых потерь, связанных со смешением потоков в точке ввода. Такая организация накладывает жесткие условия на режим колонны и, как будет показано ниже, затраты тепла  $q_+$  при заданных концентрациях потоков однозначно связаны в этом случае с производительностью колонны  $g_D$ .

Действительно, как следует из термодинамических балансов, поток  $q_+$  (см. (5.74)) складывается из обратимых затрат, зависящих от температур в кубе и дефлегматоре, составов потоков, производительности и необратимых затрат, зависящих от тех же температур и производства энтропии  $\sigma$ . В свою очередь производство энтропии состоит из двух слагаемых:

$$\sigma = \sigma_q + \sigma_g,$$

первое из которых отражает необратимость процессов теплообмена в кубе и дефлегматоре, а второе — необратимость массообмена между паром и жидкостью по высоте колонны. Найдем связь каждого из них с потоком пара  $V$ , величина которого вследствие эквимолярности массопереноса не изменяется и связана с потоком жидкости  $L$  равенствами:

для верхней части колонны

$$L_D = V - g_D; \quad (5.85)$$

для нижней части колонны

$$L_B = V + g_B = V + g_D \frac{x_D - x_F}{x_F - x_B}. \quad (5.86)$$

Производство энтропии в кубе и дефлегматоре для линейных законов теплообмена равно

$$\sigma_q(V) = V\beta[\alpha_B(T_1 - T_+) + \alpha_D(T_- - T_2)], \quad (5.87)$$

где  $\alpha_B$  и  $\alpha_D$  — коэффициенты теплопередачи в кубе и дефлегматоре,  $\beta$  — теплота парообразования (конденсации),  $T_1$  и  $T_2$  — температуры греющего пара и воды, подаваемых в куб и дефлегматор (их предполагаем известными). Для простоты эти температуры считаем постоянными. Если это не так, оценки для  $\sigma_q$  могут быть найдены по формулам, приведенным в гл. 2 для процесса теплообмена с минимальной диссипацией.

Будем использовать модель, соответствующую насадочной колонне, чтобы не усложнять ее учетом гидродинамики тарелок и иметь возможность проводить аналитические преобразования. При достаточно большом числе тарелок такая модель близка к реальности.

С учетом того, что для бинарной ректификации концентрации высококипящего компонента в жидкостном и паровом потоках равны  $1-x$  и  $1-y$  соответственно, а движущая сила процесса определяется разницей текущей концентрации  $y$  и равновесной концентрации  $y^0(x)$ , производство энтропии, связанное с массопереносом, выражается через потоки и химические потенциалы как

$$\sigma_g = \int_0^H \frac{1}{T(l)} \{g_1(y, y^0)[\mu_1(T, y^0) - \mu_1(T, y)] + g_2(1-y, 1-y^0)[\mu_2(T, 1-y) - \mu_2(T, 1-y^0)]\} dl, \quad (5.88)$$

где  $g_i$  и  $\mu_i$  — потоки массообмена и химические потенциалы компонентов.

Каждый из химических потенциалов имеет вид

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_{i0}(P, T) + RT \ln x_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.89)$$

С учетом этого

$$\begin{aligned} \mu_1(T, y^0) - \mu_1(T, y) &= RT \ln \frac{y^0}{y}, \\ \mu_2(T, 1-y) - \mu_2(T, 1-y^0) &= RT \ln \frac{1-y}{1-y^0}, \end{aligned}$$



и выражение (5.88) перепишется как

$$\sigma_g = R \int_0^H g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} dl. \quad (5.90)$$

Здесь учтено условие эквимольности массообмена

$$g(y, y^0) = -g(1-y, 1-y^0),$$

а также принято, что поток разделяемой смеси  $g_F$  подается при температуре питания в то сечение колонны, состав флегмы в котором одинаков с составом этого потока.

Таким образом, массообменная составляющая производства энтропии определяется формой равновесной и рабочей линий. Первая из них зависит от свойств разделяемой смеси (коэффициента относительной летучести  $\alpha$  (см. (5.70)), а вторая зависит от  $V$ . Эту зависимость найдем из уравнений материального баланса по легколетучему для верха и низа колонны

$$Vy(x) - g_D x_D - xL_D = 0, \quad (5.91)$$

$$L_B x - Vy(x) - g_B x_B = 0. \quad (5.92)$$

С учетом (5.85), (5.86) имеем для верха и низа колонны

$$y^D(x, V, g_D) = \left(1 - \frac{g_D}{V}\right)x + \frac{x_D g_D}{V}, \quad (5.93)$$

$$y^B(x, V, g_D) = \left(1 + \frac{g_B}{V}\right)x - \frac{x_B g_B}{V}, \quad (5.94)$$

где  $g_B(g_D) = g_D \frac{x_D - x_F}{x_F - x_B}$ .

Так как в выражении (5.88)  $y$  и  $y^0$  зависят от  $x$ , а концентрация легколетучего в паре монотонно растет по высоте колонны, то этот интеграл можно переписать как

$$\sigma_g = R \int_{x(0)}^{x(H)} g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} dx. \quad (5.95)$$

Подстановка выражений (5.93), (5.94) в равенство (5.95) определяет для заданного закона массопереноса  $\sigma_g(V, g_D)$ . При этом интеграл нужно подсчитывать как сумму интегралов на интервалах от  $x(0)$  до  $x_F$ , когда  $y(x) = y^B(x, V)$ , и от  $x_F$  до  $x(H)$ , когда  $y(x) = y^D(x, V)$ .

При переходе от  $l$  к другой независимой переменной, монотонно зависящей от  $l$ , нужно пересчитать коэффициент массопереноса, умножив  $k$  на  $H$  и разделив на диапазон изменения введенной переменной. Например, если от  $l$  произведен переход к  $x$ , то формула пересчета примет вид

$$\bar{k} = \frac{kH}{x(H) - x(0)}. \quad (5.96)$$

В действительности концентрация легколетучего в потоке флегмы, поступающей в куб, отлична от  $x_B$ . Обозначим ее через  $x_b$  и запишем уравнения материального баланса куба

$$L_B x_b = V y(x_B) + g_B x_B, \quad L_B = V + g_B,$$

откуда концентрация

$$x_b = \frac{V}{V + g_B} y(x_B) + \frac{g_B}{V + g_B} x_B,$$

оказывается средней между  $x_B$  и  $y(x_B)$ . Однако ввиду того, что как правило сами значения  $x_B$  и  $y(x_B)$  близки друг к другу, мы ниже пренебрегаем этим различием и считаем  $x(0) = x_B$ , а  $x(H) = x_D$ .

Найдем связь между потоком пара  $V$  и производительностью колонны. Для этого учтем, что общее количество легколетучего, перешедшего из жидкости в пар в верхней и нижней половине колонны, равно

$$\int_{x_B}^{x_F} g(y^B(x, V, g_D), y^0(x)) dx + \int_{x_F}^{x_D} g(y^D(x, V, g_D), y^0(x)) dx = V(x_D - x_B). \quad (5.97)$$

Условие (5.97) связывает поток пара  $V$  и производительность  $g_D$ . Обозначим эту зависимость как  $V(g_D)$ . При ее подстановке в (5.95) и (5.87) оказывается, что диссипативные затраты, а значит и полные затраты тепла  $q_+$ , полностью определяются параметрами потоков и производительностью колонны.

Из приведенных соотношений можно сделать следующий вывод: для заданной конструкции колонны бинарной ректификации, определяющей коэффициенты тепло- и массопереноса, заданных составов потоков на входе и выходе и производительности колонны расход пара, флегмовое число и затраты тепла, подаваемого в куб, фиксированы и могут быть найдены по приведенным выше соотношениям. Если же заданы составы лишь входного потока, одного из потоков на выходе и производительность по целевому потоку, то может быть выбрана доля отбора (концентрация второго потока на выходе), минимизирующая затраты энергии на разделение.

Как для всякой системы термического разделения производительность колонны ректификации по целевому потоку ограничена.

Пусть поток массопереноса пропорционален разности между рабочей и равновесной концентрациями легколетучего, тогда равенство (5.95) примет вид

$$\int_{x_B}^{x_F} k(y^0(x) - y(x))dx + \int_{x_F}^{x_D} k(y^0(x) - y(x))dx = V(x_D - x_B), \quad (5.98)$$

$y(x)$  однозначно определяется составами входного и выходных потоков  $(x_F, x_B, x_D)$ , потоком пара по колонне  $V$  и количеством отбираемого дистиллята  $g_D$ :

$$y_B(x) = x_B \frac{g_D(\varepsilon - 1)}{V\varepsilon} + x \left( \frac{g_D(1 - \varepsilon)}{V\varepsilon} + 1 \right), \quad x \leq x_F$$

$$y_D(x) = x_D \frac{g_D}{V} + x \left( 1 - \frac{g_D}{V} \right), \quad x \geq x_F$$

Подставив эти выражения в (5.98) и вычислив интегралы для  $y^0(x)$  в форме (5.97), получим зависимость потока пара от  $x_F, x_B, x_D$  и  $g_D$ :

$$V = \frac{ka \pm \sqrt{k^2 a^2 + 4(x_D - x_B)bk}}{2(x_D - x_B)}. \quad (5.99)$$

Здесь

$$a(x_B, x_D, \alpha) = \frac{\alpha(x_B - x_D)}{1 - \alpha} + \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \ln \left( \frac{1 - x_B(1 - \alpha)}{1 - x_D(1 - \alpha)} \right) + \frac{(x_B^2 - x_D^2)}{2}$$

— комплекс, зависящий от составов выходных потоков, а

$$b(g_D, x_D, x_F) = \frac{g_D}{2}(x_D - x_B)(x_F - x_D)$$

— комплекс, зависящий от расхода дистиллята и составов потоков.

Из (5.99) можно получить зависимость производительности колонны по дистилляту от потока пара по колонне и составов внешних потоков:

$$g_D = 2 \frac{(x_D - x_B)V^2 - a(x_B, x_D, \alpha)kV}{k(x_D - x_B)(x_F - x_D)}. \quad (5.100)$$

Максимум этого выражения по  $V$  определяет максимальную производительность колонны по дистилляту. Она достигается при потоке пара равном

$$V^* = \frac{ka(x_B, x_D, \alpha)}{2(x_D - x_B)} = \frac{\bar{k}Ha(x_B, x_D, \alpha)}{2(x_D - x_B)^2} \quad (5.101)$$

и равна:

$$g_D^{\max} = \frac{ka(x_B, x_D, \alpha)^2}{2(x_D - x_B)^2(x_D - x_F)} = \frac{\bar{k}Ha(x_B, x_D, \alpha)^2}{2(x_D - x_B)^3(x_D - x_F)} \quad (5.102)$$

При выводе (5.100)–(5.102) предполагалось, что величина потока пара по колонне может принимать любые значения от 0 до

$$V^{\max} = \frac{ka}{x_D - x_B}.$$

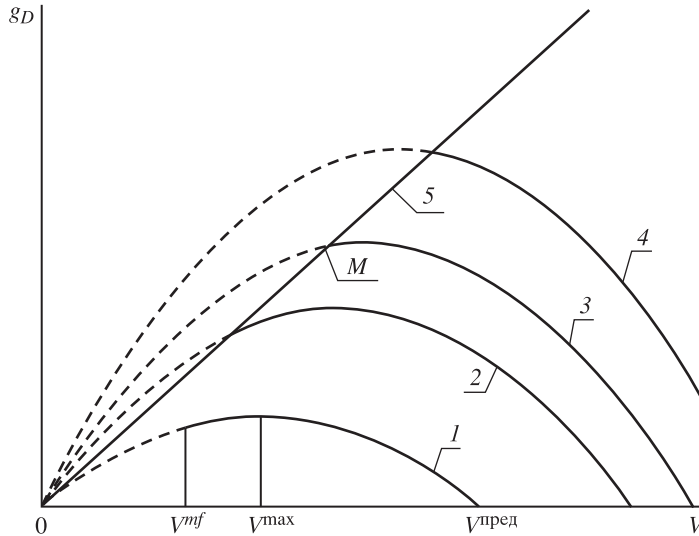
При потоке пара, превышающем это значение, величина  $g_D$  становится отрицательной. Однако на величину  $V$  и составы потоков наложен ряд ограничений. Так, состав дистиллята должен удовлетворять условию:

$$\begin{aligned} x_D > y^0(x_F), x_F > y^0(x_B) \\ V > g_D. \end{aligned} \quad (5.103)$$

С учетом (5.100) равенство (5.103) примет форму:

$$V = k \frac{2a + (x_D - x_B)(x_F - x_D)}{2(x_D - x_B)}. \quad (5.104)$$

Для тарельчатых колонн поток пара должен быть таким, чтобы не происходило провала жидкости и ее уноса с паром.

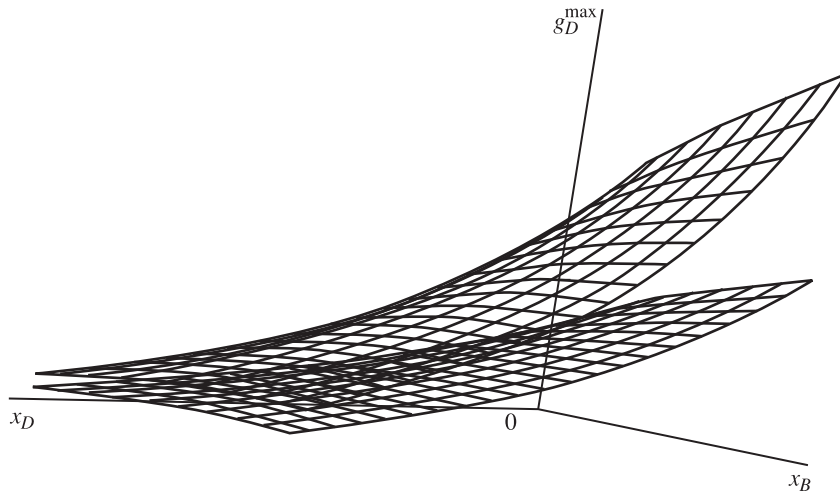


Р и с. 5.13. Зависимость производительности колонны по дистилляту от потока пара для разных составов внешних потоков

На рис. 5.13 изображена зависимость производительности колонны по дистилляту от потока пара для разных составов внешних потоков. По оси абсцисс отложена величина расхода пара по колонне  $V$  (моль/с), по оси ординат — расход дистиллята  $g_D$  (моль/с). Кривые 1, 2, 3, 4 изображают величину потока дистиллята при одном и том же составе питания ( $x_F = 0,5$ ) и кубового остатка ( $x_B = 0,05$ ) и различных составах дистиллята: кривой 1 соответствует  $x_D = 1$ , кривой 2 —  $x_D = 0,85$ , кривой 3 —  $x_D = 0,8$ , кривой 4 —  $x_D = 0,75$ .

Прямая 5 соответствует условию (5.103), реализуемыми являются режимы, лежащие ниже прямой 5.

На рис. 5.14 изображен характер зависимости максимальной производительности колонны по дистилляту  $g_D^{\max}$  от  $x_B$  и  $x_D$ .



Р и с. 5.14. Зависимость максимальной производительности колонны по дистилляту от составов выходных потоков

Экстремально зависит производительность колонны по целевому продукту и от подачи тепла в куб  $q_+$ .

**Идеальная рабочая линия.** Как показано выше, затраты энергии включают, кроме  $q_+^0$ , необратимую составляющую, пропорциональную производству энтропии  $\sigma$ . В отличие от производства энтропии  $\sigma_q$ , связанного с подачей и отбором тепла, производство энтропии при массопереносе зависит от формы равновесной и рабочей линий, так как движущая сила процесса массопереноса определяется различием текущей концентрации  $y(x)$  и равновесной концентрации  $y^0(x)$ . Найдем идеальную, с точки зрения минимума диссипации при массопереносе, форму рабочей линии. Эта линия за счет выбора организации процесса (профиля подачи или отбора тепла по высоте колонны) может быть точно или приближенно реализована. Соответствующее ей минимальное производство энтропии  $\sigma_{g \min}$  (далее индекс  $g$  опускаем и, говоря о производстве энтропии, будем иметь в виду ту его составляющую, которая связана с массопереносом) при его сравнении с производством энтропии в реальной колонне показывает, целесообразно ли усложнение конструкции колонны.

Производство энтропии, связанное с массопереносом, имеет вид (5.88). Функции  $y$  и  $y^0$  зависят от  $x$ , но явно эта переменная не входит в выражение для  $\sigma$ . Так как  $y^0$  — однозначная и монотонная функция  $x$ , а значит, и  $l$ , то для подсчета производства энтропии в колонне, когда  $l$  меняется от нуля до  $H$ , можно воспользоваться выражением

$$\sigma = R \int_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} dy^0. \quad (5.105)$$

Поток  $g$  зависит от концентрации  $y(x)$ , равновесной концентрации  $y^0(x)$  и коэффициента массопереноса  $k$ , отнесенного к единице длины колонны. При интегрировании по  $y^0$  в знаменателе выражения (5.96) фигурирует разность  $y^0(H) - y^0(0)$ .

Найдем форму рабочей линии, минимизирующую  $\sigma$  при заданном значении эквивалентного потока массопереноса  $g$ :

$$\int_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y, y^0) dy^0 = x. \quad (5.106)$$

Величина  $x$ , характеризующая интенсивность массопереноса, зависит от концентраций входных и выходных потоков. Мы найдем ее значение ниже.

Для большинства реальных законов массопереноса задача (5.105), (5.106) выпукла вниз по  $y$ , и ее решение соответствует условию стационарности функции Лагранжа

$$L = g(y, y^0) \left( \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} - \gamma \right),$$

которое определяет оптимальную зависимость  $y(y^0, \gamma)$  — идеальную рабочую линию. Запишем условие минимальной диссипации массопереноса в колонне бинарной ректификации (условие стационарности по  $y$  функции  $L$ ), не предполагая, как это было сделано в [30], постоянства парового потока по высоте колонны:

$$\ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} - \frac{g(y, y^0)}{\partial g / \partial y(1-y)y} = \gamma. \quad (5.107)$$

Таким образом, для каждого сечения колонны должно быть постоянно выражение, стоящее в левой части равенства (5.107). В частности, для линейного закона массопереноса

$$g(y, y^0) = \bar{k}(y^0 - y) \quad (5.108)$$

условие (5.107) примет форму

$$\ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} + \frac{y^0-y}{y(1-y)} = \gamma. \quad (5.109)$$

Условия минимальной диссипации (5.107), (5.109) позволяют для реальной колонны с известной равновесной и рабочей линиям  $y^0(x)$  и  $y(x)$ , построить левую часть выражения (5.109), исключив  $x$  и найдя  $y(y^0)$ . Близость полученной зависимости к константе косвенно говорит о близости режима к термодинамически оптимальному.

Условия (5.107), (5.109) не позволяют выразить в аналитической форме  $y(y^0, \gamma)$ . Обозначим  $\Delta = y^0 - y$  и будем предполагать эту разницу достаточно малой. Тогда в левой части (5.109) можно  $y$  заменить как  $y = y^0 - \Delta$ , разложить получившееся выражение в ряд Тэйлора по  $\Delta$  и пренебречь слагаемыми, имеющими порядок малости  $\Delta^2$ . После несложных выкладок получим приближенное равенство

$$\Delta(y^0, \gamma) = \frac{\gamma}{2} y^0 (1 - y^0),$$

откуда

$$y(y^0, \gamma) = y^0 \left( 1 - \frac{\gamma}{2} (1 - y^0) \right). \quad (5.110)$$

Так как  $y \leq y^0$ , то величина  $\gamma$  в этих равенствах положительна, ее находят из условия (5.106). Оценка сверху для  $\gamma$  может быть получена исходя из того, что для любого  $x \in (0, 1)$  должно быть выполнено неравенство

$$y(y^0, \gamma) > x. \quad (5.111)$$

Нетрудно показать, что для  $y^0(x)$  в форме (5.97) и  $y(y^0, \gamma)$  в форме (5.110) неравенство (5.111) приводит к неравенству для  $\gamma$  вида

$$\gamma \leq 2 \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \quad (5.112)$$

Условие (5.107) нетрудно разрешить относительно  $y$  в том случае, когда режим недалек от равновесного и эквивалентный поток пропорционален движущей силе

$$g(y, y^0) = \bar{k} \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)}. \quad (5.113)$$

Подстановка этой зависимости в (5.107) приводит к условию

$$\frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} = \text{const} = \gamma,$$

откуда

$$y(y^0) = \frac{y^0}{\gamma - (\gamma - 1)y^0}. \quad (5.114)$$

Для зависимости  $y^0(x)$  в форме (5.97) получим с точностью до параметра  $\gamma$  уравнение идеальной рабочей линии в колонне бинарной ректификации

$$y(x) = \frac{\alpha x}{\gamma + (\alpha - \gamma)x}. \quad (5.115)$$

Так как  $y(x) > x$ , то для параметра  $\gamma$  справедливы неравенства

$$1 < \gamma < \alpha. \quad (5.116)$$

*Связь интенсивности массопереноса с параметрами внешних потоков и термодинамический предел производительности колонны.* Условие (5.107) и вытекающие из него зависимости (5.110), (5.114) определяют  $y(y^0)$  с точностью до произвольной константы  $\gamma$ . Чтобы найти эту константу, нужно выразить величину  $x$  в выражении (5.106) через производительность колонны и концентрации внешних потоков.

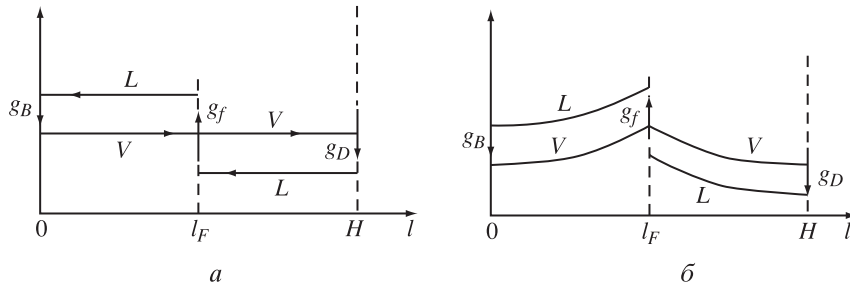
Изменение расхода пара и флегмы по высоте колонны для всех  $l \neq l_F$  происходит из-за массопереноса и подачи (отбора) тепла. Так как массоперенос эквимолярный, а при подаче тепла вся испаряющаяся жидкость переходит в пар, то для  $l \neq l_F$

$$\frac{dV}{dL} = 1, \quad (5.117)$$

а значит, для нижней (исчерпывающей) и верхней (укрепляющей) частей колонны справедливы равенства

$$L_B = V_B + g_B, \quad L_D = V_D - g_D. \quad (5.118)$$

Характер изменения парового и жидкостного потока по высоте колонны без промежуточного подвода и с промежуточным подводом тепла показан на рис. 5.15.



Р и с. 5.15. Характер изменения расхода пара и флегмовой жидкости по высоте колонны без промежуточного (а) и с промежуточным (б) подводом (отводом) тепла



Равенства (5.118) справедливы, когда  $L$  и  $V$  зависят не только от  $l$ , но и от любой переменной, монотонно изменяющейся по высоте колонны ( $x, y^0, y, \dots$ ).

Поток пара для любого сечения колонны, а значит, для значения  $x$ , соответствующего этому сечению, может быть найден из условия материального баланса по легколетучему компоненту для участка колонны, расположенного между текущим сечением и ее верхним (нижним) концом. Так, для верхней части колонны

$$V_D(x)y(x) - g_D x_D - xL_D(x) = 0.$$

Откуда, учитывая, что для любого  $x$   $L_D = V_D - g_D$ , получим

$$V_D(x) = g_D \frac{x_D - x}{y(x) - x}. \quad (5.119)$$

Совершенно аналогично для нижней части колонны

$$V_B(x) = g_B \frac{x - x_B}{y(x) - x}. \quad (5.120)$$

Поток легколетучего от жидкости к пару и высококипящего от пара к жидкости складывается из потока массопереноса  $g(y, y^0)$  и потока, связанного с испарением жидкости или с конденсацией пара при подводе (отводе) тепла (обозначим его  $g_q$ ). Последний в силу эквимолярности массопереноса пропорционален изменению парового потока. При испарении жидкости поток легколетучего, переходящего в пар, равен

$$g_q(y, x) = y \frac{dV}{dx}.$$

При конденсации пара поток высококипящего, переходящего в жидкость,

$$g_q(y, x) = -(1 - x) \frac{dV}{dx}.$$

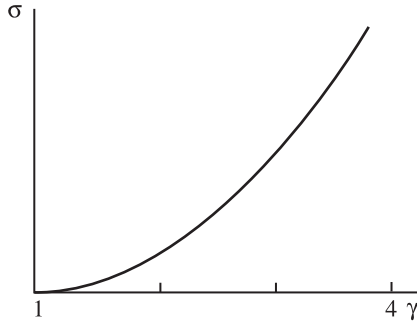
Подсчитаем  $g_q$  для  $V_D(x)$  и  $V_B(x)$  в соответствии с (5.119) и (5.120), выразив поток  $g_B$  через  $g_D$ . Получим

$$\begin{aligned} g_q^D(y, x) &= -g_D(1 - x) \left[ \frac{(1 - dy/dx)(x_D - x)}{(y - x)^2} - \frac{1}{y - x} \right] = \\ &= g_D f_D(x, \gamma), \quad x_F \leq x \leq x_D, \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} g_q^B(y, x) &= g_D y \frac{x_D - x_F}{x_F - x_B} \left[ \frac{(1 - dy/dx)(x - x_B)}{(y - x)^2} + \frac{1}{y - x} \right] = \\ &= g_D f_B(x, \gamma), \quad x_B \leq x < x_F. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Здесь  $\gamma$  — неопределенный параметр, характеризующий интенсивность массопереноса и входящий в уравнение для идеальной рабочей линии.

Когда идеальная рабочая линия имеет вид (5.115), минимальное производство энтропии при изменении  $\gamma$  от 1 до  $\alpha$  меняется в соответствии с рис. 5.16.



Р и с. 5.16. Зависимость минимального производства энтропии в колонне от параметра  $\gamma$ , характеризующего среднюю интенсивность массопереноса

Общий поток массопереноса от жидкости к пару для нижней части колонны равен разности количества легколетучего, поступающего с флегмой и с потоком питания в сечение  $l_F$ , и выходящего из куба, так что

$$\int_{x_b}^{x_F} [g(y, y^0) + g_q^B(y, x)] dx = L(x_F)x_F + (g_B + g_D)x_F - g_B x_B. \quad (5.123)$$

В силу (5.118)  $L(x_F)$  можно выразить через паровой поток  $V(x_F)$  в сечении  $l_F$  и переписать это равенство в форме

$$\int_{x_b}^{x_F} g(y, y^0) dx = g_B(x_F - x_B) + V(x_F)x_F - \int_{x_b}^{x_F} g_q^B(y, x) dx. \quad (5.124)$$

Аналогично для верхней части колонны поток переноса высококипящего от пара к жидкости равен разности количества высококипящего компонента, поступающего с паром в сечение  $l_F$  и выходящего с потоком из дефлегматора

$$\int_{x_F}^{x_d} [g(y, y^0) + g_q^D(y, x)] dx = V(x_F)(1 - y(x_F)) - g_D(1 - x_D). \quad (5.125)$$

Так что

$$\int_{x_F}^{x_d} g(y, y^0) dx = V(x_F)(1 - y(x_F)) - g_D(1 - x_D) - \int_{x_F}^{x_d} g_q^D(y, x) dx. \quad (5.126)$$

Заменим  $V(x_F)$  в соответствии с (5.119) и подсчитаем общий поток массопереноса:

$$\int_{x_b}^{x_d} g(y, y^0) dx = g_D \left\{ \frac{x_D - x_F}{y(x_F) - x_F} - (1 - x_D) - \int_{x_b}^{x_F} f_B(x, \gamma) dx - \int_{x_F}^{x_d} f_D(x, \gamma) dx \right\}. \quad (5.127)$$

Так как  $y, x_b, x_d, y(x_F)$  зависят от неопределенной константы  $\gamma$ , то уравнение (5.127) определяет эту константу для заданной величины продуктового потока  $g_D$ , составов исходного сырья и выходных потоков.

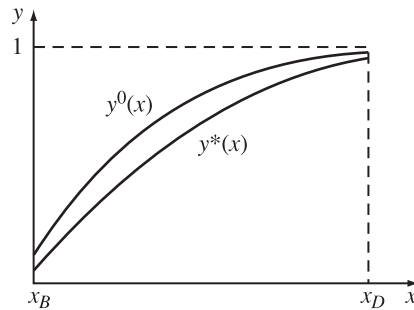
Конкретизируем это уравнение для случая, когда идеальная рабочая линия имеет вид (5.115). В этом случае

$$x_d = \frac{\gamma x_D}{\gamma x_D + \alpha(1 - x_D)},$$

$$x_b = \frac{\gamma y^0(x_B)}{\gamma y^0(x_B) + \alpha(1 - y^0(x_B))},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\gamma}{[\alpha x + \gamma(1 - x)]^2}.$$

**Пример.** Пусть  $k = 87,6 \left[ \frac{\text{моль}}{\text{с м}} \right]$ ,  $x_D = 0,95$ ,  $x_F = 0,5$ ,  $x_B = 0,05$ ,  $g_D = 530$  [моль/с],  $H = 11,4$  м; зависимость  $y^0(x)$  имеет вид (5.97) с коэффициентом относительной летучести  $\alpha = 4$ , а зависимость  $y(y^0)$  имеет вид (5.114). Найдём величину  $\gamma$  из условия (5.127), в котором левая часть с учетом равенства (5.96) при переходе от  $\bar{k}$  к  $k$  равна  $kH \ln \gamma$ . Численно решая уравнение (5.127), получим  $\gamma = 1,5$ . На рис. 5.17 показана идеальная рабочая линия.



Р и с. 5.17. Равновесная и идеальная рабочая линия в колонне бинарной ректификации

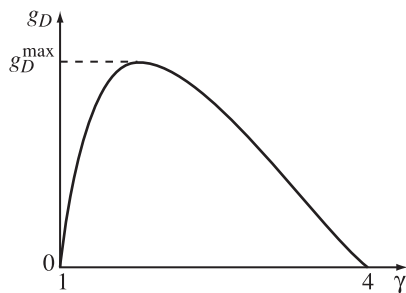
Минимальная диссипация массопереноса в колонне для процесса, мало отклоняющегося от равновесного, равна (см. рис. 5.16)

$$\sigma_{\min} = RkH \ln^2 \gamma. \quad (5.128)$$

**Максимальная производительность колонны ректификации.** Выше мы рассмотрели вопрос о максимальной производительности для колонны ректификации с традиционной подачей и отбором тепла. В колонне с идеальной рабочей линией производство энтропии меньше, а следовательно ее предельная производительность может служить оценкой сверху для производительности колонны с произвольным профилем подачи и отбора тепла.

Уравнение (5.127) позволяет найти термодинамический предел для максимальной производительности  $g_D^{\max}$  колонны. Для этого нужно разрешить это уравнение относительно  $g_D$  и найти максимум полученного выражения по параметру  $\gamma$ .

Так, для тех данных, которые были использованы в примере, на рис. 5.18 показана зависимость производительности колонны от параметра  $\gamma$ . Каждому расходу, кроме  $g_D^{\max} = 576,8$  [моль/с], отвечают два значения  $\gamma$ , причем меньшее из них в соответствии с (5.128) соответствует минимуму, а большее — максимуму производства энтропии  $\sigma$ . Например,  $g_D = 530$  [моль/с] соответствуют  $\gamma = 1,5$  и  $\gamma = 2,25$ .



Р и с. 5.18. Зависимость производительности колонны от параметра  $\gamma$  идеальной рабочей линии

Более точную оценку предельной производительности можно получить, учтя производство энтропии  $\sigma_T$ , связанное с подводом тепла в куб и отводом из дефлегматора при испарении и конденсации парового потока.

*Возможности реализации идеальной рабочей линии.* Для того чтобы выявить, как должны изменяться по высоте колонны потоки пара и флегмы, реализующие условия минимальной диссипации, и вытекающую из них идеальную форму рабочей линии, учтем, что в каждом сечении выполнено равенство

$$V(x) \frac{dy}{dl} = g(y, y^0).$$

Так как  $dy/dl = (dy/dx)(dx/dl)$ , то изменение концентрации легколетучего в жидкости по высоте колонны отвечает дифференциальному

уравнению

$$\frac{dx}{dl} = \frac{g(y, y^0)}{V(x) \frac{dy}{dx}}, \quad x(0) = x_b, \quad x(H) = x_d. \quad (5.129)$$

Оптимальное с точки зрения минимума диссипации сечение  $l_F$  определяется по условию  $x(l_F) = x_F$  составом разделяемой смеси.

Уравнения (5.129), (5.119), (5.120) позволяют найти законы изменения по высоте концентраций  $x(l)$ ,  $y(l) = y(x(l))$ , парового и жидкостного потоков  $V(l) = V(x(l))$  и в соответствии с условиями (5.118) найти  $L(l)$ .

Интенсивность подачи (отбора) тепла

$$q(l) = \beta \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dl},$$

где  $\beta$  — теплота парообразования.

Для укрепляющей и исчерпывающей частей колонны

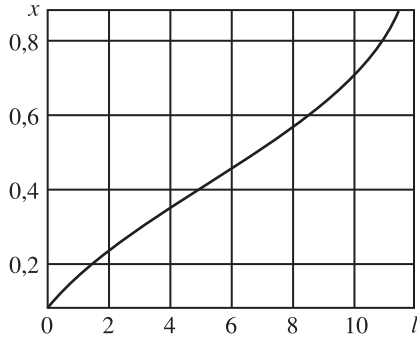
$$q_D(l) = \beta \frac{\left[ V_D(x) \left( 1 - \frac{dy}{dx} \right) - g_D \right]}{y(x) - x} \frac{g(y, y^0)}{V_D(x) \frac{dy}{dx}},$$

$$q_B(l) = \beta \frac{\left[ V_B(x) \left( 1 - \frac{dy}{dx} \right) + g_B \right]}{y(x) - x} \frac{g(y, y^0)}{V_B(x) \frac{dy}{dx}}. \quad (5.130)$$

При этом в правые части этих равенств нужно вместо  $x$  подставить решение  $x(l)$  уравнения (5.129).

Решение уравнений (5.130) позволяет перейти от  $q(x)$  к  $q(l)$  и найти тот профиль подачи тепла, который минимизирует необратимость процесса массопереноса в колонне ректификации заданной производительности.

На рис. 5.19 для тех же данных, что и в предыдущем примере, изображены изменение концентрации легколетучего в жидкости по высоте колонны  $x(l)$ . Значению  $x_F = 0,5$  соответствует высота ввода питания  $l_F = 6,76$  [м]. Зная зависимость парового потока от  $x$  и изменение  $x$  по длине, можно найти по формулам (5.130) закон изменения подачи (отбора) тепла по высоте колонны.



Р и с. 5.19. Изменение концентрации легколетучего в жидкости по высоте колонны

**Расчет коэффициента массопереноса по результатам измерений на действующей колонне.** Для расчета формы идеальной рабочей линии необходимо найти коэффициент массопереноса  $k$ . Фактическое значение  $k$ , как правило, не известно, однако можно оценить  $k$  по результатам работы действующей колонны. Если известны значения  $V, \varepsilon, y_D, y_F, x_D$  и  $x_F, g_D$ , а также форма равновесной линии  $y^0(x)$ , то для закона массопереноса, линейного относительно разности  $y^0 - y$ , имеем

$$V(y_D - y_F) = kH_{FD} \int_{x_F}^{x_D} (y^0(x) - y(x)) dx. \quad (5.131)$$

Здесь  $H_{FD}$  — высота укрепляющей части колонны. Интеграл от  $y$  в этом выражении с учетом линейности рабочей линии равен

$$\int_{x_F}^{x_D} y(x) dx = \frac{V}{V - g_D} \int_{y_F}^{y_D} y dy = \frac{V(y_D^2 - y_F^2)}{2(V - g_D)}.$$

После подстановки этого равенства в (5.131) получим

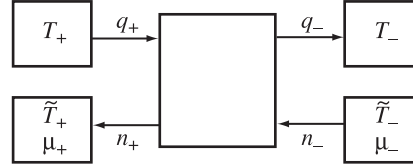
$$kH_{FD} = \frac{V(y_D - y_F)}{\int_{x_F}^{x_D} y^0(x) dx - \frac{V(y_D^2 - y_F^2)}{2(V - g_D)}}. \quad (5.132)$$

## 5.7. Абсорбционно-десорбционный цикл

**Оценка КПД термодиффузионного цикла.** В целом ряде технологических процессов происходит затрата высокопотенциального тепла с температурой  $T_+$  с целью передачи потока вещества  $n$  от источника с низким потенциалом  $\mu^-$  к источнику с высоким потенциалом  $\mu^+$ . Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из двух источников

тепла, двух источников вещества бесконечной емкости и рабочего тела (рис. 5.20).

Р и с. 5.20. Схема термодиффузионного цикла разделения газов



Введем следующие обозначения:  $T_+$  — температура горячего источника тепла;  $T_-$  — температура холодного источника тепла;  $\mu_+$  — химический потенциал источника, принимающего вещество;  $\mu_-$  — химический потенциал источника, отдающего вещество;  $\tilde{T}_+$  — температура источника вещества с химическим потенциалом  $\mu_+$ ;  $\tilde{T}_-$  — температура источника вещества с химическим потенциалом  $\mu_-$ .

Считаем, что

$$T_+ > T_-, \quad \tilde{T}_+ > \tilde{T}_-, \quad \mu_+ > \mu_-.$$

Ввиду того, что источники тепла и вещества обладают бесконечной емкостью, параметры  $T$ ,  $\mu$ , характеризующие их состояние, во времени не меняются. Рабочее тело циклически меняет свое состояние, поочередно контактируя с каждым из источников, получая при этом от горячего источника некоторое количество тепла  $q_+$ , от источника вещества с химическим потенциалом  $\mu_-$  — некоторое количество вещества  $n_-$  и отдавая холодному источнику количество тепла  $q_-$ , а источнику вещества с химическим потенциалом  $\mu_+$  — количество вещества  $n_+$ .

Запишем термодинамические балансы системы:

для энергии

$$q_+ - q_- = 0 \Rightarrow q_+ = q_- = q; \quad (5.133)$$

для вещества

$$n_+ - n_- = 0 \Rightarrow n_+ = n_- = n; \quad (5.134)$$

для энтропии

$$\left( \frac{1}{T_+} - \frac{1}{T_-} \right) q - \left( \frac{\mu_-}{\tilde{T}_-} - \frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} \right) n + \sigma = 0. \quad (5.135)$$

Здесь  $\sigma$  — производство энтропии системы.

Выразим КПД термодиффузионного цикла как отношение количества вещества, отдаваемого рабочим телом, к количеству затраченного тепла:

$$\eta = \frac{n}{q}.$$

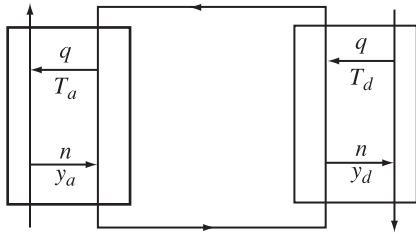
Из уравнения баланса энтропии найдем

$$\eta = \frac{n}{q} = \frac{\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+}}{\frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \frac{\mu_-}{\tilde{T}_-}} - \frac{\sigma}{q \left( \frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \frac{\mu_-}{\tilde{T}_-} \right)}. \quad (5.136)$$

Обратимая оценка КПД термодиффузионного цикла ( $\sigma \rightarrow 0$ ) примет форму ( $\sigma = 0$ )

$$\eta_0 = \frac{\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+}}{\frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \frac{\mu_-}{\tilde{T}_-}}. \quad (5.137)$$

**Предельные возможности абсорбционно-десорбционного цикла.** Расчетная схема процесса однокомпонентной абсорбции-десорбции приведена на рис. 5.21.



Р и с. 5.21. Схема абсорбционно-десорбционного цикла с циркулирующей рабочей жидкостью

Раствор абсорбента циркулирует по замкнутому контуру, контактируя с очищаемым газом, насыщаясь при этом абсорбтивом и регенерируя в десорбере, отдавая поглощенный газ в парогазовую смесь (ПГС). Далее ПГС подается в конденсатор, где пары воды конденсируются, и в газовой фазе остается почти чистый распределяемый компонент. Тепло для процесса подводится в десорбере с парогазовой смесью и передается раствору в основном путем конденсации части пара. В общем случае в десорбере происходит как выделение из раствора поглощаемого компонента, так и поглощение раствором паров воды. Будем считать, что тепло, вносимое при конденсации, является частью общего теплового потока от ПГС к раствору. Очищаемый газ в абсорбере и ПГС в десорбере будем называть *источниками*.

Состояние раствора при однокомпонентной абсорбции можно охарактеризовать следующими переменными: энтропией  $S$ , внутренней энергией  $E$  и концентрацией распределяемой компоненты  $x$ . Скорости изменения этих переменных связаны с тепловым потоком  $q$ , потоком вещества  $n$ , температурой  $T$ , химическим потенциалом  $\mu$



раствора следующими соотношениями:

$$\dot{S} = \frac{q}{T} - \frac{\mu n}{T}, \quad (5.138)$$

$$\dot{E} = q, \quad (5.139)$$

$$\dot{x} = \beta n. \quad (5.140)$$

Здесь производная берется по времени пребывания элемента раствора в схеме;  $\beta$  — коэффициент пропорциональности. При записи уравнения (5.140) предполагается, что масса распределяемой компоненты значительно меньше массы раствора, и изменением последней можно пренебречь.

Если считать смесь идеальным раствором, то можно записать

$$\mu = \mu_0(T, P) + RT \ln x, \quad (5.141)$$

где  $\mu_0(T, P)$  — стандартный химический потенциал чистого компонента;  $P$  — давление насыщенного пара компонента.

Потоки тепла  $q$  и вещества  $n$ , которыми обмениваются очищаемый газ и ПГС с раствором в абсорбере и десорбере, в общем случае изменяются как во времени, так и при переходе раствора из абсорбера в десорбер и обратно. Если предполагать, что тепломассообмен происходит вблизи равновесия, то законы, определяющие потоки тепла и вещества, можно задать соотношениями Онзагера

$$q = \lambda_n \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) + \alpha_n \left( \frac{\mu_n}{T_n} - \frac{\mu}{T} \right), \quad (5.142)$$

$$n = \alpha_n \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) + k_n \left( \frac{\mu_n}{T_n} - \frac{\mu}{T} \right), \quad (5.143)$$

где  $T_n, \mu_n$  — температура и химический потенциал распределяемого компонента в источнике;  $T, \mu$  — температура и химический потенциал распределяемого компонента в растворе;  $k_n$  — коэффициент массопередачи;  $\lambda_n$  — коэффициент теплопередачи;  $\alpha_n$  — коэффициент, учитывающий термодиффузию. Ниже всюду индексом  $a$  будем отмечать переменные, относящиеся к абсорберу, а индексом  $d$  — к десорберу. Для абсорбера  $T_n = T_a, \mu_n = \mu_a$ ; для десорбера  $T_n = T_d, \mu_n = \mu_d$ ; феноменологические коэффициенты  $k_n, \alpha_n, \lambda_n$  для абсорбера и десорбера различны.

Ввиду того, что параметры состояния раствора  $S, E$  и  $x$  периодически изменяются, на них накладывается условие цикличности

$$S(0) = S(\tau), \quad E(0) = E(\tau), \quad x(0) = x(\tau),$$

где  $\tau$  — время цикла.

С учетом зависимостей (5.138)–(5.140) условия цикличности можно представить в следующем виде:

$$\int_0^\tau \left( \frac{q}{T} - \frac{\mu n}{T} \right) dt = 0, \quad \int_0^\tau q dt = 0, \quad \int_0^\tau n dt = 0.$$

Обозначая чертой операцию усреднения на интервале  $(0, \tau)$ , эти условия можно записать как

$$\overline{\left( \frac{q}{T} \right)} - \overline{\left( \frac{\mu n}{T} \right)} = 0, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{n} = 0.$$

Абсорбционно-десорбционный цикл (АДЦ) в такой постановке представляет собой частный случай термодиффузионного, при этом  $T_+ \sim T_d$ ,  $T_- \sim T_a$ ,  $\mu_+ \sim \mu_a$ ,  $\mu_- \sim \mu_d$ . Поэтому из формулы (5.137) следует обратимая оценка для КПД АДЦ

$$\eta_0 = \frac{\bar{n}}{\bar{q}} = \frac{\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_d}}{\frac{\mu_d}{T_d} - \frac{\mu_a}{T_a}} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}. \quad (5.144)$$

В необратимых процессах

$$\eta = \frac{\bar{n}}{\bar{q}} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} - \frac{\sigma}{q \Delta u_2}. \quad (5.145)$$

Здесь введены обозначения для движущих сил процесса

$$\Delta u_1 = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_d}, \quad \Delta u_2 = \frac{\mu_d}{T_d} - \frac{\mu_a}{T_a}.$$

Будем в дальнейшем называть  $\Delta u_1$  *тепловым напором*, а  $\Delta u_2$  — *концентрационным напором*.

Из выражения (5.144) следует, что минимальное количество тепла, необходимое для выделения из газа одного моля вещества при заданных параметрах источников, определяется выражением

$$Q_0 = \frac{T_a \mu_a - T_d \mu_d}{T_d - T_a}, \quad (5.146)$$

где  $Q_0$  — затраты тепла в обратимом процессе.

Эффективность использования тепла в АДЦ можно охарактеризовать отношением работы, потребной для обратимого разделения моля двухкомпонентной смеси, к количеству тепла, затрачиваемого для такого же разделения в АДЦ (термическим КПД). Если учесть, что обратимая работа разделения моля газа, поступающего в абсорбер,

$$A_0 = -T_a R [y_a \ln y_a + (1 - y_a) \ln(1 - y_a)],$$

то термический КПД

$$\eta = \frac{A_0}{Q_0} = R \left( 1 - \frac{T_a}{T_d} \right) \frac{y_a \ln y_a + (1 - y_a) \ln(1 - y_a)}{\mu_a/T_a - \mu_d/T_d}. \quad (5.147)$$

Здесь  $y_a$  — концентрация отделяемого компонента в очищаемом газе.

*Предельная производительность АДЦ.* Под производительностью АДЦ будем понимать количество компонента, отобранного из раствора за время его пребывания в десорбере. Задача сводится к усредненной задаче условной оптимизации вида

$$\overline{|n|} \rightarrow \max \quad (5.148)$$

при условиях

$$\overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0, \quad \overline{\left(\frac{q}{T}\right)} - \overline{\left(\frac{n\mu}{T}\right)} = 0. \quad (5.149)$$

Задача о предельной производительности (5.148), (5.149) имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Изобразим в одной координатной системе  $\sigma, n, q$ , скорость изменения энтропии раствора  $\sigma(n, q)$  и  $|n|$ . Для этого выразим  $\sigma$  через потоки  $n, q$  и параметры источников  $T_n$  и  $\mu_n$ , которые не меняются в ходе процесса. С учетом (5.142) и (5.143) выражение (5.138) можно переписать в виде

$$\dot{S} = \frac{q^2}{\tilde{\lambda}_n} - \frac{n^2}{\tilde{k}_n} - nq\tilde{\alpha}_n + qu_{1n} - nu_{2n}, \quad (5.150)$$

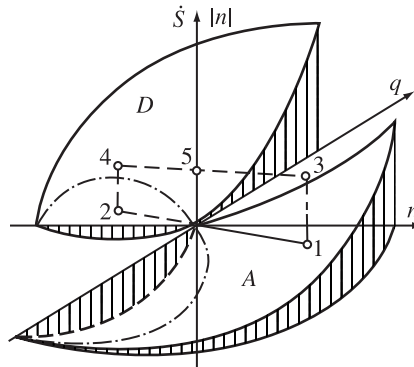
где

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n - \frac{\alpha_n^2}{k_n}, \quad \tilde{k}_n = k_n - \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n},$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{2\alpha_n}{k_n\lambda_n - \alpha_n^2}, \quad u_{1n} = \frac{1}{T_n}, \quad u_{2n} = \frac{\mu_n}{T_n}.$$

На рис. 5.22. изображена зависимость  $\dot{S} = \sigma(q, n)$ , причем  $q \leq 0$  и  $n \geq 0$  соответствуют процессу абсорбции с параметрами  $\tilde{\lambda}_a, \tilde{k}_a, \tilde{\alpha}_a, u_{1a}, u_{2a}$ , а  $q \geq 0$  и  $n < 0$  соответствуют процессу десорбции с параметрами  $\tilde{\lambda}_d, \tilde{k}_d, \tilde{\alpha}_d, u_{1d}, u_{2d}$ .

Р и с. 5.22. Геометрическая иллюстрация задачи о максимуме производительности абсорбционно-десорбционного цикла



В общем случае задача (5.148), (5.149) имеет четыре базовые точки, где  $y_a$  и  $y_d$  — концентрации распределяемой компоненты в газе в

абсорбере и десорбере соответственно. Нетрудно показать, что изменение параметров источников в сторону увеличения  $T_d$ ,  $y_a$  и в сторону уменьшения  $T_a$ ,  $y_d$  ведет к росту предельной величины отбираемого потока. Поэтому решение задачи не изменится, если условия в форме равенств

$$T_d = T_d^{\max}, \quad y_a = y_a^{\max} \quad T_a = T_a^{\min}, \quad y_d = y_d^{\min},$$

заменить неравенствами

$$T_d \leq T_d^{\max}, \quad y_a \leq y_a^{\max}, \quad T_a \geq T_a^{\min}, \quad y_d \geq y_d^{\min}, \quad (5.151)$$

считая параметры источников  $T_d$ ,  $y_a$ ,  $T_a$ ,  $y_d$  переменными, ограниченными значениями  $T_d^{\max}$ ,  $y_a^{\max}$ ,  $T_a^{\min}$ ,  $y_d^{\min}$ . Неравенства (5.134) выделяют в пространстве координат  $\sigma$ ,  $n$ ,  $q$  области  $\tilde{A}$  и  $\tilde{D}$ , ограниченные вертикальными плоскостями  $(\sigma, q)$ ,  $(\sigma, n)$  и поверхностями  $A$  и  $D$ , определяемыми уравнением (5.133). Области  $\tilde{A}$  и  $\tilde{D}$  выпуклы, а целевая функция  $|n|$  линейна на каждой из них, следовательно, число базовых точек сводится к двум. Таким образом, задача состоит в том, чтобы так выбрать точку 1, принадлежащую поверхности  $A$ , и точку 2, принадлежащую поверхности  $D$ , чтобы соединяющая их линия проходила через начало координат, а линия, соединяющая точки 3 и 4 с координатами  $n$  и  $-n$  соответственно, как можно выше пересекала ось  $|n|$ .

Для двух базовых точек задача (5.148), (5.149) с учетом зависимости (5.150) может быть записана в виде

$$\gamma_a |n_a| + \gamma_d |n_d| \rightarrow \max_{n_a, n_d, q_a, q_d, \gamma_a, \gamma_d} \quad (5.152)$$

при условиях

$$\sum_{\nu \in \{a, d\}} \gamma_\nu \left( \frac{q_\nu^2}{\tilde{\lambda}_\nu} + \frac{n_\nu^2}{\tilde{k}_\nu} - n_\nu q_\nu \tilde{\alpha}_\nu + q_\nu u_{1\nu} - n_\nu u_{2\nu} \right) = 0,$$

$$\gamma_a n_a + \gamma_d n_d = 0, \quad \gamma_a q_a + \gamma_d q_d = 0,$$

$$\gamma_a + \gamma_d = 1, \quad n_a \geq 0, \quad n_d \leq 0, \quad q_a \leq 0, \quad q_d \geq 0, \quad \gamma_a \geq 0, \quad \gamma_d \geq 0. \quad (5.153)$$

Весовые коэффициенты  $\gamma_a$  и  $\gamma_d$  соответствуют доле общего времени цикла, в течение которой раствор вступает в контакт с источником в абсорбере и десорбере соответственно. Задача (5.152), (5.153) путем преобразований сводится к поиску экстремума функции двух переменных —  $n_d$  и  $q_d$ :

$$I = \frac{n_d \left( \frac{q_d^2}{\tilde{\lambda}_d} + \frac{n_d^2}{\tilde{k}_d} - n_d q_d \tilde{\alpha}_d - q_d \Delta u_1 - n_d \Delta u_2 \right)}{\frac{\tilde{\lambda}_d - \tilde{\lambda}_a}{\tilde{\lambda}_d \tilde{\lambda}_a} q_d^2 + \frac{\tilde{k}_d - \tilde{k}_a}{\tilde{k}_d \tilde{k}_a} n_d^2 - n_d q_d (\tilde{\alpha}_d - \tilde{\alpha}_a) q_d \Delta u_1 + n_d \Delta u_2} \rightarrow \max. \quad (5.154)$$

В общем случае задача (5.154) решается численно. Оставшиеся неизвестные исходной задачи (5.152), (5.153) последовательно определяются через оптимальные значения  $n_d^*$  и  $q_d^*$  по следующим зависимостям:

$$\gamma_a^* = -\frac{I(n_d^*, q_d^*)}{n_d^*}, \quad n_a^* = \frac{I(n_d^*, q_d^*)}{\gamma_a^*}, \quad \gamma_a^* = 1 - \gamma_d^*, \quad q_a^* = -\frac{\gamma_d^* q_d^*}{\gamma_a^*}.$$

Соответствующий предельной производительности коэффициент эффективности АДЦ определится как

$$\eta_n^* = -\frac{n_d^*}{q_d^*}. \quad (5.155)$$

Для случая равенства в абсорбере и десорбере соответствующих коэффициентов, т.е.  $\lambda_a = \lambda_d = \tilde{\lambda}$ ,  $k_a = k_d = \tilde{k}$ ,  $\alpha_a = \alpha_d = \tilde{\alpha}$ , задача (5.154) примет вид

$$I = \frac{\tilde{k}q_d^2 n_d + \tilde{\lambda}n_d^3 - \tilde{\lambda}\tilde{k}\tilde{\alpha}n_d^2 q_d}{\tilde{\lambda}\tilde{k}(q_d \Delta u_1 + n_d \Delta u_2)} - n_d \rightarrow \max$$

и будет иметь аналитическое решение

$$n_d^* = -\frac{\tilde{k}\tilde{\lambda}\Delta u_1^2}{4(\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\tilde{k}\Delta u_1/2 + \tilde{k}\Delta u_2 + \sqrt{B})}, \quad (5.156)$$

$$q_d^* = \frac{\tilde{\lambda}}{4}\Delta u_1 \frac{\tilde{k}\Delta u_2 + \sqrt{B}}{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\tilde{k}\Delta u_1/2 + \tilde{k}\Delta u_2 + \sqrt{B}}, \quad (5.157)$$

где

$$B = \tilde{k}_2 \Delta u_2^2 + \tilde{\lambda}\tilde{k}\Delta u_1^2 + \tilde{\lambda}\tilde{k}^2 \tilde{\alpha} \Delta u_1 \Delta u_2.$$

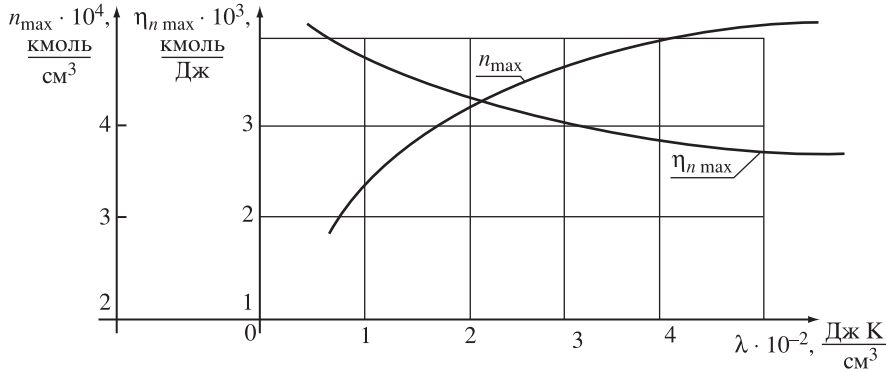
Используя соотношения (5.156), (5.157), можно определить оставшиеся параметры в оптимальном режиме: доли длительности цикла контакта раствора с источниками  $\gamma_a^* = \gamma_d^* = 0,5$ ; поток перераспределяемого вещества из источника в абсорбер  $n_a^* = -n_d^*$ ; тепловой поток в абсорбере  $q_a^* = -q_d^*$ ; предельную производительность  $n_{\max} = |n_d^*|/2$ .

Коэффициент эффективности, соответствующий предельной производительности,  $\eta_{n \max}$  можно выразить через коэффициент эффективности обратимого АДЦ  $\eta_0$  (см. (5.144)):

$$\eta_{n \max} = \frac{\eta_0}{1 + \sqrt{1 + (\tilde{\lambda}/k)\eta_0^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\eta_0}}. \quad (5.158)$$

Зависимость  $\eta_{n \max}$  и предельной производительности от коэффициента теплообмена  $\tilde{\lambda}$  имеют характер, показанный на рис. 5.23. Отношение  $\eta_0/\eta_{n \max}$  показывает, во сколько раз меньше тепла нужно затратить в обратимом процессе по сравнению с циклом, имеющим предельную производительность. Отметим, что подобное отношение  $\eta_0/\eta_{n \max}$  для тепловой машины (см. гл. 4) меняется в зависимости от отношения

температур источников от 1 (при  $T_-/T_+ \rightarrow 0$ ) до 0,5 (при  $T_-/T_+ \rightarrow 1$ ) и меньше 0,5 быть не может. Здесь это не так.



Р и с. 5.23. Зависимость максимальной производительности абсорбционно-десорбционного цикла  $n_{\max}$  и коэффициента эффективности  $\eta_{n \max}$  от коэффициента теплообмена  $\lambda$

*Предельная эффективность АДЦ с заданной производительностью.*  
Критерий оптимальности в этой задаче имеет вид (5.146)

$$\eta = \frac{\overline{|n|}}{\overline{|q|}} \rightarrow \max$$

при условии заданной производительности

$$\overline{|n|} = n_0.$$

Величина  $n_0$  подчиняется неравенству

$$n_0 < n_{\max},$$

где  $n_{\max}$  — решение задачи о предельной производительности.

Запишем задачу о предельном коэффициенте эффективности АДЦ при заданной производительности как усредненную задачу нелинейного программирования:

$$\overline{|q|} \rightarrow \min_{\mu, T} \tag{5.159}$$

при условиях

$$\overline{\left(\frac{q}{T}\right)} - \overline{\left(\frac{\mu n}{T}\right)} = 0, \quad \overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0, \quad \overline{|n|} = n_0. \tag{5.160}$$

Для ее решения перейдем от переменных  $\mu$  и  $T$  к новым варьируемым переменным  $q$  и  $n$ . При этом скорость изменения энтропии будет

определяться выражением (5.150), и условие цикличности изменения энтропии раствора запишется в виде

$$\overline{\left(\frac{q^2}{\lambda_n}\right)} + \overline{\left(\frac{n^2}{\tilde{k}_n}\right)} - \overline{(nq\tilde{\alpha}_n)} + \overline{(u_1q)} - \overline{(u_2n)} = 0.$$

В общем случае задача (5.159), (5.160) может иметь пять базовых точек, однако аналогично рассуждениям, приведенным выше, можно показать, что достаточно рассмотреть две базовые точки. В этом случае задача преобразуется к виду

$$\gamma_a|q_a| + \gamma_d|q_d| \rightarrow \min_{n_a, n_d, q_a, q_d, \gamma_a, \gamma_d}$$

при условиях

$$\gamma_a \left( \frac{q_a^2}{\tilde{\lambda}_a} + \frac{n_a^2}{\tilde{k}_a} - n_a q_a \tilde{\alpha}_a + u_{1a} q_a - u_{2a} n_a \right) + \\ + \gamma_d \left( \frac{q_d^2}{\tilde{\lambda}_d} + \frac{n_d^2}{\tilde{k}_d} - n_d q_d \tilde{\alpha}_d + u_{1d} q_d - u_{2d} n_d \right) = 0,$$

$$\gamma_a q_a + \gamma_d q_d = 0, \quad \gamma_a n_a + \gamma_d n_d = 0, \quad \gamma_a |n_a| + \gamma_d |n_d| = n_0,$$

$$\gamma_a + \gamma_d = 1, \quad \gamma_a \geq 0, \quad \gamma_d \geq 0, \quad n_a \geq 0, \quad n_d \leq 0, \quad q_a \leq 0, \quad q_d \geq 0.$$

Решение поставленной задачи сводится к поиску минимума функции одной переменной

$$F(\gamma_d) = \frac{\hat{\lambda}(\gamma_d)}{2} \left\{ \Lambda(\gamma_d) \Delta u_1 - \frac{\hat{\alpha}(\gamma_d) n_0}{2} - \right. \\ \left. - \left[ \left( \Lambda(\gamma_d) \Delta u_1 - \frac{\hat{\alpha}(\gamma_d) n_0}{2} \right) - \frac{n_0}{\hat{\lambda}(\gamma_d)} \left( \frac{n_0}{\hat{k}(\gamma_d)} + 2\Lambda(\gamma_d) \Delta u_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \rightarrow \min, \quad (5.161)$$

где

$$\hat{\lambda}(\gamma_d) = \frac{\tilde{\lambda}_a \tilde{\lambda}_d}{\tilde{\lambda}_a (1 - \gamma_d) + \tilde{\lambda}_d \gamma_d}, \quad \hat{k}(\gamma_d) = \frac{\tilde{k}_a \tilde{k}_d}{\tilde{k}_a (1 - \gamma_d) + \tilde{k}_d \gamma_d},$$

$$\hat{\alpha}(\gamma_d) = \tilde{\alpha}_a (1 - \gamma_d) + \tilde{\alpha}_d \gamma_d, \quad \Lambda(\gamma_d) = (1 - \gamma_d) \gamma_d, \quad 0 \leq \gamma_d \leq 1.$$

В общем случае при известных параметрах источников  $\mu_a, \mu_d, T_a, T_d$ , коэффициентах  $\lambda_a, \lambda_d, k_a, k_d, \alpha_d, \alpha_a$  и  $n_a$  задача решается численно. Через полученное решение  $F^* = F(\gamma_d^*)$  и  $\gamma_d^*$  определяются оставшиеся параметры оптимального цикла:

$$\gamma_a^* = 1 - \gamma_d^*, \quad q_a = -\frac{F^*}{1 - \gamma_d^*}, \quad q_d = \frac{F^*}{\gamma_d^*}, \quad n_a = -\frac{n_0}{2(1 - \gamma_d^*)}.$$

В случае равных коэффициентов  $\lambda$ ,  $k$ ,  $\alpha$  в абсорбере и десорбере задача имеет аналитическое решение

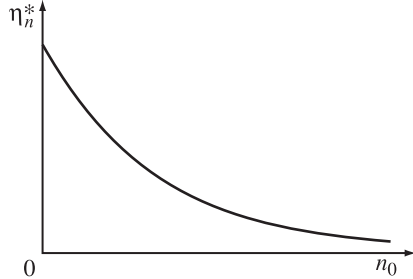
$$-q_a = q_d = \frac{\tilde{\lambda}}{4} [(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0) - \sqrt{(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0)^2 - \frac{8n_0}{\tilde{k}\tilde{\lambda}}(2n_0 + \tilde{k}\Delta u_2)}],$$

$$n_a = -n_d = n_0, \quad \gamma_a = \gamma_d = 0,5.$$

Предельный коэффициент эффективности:

$$\eta_n^* = \frac{4n_0}{\tilde{\lambda}} \left[ \Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0 \sqrt{(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0)^2 - \frac{8n_0}{\tilde{k}\tilde{\lambda}}(2n_0 + \tilde{k}\Delta u_2)} \right]^{-1}. \quad (5.162)$$

Характер зависимости коэффициента эффективности  $\eta_n^*$  от производительности  $n_0$  иллюстрирует рис. 5.24. Из зависимости (5.162) как



Р и с. 5.24. Связь предельной эффективности АДС с его производительностью

частный случай следует решение задачи о предельном коэффициенте эффективности, соответствующем обратимому процессу:

$$\lim_{n_0 \rightarrow 0} \eta_n^* = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} = \eta_0.$$

Если при рассмотрении АДС пренебречь эффектом термодиффузии, положив  $\alpha = 0$ , то решение описанных задач упрощается. Результаты решения таких задач приведены в табл. 5.1. В этой таблице наряду с упомянутыми выше переменными приведены температуры раствора  $T_{sa}$ ,  $T_{sd}$  и его концентрация  $x$ .

*Учет конечной емкости источников.* Рассмотрение АДС как системы с двумя источниками бесконечной емкости, не меняющими концентрации и температуры при тепло- и массообмене с раствором, очень сильно упрощает реальные циклы, хотя и дает более точные оценки их эффективности по сравнению с обратимыми. В действительности нужно учесть, что контакт между абсорбентом и газом в абсорбере или паром (инертным газом) в десорбере осуществляется распределенно, при этом параметры контактирующих сред меняются по длине контакта. Кроме этого фактора реальные циклы включают теплообменники, регенерирующие тепло, полученное абсорбентом в десорбере,



холодильники для конденсации пара и отделения таким образом выделенных примесей. Часто в процессе абсорбции происходит выделение тепла; чтобы это обстоятельство и связанное с ним повышение температуры абсорбента не ухудшало процесс абсорбции, устанавливают дополнительные холодильники.

Т а б л и ц а 5.1.

**Расчет оптимальных значений параметров цикла при**

$$\alpha = 0, \quad k_a = k_d = k, \quad \lambda_a = \lambda_d = \lambda$$

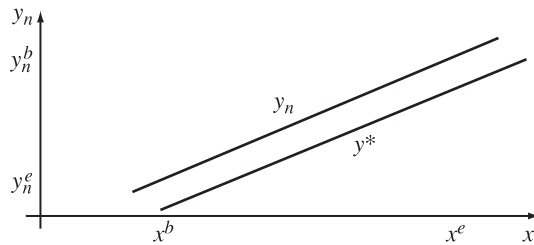
Параметр	Предельная производительность	Предельный коэффициент эффективности при заданной производительности
$\gamma_a$	0,5	0,5
$\gamma_d$	0,5	0,5
$q_d$	$\frac{\lambda}{4} \Delta u_1$	$\frac{\lambda \Delta u_1}{4} \times$ $\times \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{8n_0}{2k} \frac{2n_0 + k \Delta u_2}{\Delta u_1^2}} \right]$
$n_d$	$\frac{k \Delta u_2}{4} \times$ $\times \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda}{k} \left( \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} \right)^2} \right]$	$-n_0$
$q_a$	$-q_d$	$-q_d$
$n_a$	$-n_d$	$-n_0$
$\eta_n$	$\frac{\eta_0}{1 + \sqrt{\frac{\lambda}{k} \eta_0^2 + 1}}$	$\frac{n_0}{q_d}$
$T_{sa}$	$\frac{4T_a}{3 + T_a/T_d}$	$\frac{T_a \lambda}{q_a T_a + \lambda}$
$T_{sd}$	$\frac{4T_d}{3 + T_d/T_a}$	$\frac{T_d \lambda}{q_d T_d + \lambda}$
$x_i$	$\frac{y_i}{m_{iyx}} \exp\left(-\frac{n_i}{Rk}\right)$	$\frac{y_i}{m_{iyx}} \exp\left(-\frac{n_i}{Rk}\right)$
$i \in \{a, d\}$		

Таким образом, АДЦ представляет собой сложную систему тепло- и массообменных аппаратов. Естественный способ ее оптимизации заключается в разбиении системы на отдельные аппараты и оптимизации на первой стадии процесса в каждом из них в функции параметров, от которых зависит режим других аппаратов. На второй стадии эти параметры подбирают так, чтобы необратимость процесса в целом оказалась минимальной. При этом на первом этапе используют условия оптимальности процессов необратимого тепло- и массопереноса, полученные в этой и предыдущей главах. В качестве примера такого подхода рассмотрим АДЦ с источниками конечной емкости.

Будем предполагать, что скорости движения фаз постоянны и соответствуют режиму идеального вытеснения, а поток массопереноса пропорционален разности химических потенциалов. В этом случае, как показано выше (см. гл. 2), в оптимальном процессе изотермического массопереноса отношение концентрации перераспределяемого компонента в источнике  $y_n(l)$  к равновесной концентрации  $y^*(x(l))$  должно быть постоянным в любом сечении. Здесь  $x$  — концентрации перераспределяемого компонента в растворе. Если  $k$  — коэффициент массопередачи, отнесенный к единице длины колонны,  $L$  — ее длина, а  $N$  — общее количество вещества, перераспределяемого в колонне, то рабочая  $y_n(x)$  и равновесная  $y^*(x)$  линии должны быть таковы, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{y_n(x)}{y^*(x)} = \exp\left(\frac{N}{kRL}\right). \quad (5.163)$$

Приблизиться к выполнению условия (5.163) можно введением рециркуляции раствора, изменением его расхода, наконец, изменением конфигурации абсорбционной системы при ее построении в форме батареи аппаратов.



Р и с. 5.25. Вид линейной аппроксимации рабочей и равновесной линий в абсорбере

Рассмотрим случай, когда равновесную линию можно представить в форме линейной зависимости  $y^*(x) = ax + b$ , где  $a$  и  $b$  — некоторые константы, определяемые при обработке экспериментальных данных по равновесию. Количество  $N$  переданного вещества считаем заданным. Расход газа  $G_d$  и начальная концентрация  $y_n^b$  перераспределяе-

мого компонента также фиксированы. Конечную концентрацию  $y_n^e$  перераспределяемого компонента можно определить из условий материального баланса (индексы  $b$  и  $e$  — от слов begin (начало) и end (конец)). Таким образом, из всех рабочих линий с начальными и конечными точками, лежащими на прямых  $y = y_n^b$  и  $y = y_n^e$  (рис. 5.25), нужно выбрать такую, чтобы для любого  $x$  выполнялось условие (5.163). Из этого условия для  $x^b$  и  $x^e$  имеем с учетом противотока

$$\frac{y_n^e}{y^*(x^e)} = \frac{y_n^e}{ax^e + b} = \exp\left(\frac{N}{kRL}\right),$$

$$\frac{y_n^b}{y^*(x^b)} = \frac{y_n^b}{ax^b + b} = \exp\left(\frac{N}{kRL}\right).$$
(5.164)

Откуда находим  $x^b$  и  $x^e$ , а по ним — оптимальное отношение расхода абсорбента к расходу газа:

$$\frac{G_a}{G_d} = \frac{y_n^b - y_n^e}{x^e - x^b} = a \exp\left(\frac{N}{kRL}\right).$$
(5.165)

Найдем обратимую оценку эффективности АДЦ с источниками конечной емкости. Для этого выразим прирост энтропии системы за цикл через параметры источников, учитывая, что прирост энтропии рабочего тела за цикл равен нулю и  $\Delta S_c$  равен приросту энтропии источников:

$$\Delta S = - \int_0^{\bar{t}} \left( \frac{q}{T_n} - \frac{\mu_n n}{T_n} \right) dt.$$

Для системы, в которой механическая работа не совершается,

$$T_n dS_n = dE_n - \mu_n dN_n = c_n G_n dT_n + G_n dy_n.$$
(5.166)

Здесь мольные расходы и теплоемкости газов в абсорбере и десорбере постоянны. С учетом (5.166) получим

$$\Delta S = -c_a G_a \int_{T_a^b}^{T_a^e} \frac{dT_a}{T_a} - c_d G_d \int_{T_d^b}^{T_d^e} \frac{dT_d}{T_d} +$$

$$+ G_a \int_{y_a^b}^{y_a^e} \frac{\mu_a}{T_a} dy_a + G_d \int_{y_d^b}^{y_d^e} \frac{\mu_d}{T_d} dy_d.$$
(5.167)

С учетом уравнений материального баланса

$$G_a (y_a^b - y_a^e) = G - g(y_d^e - y_d^b),$$

$$c_a G_a (T_a^e - T_a^b) = c_d - g G_d (T_d^b - T_d^e)$$
(5.168)

прирост энтропии системы примет вид

$$\Delta S = -c_a G_a \ln \frac{T_a^e}{T_a^b} + c_d G_d \ln \frac{T_d^b}{T_d^e} - G_a R (y_a^b \ln y_a^b - y_a^e \ln y_a^e) + \\ + \frac{G_d R}{V_\mu} \left[ (y_d^e \ln y_d^e - y_d^b \ln y_d^b) - (y_d^e - y_d^b) \ln \frac{P_d}{P_a} \right]. \quad (5.169)$$

Для обратимых процессов  $\Delta S = 0$ , в остальных случаях  $\Delta S > 0$ . Предельное значение коэффициента эффективности дает решение задачи условной оптимизации

$$\eta = \frac{N_d}{Q_d} = \frac{G_d (y_d^e - y_d^b)}{c_d G_d (T_d^b - T_d^e)} = \frac{y_d^e - y_d^b}{c (T_d^b - T_d^e)} \rightarrow \max \quad (5.170)$$

при условиях материального баланса (5.168) и условии  $\Delta S \geq 0$ . Максимум величина  $\eta$  достигает на границе, когда  $\Delta S = 0$ . Варьируемыми переменными в задаче являются температуры на выходе абсорбера и десорбера  $T_a^e$ ,  $T_d^e$  и концентрации  $y_a^e$  и  $y_d^b$ . Переменные  $T_a^b$ ,  $y_a^b$ ,  $T_d^b$ ,  $y_d^e$  заданы.

Задачу (5.170) в общем случае можно решить только численно. Приведем решение для частного случая, когда параметры источников равны друг другу:  $G_a = G_d$ ,  $c_a = c_d$ ,  $P_a = P_d$ . В этом случае из уравнений материального баланса можно исключить  $T_a^e$ ,  $y_a^e$  и представить задачу в форме

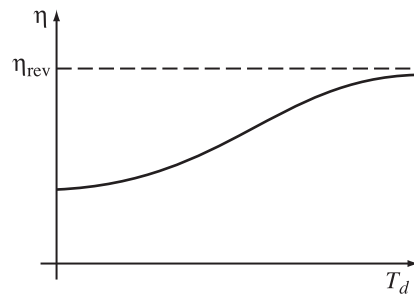
$$\eta = \frac{y_d^e - y_d^b}{c_d (T_d^b - T_d^e)} \rightarrow \max_{y_d^b, T_d^e} \quad (5.171)$$

при условии

$$\ln \left[ \frac{T_d^b T_a^b}{(T_d^b - T_d^e + T_a^b) T_d^e} \right] - \frac{R}{c_d} (y_a^b \ln y_a^b + y_d^b \ln y_d^b) + \\ + \frac{R}{c_d} (y_a^b + y_d^b - 1) \ln (y_a^b + y_d^b - 1) = 0. \quad (5.172)$$

Решение задачи (5.171), (5.172) для процесса моноэтаноламиновой очистки газов от  $xO_2$  при  $T_a^b = 315$  К,  $T_d^b = 393$  К,  $y_a^b = 0,22$  кмоль/кмоль,  $c_d = 41$  кДж/(кмоль · К) приводит к монотонной зависимости предельного значения  $\eta$  от  $T_d^e$  (рис. 5.26), поэтому оптимальный выбор температуры на выходе из десорбера соответствует ее максимально возможному значению. Например, при  $T_d^e = 375$  К  $\eta^* = 0,36$  кмоль/кДж.

Р и с. 5.26. Зависимость предельной эффективности АДЦ от температуры в десорбере



При  $T_d^e \rightarrow T_d^b$ ,  $y_d^b \rightarrow y_d^e$  величина  $\eta^*$  стремится к обратимой оценке коэффициента эффективности АДЦ с источниками бесконечной емкости  $\eta_{rev}$ .

## Глава 6

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

Микроэкономика изучает взаимодействие экономических агентов (ЭА), каждый из которых может представлять собой совокупность индивидуумов (элементарных ЭА), усредненное поведение которых определяет характеристики ЭА. Иногда по аналогии с термодинамикой мы будем говорить о системе экономических агентов, тогда каждый из них оказывается подсистемой. В результате взаимодействия друг с другом ЭА обмениваются ресурсами, при этом каждый из них выбирает, какой ресурс, в каком количестве и на что обменивать. Системы ЭА могут быть изолированы от окружения по тому или иному виду ресурса или по всем ресурсам (*замкнутые*). Если система может обмениваться с окружением тем или иным ресурсом, она *открытая*.

В этой главе приведено описание микроэкономических систем на основе термодинамического подхода и показаны задачи, которые могут быть решены с его использованием.

### 6.1. Основные типы ЭА и характеризующие их переменные

Состояние ЭА будем характеризовать вектором  $N$  запаса ресурса и количеством базисного ресурса  $M$ . При этом мы будем предполагать, что базисный ресурс  $M$  измеряется в одних и тех же единицах для всех экономических агентов (золото, международная валюта). В процессах обмена ЭА выступает как покупатель, и как продавец, он характеризуется функцией спроса и предложения. Функция спроса показывает, сколько  $i$ -го ресурса ЭА готов приобрести по цене  $c_i$ . Чем выше эта цена, тем, как правило, меньше спрос. Наконец, при некоторой цене  $c_i = p_i$  ЭА прекращает закупки, а при  $c_i > p_i$  он готов продавать  $i$ -й ресурс, причем в тем большем количестве, чем больше  $c_i$ .

*Оценка ресурса  $p_i$  (равновесная внутренняя цена) равна той минимальной цене в единицах базисного ресурса, по которой ЭА готов продать  $i$ -й ресурс, и той максимальной цене, по которой он готов его купить.*

Переменные  $N$  и  $M$  экстенсивные, т.е. при объединении (разделении) однородных ЭА они изменяются в одинаковой пропорции. Кроме того, ЭА характеризуется вектором интенсивных переменных —

оценок  $p = (p_1, \dots, p_k)$  материальных ресурсов и оценки  $r$  базисного ресурса. При объединении ЭА в замкнутой системе эти переменные выравниваются. Во многих случаях в микроэкономике функции спроса и предложения связывают с ценой не количество, а поток ресурса  $n_i(p_i; c_i)$ . При этом, если положительным считать поток, направленный в сторону ЭА, то

$$\begin{aligned} \text{sign } n_i(c_i, p_i) &= \text{sign}(p_i - c_i), \\ n_i(c_i, p_i) &= 0 \quad \text{при } c_i = p_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial c_i} < 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Размерность вектора цен  $c_i$  — единицы капитала, отнесенные к единице  $i$ -го ресурса.

В свою очередь оценка  $p$  может зависеть от состояния ЭА и, в частности, от запасов ресурсов. Обычно, но не всегда, с ростом запаса некоторого ресурса его оценка падает. ЭА может обмениваться с окружением не только материальным, но и базисным ресурсом  $M$ , что каждый из нас наблюдает в пунктах обмена валюты. При этом минимальная цена продажи (максимальная цена покупки) для ЭА представляет собой оценку базисного ресурса. Обозначим ее через  $r(N, M)$ . Для каждого из нас эта оценка индивидуальна и меняется в зависимости от жизненных обстоятельств.

Среди ЭА целесообразно выделить такие, у которых оценки  $p_i$  не зависят от запаса ресурсов. При обмене с таким ЭА количество закупаемого или продаваемого ему ресурса столь мало по сравнению с наличным запасом, что не влияет на его оценку. Такие ЭА называют рынками. Они представляют собой аналог термодинамических резервуаров.

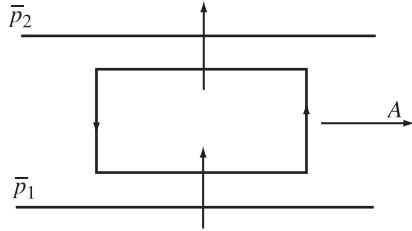
Функция спроса и предложения рынка  $n(c, p)$  зависит от цены покупки (продажи) и оценки как функция (6.1). Такой рынок называют *монопольным*. Когда для любого потока  $n$  разница между ценой и оценкой сколь угодно мала (цены для любой интенсивности потока  $n$  равны оценкам рынка), рынок называют *рынком совершенной конкуренции*. На рынке совершенной конкуренции можно по одной и той же цене покупать (продавать) товар с различной интенсивностью.

Второй важный тип ЭА — посреднические фирмы, которые назначают цены или поток продажи (покупки) товаров независимо от запаса имеющихся у них ресурсов и стремятся сделать это таким образом, чтобы извлечь максимум базисного ресурса. Фирмы аналогичны рабочему телу тепловой машины в термодинамике. Они могут контактировать одновременно с несколькими ЭА, назначая для каждого из них свои цены или потоки. Цены посредника и функции прерывания контакта являются управляющими переменными.

Фирма может быть и производственной, в этом случае она закупает

ресурсы (сырье, рабочую силу, производственные фонды) и продает продукцию, выпуск которой определяется производственной функцией того или иного типа [38] и ценой, которую фирма устанавливает. Цену, устанавливаемую фирмой на  $i$ -й вид ресурса, обозначим как  $c_i$ .

**Пример простейшего микроэкономического цикла.** Рассмотрим систему (рис. 6.1), состоящую из двух рынков и посредника, который на каждом из рынков выступает как монополист. Обозначим цену ресурса на первом рынке  $\bar{p}_1$ , на втором —  $\bar{p}_2$  и предположим, что  $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ .



Р и с. 6.1. Структура системы с посредником между двумя монопольными рынками

Начальный капитал  $U_1$  посредник имеет в денежной форме (базисный ресурс). Цель посредника — получение прибыли на свой капитал. После покупки товара на первом рынке по цене  $\bar{p}_1$  в количестве

$$\Delta N = \frac{U_1}{\bar{p}_1}$$

и продажи его на втором по цене  $\bar{p}_2$  посредник получит выручку

$$U_2 = \Delta N \bar{p}_2 = \frac{U_1 \bar{p}_2}{\bar{p}_1}.$$

Его прибыль составит

$$A_0 = U_2 - U_1 = U_1 \left( \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1} - 1 \right) = \Delta N (\bar{p}_2 - \bar{p}_1).$$

Прибыль посредника на единицу начального капитала (норма прибыли)

$$\eta_0 = \frac{A_0}{U_1} = \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1} - 1. \quad (6.2)$$

Здесь  $\eta_0$  — потенциальная норма прибыли, так как для рынка, не являющегося рынком совершенной конкуренции, темп покупок и продаж по ценам  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  сколь угодно близок к нулю.

Поток ресурса направлен от рынка с низкими ценами к рынку с высокими, подобно тому как поток тепла направлен от источника с высокой температурой  $T_+$  к источнику с низкой температурой  $T_-$ . Норма прибыли на вложенный капитал (6.2) представляет полную аналогию с КПД цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_-}{T_+},$$



но  $\eta_0$ , в отличие от КПД Карно, может быть и больше единицы. При неограниченной продолжительности цикл посредника обратим, так как, затратив извлеченный капитал на закупку ресурса на втором рынке и продав его на первом, посредник вернет систему к прежнему состоянию без изменений в окружающей среде.

В том случае, когда посредник является монополистом на рынке продаж и монопсонистом на рынке покупок, задана интенсивность потоков покупок и продаж или продолжительность цикла  $\tau$ , посредник будет вынужден при закупке ресурса назначать цену  $c_1 > \bar{p}_1$ , а при продаже снижать ее ( $c_2 < \bar{p}_2$ ). Полученная им прибыль

$$A = \Delta N(c_2 - c_1) < A_0,$$

и процесс оказывается необратимым. Мерой необратимости (потерей прибыли посредника) может служить разность

$$A_0 - A = \Delta N(c_1 - \bar{p}_1) + \Delta N(\bar{p}_2 - c_2). \quad (6.3)$$

Переходя к потокам ресурса  $n$  и интенсивности получения прибыли, можно записать

$$\sigma(C, P) = \frac{A_0 - A}{\tau} = n_1(c_1, p_1)(c_1 - p_1) + n_2(c_2, p_2)(c_2 - p_2). \quad (6.4)$$

Величина  $\sigma$  неотрицательна, так как поток  $n_1 > 0$  (направлен в сторону посредника), а выходящий поток  $n_2 < 0$ .

**Существование функции благосостояния и диссипация капитала.** Введем характеристику ЭА, соответствующую его полному капиталу  $U$ , с учетом базисного ресурса  $M$  и эквивалентного капитала  $p_i N_i$ , заключенного в каждом  $i$ -м ресурсе. Так что

$$U = M + \sum_i p_i N_i. \quad (6.5)$$

При равновесном обмене, когда цены закупок и продаж  $i$ -го ресурса сколь угодно близки к оценкам  $p_i$ , и при постоянной оценке  $r$  базисного ресурса величина  $U$  не изменяется  $\left( dM = - \sum_i p_i dN_i \right)$ :

$$dU = dM + \sum_i p_i dN_i = 0. \quad (6.6)$$

Пусть некоторая фирма осуществляет равновесный обмен с ЭА, меняя у него одни виды ресурса на другие. Обмен происходит обратимо и таким образом, что начальное и конечное состояния ЭА в пространстве с координатами  $N_i$  совпадают. Если бы в таком процессе фирма могла извлечь некоторое количество базисного ресурса, это означало бы, что возможности его извлечения неограниченны, так как его можно получать лишь от одного ЭА, не вызывая при этом в его состоянии

и состоянии окружения никаких изменений. Из невозможности этого процесса следует, что при  $r = \text{const}$

$$\oint \sum p_i(N, M) dN_i = 0,$$

а из этого, в свою очередь, вытекает, что существует такая функция  $Q(N, r)$ , частные производные которой по  $N_i$  равны  $p_i$ , а дифференциал имеет вид

$$dQ = \sum_i p_i dN_i + \frac{\partial Q}{\partial r} dr.$$

Отметим, что из факта существования функции  $Q$  в силу симметрии матрицы вторых производных (матрицы Гессе) для дважды дифференцируемой функции нескольких переменных следуют равенства, связывающие чувствительности оценок к изменению запасов ресурсов при  $dr = 0$

$$\frac{\partial p_i}{\partial N_k} = \frac{\partial p_k}{\partial N_i} \quad \forall k, i. \quad (6.7)$$

Условие (6.6) можно переписать как

$$dU = dM + dQ - \frac{\partial Q}{\partial r} dr = d(M + Q) - \frac{\partial Q}{\partial r} dr.$$

Обозначая  $M + Q = Y$ , а  $-\frac{\partial Q}{\partial r} = \gamma$ , получим, что

$$dU = dY + \gamma dr.$$

Дифференциал полного капитала является, таким образом, пфаффовой формой двух переменных, которая всегда имеет интегрирующий множитель.

Напомним, что *пфаффовой формой* называют дифференциальную форму первого порядка, т.е. сумму произведений функций нескольких переменных на дифференциалы этих переменных,

$$dK = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i.$$

Если  $n = 2$  и функции  $F_i$  дифференцируемые, то всегда найдется, такой множитель  $r(x)$ , что  $dS = r(x)dK$  является полным дифференциалом, т.е.  $S$  зависит от  $x$ , а  $\oint dS = 0$ .

Обозначим этот множитель в нашем случае через  $r(N, M)$ . Таким образом, существует некоторая функция состояния (экстенсивных переменных)  $S(N, M)$ , такая, что ее дифференциал имеет вид

$$dS = r(N, M)dU = r(N, M) \left[ dM + \sum_i p_i(N, M)dN_i \right]. \quad (6.8)$$

В обратимом, т.е. осуществляемом по ценам, совпадающем с оценками ресурсов цикле обмена функция  $S$  не изменяется, так как

$$\oint dS = 0. \quad (6.9)$$

Оценки ресурсов могут быть выражены через функцию  $S$  как

$$r = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial N_i} / \frac{\partial S}{\partial M}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

При этом оценка базисного ресурса  $r > 0$  для всех экономических агентов, а  $p_i$  могут быть и отрицательными, если  $i$ -й ресурс требует, например, утилизации или затрат на хранение.

Аналогично (6.7)  $r$  и  $p_i$  связаны равенством

$$\frac{\partial r}{\partial N_i} = \frac{\partial(r p_i)}{\partial M} \quad \forall i.$$

Функцию  $S(N, M)$  называют функцией благосостояния или, короче, *благосостоянием*. Приведенное выше доказательство ее существования как следствие невозможности извлечения прибыли от торговли с одним ЭА повторяет доказательство существования энтропии в термодинамике. Применительно к микроэкономике оно проведено для случая скалярного ресурса Л.И. Розоноэром в приложении к обзору [3].

В микроэкономике часто характеризуют предпочтения экономического агента кривыми (поверхностями) безразличия. Каждая из них выделяет множество одинаково предпочтительных состояний. Получение ЭА некоторого количества базисного или иного ресурса без изменения запасов остальных переводит его состояние на более высокую кривую безразличия, оно становится предпочтительнее. В работе [104] существование  $S$  было доказано, исходя из аксиомы Вилля [156], использующей понятие предпочтения экономического агента: *в пространстве состояний  $X = (N, M)$  ЭА не существует такой последовательности состояний  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , что  $X_i$  предпочтительнее, чем  $X_{i-1}$  для  $i = 2, \dots, m$ , а конечное и начальное состояния совпадают,  $X_1 = X_m$ .*

При обмене ресурсами между экономическими агентами должны соблюдаться *условия добровольности*, заключающиеся в том, что ни одна из функций благосостояния  $S_v$  не уменьшается (исключение — ассоциированный обмен, благотворительность). Условия добровольности делают невозможным обмен одним видом ресурса, если его оценки у контактирующих друг с другом ЭА различны.

Если функция благосостояния измеряется в национальной валюте, то величина  $r > 0$  характеризует ценность для ЭА международной валюты и имеет размерность [единицы национальной валюты / единицы международной валюты]. Оценка  $r$  базисного ресурса в процессах об-

мена экономическим агентом денег на валютном рынке играет ту же роль, что и оценка ресурса  $p$  при обмене ресурсами.

Описание экономических систем становится формально близким к соотношениям термодинамики, если ввести «экономическую температуру»

$$T = \frac{1}{r}.$$

Такое обозначение было введено в [44], истолкованию этой величины, названной «ликвидностью», ее свойствам значительное внимание уделено в [120].

Интенсивные переменные для большинства ЭА зависят от вектора экстенсивных переменных. Зависимость  $p(N, M)$  может быть найдена экспериментально по поведению ЭА в процессах обмена. Если постулируется существование функции благосостояния  $S$ , то оценки определяют через экстремальную задачу, в которую они входят, как параметры:

$$S(N, M) \rightarrow \max / \left( \sum_i p_i N_i + M \right) = V, \quad (6.11)$$

где величина  $V$  фиксирована. В этом случае решение задачи (6.11) и значения  $p$  и  $r$  связаны, как

$$p_i(N, M) = \frac{\partial S}{\partial N_i} / \frac{\partial S}{\partial M}. \quad (6.12)$$

Функция  $S$  предполагается непрерывно дифференцируемой и строго выпуклой вверх. Как следствие решение задачи (6.11) единственно, а  $p_i$  падает с ростом  $N_i$ . При таком описании ЭА подобен термодинамической подсистеме конечной емкости.

Рынок, для которого запасы ресурсов столь велики, что их изменение не сказывается на оценках, может быть охарактеризован как ЭА с функцией благосостояния вида

$$S_R(N, M) = r_R \left( \sum_i p_i N_i + M \right), \quad (6.13)$$

(сравните с уравнением состояния термодинамического резервуара в гл. 1).

Функция благосостояния  $S$  отличается от функции полезности, существование которой отнюдь не очевидно, тем, что последняя зависит не от запасов ресурсов, а от интенсивности их потребления.

Вернемся к циклическому процессу взаимодействия фирмы с одним ЭА и потребуем, чтобы средняя интенсивность процессов обмена была зафиксирована. Тогда фирма при закупке ресурсов вынуждена повышать цены по сравнению с оценками  $p_i, r$ , а продавать по ценам,

которые ниже, чем эти оценки. Благополучие ЭА при этом возрастает на

$$\Delta S = \oint dS = \int_0^{\tau} \sigma(t) dt > 0, \quad (6.14)$$

а фирма понесет убытки в количестве

$$\Delta S = \int_0^{\tau} r(t) \left[ (c_m(t) - 1)m(r, c_m) + \sum_i (c_i(t) - p_i(t))n_i(p_i, c_i) \right] dt.$$

Здесь  $n_i$  и  $m$  — потоки, а  $c_i$  и  $c_m$  — цены материального и базисного ресурсов, при этом  $c_m$  измеряется в долях от «внутреннего курса валюты»  $r$ .

Интенсивность потерь фирмы за счет необратимости

$$\sigma(t) = r(t) \left[ \sum_i n_i(p_i, c_i)(c_i - p_i) + m(r, c_m)(c_m - r) \right] \geq 0 \quad (6.15)$$

назовем *диссипацией капитала*. При постоянстве  $\sigma$  и взаимодействии с двумя рынками из (6.17) следует (6.4).

Условия (6.14), (6.9) неубывания благополучия при экономическом обмене являются аналогом интеграла Клаузиуса, а закон, согласно которому при контакте двух ЭА ресурс переходит от ЭА, для которого его оценка меньше, к ЭА, у которого его оценка больше, и при этом суммарное благополучие не убывает ( $\Delta(S_1 + S_2) \geq 0$ ), является аналогом второго начала термодинамики и позволяет построить необратимую микроэкономику, во многом аналогичную термодинамике конечного времени.

Отметим, то важное обстоятельство, что для многих задач знание функции благополучия  $S(N, M)$  не обязательно, достаточно лишь знания ее дифференциала (6.8), в котором зависимость  $r(N, M)$  может быть получена на основе обработки статистического материала или исходя из модельных представлений о поведении элементарных участников экономического взаимодействия. В этом отношении ситуация та же, что с уравнением состояния термодинамических систем, связывающим друг с другом энтропию, объем, внутреннюю энергию и количества веществ, содержащихся в системе. Для идеального газа уравнение состояния найдено из модельных представлений, для других систем — экспериментально.

**Второй закон микроэкономики.** Аналогом законов сохранения материи и энергии в микроэкономике являются законы сохранения ресурсов и капитала. Здесь мы остановимся на микроэкономической аналогии второго закона термодинамики.

Для второго закона термодинамики имеется несколько формулировок, каждая из которых может считаться следствием других. Обсудим аналоги некоторых из этих формулировок в микроэкономике.

Среди многочисленных формулировок второго начала выделим две: формулировку Клазиуса с уточнением Планка: *«Теплота сама собой не может переходить от тела холодного к телу более горячему без того, чтобы не осталось других изменений»*, а также формулировку Леонтовича: *«Невозможно построить устройство, в результате действия которого производилась бы положительная работа только за счет охлаждения одного тела без каких-либо других изменений»*.

В микроэкономике приведенным формулировкам соответствуют следующие утверждения.

1. *Поток ресурса не может переходить от ЭА, у которого его оценка выше, к агенту с более низкой оценкой без того, чтобы не осталось других изменений.*

2. *Невозможно извлечь капитал за счет обмена ресурсами с одним ЭА без каких-либо других изменений.*

3. *В необратимом процессе в замкнутой термодинамической системе энтропия может только возрастать, а работоспособность системы уменьшаться. Состоянию равновесия такой системы соответствует максимум энтропии и минимум работоспособности при условиях, отвечающих наложенным ограничениям.*

Подобное утверждение М. Планк сформулировал как следствие из второго закона термодинамики.

Аналогично: *процессы ресурсообмена в замкнутых микроэкономических системах протекают в таком направлении, что суммарное благосостояние экономических агентов увеличивается, а потенциальная возможность извлечения базисного ресурса (прибыльность) уменьшается и достигает минимума, совместимого с наложенными на систему ограничениями, в число которых входят и условия добровольности.*

Выделим еще один тип ЭА — посредника или фирму. В отличие от ЭА, у которого оценки зависят от запасов ресурсов, фирма сама устанавливает цены закупки и продажи ресурсов с целью получения максимальной прибыли. Функция благосостояния фирмы определяется количеством базисного ресурса

$$S_f = M. \quad (6.16)$$

В табл. 6.1, которая в основном совпадает с аналогичной таблицей, приведенной в [44], сведены основные аналогии между экономическими и термодинамическими системами и характеризующими их переменными.

Обозначения, принятые в таблице:  $T_-$  и  $T$  — температуры резервуара и контактирующей с ним системы,  $p_-$  — оценка ресурса на рынке совершенной конкуренции,  $c$  — цена ресурса, назначаемая фирмой,  $N$  — запас ресурса,  $U$  — внутренняя энергия системы,  $q$  и  $g$  — потоки тепла и ресурса.

Т а б л и ц а 6.1.

**Аналогии между термодинамическими и  
микроэкономическими системами и характеризующими  
их переменными**

Термодинамическая система		Микроэкономическая система	
Название	Обозначение	Название	Обозначение
Резервуар (обратимый теплообмен)	$T_-$	Рынок совершенной конкуренции	$p_-$
Резервуар (необратимый теплообмен)	$q = \alpha(T - T_-)$	Монопольный рынок	$g = \alpha(p - p_-)$
Энергия системы	$U$	Запас ресурса	$N$
Система с конечной емкостью, температура	$T(U)$	Экономический агент, оценка ресурса	$p(N)$
Тепловая машина, температура	$T(t)$	Фирма-посредник, цена	$c(t)$
Механическая энергия	$A$	Базисный ресурс	$M$
Работоспособность системы	$E$	Прибыльность системы	$E$
Энтропия	$S$	Благосостояние	$S$
Давление	$p = \frac{\partial S}{\partial V} / \frac{\partial S}{\partial E}$	Оценка ресурса	$p = \frac{\partial S}{\partial N} / \frac{\partial S}{\partial M}$
Производство энтропии	$\sigma = \dot{S}$	Диссипация капитала	$\sigma = \dot{S}$

## 6.2. Микроэкономические балансы и равновесие

**Структура уравнений.** Запишем первоначально балансовые соотношения для однородной системы, т.е. для системы, любой элемент которой характеризуется одним и тем же вектором оценок ресурсов  $p$ , а значит, отсутствует внутренний ресурсообмен. Запишем балансовые уравнения для однородной экономической подсистемы, обменивающейся с окружением потоками ресурса и капитала:

— уравнения материального баланса по  $i$ -му ресурсу

$$\dot{N}_i = \sum_{j=1}^k n_{ij} + W_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.17)$$

где  $k$  — число подсистем,  $n_{ij}$  — поток  $i$ -го ресурса из  $j$ -й подсистемы, а  $W_i$  — скорость образования в системе  $i$ -го ресурса. Поток считается положительным, если он направлен в систему, и отрицательным, если он направлен вовне системы;

— уравнение баланса по базисному ресурсу

$$\dot{M} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k c_{ij} n_{ij} + \sum_{j=1}^k m_j. \quad (6.18)$$

Здесь  $c_{ij}$  — цены покупки (продажи)  $i$ -го ресурса  $j$ -й подсистемой,  $m_j$  — поток базисного ресурса из  $j$ -й подсистемы, направленный к  $i$ -й.

Уравнение баланса по благосостоянию с учетом (6.8) для фиксированных оценок примет форму

$$\dot{S} = r \left\{ \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^m n_{ij} (p_i - c_{ij}) + m_j \right) + \sum_i W_i p_i \right\}. \quad (6.19)$$

При добровольном обмене функция благосостояния системы в среднем за цикл обмена  $\tau$  не убывает. Последнее означает, что

$$\int_0^{\tau} \left\{ \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^m n_{ij} (p_i - c_{ij}) + m_j \right) + \sum_i W_i p_i \right\} r dt \geq 0.$$

Это условие может быть использовано подсистемой в случае, когда ограничения, наложенные на процесс обмена, также усредняются на интервале  $[0, \tau]$ . В противном случае условие добровольности обмена требует неубывания  $S(t)$  в каждый момент времени  $\dot{S}(t) \geq 0 \quad \forall t$ . В частности, если сумма денежных потоков неотрицательна,  $W_i = 0$  и для любого ресурса его оценка  $p_i$  не меньше, чем средневзвешенная цена покупки

$$p_i \geq \frac{\sum_{j=1}^n n_{ij} c_{ij}}{\sum_{j=1}^n n_{ij}},$$

то условие добровольности обмена выполнено.

Отметим, что при записи балансовых соотношений были использованы связи между  $N, p, S$  и  $M$ , справедливые для равновесной системы. Таким образом, предполагалось, что в экономической подсистеме внутреннее равновесие устанавливается гораздо быстрее характерного времени переходных процессов (гипотеза локального равновесия).



В неоднородной системе отдельные ЭА могут иметь отличные друг от друга значения оценок всех или части ресурсов. Если все ЭА имеют по тому или иному ресурсу  $N_i$  одинаковую оценку, постоянную или зависящую от вектора суммарных ресурсов, систему будем называть *однородной по  $N_i$* . Особенно важен случай, когда оценка базисного ресурса  $r$  всеми ЭА одинакова и постоянна. Это соответствует процессам обмена внутри экономики, где оценка базисного ресурса устанавливается централизованно (валютный курс центрального банка).

Прежде чем записывать уравнения микроэкономических балансов для открытой неоднородной системы, рассмотрим простую изолированную систему, состоящую из двух ЭА с оценками скалярного ресурса  $N$ , равными  $p_\nu$  и  $p_j$  соответственно, и запишем для нее балансовые соотношения, учитывая, что для скалярного ресурса  $W_j = W_\nu = 0$ .

1. По ресурсу  $N$

$$\dot{N}_\nu = n_{\nu j}, \quad \dot{N}_j = n_{j\nu} = -n_{\nu j}, \quad \dot{N} = \dot{N}_\nu + \dot{N}_j = 0.$$

2. По базисному ресурсу  $M$

$$\dot{M}_\nu = -c_{\nu j}n_{\nu j}, \quad \dot{M}_j = -c_{j\nu}n_{j\nu}.$$

Так как промежуточная цена  $c_{\nu j}$  одинакова, а потоки имеют разный знак, то

$$\dot{M} = \dot{M}_\nu + \dot{M}_j = 0.$$

Прямой обмен базисным ресурсом противоречит условию добровольности, так что  $m_{\nu j} = 0$ .

3. По благосостоянию

$$\dot{S}_\nu = r_\nu n_{\nu j}(p_\nu - c_{\nu j}), \quad \dot{S}_j = r_j n_{j\nu}(p_j - c_{j\nu}).$$

Для суммарной функции благосостояния

$$\dot{S} = n_{\nu j}[r_\nu(p_\nu - c_{\nu j}) + r_j(c_{\nu j} - p_j)]. \quad (6.20)$$

Для однородной системы при  $\dot{N} = 0, \dot{M} = 0$   $\dot{S}$  также обращается в нуль, так что правая часть выражения (6.20) равна скорости изменения суммарной функции благосостояния, связанной с неоднородностью.

Выражение (6.20) упрощается в случае, когда система однородна по базисному ресурсу ( $r_\nu = r_j = r$ ), и

$$\dot{S} = r(p_\nu - p_j)n_{\nu j}(p_\nu, p_j) = r\sigma_{\nu j}^b(p_\nu, p_j). \quad (6.21)$$

Величину потока обмена  $n_{\nu j}$ , как и промежуточную цену  $c_{\nu j}$ , можно определить по функциям спроса (предложения) для каждой из подсистем  $n_\nu(p_\nu, c_{\nu j})$ . Действительно (см. [120]), из условия

$$n_\nu(p_\nu, c_{\nu j}) = -n_j(p_j, c_{\nu j}) = n_{\nu j} \quad (6.22)$$

можно исключить  $c_{\nu j}$  и получить  $n_{\nu j}(p_\nu, p_j)$ . Например, для линейных функций спроса

$$n_\nu(c, p_\nu) = \alpha_\nu(c_{\nu j} - p_\nu), \quad n_j(p_j, c) = \alpha_j(p_j - c_{\nu j}) \quad (6.23)$$

из условия  $n_\nu = -n_j$  следует, что

$$c_{\nu j}(p_j, p_\nu) = \frac{\alpha_j p_j + \alpha_\nu p_\nu}{\alpha_j + \alpha_\nu},$$

после подстановки этого выражения в (6.23) получим

$$n_{\nu j}(p_j, p_\nu) = \frac{\alpha_j \alpha_\nu}{\alpha_j + \alpha_\nu} (p_\nu - p_j) = \bar{\alpha} (p_\nu - p_j).$$

Изменение функций благосостояния подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{S}_j &= r_j n(p_j, p_\nu) (c - p_j), \\ \dot{S}_\nu &= r_\nu n(p_j, p_\nu) (p_\nu - c). \end{aligned} \quad (6.24)$$

и суммарной функции благосостояния

$$\sigma_{j\nu} = \dot{S} = \dot{S}_j + \dot{S}_\nu = n(p_j, p_\nu) [r_j (c - p_j) + r_\nu (p_\nu - c)]. \quad (6.25)$$

Для потоков, имеющих вид (6.23), после исключения  $c$  имеем, исключив  $c$ ,

$$\dot{S}_j = r_j \alpha_j \alpha_\nu^2 \frac{(p_\nu - p)^2}{\alpha_j + \alpha_\nu}, \quad \dot{S}_\nu = r_\nu \alpha_j^2 \alpha_\nu \frac{(p_\nu - p)^2}{\alpha_j + \alpha_\nu}.$$

Отношение  $\dot{S}_j / \dot{S}_\nu = r_j \alpha_\nu / r_\nu \alpha_j$  постоянно, если оценки  $r_j$  и  $r_\nu$  не зависят от объемов ресурсов.

В силу свойств функций спроса и предложения, если поток направлен к  $\nu$ -й подсистеме, то промежуточная цена  $c_{\nu j}$  удовлетворяет неравенствам

$$p_\nu \geq c_{\nu j} \geq p_j.$$

При этом величина  $\sigma$  в выражении (6.25) неотрицательна. В системе, однородной по базисному ресурсу, величина  $\sigma_b$  измеряется в единицах этого ресурса.

Пусть в рассматриваемую систему поступают внешние потоки ресурса  $n^e$  по цене  $c^e$  и капитала  $m^e$ . Записанные выше балансовые соотношения претерпят очевидные изменения и примут вид

$$\dot{N} = n_\nu^e + n_j^e. \quad (6.26)$$

Для промежуточного потока  $n_{\nu j} = -n_{j\nu}$  и

$$\dot{M} = -n_\nu^e c_\nu^e - n_j^e c_j^e. \quad (6.27)$$

Суммарное изменение базисного ресурса за счет промежуточных потоков обмена равно нулю. Изменение благосостояния:

$$\dot{S} = r_\nu n_\nu^e (p_\nu - c_\nu^e) + r_j n_j^e (p_j - c_j^e) + \sigma_{\nu j}(r_\nu, p_\nu, r_j, p_j) = \sigma^e + \sigma_{\nu j}. \quad (6.28)$$

Сумма первых двух слагаемых  $\sigma^e$  соответствует темпу роста функции  $S$ , связанному с внешними потоками.

Так как ЭА закупает ресурс по цене не выше, а продает по цене не ниже оценки, то при добровольном обмене с окружением  $\sigma^e > 0$ .

Последнее слагаемое связано с необратимостью внутренних обменов, оно неотрицательно и имеет вид (6.25). Для системы, однородной по базисному ресурсу,

$$\dot{S} = r \left[ n_\nu^e (p_\nu - c_\nu^e) + n_j^e (p_j - c_j^e) \right] + r \sigma_{b\nu j} (p_\nu, p_j), \quad (6.29)$$

где  $\sigma_{b\nu j}$  соответствует обмену между подсистемами.

В стационарном режиме,  $n_j^e = n_{\nu j} = -n_\nu^e = n$ , причем для  $\nu$ -й системы внешние потоки — выходные (отрицательные), а для  $j$ -й входные (положительные). Система закупает ресурс со «скидкой»  $\Delta_j = p_j - c_j^e$ , а продает с «наценкой»  $\delta_\nu = c_\nu^e - p_\nu$ . Перепишем (6.29) для стационарного режима в этих обозначениях:

$$-(n\Delta_\nu + n\Delta_j) + \sigma_{\nu j} = 0.$$

Величина, стоящая в скобках,

$$-\sigma^e = n(\Delta_\nu + \Delta_j) = \sigma_{\nu j},$$

равна убыткам торговых партнеров ЭА за счет «скидок» при продаже ему ресурса и «наценок» при покупке. Таким образом,  $\sigma_{\nu j}^b$  — потери базисного ресурса (капитала) при торговле с ЭА, связанные с его неоднородностью и необратимостью процессов товарообмена, что объясняет название этой величины как *диссипации капитала*.

Обобщим полученные соотношения и запишем балансы для векторного потока, системы, состоящей из  $K$  экономических агентов ( $\gamma = 1, 2, \dots, K$ ), в которую поступают внешние потоки ресурса  $n_{\nu i}^e$ , причем  $i$ -й ресурс в этом потоке имеет цену  $c_{\nu i}^e$ . В свою очередь вектор потоков между  $j$ -м и  $\nu$ -м ЭА обозначим как  $n_{j\nu}$ .

Уравнения (6.27) и (6.28) изменятся. Для каждой  $\nu$ -й подсистемы

$$\dot{N}_{\nu i} = \sum_j n_{j\nu i} + \sum n_{\nu i}^e + W_{\nu i}, \quad \nu = 1, k, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.30)$$

Аналогично,

$$\dot{M}_\nu = - \sum_i n_{\nu i}^e c_{\nu i}^e + m_\nu - \sum_{j,i} n_{\nu j i} c_{\nu j i} \quad \nu = 1, \dots, k. \quad (6.31)$$

Здесь  $m_\nu$  — суммарный поток базисного ресурса в  $\nu$ -ю подсистему; для внутренних потоков  $n_{j\nu}$ , направленных из  $j$ -й в  $\nu$ -ю подсистему, роль цен играют промежуточные цены  $c_{j\nu}$ , определяющиеся равенством (6.22). Получим для  $\dot{S}_\nu$

$$\dot{S}_\nu = r_\nu \left[ \left( m_\nu - \sum_i n_{\nu i}^e c_{\nu i}^e \right) + \sum_{j,i} n_{j\nu i} c_{j\nu i} + \sum_{j,i} p_{\nu i} (n_{j\nu i} + n_{\nu i}^e + W_{\nu i}) \right].$$

Для системы в целом

$$\dot{S} = \sum_\nu \dot{S}_\nu = \sum_\nu r_\nu m_\nu + \sum_{\nu,i} r_\nu n_{\nu i}^e (p_{\nu i} - c_{\nu i}^e) +$$

$$+ \left[ \frac{1}{2} \sum_{\nu, j, i} \sigma_{\nu j i} (r_{\nu}, p_{\nu}, r_j, p_j) + \sum_{\nu, i} W_{\nu i} p_{\nu i} \right] = \dot{S}^0 + \sigma^e + \sigma = \dot{S}^0 + \sigma_{\Sigma}. \quad (6.32)$$

Здесь первое слагаемое  $\dot{S}^0$  соответствует изменению суммарного благосостояния в связи с наличием внешних потоков базисного ресурса,  $\sigma_{\Sigma}$  — необратимым процессам обмена на границах и внутри системы. Суммарная необратимость  $\sigma_{\Sigma} > 0$ . Каждое из слагаемых  $\sigma_{j\nu i}$  совершенно аналогично  $\sigma_{\nu j}$ , записанному в форме (6.25). Множитель  $1/2$  связан с тем, что каждое слагаемое вошло в сумму дважды.

Выражение для  $\dot{S}$  упрощается, когда система однородна по базисному ресурсу. В этом случае в (6.32) множитель  $r$  можно вынести за знак суммы; получим

$$\sigma_{\Sigma} = r \left( \sum_{\nu, i} n_{\nu i}^e (p_{\nu i} - c_{\nu i}) + \frac{1}{2} \sum_{\nu, j, i} \sigma_{\nu j i} + \sum_{\nu, i} W_{\nu i} p_{\nu i} \right). \quad (6.33)$$

Для стационарной системы правые части уравнений (6.30)–(6.32) равны нулю, а в случае, когда система циклически с периодом  $\tau$  изменяет свои параметры, равны нулю интегралы от правых частей балансовых уравнений на отрезке  $[0, \tau]$ . Для тех или иных условий, наложенных на интенсивность процессов обмена, может быть найдено значение  $\sigma_{\Sigma \min}$ . В этом случае условие  $\sigma_{\Sigma} \geq \sigma_{\Sigma \min}$  вместе с уравнениями (6.30)–(6.32) выделяет область реализуемости системы.

**Диссипация капитала и равновесие в открытых микроэкономических системах.** *Обмен между рынками.* Пусть система состоит из двух рынков, обменивающихся векторным ресурсом  $N$ , оценки которого на первом и втором рынках  $p_1$  и  $p_2$ , а оценка базисного ресурса равна  $r$ . Процесс стационарный, производство отсутствует. Из (6.33) следует, что диссипация капитала в единицах базисного ресурса

$$\sigma_b = \frac{\sigma}{r} = \sum_i n_i(p_1, p_2)(p_{2i} - p_{1i}).$$

Для  $n_i = \alpha_{i12}(p_{2i} - p_{1i})$  получим

$$\sigma_b = \sum_i \alpha_{i12} (p_{2i} - p_{1i})^2.$$

*Стационарная открытая система.* В стационарной открытой системе, равновесной по базисному ресурсу и состоящей из рынков и ЭА, общее число которых равно  $k$ , оценки ресурсов у последних  $p_{ij}(N_j, M_j)$ , а потоки между  $\nu$ -й и  $j$ -й подсистемами  $n_{\nu j}(p_{\nu}, p_j)$ . Для  $\nu$ -го ЭА в силу (6.30) в векторной форме

$$\sum_j n_{\nu j} + n_{\nu}^e + W_{\nu} = 0, \quad (6.34)$$

где  $j$  — индекс  $j$ -й подсистемы. Диссипация капитала в соответствии с равенством (6.33):

$$\frac{\sigma_b}{r} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, j} n_{\nu j} (p_i, p_j) (p_\nu - p_j) + \sum_{\nu} n_{\nu}^e (p_\nu - c_\nu) + \sum_{\nu} W_{\nu} p_\nu.$$

В частности, если система недалеко от равновесия и потоки пропорциональны разности оценок, а скорости  $W_{\nu j}$  постоянны, то аналогично обмену между рынками диссипация в единицах базисного ресурса:

$$\sigma_b = \frac{1}{2} \sum_{\nu, j, i} \alpha_{\nu j i} (p_{\nu i} - p_{j i})^2 + \sum_{i, \nu} p_{\nu i} W_{\nu i} + \sum_{\nu} \alpha_{\nu i} (p_{\nu i} - c_{\nu i})^2.$$

Здесь  $\nu, j$  — индексы подсистем,  $i$  — индекс ресурса. Условия минимума  $\sigma_b$  по оценкам  $p_{\nu i}$  ( $\nu = 1, \dots, k$ ) каждого из ЭА приводят к равенствам

$$\sum_j \alpha_{\nu j i} (p_{\nu i} - p_{j i}) + W_{\nu i} + \alpha_{\nu i} (p_{\nu i} - c_{\nu i}) = 0 \quad \forall i, \nu,$$

что для линейных потоков совпадает с условиями равновесия (6.34). В силу выпуклости вниз выражения для  $\sigma_b$  в точке стационарности диссипация капитала достигает минимума. Таким образом, справедливо **У т в е р ж д е н и е**: *В открытой микроэкономической системе для законов ресурсообмена, близких к линейным, в состоянии равновесия запасы ресурса и капитала между экономическими агентами распределяются таким образом, что диссипация капитала  $\sigma$  минимальна.*

Это утверждение является аналогом теоремы Пригожина в необратимой термодинамике.

**Равновесие в замкнутых системах.** Рассмотрим изолированную систему из  $k$  ЭА. Начальные состояния каждого из них заданы и характеризуются вектором  $M_{0\nu}, N_{0\nu}$  ( $\nu = 1, \dots, k$ ), а конечное состояние — вектором  $\overline{M}_\nu, \overline{N}_\nu$ . В силу изолированности системы справедливы соотношения

$$\sum_{\nu} M_{0\nu} = \sum_{\nu} \overline{M}_\nu, \quad \sum_{\nu} N_{0\nu i} = \sum_{\nu} \overline{N}_{\nu i}, \quad (6.35)$$

$$\overline{M}_\nu \geq 0, \quad \overline{N}_{\nu i} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Будем полагать, что выполняются сделанные выше допущения (6.1) о зависимости потоков ресурсов от разности между ценой и оценкой. В процессах обмена между подсистемами роль цены играет одна из оценок контактирующих подсистем. В равновесии все потоки обращаются в нуль, следовательно, равны и оценки каждого из ресурсов у тех ЭА, для которых запас соответствующего ресурса в равновесии положителен. Обозначим эти оценки как  $\bar{r}$  и  $\bar{p}_i$ . Если в равновесии запасы  $\overline{M}_\nu$  или  $\overline{N}_{\nu i}$  равны нулю, то справедливы неравенства

$$\bar{r}_\nu \leq \bar{r}, \quad \bar{p}_{i\nu} \leq \bar{p}_i. \quad (6.36)$$

Пусть функция благосостояния системы представляет собой сумму функций благосостояния  $S_\nu(M_\nu, N_\nu)$  отдельных ЭА, а последние непрерывные, дважды дифференцируемые и строго выпуклые вверх; тогда

задача

$$S = \sum_{\nu} S_{\nu}(M_{\nu}, N_{\nu}) \rightarrow \max_{M_{\nu}, N_{\nu}}$$

при условиях (6.35) имеет единственное решение  $\bar{M}, \bar{N}$ , удовлетворяющее равенствам

$$\left( \frac{\partial S_{\nu}}{\partial M_{\nu}} \right)_{\bar{M}, \bar{N}} = \bar{r}, \quad \left( \frac{\partial S_{\nu}}{\partial N_{\nu i}} \right)_{\bar{M}, \bar{N}} = \bar{p}_i,$$

если для всех  $\nu$  и  $i$   $\bar{M}_{\nu}$  и  $\bar{N}_{\nu i}$  положительны, и неравенствам (6.36), если конечные запасы некоторого ресурса ЭА равны нулю. Таким образом, в состоянии равновесия изолированной системы достигается максимума аддитивная функция благосостояния  $S$  составляющих ее ЭА.

На равновесное состояние могут быть наложены те или иные условия. Например, система может контактировать по тем или иным ресурсам с рынком, у которого оценка ресурсов постоянна. Обозначим вектор таких фиксированных оценок как  $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$ . Число  $m$  не превосходит размерности пространства состояний подсистем. Тогда в равновесии для всех ЭА оценки  $\bar{p}_{\nu i} = p_i^0$  выравниваются на значениях, соответствующем оценкам рынка. А запасы ресурсов перераспределяются таким образом, что доставляют решение задаче

$$S = \sum_{\nu} S_{\nu}(M_{\nu}, N_{\nu}) \rightarrow \max_{M_{\nu}, N_{\nu}} / \bar{p}_{\nu i}(M_{\nu}, N_{\nu}) = p_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

причем условия (6.35) в этой задаче требуется выполнить лишь по тем видам ресурсов, по которым система изолирована от рынка.

В частности, если оценка базисного ресурса для всех подсистем одинакова и постоянна ( $r_{\nu} = r^0$ ), то максимум  $S$  сводится к максимуму суммы капиталов  $U_{\nu}$ :

$$\frac{S}{r^0} = \sum_{\nu} U_{\nu} = \sum_{\nu} (\bar{M}_{\nu} + \sum_i \bar{p}_i \bar{N}_{\nu i}) \rightarrow \max_{\bar{M}_{\nu}, \bar{N}_{\nu}}. \quad (6.37)$$

При этом  $\sum_{\nu} M_{\nu 0} \neq \sum_{\nu} \bar{M}_{\nu}$ .

Наконец, в состав системы может входить фирма — посредник, а экономические агенты могут контактировать только через посредника, который стремится извлечь максимальное количество базисного ресурса. Так как посредник может извлекать базисный ресурс в любой системе, где есть разница между оценками материального ресурса у подсистем, содержащих ненулевой его запас, то для всех  $i$  и  $\nu$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i\nu}(\bar{N}_{\nu}, \bar{M}_{\nu}) &= \bar{p}_i, \quad \bar{N}_{\nu i} > 0, \\ \bar{p}_{i\nu}(0, \bar{M}_{\nu}) &\leq \bar{p}_i, \quad \bar{N}_{\nu i} = 0. \end{aligned}$$

При этом условии извлеченный базисный ресурс должен быть максимален (оставшийся минимален):

$$\bar{M}_{\Sigma} = \sum_{\nu} \bar{M}_{\nu} \rightarrow \min_{\bar{N}_{\nu}, \bar{M}_{\nu}}.$$

Кроме того, для самого посредника начальное и равновесное состояния должны быть одинаковы. На оптимальном решении обмен с ЭА должен протекать равновесно (цены закупок и продаж сколь угодно мало отличаются от их оценок). Если для некоторых ресурсов имеет место контакт с рынком, то по ним оценки в равновесии равны рыночным. Примеры задач о предельном извлечении базисного ресурса приведены ниже.

### 6.3. Задачи извлечения базисного ресурса, прибыльность, условия минимальной диссипации

В выражении, связывающем функцию благосостояния ЭА с объемами ресурсов

$$\frac{S}{r} = M + \sum_i p_i N_i = Q,$$

каждое из слагаемых имеет размерность базисного ресурса. Пусть ЭА может контактировать с окружением, интенсивные переменные которого обозначим как  $\bar{r}$  и  $\bar{p}$ . Если ЭА переходит из начального в некоторое близкое к нему состояние, то извлеченное при этом количество базисного ресурса

$$\delta E^0 = -\delta M_\Sigma = -(\delta M + \delta \bar{M}) = \left[ \frac{\delta S}{r} + \frac{\delta \bar{S}}{\bar{r}} - \sum_i (p_i \delta N_i + \bar{p}_i \delta \bar{N}_i) \right].$$

Но так как процесс обратим  $(\delta S + \delta \bar{S}) = 0$ ,  $\delta \bar{N}_i = -\delta N_i$ , то

$$\delta E^0 = \delta S \left( \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{r} \right) - \sum \delta N_i (p_i - \bar{p}_i). \quad (6.38)$$

Если процесс в подсистеме необратим, прирост благосостояния увеличится:

$$\delta S = -\delta \bar{S} + \sigma, \quad \sigma > 0.$$

Из формулы (6.38) следует, что в необратимом процессе извлеченный базисный ресурс

$$dE = dE^0 - \frac{\sigma}{\bar{r}}.$$

Интегрируя это равенство вдоль траектории системы, получим общее количество извлеченного базисного ресурса:

$$E = E^0 - \frac{\Delta S}{\bar{r}}. \quad (6.39)$$

Равенство (6.39) — аналог формулы Стодола в термодинамике, связывающей работу в обратимом и необратимом процессах и абсолютную температуру окружающей среды.

*Прибыльностью системы назовем максимальное количество базисного ресурса, которое может быть извлечено из системы, при тех или иных ограничениях.*

При этом под системой понимается один или несколько экономических агентов и их окружение (рынок).

При таком определении прибыльности существенную роль играют ограничения, наложенные на процесс. Приведем некоторые из возможных ограничений.

1. Кроме начального состояния могут быть заданы конечные состояния всех или некоторых ЭА.

2. Могут быть зафиксированы условия однородности по тем или иным интенсивным переменным  $(p_i, r)$  с внешней средой.

3. Зафиксирована продолжительность процесса.

Эти и иные ограничения уменьшают величину прибыльности. Внешняя среда с постоянными оценками  $\bar{r}$  и  $\bar{p}$  может отсутствовать. О прибыльности системы в смысле данного определения можно говорить и в этом случае.

Для некоторых систем задача расчета прибыльности при отсутствии ограничений не имеет решения. К таким системам относятся системы с более чем одним рынком, так как в них посредник может извлечь сколь угодно большое количество базисного ресурса. Отметим, что прибыльность в системе с одним рынком при заданном начальном состоянии системы ЭА и отсутствии ограничений на продолжительность процесса является аналогом эксергии, широко используемой при анализе технологических систем.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из  $k$  ЭА, каждый из которых располагает некоторым запасом ресурса  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) и базисного ресурса  $M_i$ . Оценка ресурса  $p_i$  зависит от  $N_i$  и  $M_i$ . Одной из подсистем может быть рынок, для которого оценка ресурса  $p$  постоянна [55].

Будем предполагать, что система замкнута по ресурсам. При контакте  $i$ -й и  $j$ -й подсистем возникают потоки ресурса  $n_{ij}$  и капитала  $m_{ij}$ . При этом поток ресурса направлен от подсистемы с меньшей оценкой к подсистеме с большей оценкой, а поток капитала направлен навстречу потоку ресурса.

В системе имеется фирма (посредник), ее целью является такая организация ресурсообмена, при которой фирма извлекает из системы некоторое количество капитала  $M$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что непосредственный обмен ресурсами между экономическими агентами невозможен, фирма назначает цены покупки и продажи ресурса, стремясь при этом добиться максимума  $M$ , а потоки закупок и продаж зависят от цены  $c_i$ , предложенной фирмой  $i$ -й подсистеме, и оценки  $p_i$  подсистемой  $i$ -го ресурса, т.е.

$$n_i = n_i(p_i, c_i), \quad n_i = 0 \quad \text{при} \quad p_i = c_i, \quad \text{sign}(n_i) = \text{sign}(c_i - p_i).$$

Знак потока будем считать положительным, если он направлен в сто-



рону фирмы. Очевидно, что поток капитала

$$m_i(p_i, c_i) = -c_i n_i(p_i, c_i).$$

Запасы ресурса и капитала в  $i$ -й подсистеме изменяются как

$$\begin{aligned} \dot{N}_i &= -n_i(p_i, c_i), & N_i(0) &= N_{i0}, \\ \dot{M}_i &= c_i n_i(p_i, c_i), & M_i(0) &= M_{i0}. \end{aligned}$$

Как правило оценки  $p_i(N_i, M_i)$  монотонно уменьшаются с ростом  $N_i$  при фиксированном  $M_i$  и растут с ростом  $M_i$  при фиксированном  $N_i$ . Впрочем, оценка ресурса может быть и независимой от объема капитала экономического агента. Найдем, какой объем базисного ресурса может извлечь фирма за сколь угодно большое и за конечное время для случаев, когда в системе имеется рынок и когда его нет.

**Продолжительность процесса не ограничена.** В системе имеется рынок. Обозначим через  $p_-$  стоимость ресурса на рынке, тогда при  $t \rightarrow \infty$  оценки ресурса всех ЭА стремятся к  $p_-$ . Из условий равновесия при  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$p_i(\bar{N}_i, \bar{M}_i) = p_-, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.40)$$

Здесь через  $\bar{N}_i, \bar{M}_i$  обозначены равновесные запасы ресурса и капитала.

Фирма при отсутствии ограничения на продолжительность процесса закупает ресурс по цене, сколь угодно близкой к оценке  $p_i$ , поэтому

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -p_i(N_i, M_i), \quad M_i(N_{i0}) = M_{i0}. \quad (6.41)$$

*Прибыльность экономической системы — предельное количество извлеченного базисного ресурса*

$$E_\infty = \sum_{i=1}^k (M_{i0} - \bar{M}_i) = \sum_{i=1}^k \int_{N_{i0}}^{\bar{N}_i} p_i(N_i, M_i(N_i)) dN_i. \quad (6.42)$$

Условия (6.39), (6.41) определяют  $2k$  неизвестных  $\bar{N}_i, \bar{M}_i$ , а значит, и  $E_\infty$ .

**Пример.** Рассмотрим систему, состоящую из двух ЭА и рынка. Заданы начальные запасы ресурса и капитала для ЭА —  $N_{i0}, M_{i0}, i = 1, 2$ , и стоимость ресурса на рынке  $p_-$ .

Пусть оценки ресурса для агентов имеют вид

$$p_i = \alpha_i \frac{M_i}{N_i}, \quad i = 1, 2.$$

Система (6.41) перепишется как

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\alpha_i \frac{M_i}{N_i}, \quad M_i(N_{i0}) = M_{i0};$$

отсюда находим  $M_i(N_i)$

$$M_i = \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\alpha_i}}{N_i^{\alpha_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Равновесные запасы ресурса  $\overline{N}_1$  и  $\overline{N}_2$  определим из условия равновесия, которое примет вид

$$\alpha_i \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\alpha_i}}{N_i^{\alpha_i+1}} = p_-, \quad i = 1, 2.$$

Получим

$$\overline{N}_i = \left( \frac{\alpha_i M_{i0} \cdot N_{i0}^{\alpha_i}}{p_-} \right)^{1/(\alpha_i+1)}, \quad i = 1, 2,$$

и соответствующие им равновесные запасы капитала

$$\overline{M}_i = \frac{p_- \overline{N}_i}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (6.43)$$

Из условий (6.42) получим предельное количество извлеченного капитала  $E_\infty$  для рассматриваемой системы.

*В системе отсутствует рынок.* В этом случае при  $t \rightarrow \infty$  оценки ресурса в подсистеме оказываются одинаковыми и равными некоторому значению  $\overline{p}$ . Вместо условий равенства оценок рыночным имеем

$$p_i(\overline{N}_i, \overline{M}_i) = \overline{p}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.44)$$

Значение  $\overline{p}$  нужно определить по условию равенства нулю изменения запаса ресурса фирмы (она продает все, что покупает), т.е.

$$\sum_{i=1}^k (\overline{N}_i - N_{i0}) = 0. \quad (6.45)$$

Равенства (6.44), (6.45) наряду с уравнениями (6.41) позволяют найти векторы  $\overline{N}$ ,  $\overline{M}$  и  $\overline{p}$ , определяющие максимум извлеченного капитала  $E_\infty$  в этом случае.

**Пример.** Рассмотрим ту же систему, что в предыдущем примере. Начальные запасы ресурса и капитала заданы:  $N_{10}$ ,  $N_{20}$ ,  $M_{10}$ ,  $M_{20}$ . Зависимости оценок от текущих запасов  $M_i$  и  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) имеют вид

$$p_1 = \alpha \frac{M_1}{N_1}, \quad p_2 = \beta \frac{M_2}{N_2}.$$

С учетом этих зависимостей уравнения (6.41) примут вид

$$\frac{dM_1}{dN_1} = -\alpha \frac{M_1}{N_1}, \quad M_1(N_{10}) = M_{10},$$

$$\frac{dM_2}{dN_2} = -\beta \frac{M_2}{N_2}, \quad M_2(N_{20}) = M_{20}.$$

Решая эти уравнения, находим  $M_1(N_1)$  и  $M_2(N_2)$ :

$$M_1 = \frac{M_{10} \cdot N_{10}^\alpha}{N_1^\alpha}, \quad M_2 = \frac{M_{20} \cdot N_{20}^\beta}{N_2^\beta}.$$

Пользуясь условиями (6.44) и (6.45), найдем количество ресурса  $\bar{N}_i$  у каждого агента после завершения обмена. Эти условия переписутся как

$$N_{10} + N_{20} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2,$$

$$\alpha \frac{M_{10} N_{10}^\alpha}{N_1^{\alpha+1}} = \beta \frac{M_{20} N_{20}^\beta}{N_2^{\beta+1}}.$$

Для частного случая, когда  $\alpha = \beta = \gamma$ , получим решение этой системы

$$\bar{N}_1 = \frac{(N_{20} + N_{10}) \cdot (M_{10} N_{10}^\gamma)^{1/(1+\gamma)}}{(M_{10} N_{10}^\gamma)^{1/(1+\gamma)} + (M_{20} N_{20}^\gamma)^{1/(1+\gamma)}},$$

$$\bar{N}_2 = \frac{(N_{20} + N_{10}) \cdot (M_{20} N_{20}^\gamma)^{1/(1+\gamma)}}{(M_{10} N_{10}^\gamma)^{1/(1+\gamma)} + (M_{20} N_{20}^\gamma)^{1/(1+\gamma)}}.$$

Значения  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  определяют равновесные запасы капитала

$$\bar{M}_1 = (M_{10} \cdot N_{10}^\gamma)^{1/(1+\gamma)} \cdot W,$$

$$\bar{M}_2 = (M_{20} \cdot N_{20}^\gamma)^{1/(1+\gamma)} \cdot W,$$

где

$$W = \left( \frac{(M_{10} N_{10}^\gamma)^{1/(1+\gamma)} + (M_{20} N_{20}^\gamma)^{1/(1+\gamma)}}{N_{20} + N_{10}} \right)^\gamma.$$

Подстановка этих выражений в (6.42) позволяет найти прибыльность системы.

При обмене ресурсом без посредника не изменяется как суммарный ресурс, так и суммарный капитал, и устанавливается единая для всей системы оценка ресурса  $\bar{p}$ . Уравнения (6.41) примут форму

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\bar{p}, \quad i = 1, \dots, k,$$

Так что

$$\bar{M}_i = M_{i0} - \bar{p}(\bar{N} - N_{i0}), \quad i = 1, \dots, k.$$

После подстановки этих выражений в условия (6.44), (6.45) они определяют  $\bar{N}_i$  и  $\bar{p}$ .

**Продолжительность ресурсообмена ограничена.** Будем предполагать, что продолжительность ресурсообмена задана и равна  $\tau$ . В этом случае фирма вынуждена повышать цены закупки ресурса и снижать цену продажи по сравнению с равновесными оценками  $p_i$ . Это приведет к необратимым потерям и уменьшит величину извлеченного

капитала. Его максимально возможное значение  $E_\tau$  окажется меньше, чем  $E_\infty$ . Их различие

$$\Delta S = (E_\infty - E_\tau) > 0$$

характеризует необратимость процесса ресурсообмена.

*Условие оптимальности закупок (продаж).* Рассмотрим обмен между фирмой и ЭА и выясним, как фирма должна менять цену продажи ресурса, чтобы за фиксированное время  $\tau$  продать количество ресурса  $\Delta N$  с максимальной выручкой. Ясно, что тем же условиям будет отвечать и цена покупки ресурса у ЭА, если фирма стремится затратить как можно меньше капитала. И в том, и в другом случае объем капитала ЭА в конце процесса  $M(\tau)$  должен быть минимален.

Задача формулируется как

$$\bar{M} = M(\tau) \rightarrow \min_c \quad (6.46)$$

при условиях

$$\bar{N} = N(\tau) = N_0 - \Delta N, \quad (6.47)$$

$$\frac{dM}{dN} = -c, \quad (6.48)$$

$$\int_0^\tau dt = \int_{\bar{N}}^{N_0} \frac{dN}{n(p(N, M), c)} = \tau. \quad (6.49)$$

Для перехода от  $dt$  к  $dN$  использована зависимость

$$\frac{dN}{dt} = -n(p, c),$$

в которой поток  $n$  на интервале  $(0, \tau)$  не обращается в нуль.

В задаче (6.46)–(6.49) требуется найти такую зависимость  $c^*(N)$ , при которой прирост капитала ЭА окажется минимальным.

Запишем условия оптимальности для этой задачи в форме принципа максимума в предположении невырожденности решения ( $\psi_0 = 1$ ):

— функция Гамильтона

$$H = -\psi c + \lambda \frac{1}{n(c, p(N, M))};$$

— уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\psi}{dN} = -\frac{\partial H}{\partial M} = -\lambda \frac{\partial n / \partial p (\partial p / \partial M)}{n^2(c, p(N, M))}, \quad \psi(\bar{N}) = 0; \quad (6.50)$$

— условие максимума по  $c$  для выпуклой вверх и дифференцируемой функции  $H$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\psi + \lambda \frac{\partial n / \partial c}{n^2(c, p(N, M))} = 0.$$

Исключая  $\psi$ , с учетом (6.50) и сокращая  $\lambda$  получим условие оптимальности закупок (продаж). Они имеют вид

$$\frac{d}{dN} \left[ \frac{\partial n / \partial c}{n^2(p, c)} \right] = \frac{\partial n / \partial p \cdot (\partial p / \partial M)}{n^2(p, c)} \quad (6.51)$$

и определяют  $c(N, M)$  с точностью до константы, вычисляемой по условию (6.48).

В случае, когда оценка ресурса  $p$  зависит только от его запаса  $N$  ( $\partial p / \partial M = 0$ ), условие (6.51) упрощается и примет форму

$$\frac{\partial n / \partial c}{n^2(p, c)} = \text{const.} \quad (6.52)$$

Так, для

$$n(p, c) = \alpha(c - p), \quad (6.53)$$

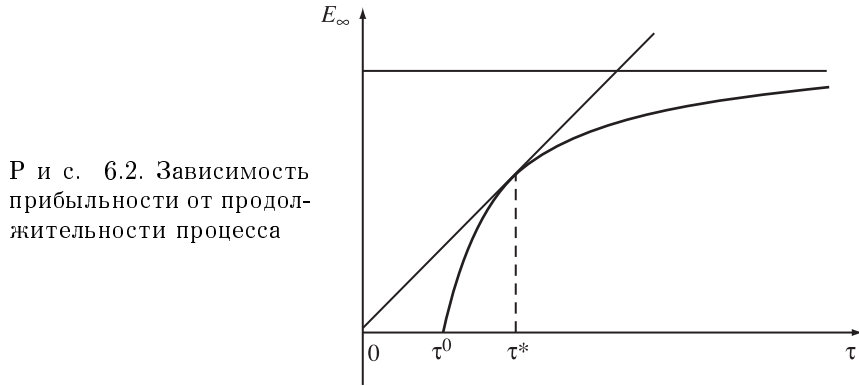
из условия (6.51) при продаже ресурса получим

$$c_\tau^*(N, \bar{N}) = p(N) - \frac{\bar{N} - N_0}{\alpha\tau}, \quad (6.54)$$

а вырученный при продаже капитал равен

$$E_\tau(\bar{N}) = E_\infty(\bar{N}) - \frac{(\bar{N} - N_0)^2}{\alpha\tau}, \quad (6.55)$$

где  $E_\infty$  — капитал, который фирма могла бы получить при  $\tau \rightarrow \infty$ , продавая ресурс по равновесным ценам  $c(N) = p(N)$ . Функция  $E(\tau)$  показана на рис. 6.2.



Р и с. 6.2. Зависимость прибыльности от продолжительности процесса

При  $\tau < \tau_0 = \frac{\Delta N^2}{\alpha E_\infty}$  фирма вынуждена доплачивать покупателю.

При  $\tau^* = 2\tau_0$  средняя интенсивность прибыли  $e(\tau) = \frac{E(\tau)}{\tau}$  максимальна и равна

$$e^* = \frac{\alpha}{4} \left[ \frac{E_\infty(\bar{N} - N_0)}{\bar{N} - N_0} \right]^2.$$

Потери капитала по сравнению с равновесным процессом оценивает уменьшение прибыльности (диссипация капитала):

$$\sigma = n(p, c)(p - c). \quad (6.56)$$

Величина диссипативных потерь определяется как ( $r = 1$ )

$$\Delta S(\tau) = \int_0^\tau \sigma(t) dt = \int_0^\tau n(p, c)(p - c) dt. \quad (6.57)$$

Для примера, рассмотренного выше, эти потери равны

$$\Delta S(\tau, \bar{N}) = \int_0^\tau \alpha(p(N) - c(N))^2 dt = \frac{(\bar{N} - N_0)^2}{\alpha\tau},$$

так что

$$E(\tau) = E_\infty(\bar{N}) - \Delta S(\tau, \bar{N}) = E_\infty(\bar{N}) - \int_0^\tau n(p, c)(p - c) dt. \quad (6.58)$$

Выражение (6.58) справедливо для произвольной зависимости  $n(p, c)$ . Действительно, при переходе от  $dt$  к  $dN$  интеграл в (6.57) переписывается как

$$\Delta S(\bar{N}) = S(\bar{N}) - S(N_0) = \int_{N_0}^{\bar{N}} (p(N) - c_\tau(N, \bar{N})) dN.$$

В свою очередь извлеченный капитал равен

$$E(\tau, \bar{N}) = \int_{N_0}^{\bar{N}} c_\tau(N, \bar{N}) dN, \quad E_\infty(\bar{N}) = \int_{N_0}^{\bar{N}} p(N) dN. \quad (6.59)$$

Из сравнения этих равенств следует выражение (6.58). Таким образом, оптимальные процессы закупок (продаж) являются процессами минимальной диссипации, а условие (6.51) является условием минимальной диссипации капитала.

*Извлечение максимальной прибыли в системе ЭА.* Пусть фирма включена в систему ЭА, замкнутую по ресурсу, ее цель, осуществляя посреднический товарообмен между ЭА, извлечь максимум базисного ресурса. В этом случае задача сводится к закупке (продаже) ресурса у каждого из экономических агентов. Процесс закупки (продажи) должен протекать оптимально с точки зрения извлечения (затрат) капитала, так что цена  $s$  и оценка ресурса  $p$  должны в любой момент времени удовлетворять условиям минимальной диссипации (6.51), (6.52). Объемы закупок  $\Delta N_i$  у каждого из  $m$  ЭА должны выбираться оптимально

и удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^m \bar{N}_i = \sum_{i=1}^m N_{i0}. \quad (6.60)$$

Рынок можно считать одной из подсистем, у которой оценка  $p_-$  не зависит от запасов ресурса и капитала, а значит, для любых зависимостей  $n(c, p_-)$  оптимальная цена  $c$  при закупке и продаже на таком рынке должна быть неизменна во времени.

Задача об извлечении максимума капитала за ограниченное время в замкнутой микроэкономической системе сводится, таким образом, на первом этапе к решению  $m$  задач (6.46)–(6.49) об оптимальных закупках (продажах) для каждой из подсистем при фиксированных начальных и конечных запасах ресурса ( $N_{i0}$  и  $\bar{N}_i$ ). Максимальное количество полученного капитала (минимальное количество затраченного)  $E_i(\tau)$  зависит от  $\bar{N}_i$ . На втором этапе необходимо найти оптимальные значения  $\bar{N}_i$  из условия

$$\sum_{i=1}^m E_i(\tau, \bar{N}_i) \rightarrow \max_{\bar{N}_i} \quad (6.61)$$

при условии (6.60). Условия оптимальности задачи (6.60), (6.61) имеют вид

$$\frac{\partial E_i(\tau, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} = \Lambda, \quad i = 1, \dots, m.$$

Значение  $\Lambda$  находят из (6.60).

С учетом выражения (6.59) получим

$$\frac{\partial E_i(\tau, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} = c_{i\tau}(\bar{N}_i, \bar{N}_i) + \int_{N_{i0}}^{\bar{N}_i} \frac{\partial c_{i\tau}(N_i, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} dN_i = \bar{c}_{i\tau}(\bar{N}_i). \quad (6.62)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой оптимальную цену в момент  $\tau$ , второе слагаемое корректирует эту цену. Оно определяется усредненным значением чувствительности оптимальной цены к количеству реализованного ресурса. Выражение (6.62) назовем скорректированной ценой. Условие для оптимального выбора объемов закупок (продаж) примет форму равенства скорректированных цен для всех подсистем:

$$\bar{c}_{i\tau}(\bar{N}_i) = \Lambda, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.63)$$

**Пример.** Проиллюстрируем последовательность решения задачи на примере, когда для каждой из подсистем

$$p_i = \frac{h_i}{N_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.64)$$

$$n_i(c, p) = \alpha_i(c_i - p_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.65)$$

Найдем капитал, который можно извлечь из  $i$ -й подсистемы за сколько угодно большое время. Из выражения (6.59) с учетом (6.64) имеем

$$E_{i\infty}(\bar{N}_i) = h_i \int_{N_{i0}}^{\bar{N}_i} \frac{dN_i}{N_i} = h_i \ln \frac{\bar{N}_i}{N_{i0}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

После взятия интеграла (6.59) получим

$$E_i(\tau, \bar{N}_i) = h_i \ln \frac{\bar{N}_i}{N_{i0}} - \frac{(\bar{N}_i - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}. \quad (6.66)$$

Условие (6.63) оптимального выбора  $\bar{N}_i$  примет форму

$$\bar{c}_{i\tau}(\bar{N}_i) = \left[ p_i(\bar{N}_i) - \frac{\bar{N}_i - N_{i0}}{\alpha \tau} \right] - \frac{\bar{N}_i - N_{i0}}{\alpha \tau} = \Lambda. \quad (6.67)$$

Задача сильно упрощается, когда все подсистемы имеют постоянные оценки  $p = \text{const}$ . Тогда условие оптимальности (6.67) приводит к равенствам

$$p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau} (\bar{N}_i - N_{i0}) = \Lambda \rightarrow \Delta N_i = \frac{\alpha_i \tau}{2} (p_i - \Lambda). \quad (6.68)$$

Из условия (6.60) значение  $\Lambda$  равно средневзвешенной оценке ресурса

$$\Lambda = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i},$$

а

$$\bar{N}_i^* = \frac{\tau \alpha_i}{2} \left( p_i - \frac{\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu} \right) + N_{i0}. \quad (6.69)$$

После подстановки в (6.66)  $\bar{N}_i^*$  получим значение максимально возможного капитала  $E_i(\tau, \bar{N}_i^*)$ , который может быть извлечен из подсистемы за время  $\tau$ . Прибыльность системы

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^m \left[ p_i(\bar{N}_i^* - N_{i0}) - \frac{(\bar{N}_i^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau} \right]$$

с учетом (6.69) для оценок, не зависящих от запасов ресурса, равна

$$E_\tau^* = \frac{\tau}{4} (p_i^2 - \Lambda^2).$$

В большинстве случаев оценки с ростом запаса ресурса уменьшаются, и прибыльность представляет собой монотонную выпуклую вверх функцию продолжительности закупок.



### 6.4. Классификация законов ресурсообмена по типу процессов минимальной диссипации

Для экономических систем функция  $n(x, u)$  характеризует закон ресурсообмена, а условия (6.51), (6.52) — условия минимальной диссипации капитала. Аналогично тому, как это было сделано для термодинамических систем в гл. 2, покажем, как можно выделить все законы ресурсообмена, для которых условия минимальной диссипации приводят к однотипным решениям.

**Условия постоянства оптимальной надбавки.** Формальная постановка задачи об оптимальной закупке ресурса имеет вид

$$I = \int_0^{\tau} n(c, p) c dt \rightarrow \min_c$$

при условиях

$$\int_0^{\tau} n(c, p) dt = \Delta N, \quad n > 0,$$

$$\dot{N} = -n(c, p), \quad N(0) = N_0.$$

Здесь  $p(N)$  — заданная функция. Условия оптимальности этой задачи получены выше.

Найдем, каким условиям отвечают законы ресурсообмена  $n(p, c)$ , для которых оптимальная цена закупки ресурса  $c$  для любого момента времени  $t$  отличается от оценки этого ресурса в подсистеме  $p$  на постоянную величину. Как следует из условия оптимальности закупки в случае необратимого ресурсообмена

$$F = \frac{1}{n^2(p, c)} \frac{\partial n}{\partial c} = \text{const}, \quad n(c, p) = 0 \quad \text{при} \quad c = p. \quad (6.70)$$

Аналогом условия (6.70) для процесса ресурсообмена является соотношение

$$\frac{nn_c c - 2n_c^2}{nn_c p - 2n_p n_c} = \frac{\varphi_c}{\varphi_p}, \quad (6.71)$$

определяющую кинетику ресурсообмена для каждого вида зависимости оптимальной цены от оценки ресурса.

Оптимальная надбавка постоянна, если зависимость  $n(p, c)$  такова, что

$$\varphi(c, p) = c - p = \text{const}. \quad (6.72)$$

Условие (6.70) совпадает с точностью до обозначений с соответствующими условиями для задачи необратимого теплообмена, рассмотренными в последнем параграфе гл. 2, и решение задачи постоянства оптимальной надбавки будет с точностью до множителя  $1/T^2$  таким же, как и в случае необратимого теплообмена. Поэтому класс функций  $n(c, p)$ , обеспечивающих выполнение (6.72), имеет вид

$$n(c, p) = \frac{M(c-p)}{1 + R(p)M(c-p)}. \quad (6.73)$$

Условие (6.73) выделяет все зависимости потоков от закупочных цен и оценок ресурса, для которых оптимальная надбавка постоянна.

Чтобы выяснить, как зависит величина этой надбавки от продолжительности закупки и объема закупаемого ресурса, обозначим величину надбавки  $c - p = \delta$ . Выражение (6.73) примет вид

$$n(c, p) = \frac{\mu(\delta)}{1 + R(p)\mu(\delta)}.$$

Так как

$$\int_0^{\tau} n(c, p) dt = \Delta N,$$

то

$$\mu(\delta) = \frac{\Delta N}{\int_0^{\tau} \frac{dt}{1 + R(p(t))\mu(\delta)}}. \quad (6.74)$$

Это условие определяет надбавку  $\delta$ .

Необратимость процесса характеризуется величиной интеграла

$$\Delta S = \int_0^{\tau} \delta n(c, p) dt = \delta \Delta N.$$

Средняя величина диссипации (торговых издержек)

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta S}{\tau} = \frac{\delta \Delta N}{\tau}. \quad (6.75)$$

Равенства (6.74), (6.75) определяют необратимость процесса для любой функции  $n(c, p)$  вида (6.73).

**Условия постоянства оптимального потока.** Условие оптимальности закупок (6.70) приводит к условию постоянства потока  $n(p, c)$  на оптимальном решении  $c^*(p)$  тогда, когда левая часть равенства (6.70) зависит только от  $n$

$$F(p, c) = \varphi(n(p, c)),$$

где  $\varphi$  произвольная функция, или, что то же самое, когда  $n_c$  представляет собой некоторую функцию от  $n$

$$n_c(p, c^*) = \zeta(n(p, c^*)) \quad \forall p. \quad (6.76)$$

Справедливо Утверждение 6.1: *Минимальной стоимости закупок соответствует постоянный во времени поток ресурса в том и только в том случае, когда закон ресурсообмена может быть представлен в форме*

$$n(c, p) = (c - p)M(c - p). \quad (6.77)$$

Здесь  $M$  — произвольная неотрицательная функция разности цен.

Оптимальная зависимость  $c^*(p)$  определяется условием

$$(c^* - p)M(c^* - p) = n^* = \frac{\Delta N}{\tau}. \quad (6.78)$$

**Пример.** Зададим зависимость  $n(c, p)$  следующим образом

$$n(c, p) = \alpha \cdot \operatorname{arctg}(c - p), \quad \text{при } c > p.$$

Так как это выражение удовлетворяет условию (6.77), получим закон изменения оптимальной цены во времени  $c^*(t)$

$$c^*(t) = p(N^*) + tg \frac{\Delta N}{\tau \alpha},$$

при этом

$$N^*(t) = N_0 - \frac{\Delta N}{\tau} t.$$

Оптимальный поток ресурса будет постоянным и равным  $\frac{\Delta N}{\tau}$ .

*Доказательство:* Из требования (6.76) получаем в соответствии с общей методикой решения задачи классификации по типу оптимального решения, изложенной в гл. 2,

$$\frac{n_{cc}}{n_{cp}} = \frac{n_c}{n_p} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c} \ln \left| \frac{n_c}{n_p} \right| = 0 \Rightarrow \frac{n_c}{n_p} = r(p),$$

где  $r$  — произвольная функция. Получим уравнение, определяющее вид функции  $n$ ,

$$n_c - r(p)n_p = 0, \quad n(p, c) = 0 \quad \text{при } p = c. \quad (6.79)$$

Уравнения характеристик

$$\dot{c} = 1, \quad \dot{p} = -r(p).$$

Откуда

$$c(t) = c_0 + t, \quad \mu(p) = t - t_0, \quad (6.80)$$

где  $\mu(p)$  — произвольная дифференцируемая функция, такая, что

$$\frac{d\mu}{dp} = -\frac{1}{r(p)}.$$

Исключая  $t$  из (6.80), получим первый интеграл уравнения (6.79)

$$\mu(p) - c = t_0 - c_0 = \text{const},$$

так что общее решение

$$n(c, p) = M[\mu(p) - c].$$

С учетом требования  $n(p, c) = 0$  при  $c = p$  получим класс законов ресурсообмена (6.77), для которых на оптимальном решении поток ресурса постоянен.

## Глава 7

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСРЕДНИКА В НЕОБРАТИМОЙ МИКРОЭКОНОМИКЕ

Посреднические структуры играют в микроэкономике важную роль, при контакте ЭА через посредника уменьшается необратимость процессов ресурсообмена, а устанавливаемые посредником цены ресурсов при обмене с ЭА являются управляющими воздействиями в оптимизационных задачах микроэкономики. Выбором цен посредническая фирма, как правило, стремится максимизировать свою прибыль, т.е. извлечь максимум базисного ресурса. Подобную задачу решают торговые посредники, финансовые посредники (банки, конторы обмена валюты), производственные фирмы (посредники между производителями сырья, рынками рабочей силы и оборудования и потребителями продукции). В предыдущей главе были рассмотрены задачи об извлечении базисного ресурса в системах, содержащих не более одного стационарного рынка совершенной конкуренции. В этой главе мы рассмотрим более широкий класс систем.

### 7.1. Посредник между двумя подсистемами

#### 7.1.1. Стационарные рынки

Рассмотрим процесс обмена ресурсами между двумя рынками с изменяющимися во времени оценками ресурсов, осуществляемый через посредника. Требуется определить интенсивность такого обмена, а также цены, которые назначает посредник при покупке ресурса у одной и при продаже другой подсистеме в тех или иных условиях. При этом возможны два случая. В первом посредник поочередно взаимодействует с каждой из подсистем. Здесь он может назначать не только цены, но и продолжительность взаимодействия с каждой из них. Во втором случае закупка и продажа ресурса происходят непрерывно, и посредник-монополист распоряжается лишь ценами. Цены на первом и втором рынках обозначим через  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ , причем  $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ . Кинетика обмена характеризуется зависимостью

$$g(\bar{p}, p) = \alpha(\bar{p}, p)(\bar{p} - p). \quad (7.1)$$

При этом оценка рынка  $\bar{p}$  принимает значения  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ , а цены, назначаемые посредником при покупке и продаже ресурса  $p$ , являются искомыми переменными.

**Максимальная интенсивность прибыли.** Целью деятельности посредника является достижение максимума средней за цикл интенсивности извлечения базисного ресурса.

*Поочередная покупка и продажа ресурса.* Рассмотрим первоначально случай поочередного взаимодействия посредника с каждым из рынков. Интенсивность получения дохода  $N$  равна среднему за цикл значению произведения потока ресурса на цену посредника:

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T pg(\bar{p}, p) dt = \overline{pg(\bar{p}, p)} \rightarrow \max. \quad (7.2)$$

При этом посредник продает на втором рынке все, что покупает на первом, так что

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(\bar{p}, p) dt = \overline{g(\bar{p}, p)} = 0. \quad (7.3)$$

Мы пришли к усредненной задаче нелинейного программирования с одним условием. Для ее решения необходимо составить функцию Лагранжа исходной неусредненной задачи

$$L = pg(\bar{p}, p) - \lambda g(\bar{p}, p). \quad (7.4)$$

Обозначим функцию  $L$  через  $L_\nu$  при  $\bar{p} = \bar{p}_\nu$  и потребуем максимума каждой из функций  $L_\nu$  по  $p$ . Получим

$$\frac{dg(p_\nu, p)}{dp}(p - \lambda) + g(p_\nu, p) = 0, \quad \nu = 1, 2. \quad (7.5)$$

Эти уравнения позволяют найти оптимальные (базовые) значения  $p_{n\nu}^*(\bar{p}_\nu, \lambda)$ . После их подстановки в  $L_\nu$  получим  $L_1^*(\bar{p}_1, \lambda)$  и  $L_2^*(\bar{p}_2, \lambda)$ . Оптимальное значение  $\lambda^*$  соответствует условию [63]

$$\min_{\lambda} \max_{\bar{p}_\nu} L_\nu^*(\bar{p}_\nu, \lambda). \quad (7.6)$$

Откуда находят оптимальные значения цен покупки и продажи равны

$$p_1 = p_n^*(\lambda^*, \bar{p}_1), \quad p_2 = p_n^*(\lambda^*, \bar{p}_2),$$

причем

$$p_1 > \bar{p}_1, \quad p_2 < \bar{p}_2.$$

Проведем решение для случая, когда коэффициент  $\alpha$  в (7.1) зависит только от цены рынка, т.е. при  $\bar{p} = \bar{p}_1$  коэффициент  $\alpha = \alpha_1$ , а при  $\bar{p} = \bar{p}_2$  коэффициент  $\alpha = \alpha_2$ . Функция  $L$  примет вид

$$L = \alpha(\bar{p})(\bar{p} - p)(p - \lambda).$$

Условия (7.5) запишутся как

$$-\alpha_\nu(p - \lambda) + \alpha_\nu(\bar{p}_\nu - p) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

откуда

$$p_{n\nu}^* = \frac{\bar{p}_\nu + \lambda}{2}, \quad \nu = 1, 2. \quad (7.7)$$

Подставляя в  $L$  эти значения  $p$ , получим

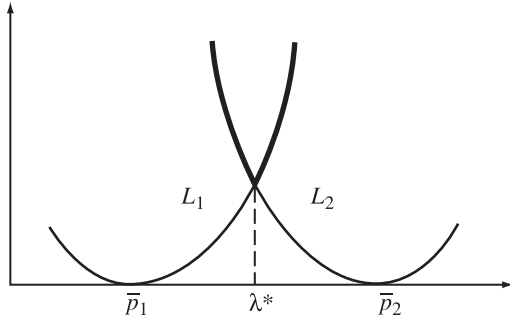
$$L_1 = \alpha_1 \left( \bar{p}_1 - \frac{\bar{p}_1 + \lambda}{2} \right) \left( \frac{\bar{p}_1 + \lambda}{2} - \lambda \right) = \alpha_1 \left( \frac{\bar{p}_1 - \lambda}{2} \right)^2, \quad (7.8)$$

$$L_2 = \alpha_2 \left( \frac{\bar{p}_2 - \lambda}{2} \right)^2.$$

Так как  $p_{n1}^* > \bar{p}_1$ , а  $p_{n2}^* < \bar{p}_2$ , функция  $L_2^*$  уменьшается с ростом  $\lambda$ , а  $L_1^*$  увеличивается. Минимум по  $\lambda$  от максимума из двух этих функций достигается в точке равенства  $L_1^*$  и  $L_2^*$ :

$$L_1^*(\lambda) = L_2^*(\lambda) \Rightarrow \sqrt{\alpha_1}(\bar{p}_1 - \lambda) = -\sqrt{\alpha_2}(\bar{p}_2 - \lambda).$$

Функции  $L_1^*$  и  $L_2^*$  показаны на рис. 7.1. Их максимум выделен жирной линией.



Р и с. 7.1 Характер изменения максимального по  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  значения функции Лагранжа

Минимум по  $\lambda$  от  $\max_i L_1^*(\lambda)$  достигается в точке  $\lambda^*$ . Отсюда

$$\lambda^* = \frac{\bar{p}_1 \sqrt{\alpha_1} + \bar{p}_2 \sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \quad (7.9)$$

Чтобы найти доли от общего времени цикла, в течение которых следует производить закупки и продажи, нужно выражения (7.7) и (7.9) подставить в (7.3). Получим

$$\begin{aligned} \gamma_1 \alpha_1 (\bar{p}_1 - p_{n1}^*) + \gamma_2 \alpha_2 (\bar{p}_2 - p_{n2}^*) &= \\ &= \frac{\gamma_1 \alpha_1}{2} \frac{\sqrt{\alpha_2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \frac{\gamma_2 \alpha_2}{2} \frac{\sqrt{\alpha_1}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} = 0. \end{aligned}$$

Так что

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \quad (7.10)$$

В частности, при  $\alpha_1 = \alpha_2$   $\lambda^* = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2}$ .

Оптимальные цены закупки и продажи определяются после подстановки  $\lambda^*$  в выражение (7.7). Так, для случая  $\alpha_1 = \alpha_2$

$$p_{n1}^* = \frac{3\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{4}, \quad p_{n2}^* = \frac{3\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{4}.$$

Норма прибыли при этом

$$\eta = \frac{p_{n2}^*}{p_{n1}^*} - 1 = \frac{3\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{3\bar{p}_1 + \bar{p}_2} - 1,$$

что, естественно, меньше, чем ее равновесное значение  $\eta_0 = \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1} - 1$ , найденное в гл. 6.

Предельная интенсивность получения дохода

$$N^* = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})} \left[ \sqrt{\alpha_2}(\bar{p}_2^2 - \lambda^{*2}) + \sqrt{\alpha_1}(\bar{p}_1^2 - \lambda^{*2}) \right]. \quad (7.11)$$

При реализации экономического цикла ограничением может быть средний поток капитала, затрачиваемого посредником на приобретение ресурса. Этот поток равен

$$U = p_1 g(\bar{p}_1, p_1) \gamma_1. \quad (7.12)$$

Для кинетики обмена, рассмотренной выше, в оптимальном цикле

$$U^* = \alpha_1 \frac{\lambda^{*2} - \bar{p}_1^2}{4} \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \quad (7.13)$$

Константа  $\lambda^*$  в (7.11) и в (7.13) определена равенством (7.9).

Если на поток затрачиваемого посредником капитала имеется ограничение типа  $U \leq U^{\max}$  и величина  $U^{\max}$  меньше, чем  $U^*$ , то равенство (7.12) нужно ввести в задачу в форме еще одного ограничения. Полученная в результате решения такой задачи интенсивность дохода  $N$ , естественно, окажется меньше, чем  $N^*$ . Если же  $U^{\max} \geq U^*$ , то посреднику нет смысла тратить весь капитал, в данном цикле он использует только часть его, равную  $U^*$ . В этом случае максимуму  $N$  соответствует максимальная норма прибыли на вложенный капитал. Задача в такой постановке рассмотрена ниже.

*Одновременная закупка и продажа ресурса.* При непрерывной закупке и продаже ресурса посреднической фирмой ей нужно выбрать такие цены  $p_1$  и  $p_2$ , чтобы интенсивность получения прибыли

$$\bar{N} = p_2 g_2(\bar{p}_2, p_2) + p_1 g_1(\bar{p}_1, p_1) \quad (7.14)$$

была максимальна при условии полной продажи всего закупленного, а именно

$$g_1(\bar{p}_1, p_1) + g_2(\bar{p}_2, p_2) = 0. \quad (7.15)$$

Решение этой задачи нелинейного программирования приводит к соотношению, которому должны удовлетворять оптимальные цены:

$$\frac{g_1(\bar{p}_1, p_1)}{\frac{\partial g_1}{\partial p_1}} + p_1 = \frac{g_2(\bar{p}_2, p_2)}{\frac{\partial g_2}{\partial p_2}} + p_2. \quad (7.16)$$

В том случае, когда  $g_\nu = \alpha_\nu(\bar{p}_\nu - p_{n\nu})$  ( $\nu = 1, 2$ ), условие (7.16) примет вид

$$2p_1 - \bar{p}_1 = 2p_2 - \bar{p}_2,$$

что вместе с условием (7.15)

$$\alpha_1(\bar{p}_1 - p_1) = -\alpha_2(\bar{p}_2 - p_2)$$

позволяет найти цены закупок и продаж:

$$p_{n1}^* = \frac{\alpha_1 \bar{p}_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{2}, \quad (7.17)$$

$$p_{n2}^* = \frac{\alpha_2 \bar{p}_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{2}. \quad (7.18)$$

Интенсивность получения прибыли

$$\bar{N}^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (7.19)$$

Нетрудно видеть, что при одинаковых  $\alpha_\nu$  значение  $\bar{N}^*$  вдвое больше, чем  $N^*$ , найденная выше (см. (7.11)), что естественно, так как потоки ресурсов одинаковы, а продолжительность продаж составляет половину времени цикла. Для  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  отношение  $\bar{N}^*/N^* < 2$ .

*Векторный ресурс.* При поочередном взаимодействии посредника с рынками и при отсутствии ограничений на интенсивность затрат капитала задача (7.2), (7.3) примет форму

$$N = \sum_{i=1}^n \overline{p_i g_i(\bar{p}, p_i)} \rightarrow \max_{\bar{p}}, \quad \overline{g_i(\bar{p}, p)} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это усредненная задача с  $n$  условиями. Число базовых решений у нее не превосходит  $n + 1$ . Для ее решения первоначально нужно решить вспомогательную задачу

$$L = \sum_{i=1}^n [g_i(\bar{p}, p)(p_i - \lambda_i)] \rightarrow \min_{\lambda} \max_{\bar{p}}, \quad \bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2).$$

Решение этой задачи сильно упрощается, если для каждого из векторов рыночных цен  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  функция  $L$  оказывается строго выпуклой



вверх по  $p$ , что позволяет найти цены посредника на каждом из рынков, решая уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial p_\nu} (p_i - \lambda_i) + g_\nu(\bar{p}_j, p) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Если  $g_i = g_i(\bar{p}_i, p_i)$ , то задача с векторным ресурсом может быть разбита на  $n$  независимых задач, подобных (7.2), (7.3), и все полученные результаты остаются справедливыми. При этом равенство (7.9) справедливо для каждого  $\lambda_i$ , а в выражении (7.11) для  $N^*$  стоит сумма по  $i$ , каждое из слагаемых в которой положительно. Норму прибыли можно найти по формуле

$$\eta = \frac{N^*}{\gamma_1 \sum_{i=1}^n g_i(\bar{p}_{i1}, p_i) p_i}.$$

То же относится и к задаче с одновременным взаимодействием посредника с рынками.

Особенности векторного случая становятся существенными, когда интенсивность затрат капитала ограничена значением, меньшим того, которое соответствует максимальной интенсивности получения прибыли  $N^*$ . Этот случай рассмотрен в следующем пункте.

**Посредник между двумя ЭА.** В том случае, когда посредник взаимодействует не с рынками, а с ЭА, оценки которых зависят от запаса ресурсов, цены закупок и продаж должны изменяться. Поставленная задача распадается на три подзадачи: оптимальное взаимодействие посредника с первым и вторым ЭА, а также согласование этих двух процессов за счет оптимального подбора общих для них параметров; важно при этом, что каждый из двух процессов взаимодействия (покупка и продажа) должен удовлетворять условиям минимума диссипации капитала, полученным выше (см. гл. 6).

Рассмотрим сначала цикл с поочередной покупкой и продажей ресурса, введя следующие обозначения:  $C_1, C_2$  — емкости первого и второго ЭА;  $p_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) — их оценки;  $p(t)$  — цена посредника;  $\tau_i$  ( $i = 1, 2$ ) — продолжительность взаимодействия с  $i$ -м ЭА. В результате решения требуется оптимально выбрать  $\tau_1$  и  $\tau_2$  так, чтобы общая продолжительность цикла была равна заданному значению  $\tau$ , а также оптимально найти объем закупаемого ресурса  $\Delta x$ . Критерием оптимальности является прибыль, полученная за цикл:

$$I = \int_0^{\tau_2} p(t) g(p_2, p) dt - \int_0^{\tau_1} p(t) g_1(p, p_1) dt \rightarrow \max \quad (7.20)$$

при условиях

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau, \quad (7.21)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{g_1(p, p_1)}{C_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{g_2(p_2, p)}{C_2}, \quad p_i(0) = \bar{p}_i, \quad (7.22)$$

$$\int_0^{\tau_1} g_1(p, p_1) dt = \int_0^{\tau_2} g_2(p_2, p) dt = \Delta x. \quad (7.23)$$

Продемонстрируем последовательность решения для линейной кинетики товарообмена, когда

$$\begin{aligned} g_2(p_2, p) &= \alpha_2(p_2 - p), \\ g_1(p, p_1) &= \alpha_1(p - p_1). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Из результата гл. 6 следует, что для каждого из полуциклов в оптимальном процессе поток ресурса должен быть постоянен, и, как следствие, равновесные цены покупок и продаж линейно изменяются во времени:

$$p_1^*(t) = \bar{p}_1 + \frac{\Delta x}{\tau_1 C_1} t, \quad t \in [0, \tau_1], \quad (7.25)$$

$$p_2^*(t) = \bar{p}_2 - \frac{\Delta x}{\tau_2 C_2} t, \quad t \in [0, \tau_2]. \quad (7.26)$$

Закупочная цена выше  $p_1^*(t)$  на величину  $\delta_1 = \Delta x / \tau_1 \alpha_1$  и ниже  $p_2^*(t)$  на  $\delta_2 = \Delta x / \tau_2 \alpha_2$ , так что при закупке и продаже цены посредника равны

$$\begin{aligned} p^*(t) &= \bar{p}_1 + \frac{\Delta x}{\tau_1} \left( \frac{t}{C_1} - \frac{1}{\alpha_1} \right), \\ p^*(t) &= \bar{p}_2 - \frac{\Delta x}{\tau_2} \left( \frac{t}{C_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Эти зависимости после их подстановки в критерий (7.20) позволяют вычислить величину прибыли как функцию от  $\tau_1, \tau_2$  и  $\Delta x$  и максимизировать ее по этим переменным при условии (7.21). Получим

$$I = \Delta x (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) - \Delta x^2 \left( \frac{1}{\tau_1 \alpha_1} + \frac{1}{\tau_2 \alpha_2} + \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2} \right). \quad (7.28)$$

Первое из слагаемых в этом выражении соответствует равновесной прибыли при обмене между двумя рынками, второе же характеризует потери за счет конечного времени обмена и конечных емкостей экономических систем. Чтобы найти распределение времен  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , нужно решить задачу

$$\left( \frac{1}{\tau_1 \alpha_1} + \frac{1}{\tau_2 \alpha_2} \right) \rightarrow \min / \tau_1 + \tau_2 = \tau. \quad (7.29)$$

Ее решение, как легко видеть, приводит к соотношениям

$$\tau_1^* = \tau \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \tau_2^* = \tau \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}},$$

так что

$$\frac{1}{\alpha_1 \tau_1^*} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2^*} = \frac{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}{\tau} \left( \frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}} \right). \quad (7.30)$$

Оптимальный объем закупок  $\Delta x$  с учетом (7.30) после максимизации  $I$  по  $\Delta x$  равен

$$\Delta x^* = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)\tau}{\tau \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + 2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}) \left( \frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}} \right)}. \quad (7.31)$$

Максимальная прибыль:

$$I^* = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^2 \tau}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}) \left( \frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}} \right) + 2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \tau}. \quad (7.32)$$

Чем больше продолжительность цикла, тем меньше интенсивность получения дохода  $N^* = I^*/\tau$ .

При одновременной покупке и продаже ресурса посреднической фирмой продолжительности процессов покупки и продажи  $\tau_1$  и  $\tau_2$  должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\theta g_1(p_1, p_1) dt \geq \int_0^\theta g_2(p_2, p_2) dt \quad (7.33)$$

для любого  $\theta \in [0, \tau]$ . Так как с ростом продолжительности  $\tau_1$  и  $\tau_2$  поток ресурса в оптимальном процессе уменьшается, а общая величина передаваемого ресурса  $\Delta x$  одна и та же при продаже и покупке, то, как правило,  $\tau_1 \leq \tau_2$ . В частности, для линейной кинетики товарообмена соотношение (7.33) выполнено как равенство, при этом  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . Цены покупок и продаж изменяются в соответствии с равенствами (7.27), а величина прибыли соответствует выражению (7.28) после подстановки в (7.27), (7.28) вместо  $\tau_1$  и  $\tau_2$  продолжительности процесса  $\tau$ .

Оптимальному решению соответствуют значения

$$\Delta x^* = \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\frac{2}{\tau} \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}, \quad (7.34)$$

$$I^* = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^2}{\frac{4}{\tau} \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) + 2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}. \quad (7.35)$$

**Предельная норма прибыли.** Если требуемая прибыль  $M$  меньше  $I^*$ , то можно сформулировать задачу нахождения режима, который обеспечивает эту прибыль при минимуме затрат капитала:

$$I_1 = \int_0^{\tau_1} pg(p_1, p)dt \rightarrow \min, \quad (7.36)$$

$$\int_0^{\tau_1} p_2g(p_2, p)dt - \int_0^{\tau_2} pg(p_1^p)dt = M.$$

Эта задача во многом похожа на предыдущую. Для полуциклов покупки и продажи должны выполняться те же условия минимума диссипации капитала. Различия возникают на стадии соединения частей цикла. Задача стыковки полуциклов примет вид

$$I_1^*(\tau_1, \Delta x) \rightarrow \min_{\Delta x, \tau_1, \tau_2}, \quad / I_2^*(\tau_1, \Delta x) - I_1^*(\tau_2, \Delta x) = M. \quad (7.37)$$

Это дает такие же выражения для  $\tau_1^*$ ,  $\tau_2^*$ , как и в задаче (7.29). Оптимальный объем закупок:

$$\Delta x^*(\lambda) = \frac{\lambda(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \bar{p}_1}{\lambda\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{\alpha_1\tau_1^*} + \frac{2}{\alpha_2\tau_2^*}\right) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{\alpha_2\tau_2^*}\right)}.$$

Подстановка  $\Delta x^*(\lambda)$  в (7.37) приводит к уравнению для нахождения  $\lambda^*$ , а значит, и оптимального объема закупок, зависящих от  $M$ .

*Учет ограничения на интенсивность затрат.* В том случае, когда предельные возможности посредника по закупке ресурса ограничены, его оптимальному поведению соответствует получение максимальной прибыли  $N$  при фиксированном значении затрат на закупку ресурса. Так как норма прибыли

$$\eta = \frac{N}{U},$$

то задача эквивалентна максимизации  $\eta$  при некотором значении  $U$  или  $N$ .

Рассмотрим первоначально цикл с поочередным контактом посредника-монополиста с двумя рынками. Кинетику обмена ресурсами примем в форме (7.24) и запишем формальную постановку задачи как

$$N = [\alpha_2\gamma_2(\bar{p}_2 - p_2)p_2 - \alpha_1\gamma_1(p_1 - \bar{p}_1)p_1] \rightarrow \max \quad (7.38)$$

при фиксированных затратах

$$U = \alpha_1\gamma_1(p_1 - \bar{p}_1)p_1 \leq U^{\max} \quad (7.39)$$

и ненакопления ресурса посредником:

$$\alpha_1\gamma_1(p_1 - \bar{p}_1) = \alpha_2\gamma_2(\bar{p}_2 - p_2), \quad (7.40)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Условие (7.39) можно считать равенством, если  $U^{\max}$  не превышает затрат  $U^*$ , значение которых найдено выше (см. (7.13)).

После стандартных выкладок условие, которому должны удовлетворять цены закупок  $p_1$  и продаж  $p_2$ , примет форму

$$\alpha_1(p_1 - \bar{p}_1)^2(2p_2 - \bar{p}_2) = \alpha_2(\bar{p}_2 - p_2)^2(2p_1 - \bar{p}_1). \quad (7.41)$$

Оно вместе с ограничениями (7.39), (7.40) определяет  $p_1, p_2, \gamma_1, \gamma_2$ .

При совмещении процессов покупки и продажи ресурса ограничение на затраты однозначно определяет  $p_1, p_2$ , а значит, и прибыль  $N$ . Для кинетики обмена ресурсами в форме (7.24) имеем

$$p_1 = 0,5\bar{p}_1 + \sqrt{0,25\bar{p}_1^2 + \frac{U^{\max}}{\alpha_1}}, \quad (7.42)$$

$$p_2 = \bar{p}_2 - \frac{U^{\max}}{p_1\alpha_2},$$

$$N = U^{\max} \frac{p_2}{p_1} = U^{\max} \left( \frac{\bar{p}_2}{p_1} - \frac{U^{\max}}{p_1^2\alpha_2} \right). \quad (7.43)$$

*Выбор ассортимента.* Для векторного ресурса, когда ограничен общий поток затрат, возникает задача о выборе оптимального ассортимента и цен на каждый  $i$ -й вид ресурса:

$$N = \sum_{i=1}^n N_i(U_i) \rightarrow \max \left/ \sum_i U_i = U^{\max}, \quad U_i \geq 0. \quad (7.44) \right.$$

Здесь  $U_i$  — затраты, выделяемые на закупку  $i$ -го ресурса, а зависимость  $N_i$  от  $U_i$  определяется равенствами (7.42), (7.43) при подстановке в них вместо  $U^{\max}$  значения  $U_i$ . Если функции  $N_i(U_i)$  строго выпуклы вверх, а их производные в нуле сколь угодно велики, то оптимальные значения  $U_i$  положительны и удовлетворяют условиям

$$\frac{dN_i}{dU_i} = \lambda, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые с учетом (7.42), (7.43) примут форму

$$\frac{\bar{p}_{2i}}{p_{n1i}} - \frac{2U_i}{p_{n1i}^2\alpha_{2i}} + \frac{U_i}{2\alpha_{1i}} \left( \frac{2U_i}{\alpha_{2i}p_{n1i}^3} - \frac{\bar{p}_{2i}}{p_{n1i}^2} \right) \frac{1}{\sqrt{0,25\bar{p}_{1i}^2 + U_i/\alpha_{1i}}} = \lambda, \quad (7.45)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad p_{n1i} = 0,5\bar{p}_{1i} + \sqrt{0,25\bar{p}_{1i}^2 + U_i/\alpha_{1i}},$$

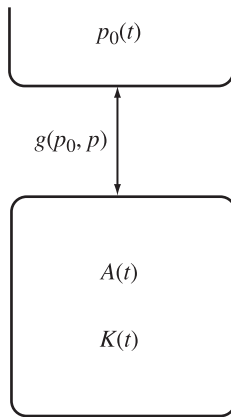
$$\sum_{i=1}^n U_i = U^{\max}.$$

Решение системы (7.45) позволяет найти оптимальный ассортимент закупаемых ресурсов, распределение средств на их закупку и цены.

## 7.2. Обмен с нестационарными рынками

**Покупка и продажа на одном рынке.** Посредник может получать прибыль, не только осуществляя экономический цикл между рынками с различными ценами, но и контактируя с одним рынком в том случае, когда цена ресурса на этом рынке изменяется во времени. Характерным примером является рынок сельскохозяйственной продукции, стоимость которой зависит от сезона и от урожайности в текущем году. Для такого обмена посредник должен иметь запас базисного ресурса и склад для хранения продукта, которым он обменивается с рынком. Другим характерным примером является покупка и продажа на бирже ценных бумаг, курс которых изменяется под действием множества порой случайных факторов.

Структура системы показана на рис 7.2, где обозначено:  $p_0(t)$  — равновесная цена рынка,  $p(t)$  — цена посредника,  $A(t)$  и  $K(t)$  — запасы ресурса и капитала (базисного ресурса) соответственно.



Р и с. 7.2. Структура системы извлечения прибыли посредником за счет нестационарности рынка

Требуется найти такой закон изменения во времени цены посредника  $p(t)$ , чтобы прирост его капитала за период  $\tau$  был максимален. Формальная постановка задачи имеет вид:

Прирост капитала посредника за время  $\tau$

$$I(\tau) = \int_0^{\tau} -g(p_0(t), p(t))p(t)dt \rightarrow \max_{p(t) \geq 0}. \quad (7.46)$$

Скорость его изменения

$$\dot{K}(t) = -g(p_0(t), p(t))p(t), \quad K(0) = K_0. \quad (7.47)$$

Изменение объема ресурса

$$\dot{A}(t) = g(p_0(t), p(t)), \quad A(0) = A_0. \quad (7.48)$$

Объемы ресурса и капитала неотрицательны, в качестве положительного направления потока принята закупка ресурса.

Будем предполагать, что посредник не накапливает ресурса, т.е.  $A(\tau) = A(0)$ , или

$$\int_0^\tau -g(p_0(t), p(t)) dt = 0. \quad (7.49)$$

При отсутствии капитала он не покупает ресурс, а при отсутствии ресурса он не продает его, так что

$$g(p_0(t), p(t)) \leq 0, \quad \text{при } K = 0, \quad g(p_0(t), p(t)) \geq 0, \quad \text{при } A = 0. \quad (7.50)$$

Таким образом, задача сводится к максимизации прироста капитала при ограничениях (7.47)–(7.50), управлением является цена посредника  $p(t)$ , а переменными состояниями — объемы запасов ресурса и капитала.

*Оценка предельной прибыли.* Наибольшую сложность при решении задачи (7.47)–(7.50) представляют ограничения (7.50), так как именно наличие этих условий приводит к необходимости учитывать дифференциальные уравнения (7.47), (7.48). Чтобы обойти эти трудности, мы первоначально ослабим ограничения задачи, предположив, что начальные запасы  $K_0$  и  $A_0$  столь велики, что условия (7.50) несущественны, или, что то же самое, посредник может в случае необходимости получить неограниченный беспроцентный заем. Так как уравнения (7.47), (7.48) являются ляпуновскими (т.е.  $A$  и  $K$  не входят в правые части этих уравнений), то без ограничений (7.50) их можно не учитывать, а найдя оптимальный закон изменения цен  $p^*(t)$ , из уравнений (7.47), (7.48) получить оптимальные  $A^*(t)$  и  $K^*(t)$ . Полученное при этом значение максимального прироста капитала  $I^*(\tau)$  будет оценкой сверху для прироста капитала, найденного с учетом всех ограничений.

Функция Лагранжа для задачи (7.46), (7.49) запишется в форме

$$L(p_0, p) = -g(p_0, p)p + \lambda g(p_0, p) = g(p_0, p)(\lambda - p).$$

Условие ее стационарности по  $p$  приводит к уравнению

$$\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}(\lambda - p) - g(p_0, p) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{g(p_0, p)}{\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}} + p = \lambda. \quad (7.51)$$

С помощью условия (7.49) исключим константу  $\lambda$  из соотношения (7.51). Для этого преобразуем (7.49) как

$$\int_0^{\tau} g(p_0(t), p(t)) dt = \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} (\lambda - p) dt = \lambda \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} dt - \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} p dt = 0,$$

откуда

$$\lambda = \left( \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} p dt \right) : \left( \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} dt \right). \quad (7.52)$$

Подставляя (7.52) в (7.51), получаем уравнение, связывающее оптимальную цену  $p^*(t)$  с  $p_0(t)$ :

$$g(p_0, p^*) = \frac{\partial g}{\partial p} \left( \left( \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} p^* dt \right) : \left( \int_0^{\tau} \frac{\partial g}{\partial p} dt \right) - p^* \right). \quad (7.53)$$

Выпишем явные выражения для  $p^*(p_0)$  и  $I^*(\tau)$  в случае, когда поток покупок (продаж) линеен относительно разности цен:

$$g(p_0, p) = \alpha(p - p_0), \quad (7.54)$$

где  $\alpha$  — некоторая положительная константа. Условие (7.53) примет вид

$$g^* = \frac{\alpha}{\tau} \int_0^{\tau} p dt - p(t).$$

Обозначая среднюю цену ресурса за время  $\tau$  как  $\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p dt = \bar{p}$  и учитывая, что в силу (7.49)  $\bar{p} = \bar{p}_0$ , получим на оптимальном решении

$$g^* = \alpha(p(t) - p_0(t)) = \alpha(\bar{p}_0 - p(t)),$$

откуда

$$p^*(t) = \frac{1}{2}(\bar{p}_0 + p_0(t)). \quad (7.55)$$

Оптимальный поток ресурса равен

$$g^*(p_0, p^*) = \alpha(p^*(t) - p_0(t)) = \frac{\alpha}{2}(\bar{p}_0 - p_0(t)). \quad (7.56)$$

Таким образом, оптимальный поток ресурса пропорционален отклонению его цены от ее среднего за период  $\tau$  значения.

Вычислим верхнюю оценку для интенсивности прибыли:



$$\begin{aligned}
J^* &= \frac{I^*(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau -g^*(p_0(t), p^*(t)) p^*(t) dt = \\
&= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\alpha}{2} (p_0 - \bar{p}_0) \frac{1}{2} (p_0 + \bar{p}_0) dt = \frac{\alpha}{4\tau} \int_0^\tau (p_0^2 - \bar{p}_0^2) dt = \\
&= \frac{\alpha}{4\tau} \int_0^\tau (p_0 - \bar{p}_0)^2 dt = \frac{\alpha}{4} D_{p_0}. \quad (7.57)
\end{aligned}$$

Полученные соотношения имеют смысл и в том случае, когда  $p_0(t)$  представляет собой стационарный случайный процесс с математическим ожиданием  $\bar{p}_0$ , дисперсией  $D_{p_0}$  и плотностью распределения  $\mu(p_0)$  на множестве  $V$  возможных значений  $p_0$ . Формула (7.53) для оптимального потока ресурса после перехода от усреднения по времени к усреднению по множеству примет вид

$$g(p_0, p^*) = \left( \frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p} \right)_{p^*} \left( \frac{M \left[ \frac{\partial g}{\partial p} p \right]}{M \left[ \frac{\partial g}{\partial p} \right]} - p^* \right). \quad (7.58)$$

Здесь через  $M[\cdot]$  обозначено математическое ожидание выражения, стоящего в скобках, по  $p_0$ . Так,

$$M \left[ \frac{\partial g}{\partial p} p \right] = \int_V \mu(p_0) \frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p} p dp_0.$$

Таким образом, (7.58) представляет собой интегральное уравнение, связывающее  $p^*$  и  $p_0$  для любого  $t$ . Эта связь зависит от распределения  $p_0$ .

Для линейной кинетики ресурсообмена (7.54) уравнение (7.58) кардинально упрощается. При любом законе распределения  $p^*(t)$  зависит только от  $\bar{p}_0$ , а предельная интенсивность прибыли, как следует из (7.57), равна

$$J^*(\tau) = \frac{\alpha}{4} D_{p_0}. \quad (7.59)$$

**Перепродажа ресурсов.** Рассмотрим систему, в которой происходит одновременная покупка и продажа ресурса по разным ценам. Пусть  $\hat{p}$  и  $\check{p}$  — предельные цены (верхняя и нижняя соответственно) клиентов,  $p_+(t)$  — цена покупки,  $p_-(t)$  — цена продажи. Поскольку посредник не может продавать ресурс по цене выше, чем максимальная цена клиентов, и покупать ресурс по цене ниже, чем минимальная цена клиентов, то должны выполняться неравенства

$$p_-(t) \leq \hat{p}_0, \quad p_+(t) \leq \check{p}_0.$$

Задача максимизации интенсивности получения прибыли может быть формализована как

$$J = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+] dt \rightarrow \max_{p_+, p_-}. \quad (7.60)$$

Здесь  $g_-(\hat{p}_0, p_-)$  и  $g_+(\check{p}_0, p_+)$  — потоки продаж и покупок ресурса.

Как и в предыдущей модели, мы считаем, что посредник не накапливает ресурс. Условие ненакопления ресурса запишется как

$$\Delta A = \int_0^{\tau} [g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)] dt = 0. \quad (7.61)$$

При истощении капитала или ресурса потоки покупок и продаж связаны неравенствами

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0, p_+)p_+ &\leq g_-(\hat{p}_0, p_-)p_-, & K &= 0, \\ g_+(\check{p}_0, p_+) &\geq g_-(\hat{p}_0, p_-), & A &= 0. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Изменения запасов ресурса и капитала определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-), & A(0) &= A_0, \\ \dot{K}(t) &= g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+, & K(0) &= K_0. \end{aligned} \quad (7.63)$$

В том случае, когда  $A_0$  и  $K_0$  велики, вероятность истощения запасов капитала и ресурса пренебрежимо мала, поэтому неравенства (7.62) можно отбросить. Уравнения (7.63) не содержат в правых частях  $A$  и  $K$ , и в этом случае их можно не учитывать при выборе оптимальных цен  $p_+^*$  и  $p_-^*$ .

Решим задачу (7.60), (7.61). Функция Лагранжа запишется как

$$L = g_-(\hat{p}_0, p_-)(p_- - \lambda) - g_+(\check{p}_0, p_+)(p_+ - \lambda).$$

Условия ее стационарности по  $p_+$  и  $p_-$  приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} [p_+(t) - \lambda] + g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= 0, \\ \frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} [p_-(t) - \lambda] + g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Если решение этих двух уравнений единственно и соответствует максимуму  $L$ , то из уравнений (7.64) получаем

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= -\frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} (p_+(t) - \lambda), \\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= -\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} (p_-(t) - \lambda). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (7.61):

$$\begin{aligned} \Delta A &= \int_0^{\tau} \left[ g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-) \right] dt = \\ &= \int_0^{\tau} \left[ \frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} p_+(t) \right] dt + \\ &\quad + \lambda \int_0^{\tau} \left[ \frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} \right] dt = 0, \end{aligned}$$

откуда выразим  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\int_0^{\tau} \left[ \frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} p_+(t) \right] dt}{\int_0^{\tau} \left[ \frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} \right] dt}. \quad (7.65)$$

Исключив  $\lambda$  из уравнений (7.64) и (7.65), получим систему уравнений для нахождения оптимальных  $p_+^*(t)$  и  $p_-^*(t)$ .

Найдем решение для линейной зависимости потока покупки (продажи) от разности цен в форме:

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= \alpha_+(p_+(t) - \check{p}_0(t)), \\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= \alpha_-(p_-(t) - \hat{p}_0(t)), \end{aligned} \quad (7.66)$$

где  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  — некоторые положительные константы.

Уравнения (7.64) примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_+(p_+ - \lambda) + \alpha_+(p_+ - \check{p}_0) &= 0, \\ \alpha_-(p_- - \lambda) + \alpha_-(p_- - \hat{p}_0) &= 0. \end{aligned}$$

Подставив в эти уравнения значение  $\lambda$ , получим оптимальное решение

$$\begin{aligned} p_+^*(t) &= \frac{1}{2}(\lambda + \check{p}_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_+ \bar{p}_+ + \alpha_- \bar{p}_-}{\alpha_+ + \alpha_-} + \check{p}_0(t) \right], \\ p_-^*(t) &= \frac{1}{2}(\lambda + \hat{p}_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_+ \bar{p}_+ + \alpha_- \bar{p}_-}{\alpha_+ + \alpha_-} + \hat{p}_0(t) \right]. \end{aligned}$$

В выражениях для  $p_+^*$  и  $p_-^*$  содержатся их средние значения  $\bar{p}_+$  и  $\bar{p}_-$  на интервале  $[0, \tau]$ . Мы можем избавиться от  $\bar{p}_+$  и  $\bar{p}_-$ , усреднив левые и правые части в этих равенствах. В результате получим систему

уравнений с двумя неизвестными  $\bar{p}_+$  и  $\bar{p}_-$

$$\bar{p}_+ = \frac{\alpha_+ \bar{p}_+ + \alpha_- \bar{p}_-}{2(\alpha_+ + \alpha_-)} + \frac{\bar{p}_0}{2}, \quad \bar{p}_- = \frac{\alpha_+ \bar{p}_+ + \alpha_- \bar{p}_-}{(\alpha_+ + 2\alpha_-)} + \frac{\bar{p}_0}{2},$$

откуда

$$\bar{p}_+ = \frac{(2\alpha_+ + \alpha_-)\bar{p}_0 + \alpha_- \bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad \bar{p}_- = \frac{\alpha_+ \bar{p}_0 + (\alpha_+ + 2\alpha_-)\bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}.$$

Таким образом, зная  $\bar{p}_+$  и  $\bar{p}_-$ , можем выразить оптимальные значения  $p_+^*$  и  $p_-^*$  только через  $\hat{p}_0(t)$  и  $\check{p}_0(t)$  и их средние значения:

$$p_+^*(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_0(t) + \frac{\alpha_+ \bar{p}_0 + \alpha_- \bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad p_-^*(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_0(t) + \frac{\alpha_+ \bar{p}_0 + \alpha_- \bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}. \quad (7.67)$$

Найдем теперь верхнюю оценку интенсивности получения прибыли:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[ g_-(\hat{p}_0, p_-) p_- - g_+(\check{p}_0, p_+) p_+ \right] dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[ -\alpha_- \left( p_-^*(t) - \hat{p}_0(t) \right) p_-^*(t) - \alpha_+ \left( p_+^*(t) - \check{p}_0(t) \right) p_+^*(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (7.68)$$

В том случае, когда цены  $\hat{p}_0$  и  $\check{p}_0$  представляют собой стационарные случайные процессы, полученные соотношения справедливы и могут быть обобщены, как это сделано выше для обмена с одним рынком. Для кинетики в форме (7.66) выражения (7.67) остаются в силе, если под  $\hat{p}_0$  и  $\check{p}_0$  понимать математические ожидания этих процессов, а оценка для интенсивности получения прибыли (7.68) перепишется как

$$J^* = \frac{1}{4} (\alpha_+ D_{\check{p}_0} + \alpha_- D_{\hat{p}_0}) + \frac{\alpha_+ \alpha_-}{4(\alpha_+ + \alpha_-)} (\bar{p}_0 - \bar{\hat{p}}_0)^2,$$

где

$$D_{\check{p}_0} = \bar{\check{p}}_0^2 - (\bar{\check{p}}_0)^2, \quad D_{\hat{p}_0} = \bar{\hat{p}}_0^2 - (\bar{\hat{p}}_0)^2$$

дисперсии случайных величин  $\check{p}_0$  и  $\hat{p}_0$ .

**Оценка вероятности истощения запаса ресурса.** Для того чтобы выяснить, насколько грубой является полученная выше оценка (7.57), найдем вероятность истощения запаса ресурса  $A(t)$  в предположении, что  $p_0(t)$  является гауссовым стационарным случайным процессом с корреляционной функцией вида

$$R_{p_0}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha|\tau|].$$

Нетрудно показать, что для линейной зависимости (7.54) потока закупок от разности цен этот поток при  $p = p^*(p_0)$  также является гауссовым случайным процессом с корреляционной функцией

$$R_{g^*}(\tau) = \frac{\alpha^2}{4} R_{p_0}(\tau) = \frac{\alpha^2 \sigma^2}{4} \exp(-\alpha|\tau|).$$

Такой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S_{g^*}(w) = \frac{2\alpha D_{p_0}}{\alpha^2 + w^2} = \frac{2\alpha \frac{\alpha^2 \sigma^2}{4}}{\alpha^2 + w^2} = \frac{\alpha^3 \sigma^2}{2(\alpha^2 + w^2)}.$$

Спектральная плотность процесса  $A(t)$ , связанного с  $g^*(t)$  уравнением (7.48), имеет вид

$$S_A(w) = \frac{\tilde{A}_0 - S_g(w)}{w^2}.$$

Константа  $\tilde{A}_0$  имеет смысл математического ожидания процесса  $A(t)$  и выбирается из условия ограниченности дисперсии. Дисперсия процесса  $A(t)$

$$D_A = \int_0^{\infty} S_A(w) dw$$

ограничена при  $\tilde{A}_0 = \frac{\alpha \sigma^2}{2}$ , и величина  $D_A$  при таком выборе

$$D_A = \frac{\sigma^2}{4}. \quad (7.69)$$

Вероятность истощения запаса ресурса равна вероятности того, что отрицательные отклонения  $A(t)$  от  $\tilde{A}_0$  превысят величину начального запаса:

$$\begin{aligned} P(A(t) \leq 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_A dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D_A}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(A - \tilde{A}_0)^2}{2D_A}\right] dA = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2(A - \frac{\alpha\sigma^2}{2})^2}{\sigma^2}\right] dA. \end{aligned}$$

Одной из возможных (близкой к оптимальной) стратегий выбора  $p(t)$  является выбор по формуле (7.66) для тех моментов времени, когда  $A(t) > 0$ , и выбор  $p(t)$  из условия равенства  $g(t)$  нулю для случая, когда  $A(t) = 0$ . Средняя интенсивность получения прибыли в этом случае с учетом того, что при  $g(t) = 0$   $\dot{K} = 0$ , равна

$$\check{J}(A_0) = \check{J}^*(1 - P(A_0)),$$

и она может служить нижней оценкой для достижимой интенсивности прибыли посредника. При стремлении начального запаса  $A_0$  к бесконечности оценки сближаются друг с другом.

Аналогичный анализ можно провести для вероятности выполнения второго из неравенств (7.50) (истощение капитала). Однако в отличие от  $A(t)$  величина капитала  $K(t)$  возрастает, и вероятность того, что  $K(t)$  обратится в нуль, со временем уменьшается.

Полученные оценки показывают, какие характеристики рыночных цен нужно прогнозировать для выбора оптимальных потоков и цен покупки и продажи ресурса. Подход может быть обобщен на многопродуктовые модели, где наряду с выбором цен нужно определить ассортимент закупок и продаж.

### 7.3. Предельная прибыль посредника с учетом задержки поставок и платежей

Рассмотрим систему, состоящую из двух рынков и посреднической фирмы, действующей между ними. Прибыль фирмы без учета вложений в торгово-закупочное оборудование и обеспечение торговых мест представляет собой разность между затратами на поставляемые ресурсы на одном и доходами от продажи этих ресурсов на другом рынке. В пп. 7.1, 7.2 рассмотрена задача о предельной интенсивности получения прибыли при стационарных и нестационарных условиях на каждом рынке в предположении, что поток ресурса однозначно связан с назначаемыми посредником ценами его закупки и продажи. В данном разделе учтен такой фактор, как задержки поставок при покупке ресурса и платежей при его продаже. Этот фактор оказывает в реальной жизни значительное влияние на результаты деятельности посреднической фирмы и ее эффективность.

Первоначально мы рассмотрим случай стабильных условий на рынке, а затем обобщим задачу на случай векторного ресурса и нестационарных условий.

**Стационарные рынки.** Обозначим через  $p_{01}$  и  $p_{02}$  соответственно минимальную цену продаж и максимальную цену покупок на первом и втором рынках ( $p_{01} < p_{02}$ ). Посредник при покупке назначает цену  $p_1(t) > p_{01}$ , а продает по цене  $p_2(t) < p_{02}$ . Разности цен  $p_1$  и  $p_{01}$ , аналогично  $p_{02}$  и  $p_2$ , обозначим через  $U_1$  и  $U_2$  соответственно:

$$U_1 = p_1 - p_{01}, \quad U_2 = p_{02} - p_2. \quad (7.70)$$

Будем предполагать, что изменения потоков закупок  $g_1$  и продаж  $g_2$  подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= f_1(U_1, g_1), & g_1(0) &= 0, \\ \dot{g}_2 &= f_2(U_2, g_2), & g_2(0) &= 0. \end{aligned} \quad (7.71)$$

В этих уравнениях  $f_1$  и  $f_2$  непрерывны и монотонны по  $U_1$  и  $U_2$ . В

простейшем случае, когда  $f_1$  и  $f_2$  линейны,

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \frac{1}{T_1}(\alpha_1 U_1 - g_1), & g_1(0) &= 0, \\ \dot{g}_2 &= \frac{1}{T_2}(\alpha_2 U_2 - g_2), & g_2(0) &= 0, \end{aligned} \quad (7.72)$$

где  $T_i$  и  $\alpha_i$  положительны.

Задача заключается в таком выборе  $U_1$  и  $U_2$ , чтобы за фиксированное время  $\tau$  получить максимальную прибыль:

$$I = \int_0^\tau (p_2 g_2 - p_1 g_1) dt \rightarrow \max, \quad (7.73)$$

при условии, что продается весь закупаемый ресурс:

$$\int_0^\tau (g_1 - g_2) dt = 0. \quad (7.74)$$

При переходе в критерии (7.73) от цен к «движущим силам» процесса  $U_1$  и  $U_2$ , учитывая, что

$$p_1 = U_1 + p_{01}, \quad p_2 = p_{02} - U_2,$$

получим

$$I = (p_{02} - p_{01})G - \int_0^\tau (U_2 g_2 + U_1 g_1) dt \rightarrow \max_{G, U_1, U_2}. \quad (7.75)$$

Здесь  $G$  — объем закупаемого ресурса.

Интеграл в выражении (7.75)

$$P = \int_0^\tau (U_2 g_2 + U_1 g_1) dt \quad (7.76)$$

представляет собой потери, связанные с интенсивностью потоков.

*Декомпозиция задачи и условия оптимальности решения.* Будем решать задачу в два этапа, на первом из которых объем ресурса  $G$  предполагаем фиксированным, и определим  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ , отвечающие решению задач

$$P_1 = \int_0^\tau U_1 g_1 dt \rightarrow \min_{U_1} / \dot{g}_1 = f_1(U_1, g_1), \quad g_1(0) = 0, \quad \int_0^\tau g_1 dt = G \quad (7.77)$$

и

$$P_2 = \int_0^\tau U_2 g_2 dt \rightarrow \min_{U_2} / \dot{g}_2 = f_2(U_2, g_2), \quad g_2(0) = 0, \quad \int_0^\tau g_2 dt = G. \quad (7.78)$$

Решение задач (7.77) и (7.78) определяет оптимальную стратегию закупок и продаж с учетом задержки поставок и платежей. Постановки этих задач идентичны с точностью до индекса, поэтому рассмотрим только первую из них.

Используя первое из уравнений (7.71), получим

$$dt = \frac{dg_1}{f_1(U_1, g_1)}. \quad (7.79)$$

С учетом замены (7.79) задачу (7.77) можно переписать в эквивалентной форме

$$P_1 = \int_0^G \frac{U_1 g_1}{f_1(U_1, g_1)} dg_1 \rightarrow \min_{U_1(g_1)} \int_0^G \frac{dg_1}{f_1(U_1, g_1)} = \tau. \quad (7.80)$$

При этом предполагаем, что функция  $f_1$  на оптимальном решении такова, что интегралы в задаче (7.80) существуют. Составив функцию Лагранжа

$$L_1 = \frac{U_1 g_1 - \lambda_1}{f_1(U_1, g_1)},$$

получим из условия  $\partial L_1 / \partial U_1 = 0$  для любого  $g_1$  уравнение

$$g_1 \left[ \frac{f_1(U_1, g_1)}{\partial f_1 / \partial U_1} - U_1 \right] = \lambda_1 = \text{const}, \quad (7.81)$$

определяющее  $U_1(\lambda_1, g_1)$ . Величина множителя Лагранжа  $\lambda_1(G, \tau)$  определяется после подстановки  $U_1^*(\lambda_1, g_1)$  в условие

$$\int_0^G \frac{dg_1}{f_1(U_1(\lambda_1, g_1), g_1)} = \tau.$$

Таким образом, минимум издержек при закупках  $J_{1 \min}$  зависит от  $G, \tau$ .

Совершенно аналогично при продаже разница цен удовлетворяет условию

$$g_2 \left[ \frac{f_2(U_2, g_2)}{\partial f_2 / \partial U_2} - U_2 \right] = \lambda_2, \quad (7.82)$$

а  $J_{2 \min}$  зависит от  $G$  и  $\tau$ . Оптимальное значение  $G$  определяется из условия

$$I(G) = (p_{02} - p_{01})G - J_{1 \min}(G, \tau) - J_{2 \min}(G, \tau) \rightarrow \max_{G > 0}. \quad (7.83)$$

Рассмотрим последовательность решения задачи для линейной зависимости (7.72) скорости изменения потока ресурса от разности цен



и величины потока. Условия оптимальности (7.81) и (7.82) закупок и продаж примут форму

$$g_i \left( U_i - \frac{g_i}{\alpha_i} - U_i \right) = -\frac{g_i^2}{\alpha_i} = \lambda_i,$$

откуда  $g_i^*(t) = \text{const} = G/\tau$ . Так как управления  $U_i(t)$  не ограничены сверху, найдем их из уравнений (7.71):

$$U_i^*(t) = \frac{1}{\alpha_i} \left[ T_i \dot{g}_i^*(t) + g_i^*(t) \right] = \frac{G}{\tau \alpha_i} \left[ T_i \delta(t) + 1 \right]. \quad (7.84)$$

После подстановки  $U_i^*$  и  $g_i^*$  в функционалы  $J_1$  и  $J_2$  в (7.77) и (7.78) получим

$$J_{i \min} = \frac{G^2}{\tau^2 \alpha_i} (T_i + \tau), \quad i = 1, 2.$$

Предельная прибыль согласно (7.83) равна

$$I^*(G) = (p_{02} - p_{01})G - \frac{G^2}{\tau^2} \left( \frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right).$$

Максимум  $I^*(G)$  по  $G$  достигается при объеме закупаемого ресурса

$$G^* = \frac{\tau^2}{2} (p_{02} - p_{01}) \left( \frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{-1} \quad (7.85)$$

и равен

$$I^* = \frac{\tau^2}{4} (p_{02} - p_{01})^2 \left( \frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{-1}. \quad (7.86)$$

Смысл полученного решения состоит в том, что при закупке нужно в условиях задержки поставок форсированно поднять закупочные цены  $p_1$  и, когда поток  $g_1$  достигнет значения  $g_1^*$ , поддерживать его на этом уровне. Интенсивность получения прибыли

$$J^* = \frac{I^*}{\tau} = \frac{\tau}{4} (p_{02} - p_{01})^2 \left( \frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{-1}$$

растет с ростом  $\tau$ , стремясь к значению

$$J^*(\infty) = \frac{1}{4} (p_{02} - p_{01})^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

**Нестационарные рынки.** Рассмотрим случай, когда оценки рынков  $p_{01}$  и  $p_{02}$  представляют собой функции времени. В этом случае задачу получения максимальной прибыли посредника за время  $\tau$  можно разбить на две подзадачи.

Задача о закупке ресурса примет форму

$$I_1 = \int_0^\tau p_1(t) g_1(t) dt = \int_0^\tau (p_{01}(t) + U_1(t)) g_1(t) dt \rightarrow \min_{U_1} \quad (7.87)$$

при условиях

$$\int_0^{\tau} g_1(t) dt = G, \quad (7.88)$$

$$\dot{g}_1 = f_1(U_1, g_1), \quad g_1(0) = 0. \quad (7.89)$$

Задача о продаже ресурса с максимальной выгодой имеет аналогичный вид:

$$I_2 = \int_0^{\tau} (p_{02}(t) - U_2(t)) g_2(t) dt \rightarrow \max_{U_2} \quad (7.90)$$

при условиях

$$\int_0^{\tau} g_2(t) dt = G, \quad (7.91)$$

$$\dot{g}_2 = f_2(U_2, g_2), \quad g_2(0) = 0. \quad (7.92)$$

Решения этих задач и значения  $I_{1 \min}$  и  $I_{2 \max}$  зависят от объема закупаемого ресурса  $G$ , который находится из условия

$$I(G) = I_{2 \max}(G) - I_{1 \min}(G) \rightarrow \max_G. \quad (7.93)$$

*Достаточные условия оптимальности.* Так как управляющие воздействия  $U_1$  и  $U_2$  в сформулированных задачах не ограничены, их оптимальные решения могут содержать  $\delta$ -функции (см. (7.84)), поэтому использование принципа максимума Понтрягина здесь неправомерно. Замена независимой переменной  $t$  на  $g$ , которая была использована выше, также не может быть применена из-за явно входящего времени. В том случае, когда функции  $f_1$  и  $f_2$  линейны по  $U_1$  и  $U_2$ :

$$f_i(U_i, g_i) = M_i(g_i)U_i + N_i(g_i), \quad i = 1, 2, \quad (7.94)$$

могут быть эффективно использованы достаточные условия оптимальности Кротова [21].

С учетом (7.94) запишем функцию Кротова задачи (7.87)–(7.89):

$$R_1 = p_{01}(t)g_1 + U_1g_1 + \frac{\partial \varphi_1(g_1, t)}{\partial g_1} [M_1(g_1)U_1 + N_1(g_1)] + \\ + \lambda(g_1 - G/\tau) + \frac{\partial \varphi_1(g_1, t)}{\partial t}.$$

Легко видеть, что при любых значениях  $\lambda$  и произвольной дифференцируемой функции  $\varphi(g_1, t)$  на множестве, определяемом условиями (7.88), (7.89), справедливо равенство

$$\int_0^{\tau} R_1 dt = I_1 - [\varphi_1(g(\tau), \tau) - \varphi_1(g(0), 0)]. \quad (7.95)$$

Если функция  $\varphi$  выбрана так, что  $R_1$  в каждый момент  $t$  максимальна по  $g$  и  $U$ , выполнены условия (7.88), (7.89) и второе слагаемое в правой части (7.95) равно нулю, то найденное решение оптимально.

Нам удобно сузить класс функций  $\varphi_1(g_1, t)$  до функций вида

$$\varphi_1(g_1, t) = r_1(g_1) + K_1(t).$$

Тогда при выборе  $r_1(g_1)$  так, чтобы

$$\frac{dr}{dg_1} = -\frac{g_1}{M_1(g_1)} \Rightarrow r(g_1) = -\int_0^{g_1} \frac{g}{M_1(g)} dg,$$

функция  $R_1$  не зависит от  $U_1$  и переписывается как

$$R_1 = p_{01}(t)g_1 - \frac{g_1 N_1(g_1)}{M_1(g_1)} - \lambda \left( g_1 - \frac{G}{\tau} \right) + \frac{dK_1}{dt}.$$

Так как выбор функции  $K_1(t)$  не влияет на максимум  $R_1$  по  $g_1$ , можно выбрать ее так, чтобы

$$R_1(g^*(\tau)) + K_1(\tau) = R_1(g(0)) + K_1(0).$$

Условие максимума  $R_1$  по  $g_1$  приводит к равенству, определяющему  $g_1^*(t)$  — оптимальный поток закупок:

$$\frac{\partial R_1}{\partial g_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dg_1} \left[ \frac{g_1 N_1(g_1)}{M_1(g_1)} \right] = p_{01}(t) - \lambda. \quad (7.96)$$

Так как  $R_1$  не зависит от  $U_1$ , то эта функция при выбранной  $\varphi(g, t)$  максимальна по  $U$  и  $g$ . В частности, для уравнения (7.72)  $N_1 = -g_1/T_1$ ,  $M_1 = \alpha_1/T_1$ , и условие оптимальности решения (7.96) переписывается как

$$g_1^*(t) = \frac{\alpha_1}{2} [\lambda_1 - p_{01}(t)].$$

Параметр  $\lambda_1$  определяется равенством (7.88):

$$\int_0^{\tau} g_1(t) dt = \frac{\alpha_1}{2} \left[ \lambda_1 \tau - \int_0^{\tau} p_{01}(t) dt \right] = G,$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{2}{\alpha_1} G + \int_0^{\tau} p_{01}(t) dt \right]$$

и

$$\begin{aligned} g_1^*(t) &= \frac{G}{\tau} + \frac{\alpha_1}{2} \left[ \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p_{01}(t) dt - p_{01}(t) \right] = \\ &= \bar{g} - \frac{\alpha_1}{2} [p_{01}(t) - \bar{p}_{01}] \quad \text{при } t > 0, \quad g_1(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь черта соответствует усреднению на интервале  $(0, \tau)$ . Подстановка этого решения в уравнение (7.72) определяет  $U^*(t)$ . Не повторяя подобных выкладок для задачи оптимальной продажи ресурса, запишем аналог условия (7.96) для потока продаж:

$$\frac{\partial R_2}{\partial g_2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dg_1} \left[ \frac{g_2 N_2(g_2)}{M_2(g_2)} \right] = p_{02}(t) - \lambda_2.$$

Отсюда с учетом уравнения (7.72) следует, что

$$g_2^*(t) = \bar{g} + \frac{\alpha_2}{2} [p_{02}(t) - \overline{p_{02}}] \quad \text{при } t > 0, \quad g_2(0) = 0.$$

Разности цен  $U_1^*(t)$  и  $U_2^*(t)$  определяются условиями (7.84):

$$p_1^*(t) - p_{01}(t) = U_1^*(t) = \frac{1}{\alpha_1} \left\{ T_1 \left[ \left( \frac{G}{\tau} - \frac{\alpha_1}{2} [p_{01}(0) - \overline{p_{01}}] \right) \delta(t) - \frac{\alpha_1}{2} \frac{dp_{01}(t)}{dt} \right] + \frac{G}{\tau} - \frac{\alpha_1}{2} [p_{01}(t) - \overline{p_{01}}] \right\}, \quad (7.97)$$

$$p_{02}(t) - p_2^*(t) = U_2^*(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left\{ T_2 \left[ \left( \frac{G}{\tau} + \frac{\alpha_2}{2} [p_{02}(0) - \overline{p_{02}}] \right) \delta(t) + \frac{\alpha_2}{2} \frac{dp_{02}(t)}{dt} \right] + \frac{G}{\tau} - \frac{\alpha_2}{2} [p_{02}(t) - \overline{p_{02}}] \right\}. \quad (7.98)$$

Таким образом, для правильного выбора цен необходимо знать средние значения характеристик рынков  $p_{0i}(t)$  на интервале  $(0, \tau)$ . После подстановки  $p_1^*(t)$  и  $p_2^*(t)$  из (7.97), (7.98) в (7.87) и (7.90) можно выразить  $I^*(G)$  согласно (7.93).

**Нестационарные рынки на бесконечном интервале времени.** Для практики важен случай, когда цены рынков  $p_{0i}$  меняются случайным образом, а время  $\tau$  сколь угодно велико. В этом случае требуется определить оптимальную в среднем стратегию закупок и продаж и оценить предельную прибыль. Сделаем это при следующих допущениях:

- $p_{0i}(t)$  — случайные стационарные процессы с известными математическими ожиданиями  $\overline{p_{0i}}$  и спектральными плотностями  $S_i(\omega)$ ;
- связи между «движущими силами»  $U_i(t)$  и потоками  $g_i(t)$  характеризуются линейными уравнениями (7.72).

Сделанные допущения позволяют перейти в задачах (7.87)–(7.92) в частотную область, заменив условия (7.88) и (7.91) требованием фиксированной средней интенсивности потоков  $g_0$ . Для этого перейдем к усреднению на бесконечном промежутке времени, обозначая эту операцию для сокращения записи чертой над соответствующим выражением. Получим для процесса закупки ресурса

$$I_1 = \overline{(p_{01}(t) + U_1(t))g_1(t)} = \overline{p_{01}}g_0 + \overline{U_1}g_0 + \overline{p_{01}^0(t)g_1^0(t)} + \overline{U_1^0(t)g_1^0(t)} \rightarrow \min. \quad (7.99)$$

Здесь  $\overline{U}_1$  — математическое ожидание  $U_1(t)$ , которое, как следует из (7.84), равно

$$\overline{U}_1 = \frac{g_0}{\alpha_1};$$

$p_{01}^0(t), g_1^0(t), U_1^0(t)$  — центрированные случайные процессы.

Аналогично, для процесса продажи ресурса в тех же обозначениях получим

$$I_2 = \overline{p_{02}g_0} - \overline{U_2g_0} + \overline{p_{02}^0(t)g_2^0(t)} - \overline{U_2^0(t)g_2^0(t)} \rightarrow \max, \quad (7.100)$$

$$\overline{U}_2 = \frac{g_0}{\alpha_2}. \quad (7.101)$$

При этом в силу уравнений (7.72) между преобразованиями по Фурье процессов  $g_\nu^0(t)$  и  $U_\nu^0(t)$ , которые мы обозначим как  $\tilde{g}_\nu(i\omega)$  и  $\tilde{U}_\nu(i\omega)$ , существует связь

$$\tilde{g}_\nu(i\omega) = \frac{\alpha_\nu \tilde{U}_\nu(i\omega)}{T_\nu i\omega + 1}, \quad \nu = 1, 2.$$

Поставленная задача распадается на две подзадачи:

- выбора оптимальных средних значений  $g_0$  и соответственно  $\overline{U}_\nu$ ;
- выбора оперативного управления изменением потоков  $g_\nu^0(t)$  относительно их средних значений.

Первая подзадача легко решается из условия

$$\overline{I}(g_0) = \overline{I}_2(g_0) - \overline{I}_1(g_0) \rightarrow \max_{g_0}.$$

Здесь  $\overline{I}_2$  и  $\overline{I}_1$  — суммы первых двух слагаемых в правых частях равенств (7.99) и (7.100) соответственно. С учетом (7.101) получим

$$\overline{p_{02}g_0} - \frac{g_0^2}{\alpha_2} - \overline{p_{01}g_0} - \frac{g_0^2}{\alpha_1} \rightarrow \max_{g_0},$$

откуда

$$g_0^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\overline{p_{02}} - \overline{p_{01}})}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \overline{I}^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\overline{p_{02}} - \overline{p_{01}})^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Для решения второй подзадачи надо выбрать  $g_\nu^0(t)$  и соответствующие им изменения цен  $U_\nu^0(t)$  из условий

$$I_1^0 = \overline{p_{01}^0 g_1^0(t)} + \overline{U_1^0(t) g_1^0(t)} \rightarrow \min, \quad (7.102)$$

$$I_2^0 = \overline{p_{02}^0 g_2^0(t)} - \overline{U_2^0(t) g_2^0(t)} \rightarrow \max \quad (7.103)$$

и оптимальные значения этих функционалов добавить к  $I^*$ .

Будем искать оптимальную линейную стратегию, т.е. будем предполагать, что выбор  $g_\nu^0(t)$  линейно зависит от  $p_{\nu 0}^0(t)$  и от значений этой функции в предшествующие моменты времени, т.е.

$$g_\nu^0(t) = \int_0^t p_{\nu 0}^0(t - \tau) K_\nu(\tau) d\tau,$$

где  $K_\nu(t)$  — импульсная весовая функция, преобразование Фурье для которой  $W_\nu(i\omega)$ . В частотной области функционалы (7.102), (7.103) примут вид

$$I_1^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{p_1}(\omega) \left[ W_1(i\omega) + \frac{1}{\alpha_1} (1 + i\omega T_1) |W_1(i\omega)|^2 \right] d\omega \rightarrow \min_{W_1}, \quad (7.104)$$

$$I_2^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{p_2}(\omega) \left[ W_2(i\omega) - \frac{1}{\alpha_2} (1 + i\omega T_2) |W_2(i\omega)|^2 \right] d\omega \rightarrow \max_{W_2}. \quad (7.105)$$

В силу четности спектральных плотностей  $S_{p\nu}(\omega)$  процессов  $p_{\nu 0}^0(t)$  мнимая часть для функционалов (7.104) и (7.105) равна нулю, и их можно переписать в форме

$$I_1^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{p_1}(\omega) \left[ \operatorname{Re}_1(\omega) + \frac{1}{\alpha_1} \left( \operatorname{Re}_1^2(\omega) + \operatorname{Im}_1^2(\omega) \right) \right] d\omega,$$

$$I_2^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{p_2}(\omega) \left[ \operatorname{Re}_2(\omega) - \frac{1}{\alpha_2} \left( \operatorname{Re}_2^2(\omega) + \operatorname{Im}_2^2(\omega) \right) \right] d\omega.$$

Здесь  $\operatorname{Re}_\nu(\omega)$  и  $\operatorname{Im}_\nu(\omega)$  — действительная и мнимая части характеристики  $W_\nu(i\omega)$ . Эти функции связаны друг с другом, однако для получения оценок минимума  $I_1^0$  и максимума  $I_2^0$  снизу и сверху мы проигнорируем эту связь. Если полученное решение реализуемо, то оно и дает оптимум.

Легко видеть, что в нашей задаче это так. Функционалы  $I_1^0$  и  $I_2^0$  достигают оптимума при

$$W_1^* = -\frac{\alpha_1}{2}, \quad W_2^* = \frac{\alpha_2}{2}, \quad I_{m\nu}^* = 0.$$

Их оптимальные значения равны

$$I_{1 \min}^0 = -\frac{\alpha_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{p_1}(\omega) d\omega = -\frac{\alpha_1}{4\pi} D_{p_1},$$

$$I_{2 \max}^0 = -\frac{\alpha_2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{p_2}(\omega) d\omega = -\frac{\alpha_2}{4\pi} D_{p_2}.$$

Предельная интенсивность прибыли в условиях нестационарных рынков:

$$\begin{aligned} I^* &= \bar{I}^* + I_{2 \max}^0 - I_{1 \min}^0 = \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)} (\bar{p}_{20} - \bar{p}_{10}) + \frac{1}{4\pi} (\alpha_1 D_{p_1} + \alpha_2 D_{p_2}). \end{aligned}$$

Здесь  $D_{p_1}$  и  $D_{p_2}$  — дисперсии случайных колебаний рыночных цен  $p_{10}$  и  $p_{20}$  относительно средних значений.

Таким образом,

$$g_1^*(t) = g_0 - \frac{\alpha_1}{2} p_{01}^0(t); \quad g_2^*(t) = g_0 + \frac{\alpha_2}{2} p_{02}^0(t).$$

После подстановки этих выражений в уравнения (7.72) получим оптимальные изменения цен  $p_1^*(t)$  и  $p_2^*(t)$  во времени.

#### 7.4. Извлечение максимальной прибыли при отсутствии дискриминации цен

Выше в п. 6.3 была рассмотрена задача извлечения максимальной прибыли, по условиям которой посредник мог при контакте с каждым ЭА устанавливать различные цены покупок и продаж, зависящие от функции спроса ЭА. Такой индивидуальный выбор (дискриминация) цен расширяет возможности посредника и позволяет увеличить его прибыль. С дискриминацией цен мы сталкиваемся, наблюдая различие цен на одни и те же товары в магазинах, расположенных в центре и на окраинах города, при продаже авиабилетов и пр. Однако в некоторых случаях, например, по требованию изготовителя, посредник должен устанавливать одну и ту же цену покупки или продажи для всех ЭА, с которыми он контактирует. Рассмотрим задачу о максимальном извлечении прибыли в этих условиях.

Требуется найти изменение во времени цен закупки и продажи общих для всех подсистем, у которых фирма приобретает или продает ресурс, а также состав подсистем, продающих и закупающих ресурс. Обозначим через  $c_1(t)$  и  $c_2(t)$  цены закупки и продажи. Законы изменения цен определяют и состав подсистем, участвующих в процессе. Все подсистемы разбиваются на три категории в каждый момент  $t \in [0, \tau]$ : подсистемы, у которых ресурс закупают ( $p_i(t) < c_1(t)$ ); подсистемы, которым ресурс продают ( $p_i(t) > c_2(t)$ ); и подсистемы, с которыми фирме нецелесообразно контактировать ( $c_1(t) \leq p_i(t) \leq c_2(t)$ ). Назовем первую категорию систем «продавцы», вторую — «покупатели», а третью — «нейтральные подсистемы».

В общем случае определение оптимальных цен с одновременным изменением состава подсистем достаточно сложно. Задача существенно упрощается, когда фирма осуществляет ресурсообмен с несколькими рынками совершенной конкуренции. В этом случае  $c_1$ ,  $c_2$  и  $p_i$  постоянны, и задача сводится к такому их выбору, чтобы получить максимальную прибыль для зависимости потока закупаемого ресурса от  $c_1$  в форме

$$n_+(c_1, p_i) = \sum_{\nu=1}^j n_\nu(c_1, p_\nu) \quad (7.106)$$

и зависимости продаваемого ресурса от  $c_2$

$$n_-(c_2, p_i) = \sum_{\nu=i}^n n_\nu(p_\nu, c_2). \quad (7.107)$$

При этом  $p_j$  — максимальная оценка, не превосходящая  $c_1$ , а  $p_i$  — минимальная оценка, большая, чем  $c_2$ . Интенсивность получения прибыли должна быть максимальна:

$$s = [c_2 n_-(c_2, p) - c_1 n_+(c_1, p)] \rightarrow \max_{c_1, c_2}. \quad (7.108)$$

при условии ненакопления ресурса посредником

$$n_+(c_1, p) = n_-(c_2, p) = n. \quad (7.109)$$

Условие (7.109) позволяет выразить  $c_1$  и  $c_2$  через  $n$ . Подставляя эти зависимости в (7.108), получим задачу безусловной оптимизации по  $n$ . Найдя ее решение  $n^*$ , вычислим  $c_1^*, c_2^*$ ; они определяют разбиение подсистем на «продацов» и «покупателей». Конкретизируем зависимости  $n_\nu$  как

$$n_\nu = \alpha_\nu (c - p_\nu).$$

и перепишем (7.109) в форме двух равенств

$$\begin{aligned} n_+ &= \sum_{\nu=1}^j \alpha_\nu (c_1 - p_\nu) = n, \\ n_- &= \sum_{\nu=i}^n \alpha_\nu (p_\nu - c_2) = n, \end{aligned}$$

откуда, введя обозначения

$$\begin{aligned} M_1(j) &= \sum_{\nu=1}^j \alpha_\nu p_\nu, & M_2(i) &= \sum_{\nu=i}^n \alpha_\nu p_\nu, \\ A_1(j) &= \sum_{\nu=1}^j \alpha_\nu, & A_2(i) &= \sum_{\nu=i}^n \alpha_\nu, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} c_1(n, j) &= \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)}, \\ c_2(n, i) &= \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)}. \end{aligned} \quad (7.110)$$



Критерий оптимальности (7.108) как функция  $n$  примет вид

$$s = n [c_2(n, i) - c_1(n, j)] \rightarrow \max. \quad (7.111)$$

При фиксированном  $n$  значения  $i$  и  $j$  нужно выбирать по условию максимума  $c_2$  и минимума  $c_1$  соответственно.

Условие минимума  $c_1$  по  $j$  приводит к неравенствам

$$p_{j+1} > \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)} > p_j. \quad (7.112)$$

Аналогично из условий максимума  $c_2$  по  $i$  следует, что

$$p_i > \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)} > p_{i-1}. \quad (7.113)$$

Максимум (7.111) по  $n$  с учетом (7.110), (7.111), (7.112) определяет максимальную интенсивность извлечения базисного ресурса в системе с общими ценами. Для выпуклой вверх функции  $s$  получим

$$c_2(n^*, i) - c_1(n^*, j) = n^* \left( \frac{\partial c_1}{\partial n} - \frac{\partial c_2}{\partial n} \right)_{n^*}. \quad (7.114)$$

Для  $n = 2$  ( $j = 1, i = 2$ ) задача предельно упрощается. Оптимальные цены закупки и продажи для любого момента  $t$  удовлетворяют равенствам

$$c_1 = \frac{2\alpha_1 p_1 + \alpha_2(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$c_2 = \frac{2\alpha_2 p_2 + \alpha_1(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

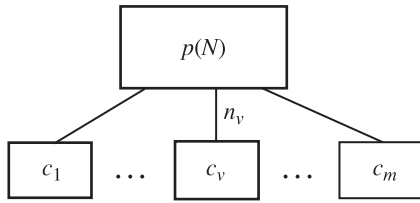
а предельная интенсивность извлечения прибыли равна

$$s^*(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (p_2 - p_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

В том случае, когда оценки  $p_\nu$  ресурсов для каждого из ЭА зависят от времени, оптимальное решение  $c_1^*(t), c_2^*(t)$  определяется этими же соотношениями для каждого момента  $t$ .

#### **Оптимальная закупка ресурса в условиях конкуренции.**

Найдем условия оптимального выбора цен при закупке (продаже) ресурса у ЭА несколькими фирмами за ограниченное время (рис. 7.3). При этом будем предполагать, что оценка ресурса  $p$  зависит только от его запаса  $N$  и не зависит от запаса базисного ресурса. Функцию  $p(N)$  предполагаем известной.



Р и с. 7.3. Структура системы обмена ресурсами с несколькими фирмами и рынком конечной емкости

Затраты:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^m \int_0^{\tau} n_i(c_i, p)(c_i - p) dt \rightarrow \min_{c_i} \quad (7.115)$$

при заданных объемах закупок

$$\int_0^{\tau} n_i(c_i, p) dt = \Delta N_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.116)$$

Запас ресурса изменяется как

$$\frac{dN}{dt} = - \sum_{i=1}^m n_i(c_i, p), \quad N(0) = a > \sum_{i=1}^m \Delta N_i. \quad (7.117)$$

Обозначим  $a - \sum_{i=1}^m \Delta N_i = b$  и трансформируем задачу, приняв ресурс  $N$  в качестве независимой переменной.

Получим

$$\int_b^a \frac{\sum_{i=1}^m (c_i - p)n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} dN \rightarrow \min_{c_i}, \quad (7.118)$$

$$\int_b^a \frac{n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} dN = \Delta N_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7.119)$$

$$\int_b^a \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} dN = \tau. \quad (7.120)$$

Функция Лагранжа задачи (7.118)–(7.120):

$$L = \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} \left[ \sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i)n_i - \zeta \right]. \quad (7.121)$$

Необходимые условия оптимальности принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial c_\nu} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)^2} \frac{\partial n_\nu}{\partial c_\nu} \left[ \sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i) n_i - \zeta \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} \left[ n_\nu + (c_\nu - p + \lambda_\nu) \frac{\partial n_\nu}{\partial c_\nu} \right] = 0, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Так что для всех  $\nu$  должны быть выполнены условия

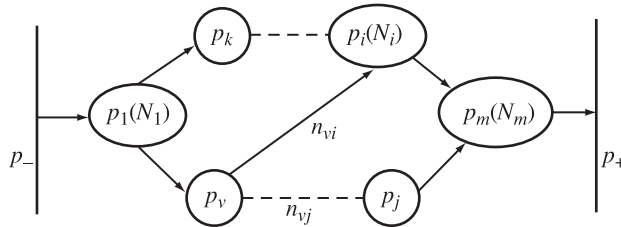
$$\frac{n_\nu(c_\nu, p)}{\frac{\partial n_\nu}{\partial c_\nu}} + c_\nu + \lambda_\nu = p + \frac{\sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i) - \zeta}{\sum_{i=1}^m n_i(c_i, p)}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (7.122)$$

которые совместно с (7.119), (7.120) определяют искомое решение  $c^*(N)$  через известную зависимость  $p(N)$ .

### 7.5. Предельная интенсивность извлечения прибыли в открытой стационарной микроэкономической системе

В гл. 6 было показано, что в положении равновесия открытой микроэкономической системы запасы ресурса между подсистемами перераспределяются так, чтобы сумма произведений потоков ресурсов на разности их оценок в контактирующих подсистемах (диссипация капитала) была минимальна. Если в системе имеется посредническая фирма, которая может вступать в контакт с подсистемами, то диссипация капитала уменьшается и он может быть извлечен фирмой.

Рис. 7.4. Структура открытой микроэкономической системы с двумя рынками



Рассмотрим систему, состоящую из  $r$  рынков совершенной конкуренции и  $k - r$  экономических агентов, обменивающихся друг с другом ресурсами и капиталом (рис. 7.4). Оценки ресурса для рынков  $p_i$

( $i = 1, \dots, r$ ) постоянны, для  $i > r$  эти оценки зависят от запасов ресурса  $N_i$  и капитала  $M_i$  в  $i$ -й подсистеме. Предполагаем, что оценки капитала постоянны и одинаковы для всех подсистем.

Пусть поток ресурса  $n_i$  между экономическим агентом, имеющим оценку  $p_i(N_i, M_i)$ , определяется потоком капитала  $q_i = -n_i c_i$ , где  $c_i$  — цена ресурса, которая больше  $p_i$ , когда экономический агент продает ресурс ( $n_i < 0$ ), и меньше  $p_i$ , когда  $n_i > 0$ . Если обмен происходит между экономическим агентом и  $j$ -м рынком, то  $c_i = p_j$ , а

$$n_{ij} = n_{ij}(p_j, p_i), \quad q_{ij} = -p_j n_{ij}, \quad j = 1, \dots, r; \quad i = r+1, \dots, k. \quad (7.123)$$

При обмене между двумя экономическими агентами, введем, следуя [120], цену  $c_{i\nu}$  так, чтобы

$$\tilde{n}_{i\nu}(p_i, c_{i\nu}) = -\tilde{n}_{\nu i}(p_\nu, c_{i\nu}), \quad (7.124)$$

где  $(i; \nu) \geq r+1$ . Условия (7.124) позволяют выразить  $c_{i\nu}$  через  $p_i, p_\nu$ . В конечном счете получим

$$n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -n_{\nu i}(p_\nu, p_i). \quad (7.125)$$

Пусть, например,

$$\tilde{n}_{i\nu} = \tilde{\alpha}_{i\nu}(p_i - c_{i\nu}), \quad \tilde{n}_{\nu i} = \tilde{\alpha}_{\nu i}(p_\nu - c_{i\nu}).$$

По условию (7.124) получим  $c_{i\nu}$  и потоки, фигурирующие в равенстве (7.125):

$$c_{i\nu} = \frac{\tilde{\alpha}_{i\nu} p_i + \tilde{\alpha}_{\nu i} p_\nu}{\tilde{\alpha}_{i\nu} + \tilde{\alpha}_{\nu i}}, \quad (7.126)$$

$$n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \frac{\tilde{\alpha}_{\nu i} \tilde{\alpha}_{i\nu}}{\tilde{\alpha}_{i\nu} + \tilde{\alpha}_{\nu i}} (p_i - p_\nu) = \alpha_{i\nu} (p_i - p_\nu), \quad (7.127)$$

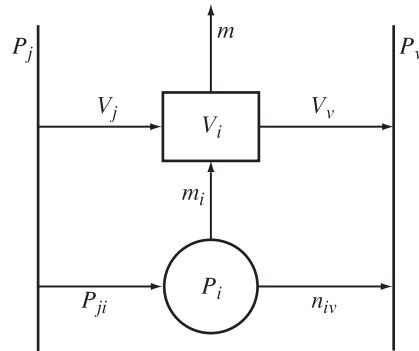
$$n_{\nu i}(p_\nu, p_i) = -n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \alpha_{i\nu} (p_\nu - p_i).$$

Потоки капитала равны

$$q_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -c_{i\nu}(p_i, p_\nu) n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -q_{\nu i}(p_\nu, p_i). \quad (7.128)$$

Пусть система (рис. 7.5) включает фирму, которая может покупать ресурс у одних экономических агентов и продавать другим, извлекая при этом базисный ресурс. Фирма назначает цену  $v_i$  при обмене с  $i$ -й

Р и с. 7.5. Открытая система, содержащая фирму, рынки и пассивную подсистему



подсистемой, поток ресурса при этом равен  $m_i(p_i, v_i)$ . В условиях равновесия задача о максимальной интенсивности извлечения базисного ресурса примет вид

$$m = - \sum_{i=1}^k m_i(p_i, v_i) v_i \rightarrow \max_{v, p} \quad (7.129)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^k m_i(p_i, v_i) = 0, \quad (7.130)$$

$$\sum_{j=1}^k n_{ji}(p_j, p_i) = m_i(p_i, v_i), \quad i = r + 1, \dots, k. \quad (7.131)$$

Знак минус в (7.129) объясняется тем, что за положительное направление принято направление потока ресурса от ЭА к фирме, такой поток сопровождается затратами капитала. Условие (7.130) соответствует балансу фирмы по ресурсам, а условия (7.131) — балансу каждого из  $k - r$  ЭА.

Для получения условий оптимальности запишем функцию Лагранжа задачи (7.129), (7.131):

$$L = \sum_{i=1}^k \left[ m_i(p_i, v_i) (\Lambda - v_i + \lambda_i) - \lambda_i \sum_{j=1}^k n_{ji}(p_j, p_i) \right]. \quad (7.132)$$

При этом  $\lambda_i = 0$  при  $i \leq r$ .

Условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_i}{\partial v_i} (\Lambda - v_i - \lambda_i) = m_i(p_i, v_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (7.133)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_i}{\partial p_i} (\Lambda - v_i - \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial n_{ji}}{\partial p_i}, \quad i = r + 1, \dots, k. \quad (7.134)$$

Условия (7.130), (7.131), (7.133), (7.134) определяют  $2(k-r)$  неизвестных  $p_i$  и  $\lambda_i$ , величину  $\Lambda$  и  $k$  оптимальных цен  $v_i$ .

В частности, для  $n_{ji} = \alpha_{ji}(p_i - p_j)$ ,  $m_i = \alpha_i(v_i - p_i)$  эти условия перепишутся как

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(v_i - p_i) = 0, \quad (7.135)$$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_{ji}(p_i - p_j) = \alpha_i(v_i - p_i), \quad i = r+1, \dots, k, \quad (7.136)$$

$$2v_i = \lambda_i + \Lambda + p_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (7.137)$$

$$-\alpha_i(\Lambda - v_i + \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^k \alpha_{ji}, \quad i = r+2, \dots, k. \quad (7.138)$$

**Пример.** Для частного случая, когда  $k = r = 2$ ,  $p_1 = p_-$ ,  $p_2 = p_+$ , причем  $p_+ > p_-$ , система (7.135)–(7.137) примет вид (условия (7.136) и (7.138) отсутствуют, так как  $r = k$ , а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равны нулю)

$$\begin{aligned} \alpha_1(v_1 - p_-) + \alpha_2(v_2 - p_+) &= 0, \\ 2v_1 &= \Lambda + p_-, \\ 2v_2 &= \Lambda + p_+. \end{aligned}$$

Необходимо найти  $v_1$ ,  $v_2$ .

Решение этой системы будет следующим:

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{2\alpha_1 p_- + \alpha_2(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \\ v_2^* &= \frac{2\alpha_2 p_+ + \alpha_1(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Здесь  $v_1^*$  — оптимальная цена закупки,  $v_2^*$  — оптимальная цена продажи ресурса. По условию (7.129) с учетом оптимальных цен максимальная интенсивность извлечения базисного ресурса

$$m^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (p_+ - p_-)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2 - 2)}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда  $r = 2$ , а  $k = 3$  (см. рис. 7.5). Другими словами, система содержит два рынка, фирму и ЭА. Здесь  $v_3$  — цена покупки (продажи) ресурса фирмой у ЭА,  $p_3$  — оценка им ресурса. Подсистема контактирует с рынками и фирмой, между ними возникают потоки ресурса и капитала. Цель фирмы остается прежней — извлечение максимально возможного количества капитала. При решении этой задачи система (7.135)–(7.138) переписывается в форме

$$\alpha_1(v_1 - p_-) + \alpha_2(v_2 - p_+) + \alpha_3(v_3 - p_3) = 0, \quad (7.139)$$

$$\alpha_3(v_3 - p_3) = \alpha_4(p_3 - p_-) + \alpha_5(p_3 - p_+), \quad (7.140)$$

$$v_1 = \frac{\Lambda + p_-}{2}, \quad (7.141)$$

$$v_2 = \frac{\Lambda + p_+}{2}, \quad (7.142)$$

$$v_3 = \frac{\lambda_3 + \Lambda + p_3}{2}, \quad (7.143)$$

$$-\alpha_3(\Lambda - v_3 + \lambda_3) = \lambda_3(\alpha_4 + \alpha_5). \quad (7.144)$$

Отсюда получаем  $v_1^*$ ,  $v_2^*$ ,  $v_3^*$ ,  $p_3^*$ .

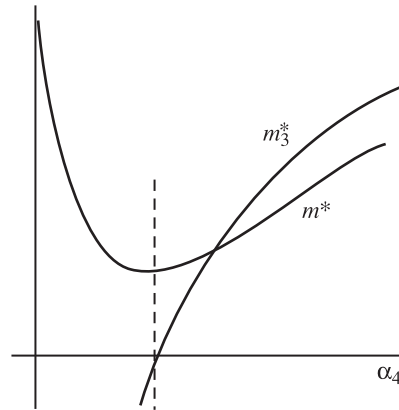
Исследуем зависимость предельной интенсивности извлечения прибыли и потока ресурса между фирмой и ЭА от коэффициента  $\alpha_4$ . Зададим следующие значения:

$$\alpha_1 = 0.2, \quad \alpha_2 = 0.3, \quad \alpha_3 = 0.01, \quad \alpha_5 = 0.4, \quad p_- = 4, \quad p_+ = 7,$$

и для них найдем зависимости  $v_1^*(\alpha_4)$ ,  $v_2^*(\alpha_4)$ ,  $v_3^*(\alpha_4)$  и  $p_3^*(\alpha_4)$ . Подставляя найденные величины в уравнение для предельной интенсивности извлечения капитала (7.129), получим функцию  $m^*(\alpha_4)$ .

На рис. 7.6 изображена функция  $m^*(\alpha_4)$  и зависимость потока между фирмой и экономическим агентом  $m_3^*(\alpha_4) = \alpha_3 \cdot (v_3^*(\alpha_4) - p_3^*(\alpha_4))$ .

Р и с. 7.6. Зависимости предельной интенсивности извлечения капитала и потока капитала между фирмой и ЭА от параметра  $\alpha_4$



Как видно из графиков, функция  $m^*(\alpha_4)$  при некотором  $\alpha = \alpha_m$  достигает своего минимума, а функция  $m_3^*(\alpha_4)$  равна нулю при том же значении  $\alpha_4$ . Это естественно, так как фирма обменивается с ЭА с целью увеличения своей прибыли. Если при некотором значении  $\alpha_4$  поток обмена  $m_3 = 0$ , то целевой поток  $m$  минимален.

## 7.6. Оптимизация ставок коммерческого банка

Банк является посредником между двумя рынками — вкладчиков и заемщиков, которые по тем или иным причинам не могут вступать

в непосредственный контакт. Заемщики готовы получать кредиты по большей ставке, чем та, что банк выплачивает своим вкладчикам. За счет этого различия образуется прибыль банка, которую он максимизирует, управляя ставками по вкладам и кредитам. Ставки могут быть фиксированными или зависеть от сроков и объемов займов и кредитов. В последнем случае банк должен собирать информацию о том, как зависят от сроков и объемов заимствования показатели, характеризующие заинтересованность участников рынков, и менять свою стратегию в соответствии с этими данными.

Ниже мы будем обозначать через  $\gamma(\tau)$  учетную ставку по займу, взятому на время  $\tau$ , равную той доле взятого капитала, которую следует возратить вместе с полученным кредитом. Величина  $\gamma$ , как правило, есть неотрицательная, неубывающая функция от  $\tau$ . Исключения составляют случаи, когда вкладчик использует банк как место безопасного хранения своего капитала или банк предоставляет льготный заем в благотворительных целях.

Выбор ставок  $\gamma_1(\tau_1)$  для вкладов в банк и  $\gamma_2(\tau_2)$  для выдачи кредитов влияет на объемы вложений и займов. Они должны выбираться банком по условиям максимума средней прибыли. Если банк назначает лишь годовые ставки  $\gamma_1^0 = \gamma_1(1)$  и  $\gamma_2^0 = \gamma_2(1)$ , то ставки для произвольного срока хранения рассчитываются через них по тому или иному правилу. В частности, при непрерывном начислении процентов по вкладу

$$\gamma_i(\tau_i) = (1 + \gamma_i^0)^{\tau_i} - 1, \quad (7.145)$$

при начислении пропорционально сроку заимствования

$$\gamma_i(\tau_i) = \gamma_i^0 \tau_i, \quad i = 1, 2. \quad (7.146)$$

Заинтересованность вкладчиков и заемщиков банка в капитале будем характеризовать той минимальной ставкой  $r_1$ , по которой вкладчики готовы положить деньги в банк, и той максимальной ставкой  $r_2$ , по которой заемщики согласны взять кредит;  $r_2 > r_1$  называют оценками капитала на рынках вкладов и займов соответственно. Они могут зависеть от объема и срока заимствования.

Первоначально будем предполагать, что показатели заинтересованности вкладчиков и заемщиков в капитале известны. Мы найдем для этого случая оптимальные ставки и соответствующую им максимальную прибыль  $\Pi^*(\tau_1, \tau_2)$  как функцию  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Если банк может влиять на сроки заимствования, то он выбирает  $\tau_1$  и  $\tau_2$  по условию максимума  $\Pi^*$ . Затем рассмотрим случай, когда сроки займов и вкладов — случайные величины и ставки следует выбирать по условию максимума средней прибыли.



**Выбор ставок с учетом зависимости оценок от сроков заимствования.** Будем предполагать, что сроки заимствования для вкладчиков  $\tau_1$  и заемщиков  $\tau_2$  и соответствующие им оценки капитала  $r_1$  и  $r_2$  известны. Найдем, как нужно выбирать ставки по займам  $\gamma_1$  и кредитам  $\gamma_2$ , чтобы прибыль банка была максимальна. Для выбора нужно знать связь между оценками  $r_i$ , назначаемыми ставками  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) и объемом вкладов и кредитов, поступающих в банк и выдаваемых им в единицу времени. Эти потоки  $g_1(\gamma_1, r_1)$  и  $g_2(r_2, \gamma_2)$  являются функциями предложения и спроса для банка-монополиста

$$\begin{aligned} g_1(\gamma_1, r_1) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma_1 \leq r_1, \\ > 0 & \text{при } \gamma_1 > r_1, \end{cases} \\ g_2(r_2, \gamma_2) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma_2 \geq r_2, \\ > 0 & \text{при } \gamma_2 < r_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.147)$$

Прибыль, полученная от выдачи кредита  $g_2$  на время  $\tau_2$ , равна

$$\Pi_2 = g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2))\gamma_2(\tau_2),$$

а среднегодовое значение этой прибыли

$$\overline{\Pi_2} = g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2))\frac{\gamma_2(\tau_2)}{\tau_2}. \quad (7.148)$$

Аналогично, средние издержки по погашению долга вкладчикам при сроке заимствования  $\tau_1$  равны

$$\overline{\Pi_1} = g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1))\frac{\gamma_1(\tau_1)}{\tau_1}. \quad (7.149)$$

Средняя прибыль банка

$$\begin{aligned} \overline{\Pi(\tau_1, \tau_2)} &= \overline{\Pi_2(\tau_2)} - \overline{\Pi_1(\tau_1)} = \frac{\gamma_2(\tau_2)}{\tau_2} g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2)) - \\ &- \frac{\gamma_1(\tau_1)}{\tau_1} g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1)). \end{aligned} \quad (7.150)$$

Пусть зависимости оценок от сроков заимствования  $r_1(\tau_1)$  и  $r_2(\tau_2)$  известны, ставки  $\gamma_1(\tau_1)$  и  $\gamma_2(\tau_2)$  нужно выбрать по условию максимума средней прибыли с учетом того, что все полученные вклады используются для выдачи займов. Сроки заимствования предполагаются случайными величинами с плотностями распределения  $P_1(\tau_1)$  и  $P_2(\tau_2)$ .

Средняя прибыль за год

$$\overline{\Pi} = \overline{\frac{1}{\tau_2} g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2))\gamma_2(\tau_2)} - \overline{\frac{1}{\tau_1} g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1))\gamma_1(\tau_1)} \quad (7.151)$$

должна быть максимальна при условии

$$\overline{g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1))} - \overline{g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2))} = 0. \quad (7.152)$$

При этом усреднение ведется в первом слагаемом в (7.151) и во втором в (7.152) по  $\tau_2$ , а в остальных по  $\tau_1$ , так что, например,

$$\bar{g}_1 = \int_0^{\infty} g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1)) P_1(\tau_1) d\tau_1,$$

$$\overline{\left(\frac{g_2 \gamma_2}{\tau_2}\right)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau_2} g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2)) \gamma_2(\tau_2) P_2(\tau_2) d\tau_2.$$

Функция Лагранжа задачи (7.151), (7.152) имеет вид

$$\bar{L} = \left( \overline{\left(\frac{g_2 \gamma_2}{\tau_2}\right)} - \lambda \bar{g}_2 \right) - \left( \overline{\left(\frac{g_1 \gamma_1}{\tau_1}\right)} - \lambda \bar{g}_1 \right).$$

Усреднение в первом слагаемом ведется по  $\tau_2$ , а во втором по  $\tau_1$ .

Условия оптимальности задачи (7.151), (7.152) по  $\gamma_1(\tau_1)$  и  $\gamma_2(\tau_2)$  приводят к соотношениям

$$\frac{g_{i\gamma_i} \gamma_i(\tau_i) + g_i(\gamma_i(\tau_i), r_i(\tau_i))}{g_{i\gamma_i}} = \lambda \tau_i, \quad i = 1, 2, \quad (7.153)$$

которые определяют оптимальные зависимости  $\gamma_1(\tau_1, \lambda)$  и  $\gamma_2(\tau_2, \lambda)$ . Подстановка этих зависимостей в (7.152) позволяет найти  $\lambda$ , а значит, и оптимальное решение.

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_1(\gamma_1(\tau_1) - r_1(\tau_1)), \\ g_2 &= \alpha_2(r_2(\tau_2) - \gamma_2(\tau_2)). \end{aligned} \quad (7.154)$$

В этом случае частные производные

$$g_{1\gamma_1} = \alpha_1, \quad g_{2\gamma_2} = -\alpha_2.$$

Условия (7.153) для потоков капитала в форме (7.154) примут вид

$$\begin{aligned} 2\gamma_1(\tau_1) - r_1(\tau_1) &= \lambda \tau_1, \\ 2\gamma_2(\tau_2) - r_2(\tau_2) &= \lambda \tau_2. \end{aligned} \quad (7.155)$$

Подставим эти равенства в условия (7.152). Получим

$$\alpha_1 \left( \frac{\lambda \bar{\tau}_1 + \bar{r}_1}{2} - \bar{r}_1 \right) = \alpha_2 \left( \bar{r}_2 - \frac{\lambda \bar{\tau}_2 + \bar{r}_2}{2} \right).$$

Здесь  $\bar{\tau}_1$  и  $\bar{\tau}_2$  — математические ожидания  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

Из последнего равенства получим значение множителя  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2}{\alpha_1 \bar{\tau}_1 + \alpha_2 \bar{\tau}_2}, \quad (7.156)$$

так что оптимальные значения учетных ставок:

$$\begin{aligned}\gamma_1(\tau_1) &= \frac{1}{2} \left( r_1(\tau_1) + \frac{\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2}{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} \tau_1 \right), \\ \gamma_2(\tau_2) &= \frac{1}{2} \left( r_2(\tau_2) - \frac{\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2}{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} \tau_2 \right).\end{aligned}\quad (7.157)$$

Максимальная средняя прибыль банка при таком выборе ставок равна

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{4} \left[ \alpha_1 \left( \frac{\overline{r_1^2(\tau_1)}}{\tau_1} \right) + \alpha_2 \left( \frac{\overline{r_2^2(\tau_2)}}{\tau_2} \right) - \lambda^2 (\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2) \right], \quad (7.158)$$

где  $\lambda$  выражается через усредненные оценки  $\bar{r}_i$  и  $\alpha_i$  в соответствии с (7.156).

**Выбор годовых ставок оптимальных в среднем.** Если банк выбирает только годовые ставки  $\gamma_1^0$  и  $\gamma_2^0$ , то функции  $\gamma_i(\tau_i, \gamma_i^0)$  зависят от выбранных ставок и способа начисления процентов (см. (7.145), (7.146)). Оптимум в задаче (7.151), (7.152) ищется по параметрам  $\gamma_1^0$  и  $\gamma_2^0$ .

Обозначив производные

$$\frac{\partial \gamma_i(\tau_i, \gamma_i^0)}{\partial \gamma_i^0} = \gamma_i'(\tau_i, \gamma_i^0), \quad i = 1, 2,$$

получим вместо условий оптимальности (7.153) после исключения  $\lambda$  соотношение

$$\frac{\gamma_1'}{\tau_1} \left( g_1 + \gamma_1 \frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1} \right) \frac{\gamma_2'}{\tau_2} \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} = \frac{\gamma_2'}{\tau_2} \left( g_2 + \gamma_2 \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} \right) \frac{\gamma_1'}{\tau_1} \frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1}. \quad (7.159)$$

Это равенство вместе с условием (7.152) определяет оптимальные значения параметров  $\gamma_1^0, \gamma_2^0$ .

Для потоков в форме (7.154)

$$\frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} = -\alpha_2,$$

в случае, когда  $\gamma_i(\tau, \gamma_i^0)$  имеют вид (7.146)

$$\frac{\gamma_i'}{\tau_i} = \gamma_i^0,$$

система (7.159), (7.152) может быть легко решена.

Условия (7.159) примут вид

$$\bar{r}_1 + (\gamma_1^0 \bar{r}_1 - \bar{r}_1) = \bar{r}_2 - (\bar{r}_2 - \gamma_2^0 \bar{r}_2), \quad (7.160)$$

уравнение (7.152) для этого случая запишется как

$$\alpha_1 (\gamma_1^0 \bar{r}_1 - \bar{r}_1) = \alpha_2 (\bar{r}_2 - \gamma_2^0 \bar{r}_2),$$

что позволяет переписать (7.160) как

$$\begin{aligned}\bar{r}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\bar{r}_2 - \gamma_2^0 \bar{r}_2) &= \bar{r}_2 - (\bar{r}_2 - \gamma_2^0 \bar{r}_2), \\ \bar{r}_1 + (\gamma_1^0 \bar{r}_1 - \bar{r}_1) &= \bar{r}_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\gamma_1^0 \bar{r}_1 - \bar{r}_1).\end{aligned}$$

Откуда оптимальные в среднем значения годовых ставок:

$$\begin{aligned}\gamma_2^0 &= \frac{\alpha_1(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)\bar{r}_2} + \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_2}, \\ \gamma_1^0 &= \frac{\alpha_2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)\bar{r}_1} + \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_1}.\end{aligned}\tag{7.161}$$

Они зависят лишь от средних по срокам заимствованиям оценок капитала  $r_i(\tau_i)$  и средних значений сроков заимствования  $\bar{\tau}_i$ .

**Оптимизация ставок по объему вкладов и займов.** Если известны зависимости оценок капитала  $r_i$  не только от продолжительности заимствования, но и от объемов вкладов и выдаваемых кредитов  $V_i$ , то этот фактор можно учесть при назначении оптимальных ставок  $\gamma_i(\tau_i, V_i)$ . Будем, как и выше, считать, что  $\tau_i$  и  $V_i$  случайны и их плотность распределения  $P_i(\tau_i, V_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Как и выше, индекс  $i = 1$  относится к вкладчикам, а  $i = 2$  к заемщикам банка. Обозначим через  $m_i[r_i(\tau_i, V_i), \gamma_i(\tau_i, V_i)]$  число вкладчиков (заемщиков), обращающихся в банк в единицу времени. Задача о максимуме средней прибыли примет вид

$$\bar{\Pi} = \sum_{i=1}^2 \frac{V_i}{\tau_i} \overline{m_i[r_i(\tau_i, V_i), \gamma_i(\tau_i, V_i)]} \rightarrow \max_{\gamma_i}\tag{7.162}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^2 \overline{V_i m_i[r_i(\tau_i, V_i), \gamma_i(\tau_i, V_i)]} = 0.\tag{7.163}$$

При этом

$$\text{Sign } m_i = \text{Sign}(r_i - \gamma_i), \quad i = 1, 2;$$

усреднение в  $i$ -м слагаемом ведется по  $\tau_i, V_i$ .

Условия оптимальности задачи (7.162), (7.163) совпадают с условиями (7.153) с заменой  $g_i$  на  $m_i V_i$ .

Если поток вкладчиков (заемщиков) пропорционален разности ставок банка и оценок его клиентов

$$m_i = \alpha_i(r_i - \gamma_i),\tag{7.164}$$

то

$$g_i = \frac{\alpha_i}{V_i}(r_i - \gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

Условия оптимальности после исключения  $\lambda$  — множителя примут вид

$$2 \left[ \frac{\gamma_2(\tau_2, V_2)V_2}{\tau_2} - \frac{\gamma_1(\tau_1, V_1)V_1}{\tau_1} \right] = \frac{r_2(\tau_2)V_2}{\tau_2} - \frac{r_1(\tau_1)V_1}{\tau_1}. \quad (7.165)$$

После выкладок, аналогичных тем, что проделаны при выводе равенства (7.157), получим

$$\gamma_i(\tau_i, V_i) = \frac{1}{2}r_i(\tau_i, V_i) + \lambda\tau_i, \quad i = 1, 2, \quad (7.166)$$

$$\lambda = \frac{\alpha_1 \overline{r_{1v}} + \alpha_2 \overline{r_{2v}}}{\alpha_1 \overline{\tau_{1v}} + \alpha_2 \overline{\tau_{2v}}}.$$

Здесь

$$\overline{r_{iv}} = \overline{\left( \frac{r_i(\tau_i, V_i)}{V_i} \right)}, \quad \overline{\tau_{iv}} = \overline{\left( \frac{\tau_i}{V_i} \right)}, \quad i = 1, 2.$$

Усреднение ведется по  $V_i, \tau_i$  с учетом их плотностей распределения.

**Учет налогов и инфляции.** В рассмотренной выше простейшей схеме деятельности банка не учитывался целый ряд факторов. К ним относятся риски, связанные для вкладчика с ненадежностью банка, а для банка с возможностью невозврата займов не учитывалось то, что часть средств банк вкладывает в ценные бумаги, курс которых изменяется, наконец, не учитывалось влияние инфляции и налогообложения. Можно предположить, что надежность банка вкладчики учитывают, меняя свою оценку  $r_1(\tau_1)$  по отношению к разным банкам, а банк аналогично дискриминирует заемщиков. Те из них, кто проводит более рискованные, а значит, более доходные операции согласны брать займ под больший процент.

Обсудим учет влияния прогнозируемой инфляции, темп которой  $\mu$  примем постоянным. Инфляция приносит убытки тем участникам рынка, которые получают доход с временным сдвигом, т.е. вкладчик и банку. В условиях инфляции вкладчик увеличит свою оценку

$$r_{1i}(\tau_1) = r_1(\tau_1) \exp(\mu\tau_1);$$

аналогично заемщик, которому нужно возвращать меньшую сумму, скорректирует оценку в меньшую сторону

$$r_{2i}(\tau_2) = r_2(\tau_2) \exp(-\mu\tau_2)$$

Подстановка полученных таким образом оценок в приведенные выше расчетные соотношения позволяет найти оптимальные ставки с учетом инфляции.

Следующий фактор — налогообложение. Обозначим через  $\delta_1$  — долю дохода от банковских вкладов, взимаемую в форме налога с вкладчиков, а через  $\delta$  — долю от разницы между суммой займов и суммой

возврата, взимаемой в форме налога с банка. Вкладчик получит в этом случае с учетом налога и инфляции доход

$$d_1 = g_1(\gamma_1(\tau_1), r_{1i}(\tau_1))(1 - \delta_1) \frac{\gamma_1(\tau_1)}{\tau_1},$$

а банк — прибыль

$$\Pi_n = \Pi(\gamma_1, \gamma_2, r_{1i}, r_{2i}) - \delta g_2(y, r_{2i})(y - 1),$$

где  $\Pi$  имеет вид (7.150).

Минимизация этого выражения приводит к условиям оптимальности ставок.

Полученные зависимости позволяют оптимизировать процентные ставки и оценить предельную прибыль коммерческого банка при известных функциях спроса кредиторов и заемщиков, определяющих интенсивность их обращения на обслуживание в функции процентных ставок и сроков заимствования. Кроме того, нужно знать распределение клиентов банка по объемам вкладов и по срокам заимствования.

### 7.7. Производственная фирма в открытой микроэкономической системе

**Производственная функция и микроэкономические балансы.** В этом параграфе рассмотрены модели поведения и предельные возможности производственной фирмы в зависимости от ее структуры и характеристик. Условие минимальной диссипации капитала для открытой микроэкономической системы распространено на системы, включающие фирму.

Экономический агент, как показано в гл. 6, характеризуется функцией благосостояния  $S(N, M)$ , зависящей от вектора ресурсов  $N > 0$ , и базисного ресурса (капитала)  $M$ . У производственной фирмы функция благосостояния зависит от капитала  $M$  и производственных фондов  $F$ , причем производная  $S$  по  $M$  всегда положительна. Наряду с функцией  $S$  производственная фирма в открытой микроэкономической системе характеризуется *производственной функцией*, определяющей связь между вектором  $y$  потока выпускаемой продукции и входными потоками предприятия  $z$ . Последние могут быть потоками необходимых для производства ресурсов в натуральных единицах или агрегированными потоками затрат на сырье, оборудование, людские ресурсы и пр. Их называют факторами производства. Факторы производства подразделяют на *взаимозаменяемые* или *взаимодополняемые*. В последнем случае каждый из этих факторов необходим, при его отсутствии выпуск  $y$  равен нулю, а при ограничении такого фактора выпуск продукции

ограничен. Взаимозаменяемые ресурсы могут быть *комплиментарными*, т.е. входить в каждую единицу выпускаемой продукции в строго определенных пропорциях. Производственная функция  $y = F(z)$  как правило удовлетворяет следующим условиям [13], [39]: 1. Выпуск продукции невозможен без затрат ресурсов. 2. Функция  $F$  монотонная по каждому из факторов производства, дифференцируемая, выпуклая вверх и однородная первой степени, т.е.

$$F(rz_1, rz_2, \dots) = rF(z_1, z_2, \dots).$$

Примером такой функции является функция Кобба-Дугласа:

$$F(N) = \kappa \prod_{i=0}^m z_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1. \quad (7.167)$$

Последнее равенство связано с однородностью функции  $F$ .

Уравнения микроэкономических балансов по ресурсам, капиталу и благосостоянию для микроэкономической системы, содержащей фирму, примут вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_i &= g_{iВХ} - g_{iВЫХ} - z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \dot{N}_i = g_{iВХ} - g_{iВЫХ} + F_i(z), \\ i &= n + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (7.168)$$

$$\begin{aligned} \dot{M} &= m_{ВХ} - m_{ВЫХ} - \sum_{i=1}^m (g_{iВХ}c_{iВХ} - g_{iВЫХ}c_{iВЫХ}), \quad \dot{S} = r[m_{ВХ} - m_{ВЫХ} - \\ &- \sum_{i=1}^m (g_{iВХ}p_{iВХ} - g_{iВЫХ}p_{iВЫХ}) + \sigma]. \end{aligned} \quad (7.169)$$

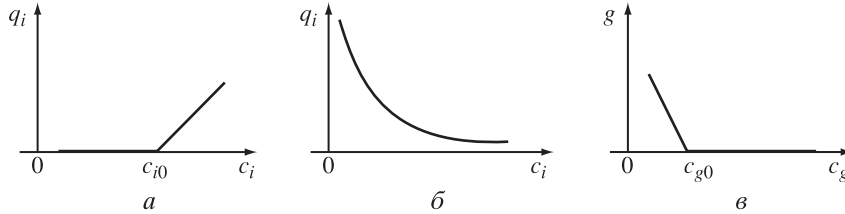
Здесь принято, что индекс для потребляемых ресурсов изменяется от единицы до  $n$ , а для производимых ресурсов от  $n + 1$  до  $m$ . Функция  $F_i(z)$  — производственная функция по  $i$ -му продукту,  $m_{ВХ}$  и  $m_{ВЫХ}$  — потоки базисного ресурса, в число потребляемых ресурсов включено закупаемое, а в число производимых — списанное оборудование. В неоднородной системе с внутренним хозрасчетом и перепродажей ресурсов друг другу диссипация капитала  $\sigma \geq 0$ .

Производственные фирмы закупают одни виды ресурсов (сырье, энергию, трудовые ресурсы и пр.), а продают — другие. Эти фирмы могут иметь сложную структуру с обменом потоками сырья и полуфабрикатов между ее элементами. Ниже с учетом структуры рассмотрены предельные возможности производственной фирмы, функционирующей в открытой микроэкономической системе.

**Однородная производственная фирма со скалярным потоком продукции.** Рассмотрим производственную фирму, приобретающую ресурсы с интенсивностями  $q_i$  по ценам  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и вырабатывающую поток  $g$  продукции с ценой  $c_g$ . Здесь мы не учитываем внутренней структуры фирмы и промежуточных потоков сырья

и полуфабрикатов. Поэтому рассматриваемую фирму можно назвать однородной.

Разобьем вектор поступающих ресурсов на две категории: взаимодополняющие ресурсы с потоками  $q_i(c_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и взаимозаменяемые ресурсы с потоками  $q_i(c_i)$  ( $i = n + 1, \dots, m$ ). На каждый из потоков наложено условие неотрицательности. То значение цены закупки  $c_{i0}$ , для которого поток  $q_i$  обращается в нуль, называют оценкой ресурса. При  $c_i > c_{i0}$ ,  $q_i(c_i) > 0$ . Аналогично, оценка  $c_{g0}$  определяет область ненулевого потока продукции (при  $c_g < c_{g0}$ ,  $g(c_g) > 0$ ).



Р и с. 7.7. Связь цен с потоками ресурсов (а, б) и продукции (в)

Функция предложения (зависимость потока от цены закупки) может быть различной. Например (рис. 7.7, а),

$$q_i(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_i \leq c_{i0}, \\ k_i(c_i - c_{i0}) & \text{при } c_i > c_{i0}. \end{cases} \quad (7.170)$$

Здесь коэффициент  $k_i$  больше нуля. При закупке ресурса на рынке  $c_{i0} = p_i$ . Для ресурсов, стоимость которых  $K$  постоянна и не зависит от потоков  $q_i$ , таких, как оплата аренды зданий и земли (рис. 7.7, б),

$$q_i(c_i) = \frac{K}{c_i} \text{ при } c_i > 0. \quad (7.171)$$

Поток продукции фирмы определен функцией спроса  $g(c_g)$ . Характер этой зависимости показан на рис. 7.7, в:

$$g(c_g) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_g \geq c_{g0}, \\ k_g(c_{g0} - c_g) & \text{при } c_g < c_{g0}. \end{cases} \quad (7.172)$$

Для взаимодополняющих ресурсов потребление каждого однозначно определяется потоком продукции  $g$ , так что

$$q_i = \varphi_i(g), \quad i = 1, \dots, n,$$

а суммарные затраты на эти ресурсы

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^n c_i q_i(c_i) = \sum_{i=1}^n c_i(g) \varphi_i(g), \quad (7.173)$$



где зависимости  $c_i(g)$  определяются из условия

$$q_i(c_i) = \varphi_i(g), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.174)$$

Для взаимозаменяемых ресурсов существует зависимость между потоком продукции  $g$  и потоками  $q_i$ :

$$g = F(q_{n+1}, \dots, q_m),$$

которая не позволяет определить  $q_i$  через  $g$ . Для каждого значения производительности  $g$  минимальные затраты

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \sum_{i=n+1}^m c_i q_i(c_i) \Big/ F(q(c)) = g. \quad (7.175)$$

Таким образом, затраты на взаимозаменяемые ресурсы определяются решением экстремальной задачи (7.175).

Предельные возможности производственной фирмы зависят от значения производственного потока  $g$ , для которого интенсивность извлечения базисного ресурса максимальна:

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_1(g(c_g)) - T_2(g(c_g)) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}}. \quad (7.176)$$

Диссипация капитала при закупке сырья и продаже продукции фирмой равна

$$\sigma = \sum_{i=1}^m (c_i - c_{i0}) q_i + (c_{g0} - c_g) g; \quad (7.177)$$

$\sigma = 0$ , если закупка ресурса и продажа продукции производятся по ценам  $c_{i0}$  и  $c_{g0}$ , при этом отношение дохода к затратам  $\eta = m / (T_1 + T_2)$  максимально, хотя как числитель, так и знаменатель этого выражения стремятся к нулю.

Приведем решение задачи о максимуме интенсивности получения прибыли  $m$  при линейных функциях  $F(q)$  и  $\varphi_i(g)$ :

$$F(q) = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i q_i, \quad i = n+1, \dots, m, \quad (7.178)$$

$$\varphi_i(g) = \frac{g}{\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.179)$$

Используя зависимости (7.170) и (7.174), находим выражения для  $c_i(g)$

$$c_i = c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.180)$$

и затрат  $T_1(g)$ :

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^n \frac{g}{\alpha_i} \left( c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i} \right). \quad (7.181)$$

Задача (7.175) примет вид

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \sum_{i=n+1}^m c_i k_i (c_i - c_{i0}) \Big/ \sum_{i=n+1}^m \alpha_i k_i (c_i - c_{i0}) = g. \quad (7.182)$$

Ее решение

$$T_2(g) = \sum_{i=n+1}^m c_i^*(g) k_i (c_i^*(g) - c_{i0}), \quad (7.183)$$

где

$$c_i^*(g) = \frac{c_{i0}}{2} + \alpha_i \frac{2g + \sum_{i=n+1}^m k_i c_{i0} \alpha_i}{2 \sum_{i=n+1}^m k_i \alpha_i^2}, \quad i = n+1, \dots, m, \quad (7.184)$$

откуда

$$T_2(g) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\left(2g + \sum_{i=n+1}^m \alpha_i k_i c_{i0}\right)^2}{\sum_{i=n+1}^m \alpha_i^2 k_i} - \sum_{i=n+1}^m k_i c_{i0}^2 \right]. \quad (7.185)$$

Задача (7.176) с учетом этих выражений запишется в форме

$$m = c_g g(c_g) - g(c_g) \sum_{i=1}^n \frac{c_{i0}}{k_i \alpha_i} - g^2(c_g) \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i \alpha_i^2} - \\ - \sum_{i=n+1}^m k_i c_i^*(g(c_g)) [c_i^*(g(c_g)) - c_{i0}] \rightarrow \max_{c_g}. \quad (7.186)$$

Эта задача выпукла вверх. С учетом того, что (см. (7.184), (7.172))

$$\frac{dc_i^*}{dg} = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=n+1}^m \alpha_j^2 k_j}, \quad \frac{dg}{dc_g} = -k_g,$$

условие оптимальности задачи (7.186) запишется как

$$\frac{dm}{dc_g} = 0 \implies (2c_g - c_{g0}) - \sum_{i=1}^n \frac{c_{i0}}{\alpha_i k_i} - 2k_g (c_{g0} - c_g) \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i \alpha_i} - \\ - \sum_{i=n+1}^m \frac{k_i \alpha_i}{\sum_{j=n+1}^m k_j \alpha_j^2} [2c_i^*(g) - c_{i0}] = 0,$$

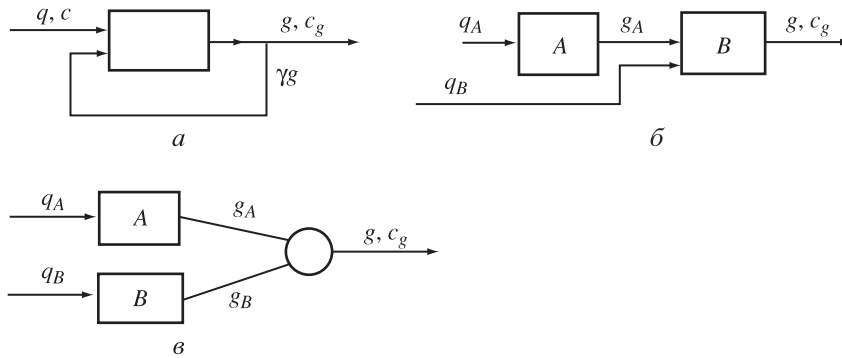
откуда с учетом (7.184) можно получить выражения для  $c_g^*$ :

$$c_g^* = \frac{c_{g0}}{2} + \frac{\left[ \sum_{i=1}^n \frac{c_{i0}}{\alpha_i} + \frac{\sum_{i=n+1}^m \alpha_i k_i c_{i0}}{\sum_{i=n+1}^m \alpha_i^2 k_i} \right]}{2k_g \left[ 1 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_i^2 k_i} \right]}, \quad (7.187)$$

и после подстановки  $c_g^*$  в (7.172) и (7.186), получить выражение для максимальной интенсивности прибыли  $m^*$ .

**Учет внутренней структуры и распределение потоков ресурса.** В реальной производственной системе зависимости между потоками закупаемых и производимых ресурсов непосредственно не заданы. Переработка может состоять из нескольких стадий, включать в себя рециклы, распределение полуфабрикатов, цены которых не определены, и пр. Ниже рассмотрены несколько задач, связанных с учетом структуры производственной фирмы.

*Система с рециклом.* Структура системы показана на рис. 7.8, а. В этой системе доля выпуска  $\gamma$  направляется в производство. Обозначим этот поток через  $q_0 = \gamma g$ .



Р и с. 7.8. Соединения производственных ячеек с рециклом (а), последовательное (б) и параллельное (в)

Если рецикл с потоком  $q_0$  относится к взаимодополняющим ресурсам, а значит, однозначно связан с производительностью, то условие

$$q_0 = \gamma g = \varphi_0(g(1 + \gamma))$$

для монотонной функции  $\varphi_0$  определяет  $\gamma(g)$ . Так, для зависимостей в форме (7.178) из условия  $\gamma g = (1 + \gamma)g/\alpha_0$  следует, что  $\gamma = 1/\alpha_0 - 1$ . Задача оценки предельной прибыли отличается от задачи, рассмотрен-

ной в предыдущем пункте, тем, что в функциях  $T_1(g)$  и  $T_2(g)$  нужно заменить  $g$  на  $(1 + \gamma)g$ .

В случае, если рецикл относится к взаимозаменяемым ресурсам, задача (7.175) примет вид

$$T_2(g, \gamma) = \min_{c \geq c_0} \left[ \sum_{i=n+1}^m c_i q_i(c_i) + c_g \gamma g \right] / F(q_{n+1}, \dots, q_m, \gamma g) = (1 + \gamma)g, \quad (7.188)$$

ее значение (минимальные затраты)  $T_2(g, \gamma)$  будут зависеть не только от  $g$ , но и от  $\gamma$ . Критерий максимальной интенсивности прибыли:

$$m = c_g g(c_g) - T_1((1 + \gamma)g(c_g)) - T_2(g(c_g), \gamma) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}, 1 > \gamma \geq 0}. \quad (7.189)$$

*Последовательное соединение производственных ячеек.* Структура такой системы представлена на рис. 7.8, б. Для первой из ячеек  $A$  по формулам (7.173), (7.175) могут быть рассчитаны минимальные затраты как функция потока полуфабриката:

$$T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A). \quad (7.190)$$

В том случае, когда поток полуфабриката является взаимодополняющим, он определяется значением продуктового потока  $g$  ( $g_A = \varphi_A(g)$ ), а значит, и затраты  $T_A$  оказываются зависимыми от  $g$ . Выбор цены  $c_g$  и производительности  $g$  осуществляется решением задачи (7.176), которая для данного случая запишется в виде

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_{1B}(g(c_g)) - T_{2B}(g(c_g)) - T_A(g(c_g)) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}}. \quad (7.191)$$

Если же поток  $g_A$  полуфабриката взаимозаменяемый, то слагаемое  $T_A(g(c_g))$  в выражении для  $m$  (7.191) отсутствует, а задача (7.175) преобразуется к виду

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \left[ \sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} q_{iB}(c_{iB}) + T_A(g_A) \right] / F(q(c)) = g. \quad (7.192)$$

**Пример.** Решим задачу (7.192) для линейных зависимостей  $q_\nu(c_\nu)$  (7.170),  $F_\nu(q_\nu)$  (7.177),  $\varphi_\nu(g_\nu)$  (7.178) ( $\nu = \{A, B\}$ ). С учетом (7.181), (7.185) эта задача имеет вид

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} k_{iB} (c_{iB} - c_{i0B}) + \sum_{i=1_A}^{n_A} \frac{g_A}{\alpha_{iA}} \left( c_{i0A} + \frac{g_A}{\alpha_{iA} k_{iA}} \right) + \frac{1}{4} \left[ \frac{\left( 2g_A + \sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA} k_{iA} c_{i0A} \right)^2}{\sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}} - \sum_{i=n_A+1}^{m_A} k_{iA} c_{i0A}^2 \right] \rightarrow \min_{c_{iB}, g_A}$$

при условии

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} \alpha_{iB} q_{iB} + \alpha_{0B} g_A = g_B. \quad (7.193)$$

Условия оптимальности этой задачи определяют выражения для управляющих переменных:

$$c_{iB} = \frac{\lambda \alpha_{iB} + c_{i0B}}{2} \implies q_{iB} = k_{iB} \frac{\lambda \alpha_{iB} - c_{i0B}}{2} \quad (i = 1 + n_A, \dots, m_A),$$

$$g_A = \frac{\sum_{i=1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}}{2} \left[ \lambda \alpha_{0B} - \left( \sum_{i=1}^{n_A} \frac{c_{i0A}}{\alpha_{iA}} + \frac{\sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA} k_{iA} c_{i0A}}{\sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}} \right) \right],$$

где множитель  $\lambda$  находят из условия (7.193).

*Параллельное соединение производственных ячеек.* Структура такой системы приведена на рис. 7.8, в. Системы с параллельной структурой тщательно изучены. Найдя для каждой ячейки минимальные затраты  $T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A)$  и  $T_B(g_B) = T_{1B}(g_B) + T_{2B}(g_B)$ , потоки  $g_A$  и  $g_B$  выбирают таким образом, чтобы были выполнены условия

$$\frac{dT_A}{dg_A} = \frac{dT_B}{dg_B}, \quad g_A + g_B = g. \quad (7.194)$$

Условия (7.194) связывают потоки ячеек с общим потоком  $g$  и тем самым определяют затраты  $T_A$  и  $T_B$  как функции  $g$ . Последний же выбирается из условия

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_A(g(c_g)) - T_B(g(c_g)) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}}. \quad (7.195)$$

Представив производственную структуру как соединение отдельных ячеек, каждая из которых в свою очередь может не быть однородной, можно найти предельные возможности системы.

Для систем с векторным потоком готового продукта  $g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_\kappa)$  максимальная прибыль для каждого вида продукции  $n_{0j}(g_j)$  определяется выражением (7.176). Выбор вектора  $g$  осуществляют как решение задачи

$$m(g) = \sum_{j=1}^{\kappa} n_{0j}[g_j(c_{gj})] \rightarrow \max_{c_{gj}}. \quad (7.196)$$

при тех или иных ограничениях, связывающих друг с другом потоки  $g_j$ . Такими ограничениями могут быть возможности оборудования, ограничения на поток какого-либо ресурса и пр.

Интенсивность прибыли  $m$  не всегда является критерием для выбора цен и потоков в производственных системах. Величина  $m$  может

быть задана:  $m = m^0$ . Если это заданное значение не превосходит максимально возможного и требуется при  $m = m^0$  минимизировать затраты на единицу продукции, то, как нетрудно показать, задача сводится к минимизации диссипации капитала  $\sigma$  (7.177) при фиксированном  $m^0(g)$ .

**Целесообразность складов сырья и готовой продукции.** Наличие складов сырья и готовой продукции позволяет не только сгладить изменения внешних условий, но в ряде случаев повысить эффективность производства даже в стационарном окружении. Если на производстве есть склады сырья и готовой продукции, то «жесткие» связи между потоками заменяются усредненными. Так, например, для взаимодополняющих ресурсов имеем

$$\int_0^{\tau} [q_i(c_i(t)) - \varphi_i(g(t))] dt = 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.197)$$

вместо равенства (7.174). Аналогично, для взаимозаменяемых ресурсов в задаче (7.175) нужно искать минимум функционала

$$\overline{T_2} = \sum_{i=n+1}^m \int_0^{\tau} c_i(t) q_i(c_i(t)) dt \quad (7.198)$$

по  $c_i(t) \geq c_{i0}$  ( $i = n + 1, \dots, m$ ) при условии

$$\int_0^{\tau} [g(t) - F(q_{n+1}(c_{n+1}(t)), \dots, q_m(c_m(t)))] dt = 0. \quad (7.199)$$

В критерии оптимальности (7.176) при наличии складов также можно провести усреднение по времени, аналогичное (7.198), и искать изменение во времени отпускной цены  $c_g(t)$  и потока  $g(t)$ .

Сформулированные таким образом задачи являются усредненными задачами нелинейного программирования [63]. Они имеют оптимальное решение либо в форме констант (статический режим), в этом случае наличие складов не приводит к дополнительному эффекту, либо в форме кусочно постоянных функций (циклический режим). В случае циклического режима часть или все переменные задачи принимают в течение определенных долей  $\gamma_\nu$  интервала времени  $\tau$  оптимальные (базовые) значения, переключаясь между ними. Максимальное среднее значение  $\overline{m}$  в этом случае больше, чем  $m$  в статическом режиме, и склады позволяют получить дополнительный эффект. Приведем как следствия из общих утверждений, условия целесообразности или, напротив, нецелесообразности складов.

1. Пусть  $g^*$  — оптимальное статическое значение производительности, а  $c_i^*$  — соответствующие этому значению цены. Если

$$\max_{\lambda} \min_c \left[ \sum_{i=n+1}^m c_i q_i(c_i) + \lambda [F(q(c)) - g^*] \right] < \sum_{i=n+1}^m c_i^* q_i^*(c_i^*), \quad (7.200)$$

то склад на взаимозаменяемых потоках сырья целесообразен.

2. Аналогично, если для  $i$ -го взаимодополняющего потока

$$\max_{\lambda} \min_c \left[ c_i q_i(c_i) + \lambda [q_i(c_i) - \varphi_i(g^*)] \right] < c_i^* q_i^*(c_i^*), \quad (7.201)$$

то склад  $i$ -го ресурса позволит получить эффект. Разница между левой и правой частями неравенств (7.200), (7.201) дает оценку сверху для возможного эффекта. Если эта разница невелика, то не стоит тратить средства на создание складов сырья.

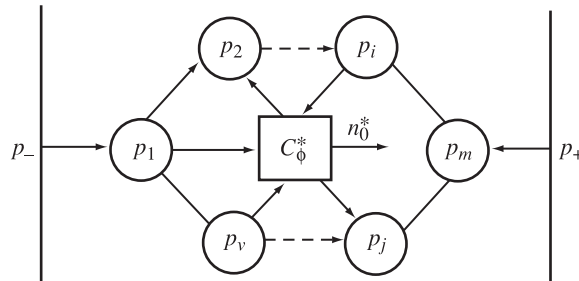
3. Наконец, склад готовой продукции целесообразен, если

$$\min_{\lambda} \max_{c_g} \left[ m(c_g) + \lambda [g(c_g) - g^*] \right] > m(c_g^*). \quad (7.202)$$

Условие (7.202) означает, что при  $c_g = c_g^*$  выпуклая оболочка функции  $m(c_g)$  проходит выше ее графика.

Как правило, целесообразность складов объясняется скачками в функциях спроса и предложения, связанными с переходом при некоторых значениях потока на другое оборудование, другие средства доставки, льготные тарифы и пр.

Р и с. 7.9. Открытая микроэкономическая система, включающая в себя фирму



**Открытая микроэкономическая система, включающая фирму.** Как указывалось в гл. 6, для открытой микроэкономической системы, состоящей из экономических агентов, у которых оценки ресурсов определяются вектором их запасов  $N$ , в стационарном режиме вблизи равновесия устанавливается такое распределение ресурсов между подсистемами и связанные с запасами ресурсов оценки и потоки, что величина диссипации капитала  $\sigma$  минимальна. Если система содержит посредническую или производственную фирму (рис. 7.9), то

в стационарном режиме фирма извлекает базисный ресурс с интенсивностью  $m$ , при этом она устанавливает такие цены  $c_\phi^*(p)$  закупки, продажи и связанные с ними потоки обмена, для которых величина  $m = m^*(p)$  максимальна.

Пользуясь приведенными выше соотношениями, можно рассчитать состояние открытой экономической системы по критерию минимума диссипации с тем дополнительным условием, что скорость изменения базисного ресурса фирмы равна  $m^*(p)$ :

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{j,\nu} g_{j\nu}(p_\nu, p_j)(p_\nu - p_j) + \sum_j g_{j\phi}(c_\phi, p_j)(c_\phi - p_j) \rightarrow \min_{p_j(N_j)} \left/ \sum_j g_{j\phi}(c_\phi, p_j)c_\phi = m^*(p) \right.$$

Из последнего соотношения вытекает утверждение: для стационарной открытой микроэкономической системы, содержащей производственную фирму, справедливо условие минимальной диссипации. При этом диссипация капитала определяется выражением

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{j\nu} g_{j\nu}(p_\nu, p_j)(p_\nu - p_j) + m^*(p) - \sum_j g_{j\phi}(c_\phi^*, p_j)p_j \rightarrow \min_{p_j(N_j)}. \quad (7.203)$$

Здесь  $g_{j\phi}$  — потоки между фирмой и подсистемами, к которым относятся как потоки ресурсов  $q$  (в этом случае  $c_\phi > p_j$ ), так и продукции  $g$  (в этом случае  $c_\phi < p_j$ ). Вблизи равновесия зависимость потоков от движущих сил  $p_\nu - p_j$  или  $c_\phi - p_j$  предполагается линейной.

Задачу (7.203) нужно решать одновременно с вычислением максимального потока  $m^*(p)$  прибыли фирмы. Будем предполагать, что каждый из потоков  $g_j(c_j, p_j)$  монотонно зависит от  $c_j$ , знак потока положителен, если он направлен от подсистемы к фирме (закупки) и отрицателен при продаже. В этом случае мы можем выразить цену закупки (продажи)  $c_j(g_j, p_j)$  у  $j$ -го ЭА через величину потока и записать задачу о максимуме прибыли как

$$m(p, g_j) = - \sum_j g_j c_j(g_j, p_j) \rightarrow \max_{g_j} \quad (7.204)$$

при условии

$$\sum_j g_j = 0. \quad (7.205)$$

Условия оптимальности задачи (7.204), (7.205) приводят к соотношениям, позволяющим найти оптимальные значения потоков из решения системы

$$g_j = \left( \lambda - c_j(g_j, p_j) \right) \frac{\partial g_j}{\partial c_j}, \quad (7.206)$$



где

$$\lambda = \sum_j c_j(g_j, p_j) \gamma_j, \quad \gamma_j = \frac{\partial g_j}{\partial c_j} : \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial c_j}.$$

Таким образом,  $\gamma_j > 0$ , их сумма равна единице и  $\lambda$  имеет смысл средневзвешенной цены ресурса.

Максимальная прибыль:

$$n_0^*(p) = \lambda^2 \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial c_j} - \sum_j c_j^2 \frac{\partial g_j}{\partial c_j}. \quad (7.207)$$

Система может содержать не одну, а несколько конкурирующих фирм. В этом случае каждая  $\nu$ -я фирма ( $\nu = 1, \dots, k$ ) решает задачу (7.204), (7.205) с тем дополнительным требованием, что цены закупки (продажи) у всех фирм при контакте с  $j$ -м ЭА одинаковы. Таким образом, мы приходим к совокупности  $k$  взаимосвязанных экстремальных задач

$$n_{\nu 0}(p, g_j) = - \sum_j g_{j\nu} c_j(g_j, p_j) \rightarrow \max_{g_{j\nu}} \quad (7.208)$$

при условиях

$$\sum_j g_{j\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, k, \quad (7.209)$$

$$g_j = \sum_\nu g_{j\nu}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (7.210)$$

Если каждая из посреднических фирм имеет доступ ко всем ЭА, то задачи (7.208), (7.209) одинаковы для всех  $\nu$ . Дело обстоит иначе, если задана структура системы, определяющая, с каким из ЭА каждая из фирм может вступать в контакт. Чтобы учесть этот фактор, можно ввести функции контакта  $u_{\nu j}$ , равные единице, если  $\nu$ -я фирма может вступать в контакт с  $j$ -м ЭА, и равные нулю в противном случае. Условия оптимальности (7.206), (7.207) претерпят при этом изменения, так что оптимальные потоки ресурса для  $\nu$ -й фирмы удовлетворяют соотношениям

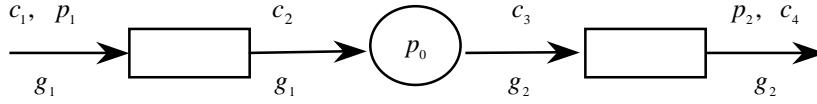
$$g_{j\nu} = u_{\nu j} \left( \lambda_\nu - c_j(g_j, p_j) \right) \frac{\partial g_j}{\partial c_j}, \quad (7.211)$$

в которых

$$\lambda_\nu = \sum_j c_j(g_j, p_j) \gamma_{\nu j},$$

$$\gamma_{\nu j} = u_{\nu j} \frac{\partial g_j}{\partial c_j} : \sum_j u_{\nu j} \frac{\partial g_j}{\partial c_j}.$$

Наконец, фирмы могут вступать в контакт друг с другом, т.е. выступать в роли перекупщиков. В этом случае задачу можно свести к рассмотренной, введя фиктивного ЭА, оценка ресурса  $p_0$  для которого



Р и с. 7.10. Последовательное соединение фирм-перекупщиков

Так, для последовательной структуры двух фирм (рис. 7.10) оптимальное решение находят из условий

$$g_1^*(p_0) = \operatorname{argmax}_{g_1} [c_2(g_1, p_0) - c_1(g_1, p_1)],$$

$$g_2^*(p_0) = \operatorname{argmax}_{g_2} [c_4(g_2, p_2) - c_3(g_2, p_0)],$$

$$g_1^*(p_0) = g_2^*(p_0).$$

Если фирм-перекупщиков несколько, то значение  $p_0$  находится так, чтобы суммарный поток ресурса на входе фиктивного ЭА был равен суммарному потоку на его выходе.

## Список литературы

1. *Амелькин С.А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А.М., Юмагужина В.Н.* Предельные возможности тепломеханических систем. Процессы с одним источником // Изв. РАН. Энергетика. 1998. № 2. С.48–58.
2. *Амелькин С.А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А.М., Юмагужина В.Н.* Предельные возможности тепломеханических систем с несколькими источниками // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 1. С.31–40.
3. *Амелькин С.А., Мартинаш К., Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах // АиТ. 2002. № 4. С.3–25.
4. *Арнольд Л.В., Михайловский Г.А., Селиверстов В.М.* Техническая термодинамика и теплопередача. М.: Высш. шк., 1979.
5. *Бабиевский В.Н., Морозов М.Н., Цирлин А.М.* Осредненные и вероятностные задачи оптимизации в системах управления // АиТ. 1980. № 7. С.68–76.
6. *Балакирев В.С., Володин В.М., Цирлин А.М.* Оптимальное управление процессами химической технологии. М.: Химия, 1978.
7. *Беляева Н.П., Цирлин А.М.* Оптимальное управление покупкой и продажей ценных бумаг // АиТ. 1998. № 4. С.135–143.
8. *Беме Б., Софиева Ю.Н., Цирлин А.М.* О характере установившегося режима для некоторых типов управляемых объектов // АиТ. 1979. № 2. С.7–12.
9. *Бошнякович Ф.* Техническая термодинамика. М.: ГЭИ, 1955.
10. *Бродянский В.М., Фратшке В., Михалек К.* Эксергетический метод и его приложения. М.: Энергоатомиздат, 1988.
11. *Бутковский А.Г.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
12. *Варга Дж.* Оптимальное управление функциональными и дифференциальными уравнениями. М.: Наука, 1977.
13. *Вишнев С.М.* Экономические параметры. М.: Наука, 1968.
14. *Волкова М.Е., Майков Г.П., Цирлин А.М.* Задачи оптимального управления с непрерывными и дискретно изменяющимися параметрами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 2. С.36–42.

15. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
16. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
17. *Гурман В.И.* Принцип расширения в экстремальных задачах. М.: Физматлит, 1997.
18. *Гухман А.А.* Об основаниях термодинамики. М.: Энергоатомиздат, 1986.
19. *Карно С.* Размышление о движущей силе огня и о машинах... // Второе начало термодинамики. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
20. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1973.
21. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
22. *Кузнецов А.Г., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Оптимальное управление в термодинамических системах с конечной емкостью источников // *АиТ.* 1985. № 6. С.56–62.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
24. *Линецкий С.Б., Роднянский И.Е., Цирлин А.М.* Оптимальные циклы холодильных машин и тепловых насосов // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.* 1985. № 6. С.42–49.
25. *Линецкий С.Б., Цирлин А.М.* Оценка термодинамического совершенства и оптимизация теплообменников // *Теплоэнергетика.* 1988. № 10. С.87–91
26. *Майков Г.П., Цирлин А.М.* Условия оптимальности при различных формах записи процесса управления // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1973. № 5. С.63–71.
27. *Майков В.П., Балун Ф.И.* Ректификация атермальных смесей. М.: МИХМ, 1979.
28. *Малых В.Л.* Термодинамические ограничения и эффективность изотермических процессов разделения. М., 1987. 12с. Деп. в ВИНИТИ, № 2020-В87.
29. *Мартыновский В.С.* Циклы, схемы и характеристики теплотрансформаторов. М.: Энергия, 1979.
30. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. М.: Химия, 2000.

31. *Миронова В.А., Цирлин А.М.* Предельные возможности и оптимальная организация регенеративного теплообмена // Теплоэнергетика. 1987. № 2. С.32–36.
32. *Миронова В.А., Цирлин А.М., Самарин Ю.Б.* Термодинамический анализ процессов разделения газовых смесей // Хим. пром-сть. 1988. № 8. С.486–490.
33. *Миронова В.А., Попов В.А., Самарин Ю.Б.* Термодинамический анализ и оптимизация процесса короткоциклового безнагревной адсорбции // Хим. пром-сть. 1990. № 8. С.30–32.
34. *Миронова В.А., Соболев В.А., Цирлин А.М.* Оптимальное управление потоками сырья и готовой продукции путем выбора цен // АиТ. 1998. № 2.
35. *Молочников Б.Э., Цирлин А.М.* Термодинамически-оптимальные профили концентраций в задачах изотермического необратимого массопереноса // Теорет. основы хим. технологии. 1990. № 2. С.191–197.
36. *Орлов В.А., Руденко А.В.* Оптимальное управление в задачах о предельных возможностях необратимых термодинамических процессов: (Обзор) // АиТ. 1985. № 5. С.7–41.
37. *Орлов В.А., Розоноэр Л.И.* Оценки эффективности управляемых термодинамических процессов на основе уравнений баланса энергии вещества и энтропии // X Всесоюз. совещ. по пробл. управления. М.: Наука, 1986.
38. *Петров А.А.* Математическая модель рыночного равновесия. М.: Наука, 1966.
39. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
40. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
41. *Поспелов И.Г.* Динамическое описание коллективного поведения на рынке // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем / Ред. А.А. Самарский и др. М.: Наука, 1989.
42. *Пригожин И., Дефей Р.* Химическая термодинамика. М.: Наука, 1966.
43. *Розоноэр Л.И., Малишевский А.В.* Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой

- // Всесоюз. совещ. по пробл. управления: Реф. докл. М., 1971. С.207–209.
44. *Розоноэр Л.И.* Обмен и распределение ресурсов: (Обобщенный термодинамический подход). I–III // *АиТ.* 1973. № 5. С.115–132; № 6. С.65–79; № 8. С.82–103.
  45. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Об оптимальных термодинамических процессах // VIII Всесоюз. совещ. по пробл. управления: Тез. докл. М., 1980. С.75–77.
  46. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами // *АиТ.* 1983. № 1. С.70–79; № 2. С.88–101; № 3. С.50–64.
  47. *Розоноэр Л.И., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Использование методов оптимизации для оценки предельных возможностей абсорбционно-десорбционных циклов // *Теорет. основы хим. технологии.* 1984. № 3. С.362–370.
  48. *Руденко А.В., Орлов В.Н.* Предельные возможности необратимых термодинамических процессов: Обзор // *Теплоэнергетика.* 1984. № 9. С.68–70.
  49. *Софиев М.А.* К расчету активной тепловой изоляции // *Теорет. основы хим. технологии.* 1988. № 3. С.150–157.
  50. *Трофимов В.В.* Геометрический анализ динамики больших экономических систем // Пу Т. «Нелинейная экономическая динамика» / НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». М., 2000. С.174–198.
  51. *Хейвуд Р.* Термодинамика равновесных процессов. М.: Мир, 1983.
  52. *Цирлин А.М., Амелькин С.А., Амелькина М.А.* Модель производственной фирмы в открытой микроэкономической системе // *Мат. моделирование.* 2002. Т.14, № 4. С.21–34.
  53. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и экономике. М.: Физматлит, 2002.
  54. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами // *Докл. РАН.* 2000. № 2. С.177–179.
  55. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике // *АиТ.* 2001. № 5.
  56. *Цирлин А.М.* Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1974. № 2. С.143–151.

57. Цирлин А.М. Условия оптимальности периодических установившихся режимов технологических процессов // Теорет. основы хим. технологии. 1974. № 2. С.43–50.
58. Цирлин А.М. Оптимальные циклы и циклические режимы. М.: Энергоатомиздат, 1985.
59. Цирлин А.М. Оптимальное управление процессами необратимого тепло- и массопереноса // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. С.81–86.
60. Цирлин А.М. Условия оптимальности решения усредненных задач математического программирования // Докл. АН СССР. 1992. Т.323, № 1.
61. Цирлин А.М. Термодинамика экономических систем // Тр. ИПС РАН. 1994. Т.1. С.64–78.
62. Цирлин А.М. Оптимальное управление обменом ресурсами в экономических системах // АиТ. 1995. № 3. С.116–126.
63. Цирлин А.М. Методы усредненной оптимизации и их приложения. М.: Физматлит, 1997.
64. Цирлин А.М., Миронова В.А., Амелькин С.А. Процессы минимальной диссипации // Теорет. основы хим. технологии. 1997. Т.31, № 6. С.649–658.
65. Цирлин А.М., Беляева Н.А. Предельные возможности процессов теплообмена // Теплоэнергетика. 1998. № 9. С.53–55.
66. Цирлин А.М. Второй закон термодинамики и предельные возможности тепловых машин // Журн. техн. физики. 1999. Т.69, № 1. С.140–142.
67. Шамбодалъ П. Развитие и приложение понятия энтропии. М.: Наука, 1967.
68. Amelkin S.A., Tsirlin A.M. Optimal choice of prices and flows in a complex open industrial system // Open Syst. and Inform. Dyn. 2001. Vol.8. P.169–181.
69. Andresen B., Berry R.S., Nitzan A., Salamon P. Thermodynamics in finite time: I. The step-carnot cycle // Phys. Rev. A. 1977. Vol.15, N5. P.2086–2093.
70. Andresen B., Salamon P., Berry R.S. Thermodynamics in finite time: Extremals for imperfect heat engines // J. Chem. Phys. 1977. Vol.66, N4. P.1571–1577.

71. *Andresen B., Rubin M.H., Berry R.S.* Availability for finite-time processes: General theory and a model // *Phys. Chem.* 1983. Vol.87, N15.
72. *Andresen B.* Finite-time thermodynamics. Copenhagen, 1983.
73. *Andresen B., Berry R.S., Ondrechen M.J., Salamon P.* Thermodynamics for processes in finite time // *Accounts Chem. Res.* 1984. Vol.17, N8. P.266–271.
74. *Andresen B., Salamon P., Berry R.S.* Thermodynamics in finite time // *Phys. Today.* 1984. N62.
75. *Andresen B., Gordon J.M.* Optimal heating and cooling strategies for heat exchanges design // *J.Appl. Phys.* 1992. N1. P.71–78.
76. *Ayres R.U., Nair I.* Thermodynamics and economics // *Phys. Today.* 1984. Vol.3. P.313–325.
77. *Ayres R.U., Martinas K. A.* Non-equilibrium evolutionary economic theory // *Economics and thermodynamics: New perspectives on economic analysis.* Boston: Kluwer, 1994. P.73–98.
78. *Ayres R.U., Martinas K.* Waste potential entropy: The ultimate ecotoxic? // *Econ. Appl.* 1995. T.48, N2. P.95–120.
79. *Barrere M.* Le role du temps dans l'optimisation des cycles thermodynamiques // *Rev. gen. therm.* 1980. N228. P.995–1006.
80. *Bejan A.* Solutions manual for entropy generation through heat and fluid flow. N.Y.: Wiley, 1984.
81. *Bejan A.* Heat transfer. N.Y.: Wiley, 1993.
82. *Bejan A.* Entropy generation through heat and fluid flow. N.Y.: Wiley, 1994.
83. *Bejan A.* Theory of heat transfer — irreversible power plants. II. The optimal allocation of heat exchange equipment // *Intetn. J. Heat and Mass Transfer.* 1995. Vol.38, N3.
84. *Bejan A.* Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite size devices and finite time process // *J. Appl. Phys.* 1996. Vol.79. P.1191–1218.
85. *Berry R.S., Heal G., Salamon P.* On a relation between economic and thermodynamic optima // *Resources and Energy.* 1978. N1. P.125–137.



86. *Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamic constraints in economic analysis // Self-organization and dissipative structures: Applications in the physical and social sciences / Ed. by W.C. Schieve and P.M. Allen. Austin (Tex.): Univ. of Texas press, 1982.
87. *Berry R.S.* Foreword // Finite-time thermodynamics and thermo-economics. N.Y.: Taylor and Francis, 1990. P.24–243. (Advances in Thermodynamics; Vol.4).
88. *Berry R.S., Kasakov V.A., Sieniutycz S., Szwast Z., Tsirlin A.M.* Thermodynamic optimization of finite-time processes. Chichester: Wiley, 1999.
89. *Brody A., Martinas K., Sajo K.* Essay on macroeconomics // Acta oeconomica. 1985. Vol.35, N.3/4. P.337–343.
90. *Brody A.* The use of thermodynamic models in economics // Economics and thermodynamics: New perspectives on economic analysis. Boston: Kluwer, 1994.
91. *Bryant J. A.* Thermodynamic approach to economics // Energy Economics. 1982. Vol.4. P.36–50.
92. *Chen J., Yan Z., Lin G., Andresen B.* On the Curzon-Ahlborn efficiency and its connection with the efficiencies of real heat engines // Energy Convers. Manag. 2001. Vol.42. P.173–181.
93. *Chen L., Wu C., Sun F.* Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1999. Vol.24. P.327–359.
94. *Curzon F.L., Ahlborn B.* Efficiency of a Carnot engine at maximum power output // Amer.J. Phys. 1975. Vol.43. P.22–24.
95. *De Vos A.* Endoreversible thermoeconomics // Energy Convers. Manag. 1995. Vol.36, N1. P.1–5.
96. *De Vos A.* Endoreversible economics // Energy Convers. Manag. 1997. Vol.38, N.4. P.311–317.
97. *Dyke C.* From entropy to economy a thorny path // Adv. Human Ecology. 1992. Vol.1. P.149–176.
98. *Fromovitz St.* Non-linear programming with randomisation // Manag. Sci. A. 1965. Vol.11, N9.
99. *Georgescu-Roegen N.* The entropy law and the economic process. Cambridge: Harvard Univ. press, 1971.

100. *Goktun S., Ozkaynak S., Yavuz H.* Design parameters of a radiative heat engine // *Energy*. 1993. Vol.18, N6.
101. *Gyftopoulos E.P., Beretta G.P.* New developments in thermodynamics // *J. Jap. Soc. Mech. Eng.* 1993. Vol.96. P.892.
102. *Hoffman K.H., Watowich S.J., Berry R.S.* // *J. Appl. Phys.* 1985. Vol.58. P.2125.
103. *Holyst J. A., Urbanowicz K.* Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // *Physica A*. 2000. Vol.287, N3/4. P.587–598.
104. *Hurwicz L., Richter M.* An integrability condition with applications to utility theory and thermodynamics // *J. Math. Econ.* 1979. Vol.6. P.7–14.
105. *Ibrahim O.M., Klein S.A., Mitchell J.W.* Effects of irreversibility and economics on the performance of a heat engine // *J. Solar Energy Eng.* 1992. Vol.141. P.267–271.
106. *Ingber L.* Statistical mechanics of nonlinear nonequilibrium financial markets // *Math. Modelling*. 1984. Vol.5. P.343–361.
107. *Ingber L.* Statistical mechanics of nonlinear nonequilibrium financial markets: Applications to optimized trading // *Math. Computer Modelling*. 1996. Vol.23. P.101–121.
108. *Kiang R.L. and Wu C.* *Intern. J. Power Energy Systems*. 1994. N14. P.68.
109. *Krane R.J.* A second law analysis of the optimum design and operation of thermal energy storage systems // *Intern. J. Heat and Mass Transfer*. 1987. Vol.30, N1.
110. *Landsberg P.T., Left H.S.* Thermodynamic cycles with nearly universal maximum-work efficiencies // *J. Phys. A*. Vol.22.
111. *Lee W.Y., Kim S.S.* // *Energy*. 1992. N17. P.275.
112. *Leff H.S.* Thermal efficiency at maximum work output: New results for old heat engines // *Amer. J. Phys.* 1987. Vol.55. P.602–610.
113. *Lichnerowicz M.* Un modele dechange economique: Economie et thermodynamique // *Ann. Inst. Henri Poincare*. 1970. N2.
114. *Lichnerowicz M., Lichnerowicz A.* Economie et thermodynamique: Un modele dechange economique // *Econ. et Soc.* 1971. Vol.5.

115. *Long N.V., Siebert H.* Lay-off restraints, employment subsidies, and the demand of labor // Optimal control theory and economic analysis. Amsterdam, 1985. Vol.2.
116. *Lukacs J.* Once more about economic entropy // Acta oeconomica. 1989. Vol.41, N1/2. P.181–192.
117. *Mantegna R.N., Palagyi Z., Stanley H.E.* Applications of statistical mechanics to finance // Physica A. 1999. Vol.274. P.216–221.
118. *Martinas K.* Irreversible Microeconomics // Intern. Onsager-workshop. Leiden, 2000. P.147–152.
119. *Martinas K.* About irreversibility in microeconomics. Budapest, 1989. (Res. Rep. Dep. of Low Temp. Phys. Roland Eotvos Univ.; AHFT-89-1.
120. *Martinas K.* Irreversible microeconomics // Complex systems in natural and economic sciences. Matrafured, 1995.
121. *Mironova V., Tsirlin A., Kazakov V., Berry R.S.* Finite-time thermodynamics: Exergy and optimization of time-constrained processes // J. Appl. Phys. 1994. Vol76. P.629.
122. *Mirowski P.* More heat than light: Economics as social physics, Physics as nature's economics: Historical perspectives on modern economics. Cambridge: Cambridge Univ. press, 1989.
123. *Mozurkewicz M., Berry R.S.* Optimization of a heat engine based on a dissipative system // J. Appl. Phys. 1983. Vol.54, N7. P.3651–3661.
124. *Naka Y., Terashita M.* An intermediate heating and cooling method for a distillation column // J. Chem. Eng. Jap. 1980. Vol.11, N2.
125. *Novikov I.I.* The efficiency of atomic power stations // Atom. Energy. 1957. Vol.3, N11, P.409.
126. *Novikov I.I.* // J. Nucl. Energy. 1958. N7. P.125.
127. *Ondrechen M.J., Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamics in finite time: A chemically driven engine // J. Chem. Phys. 1980. Vol.72, N9. P.5118–5124.
128. *Ondrechen M.J., Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamics in finite time: Processes with temperature-dependent chemical reactions // Ibid. 1980. Vol.73, N11, P.5838–5843.
129. *Ondrechen M.J., Andresen B., Mozurkewich M., Berry R.S.* Maximum work from a finite reservoir by sequential Carnot cycles // Amer. J. Phys. 1981. Vol.49. P.681.

130. *Orlov V.N.* Analytical solutions in optimal control of cyclic heat transfer processes // *Systems Sci.* 1989. Vol.15, N1.
131. *Orlov V.N., Berry R.S.* Power output from an irreversible heat engine with a nonuniform working fluid // *Phys. Rev. A.* 1990. N12. P.7230.
132. *Pathria R.K., Nulton J.D., Salamon P.* Carnot-like processes in finite time. II. Applications to model cycles.
133. *Proops J.L.R.* Organization and dissipation in economic systems // *Social and Biol. Struct.* 1983. Vol.6. P.353–366.
134. *Rubin M.H.* Optimal configuration of a class of irreversible heat engines. I, II // *Phys. Rev. A.* 1970. Vol.19, N3. P.1272.
135. *Salamon P., Hoffman K.H., Schubert S., Berry R.S., Andresen B.* What conditions make minimum entropy production equivalent to maximum power production? // *J. Non-Equilibrium. Thermodyn.* 2001. Vol.26.
136. *Salamon P., Nulton J.D., Siragusa G., Andresen T.R., Limon A.* Principles of control thermodynamics // *Energy.* 2001. Vol.26.
137. *Salamon P., Nitzan A., Andresen B., Berry R.S.* Minimum entropy production and the optimization of heat engines // *Phys. Rev. A.* 1980. Vol.21. P.2115–2129.
138. *Salamon P., Nitzan A.* Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle // *J. Chem. Phys.* 1981. Vol.74, N6. P.3546–3560.
139. *Salamon P., Band Y.B., Kafri O.* Maximum power from a cycling working fluid // *J. Appl. Phys.* 1982. Vol.53, N1.
140. *Salamon P.* Physics versus engineering of finite-time thermodynamic models and optimizations // *Thermodynamic optimization of complex energy systems.* Dordrecht: Kluwer, 1999. P.421–424.
141. *Samuelson P.A.* Maximum principle in analytical economics // *Amer. Econ. Rev.* 1972. Vol.2. P.249–262.
142. *Samuelson P.A.* Extension of the Le Chatelier principle // *Econometrica.* 1960. Vol.28, N2.
143. *Shambadal P.* Les centrales nuclearis. P.: Armand Colin, 1957.
144. *Sieniutycz S., Salamon P.* Finite-time thermodynamics and thermoeconomics.: Taylor and Francis, 1990.

145. *Sieniutycz S., Berry R.S.* Thermal mass and thermal inertia in fluids — a comparison of hypotheses // *Open System and Inform. Dynam.* 1977. Vol.4, N1.
146. *Spirke W., Ries H.* Optimal finite-time endoreversible processes // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol.52, N4. P.3455–3459.
147. *Tatarinow A.W., Tsirlin A.M.* Dynamics of heat transfer ... // *Thermal Eng.* 1993. Vol.2. P.38–41.
148. *Tolman R.C., Fine P.C.* On the irreversible production of entropy // *Rev. Modern Phys.* 1948. Vol.20, N1. P.51–77.
149. *Tsirlin A.M., Kazakov V.* Maximal work problem in finite-time thermodynamics // *Phys. Rev. E.* 2000. N1.
150. *Tsirlin A.M., Amelkin S.A.* Dissipation and conditions of equilibrium for an open microeconomic system // *Open System and Inform. Dynam.* 2001. N8. P.157–168.
151. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and limiting possibilities of macrocontrolled systems: I. Thermodynamics // *Ibid.* 2001. P.315–328.
152. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and limiting possibilities of macrocontrolled systems: II. Microeconomics // *Ibid.* 2001. P.329–347.
153. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A., Berry R.S.* Finite-time thermodynamics: Limiting performance of rectification and minimal entropy production in mass transfer // *J. Phys.Chem.* 1994. Vol.98. P.3330–3336.
154. *Tsirlin A.M., Mironova V.A., Amelkin S.A., Kazakov V.A.* Finite-time thermodynamics: Conditions of minimal dissipation for thermodynamic process with given rate // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol.58, N1.
155. *Tsirlin A.M., Sofiev M.A., Kazakov V.* Finite-time thermodynamics. Active potentiostatting // *J. Phys. D:* 1998. Vol.31. P.2264–2268.
156. *Ville J.* The existence conditions of a total utility function // *Rev. Econ. Stud.* 1951. Vol.19. P.123–128.
157. *Von Neumann J.A.* Model of general economic equilibrium // *Ibid.* 1945. Vol.3. P.1–9.
158. *Yan Z., Chen J.* // *Intern. J. Energy Environ. Econ.* 1992. N2. P.63.

## Предметный указатель

Адиабатические процессы 23

Активная изоляция 163

**Балансы**

— термодинамические 33, 187, 212, 233

— микроэкономические 257, 321

Бинарная ректификация 190, 209, 217

**Вилля аксиома** 253

Деформационное взаимодействие 18, 37, 64

Дискриминация цен 305

Диссипация 14, 53, 251

Диссипация капитала 272, 309

Диссипация в слое 165

Диффузионно-механический цикл 49

Достаточные условия оптимальности 300

Дросселирование 38, 65

**Задача о максимальной работе** 101, 151

Замкнутая система 35

**Идеальная рабочая линия** 223, 232

Идеальные растворы 30

Идеальный газ 26

Изолированная система 36

Изотермический массоперенос 37, 62, 98

Интенсивные переменные 21, 54, 103, 254

Источник конечной емкости 103, 141, 149

**Карно цикл** 157, 180, 250

Классификация по типу оптимальных решений 277

Координата взаимодействия 16, 18

Коэффициенты трансформации тепла 184

Кривая равновесия 211

Кристаллизация 66

**Лагранжа функция** 56, 129, 158, 200, 289

Локального равновесия гипотеза 258

**Максимальная мощность** 116

Максимальная производительность

— ректификации 230

- термических систем разделения 207
- Массообмен 19, 218, 242
- Материальный баланс 34, 188, 203, 245
- Механическое разделение 188, 190
- Микроэкономический цикл 250
- Минимальной диссипации условия 16, 69, 99, 196, 320
  
- Неизотермический массоперенос** 37
- Необратимый процесс 17, 217, 236
  
- Область реализуемости** 50, 79, 159
- Обратимый процесс 13, 17
- Обратимая работа 31, 201, 204
- Оптимальное значение цен 279, 298
- Оптимизация ставок банка 313
- Оптимизация цен 281, 305
- Открытая система 160
- Оценка ресурса 248
  
- Последовательность разделения** 204, 206
- Посредник 266, 288
- Потенциалостатирование 168
- Потенциал взаимодействия 16
- Поток
  - продукции 321
  - сырья 217, 329
- Предельная производительность процессов разделения 237
- Предельный КПД 151, 157
- Прибыльность 265, 267, 274
- Пригожина теорема 69
- Производственная ячейка 326, 327
- Производство энтропии 53, 66, 85, 98
- Пфаффо́ва форма 252
  
- Работа**
  - разделения 214
  - расширения 22
  - проталкивания 23
- Работоспособность 103, 109, 112
- Равновесие микроэкономических систем
  - открытой 248
  - замкнутой 263
- Равновесное состояние 17
- Равновесные термодинамические системы 16

- Регенеративный теплообмен 90  
Резервуар 103
- Смещение 39, 88  
Стационарный теплообмен 46
- Тепловая машина 42, 135, 160  
Теплоемкость 27, 45, 141, 143  
Тепломассоперенос 39  
Тепломеханические системы 101  
Теплообмен 19, 36, 74, 164, 218  
Теплотрансформаторы 179  
Термическое разделение 46, 188  
Термодинамика при конечном времени 14  
Термодинамические балансы 33, 187  
Термодинамический потенциал 21, 23  
Термодиффузионный цикл 49, 233, 236
- Уравнение состояния 27  
Условия  
— добровольности обмена 253, 258  
— минимальной диссипации 54  
— равновесия 25
- Функция благосостояния 253, 260
- Химический потенциал 24, 30, 191, 195, 207, 233  
Химическое взаимодействие 19
- Целесообразность складов 328
- Экономический агент 248, 253, 320  
Эксергия 13, 101  
Экстенсивные переменные 21, 54, 252  
Энергетический баланс 34, 161, 188  
Энтальпия 23  
Энтропийный баланс 34, 188  
Энтропия 14, 19, 20  
Энтропия идеального газа 27  
Энтропия смешения 29  
Энергия  
— внутренняя 23  
— Гельмгольца 22  
— Гиббса 23



## Оглавление

Введение . . . . .	3
<b>1 Математические модели термодинамики и термодинамические балансы . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1. Общая схема исследования . . . . .	12
1.2. Математическое описание термодинамических систем . . . . .	16
1.3. Термодинамические балансы . . . . .	33
1.4. Связь эффективности термодинамических систем с производством энтропии . . . . .	42
1.5. Последовательность решения оптимизационных задач термодинамики . . . . .	51
<b>2 Процессы минимальной диссипации . . . . .</b>	<b>53</b>
2.1. Условия минимальной диссипации . . . . .	54
2.2. Условия минимальной диссипации для конкретных процессов . . . . .	60
2.3. Равновесие в открытых термодинамических системах. Теорема Пригожина . . . . .	69
2.4. Классификация термодинамических систем по типу процессов минимальной диссипации. Условия постоянства производства энтропии . . . . .	72
<b>3 Предельные возможности тепло- и массообменных систем . . . . .</b>	<b>79</b>
3.1. Предельные возможности теплообменных систем . . . . .	80
3.2. Предельные возможности теплообменных систем в зависимости от гидродинамики потоков . . . . .	86
3.3. Регенеративный теплообмен . . . . .	90
3.4. Изотермический массоперенос . . . . .	98
<b>4 Тепломеханические системы . . . . .</b>	<b>101</b>
4.1. Задача о максимальной работе . . . . .	101
4.2. О связи между потоками тепла и работы в системах с распределенными параметрами рабочего тела . . . . .	121
4.3. Предельные возможности тепловых и холодильных машин с сосредоточенными параметрами рабочего тела . . . . .	127
4.4. Тепловая машина в нестационарной системе . . . . .	135
4.5. Предельные возможности тепломеханических систем с двумя источниками конечной емкости . . . . .	150

4.6.	Предельные возможности тепломеханических преобразователей в открытых системах . . . . .	160
4.7.	Задача оптимального потенциалостатирования . . . . .	163
4.8.	Теплотрансформаторы . . . . .	179
<b>5</b>	<b>Оценки предельных возможностей систем разделения</b>	<b>186</b>
5.1.	Термодинамические балансы процессов разделения. Связь затрат энергии с производством энтропии . . . . .	187
5.2.	Извлечение работы в массообменных системах . . . . .	191
5.3.	Необратимая работа разделения . . . . .	195
5.4.	Последовательное разделение многокомпонентных смесей	205
5.5.	Предельная производительность термических систем разделения . . . . .	207
5.6.	Предельные возможности процесса бинарной ректификации . . . . .	209
5.7.	Абсорбционно-десорбционный цикл . . . . .	232
<b>6</b>	<b>Математические модели микроэкономики</b>	<b>248</b>
6.1.	Основные типы ЭА и характеризующие их переменные .	248
6.2.	Микроэкономические балансы и равновесие . . . . .	257
6.3.	Задачи извлечения базисного ресурса, прибыльность, условия минимальной диссипации . . . . .	265
6.4.	Классификация законов ресурсообмена по типу процессов минимальной диссипации . . . . .	275
<b>7</b>	<b>Предельные возможности посредника в необратимой микроэкономике</b>	<b>278</b>
7.1.	Посредник между двумя подсистемами . . . . .	278
7.2.	Обмен с нестационарными рынками . . . . .	288
7.3.	Предельная прибыль посредника с учетом задержки поставок и платежей . . . . .	296
7.4.	Извлечение максимальной прибыли при отсутствии дискриминации цен . . . . .	305
7.5.	Предельная интенсивность извлечения прибыли в открытой стационарной микроэкономической системе . . . . .	309
7.6.	Оптимизация ставок коммерческого банка . . . . .	313
7.7.	Производственная фирма в открытой микроэкономической системе . . . . .	320
	Список литературы . . . . .	333
	Предметный указатель . . . . .	344