

УДК 519.7

ББК 22.18

Ц.70

Ответственный редактор

д.т.н. В.М. Хачумов

Рецензенты:

д.ф.-м.н. Г.С. Осипов

д.т.н. А.Э. Софиев

Цирлин А.М.

Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах / А.М. Цирлин; [отв.ред. В.М. Хачумов]; Ин-т программных систем РАН. — М.: Наука, 2005. — 500 с. — ISBN 5-02-034084-7 (в пер.).

В книге рассмотрены математические модели макросистем в термодинамике и микроэкономике, выделены их общие свойства и различие. Изучены особенности моделей макросистем с сегрегацией. Введена характеристика необратимости процессов в микроэкономике. Сформулированы и решены задачи об эффективном извлечении целевого потока (энергии, капитала) в неравновесных системах, содержащих управляющую подсистему, а также задачи о минимизации затрат внешних ресурсов для поддержания в системе неравновесного состояния. Рассмотрены оптимальные процессы в замкнутых системах и выбор оптимальных параметров управляющей подсистемы в открытых системах. Приведены результаты приложения общей методологии исследования макросистем к процессам разделения, тепловым машинам и тепловым насосам, химическим реакторам, задачам термостатирования, задачам извлечения капитала и др. В приложении кратко изложены математические методы, используемые для решения задач оптимизации и оптимального управления в макросистемах.

По сети «Академкнига»

ISBN 5-02-034084-7

© Институт программных систем РАН, 2006

© Редакционно-издательское оформление.

Издательство «Наука», 2006

© Цирлин А.М., 2006

Предисловие

Существует много разнообразных систем, состоящих из большого числа частиц, поведением каждой из которых нельзя управлять, а за состоянием каждой из частиц нельзя наблюдать, их поведение носит случайный характер. При этом система в целом характеризуется детерминированным поведением. Управление и наблюдение в таких системах возможно лишь на макроуровне, их состояние характеризуют макропеременные, зависящие от усредненного поведения входящих в систему элементов. Такого рода системы называют *Макросистемами*.

Примерами макросистем являются термодинамические системы, состоящие из большого числа молекул; экономические системы, состоящие из микроагентов экономической деятельности: семейные ячейки, продавцы и покупатели на рынках и пр.; системы социального поведения: миграция, потоки пассажиров, обмен квартир, налогообложение. Некоторые макросистемы могут иметь несколько уровней, т.е. состоять из элементов, каждый из которых в свою очередь является макросистемой. Примером таких систем являются системы с сегрегацией, состоящие из большого числа агрегатов, взаимодействующих друг с другом через однородную среду, причем каждый агрегат состоит из большого числа элементарных ячеек.

Наиболее изученным типом макросистем являются термодинамические, поэтому использование макросистемного подхода в экономике, социологии, демографии часто называют термодинамическим подходом.

Каждый из упомянутых типов макросистем имеет свои особенности, однако для всех характерно наличие самопроизвольно протекающих процессов стохастического взаимодействия элементов, приводящих изолированную систему к равновесному состоянию без вмешательства извне. Для возврата системы в исходное неравновесное состояние необходимо вмешательство извне с затратой того или иного ресурса. Так что самопроизвольно протекающие процессы стохастического взаимодействия необратимы. При исследовании оптимальных процессов для макросистем различной природы важную роль играет количественный показатель необратимости. В процессах, самопроизвольно проте-

кающих в изолированной макросистеме, этот показатель не убывает, что накладывает ограничение на множество реализуемых процессов. В открытых системах уравнение баланса для показателя необратимости включает в себя неотрицательное слагаемое, так как потоки этой величины, выходящие из системы, не могут быть меньше, чем входящие в нее. В термодинамике показателем необратимости процессов является энтропия, а скорость ее роста характеризует величина, называемая производством энтропии. Аналогичный показатель может быть введен и для других типов макросистем.

Управление в макросистемах осуществляется посредством изменения условий, общих для всех составляющих их элементов. Как правило, таким управлением является установление и разрыв контакта с другими макросистемами, изменение наложенных на систему ограничений, изменение интенсивностей принудительно вводимых и отбираемых потоков. В целом ряде задач управляющими переменными можно считать и состояния специального вида подсистем, которые могут изменять свое состояние при контакте с другими системами, стремясь добиться экстремума того или иного критерия. Эти подсистемы, являясь посредниками при контакте с другими макросистемами, изменяют потоки стохастического взаимодействия, уменьшают необратимость процессов по сравнению с прямым контактом подсистем и за счет этого извлекают из системы некоторый ресурс (работу, капитал). Примерами таких активных подсистем являются рабочее тело тепловой машины, меняющее свою температуру по выбранному закону, посредническая фирма, выбирающая цены закупок и продаж товаров на рынках с различной их стоимостью. Задачи об оптимальном поведении таких подсистем могут быть формализованы как задачи оптимального управления.

Большой интерес для практики имеет не только исследование равновесных состояний макросистем, но и процессов в них, протекающих ограниченное время и имеющих заданную интенсивность. К ним относятся все технологические процессы, процессы извлечения прибыли в экономике, процессы эволюции макросистем и пр. Исследованием управляемых термодинамических систем с потоками ненулевой интенсивности занимается активно развивающаяся с середины прошлого века *Термодинамика при конечном времени (оптимизационная термодинамика)*. Повидимому, первой в этом направлении была работа И.И. Новикова в 1957 г., посвященная циклу тепловой машины, имеющей максимальную мощность. Задача актуальна для атомных элек-

тростанций, капитальные затраты на строительство которых очень значительны, а затраты на топливо сравнительно малы. Поэтому коэффициент полезного действия не играет решающей роли. Уже в этой работе учтены коэффициенты теплообмена и кинетика теплопереноса при расчете предельных возможностей машины, выяснено, что рост затрат теплоты свыше некоторого предела не только не увеличивает, но снижает получаемую мощность. В дальнейшем подобные исследования были продолжены в разных странах мира. Следует назвать Р. С. Берри, П. Саламона, А. Бежана (США), Б. Андресена (Дания), К-Х. Хоффмана (Германия), С. Синютича (Польша), Л. Чена (Китай). Эти и многие другие авторы получили новые результаты для широкого круга термодинамических систем с управлением, при конечной продолжительности или при заданной интенсивности протекающих в них процессов.

Макросистемный подход к процессам нефизической природы, изучению их равновесия, взаимодействия с окружением с позиций классической термодинамики связан с именами Дж. Фон-Неймана, П.А. Самуэльсона, М. Лихнеровича, Ф.Дж. Вильсона и др. Хотелось бы отметить К. Мартинаш, неустанно подчеркивающую в своих работах важность учета фактора необратимости в экономических системах.

В СССР, а затем в России в области исследования макросистем много сделали А.В. Малишевский, Ю.С. Попков, В.А. Миронова, В.А. Казаков, В.А. Орлов. Особенно велика в развитии оптимизационной термодинамики и макросистемного подхода к экономике роль Л.И. Розоноэра, который со свойственной ему ясностью сформулировал проблему исследования предельных возможностей макросистем как задачу оптимального управления и получил в этом направлении важные результаты. Автору посчастливилось в течение ряда лет работать с Львом Ильичем, который в значительной степени инициировал исследования, составившие содержание этой книги.

В книге рассмотрены макросистемы двух типов (термодинамические и экономические) и решены задачи оптимизации и управления, во многом аналогичные друг другу для этих двух типов систем.

Во вводной первой главе обсуждаются общие особенности математических моделей макросистем, задачи оценки их предельных возможностей и методология их решения.

В последующих главах эти модели, задачи и методы конкретизированы, а решения доведены до аналитических или численных результатов.

В приложении дана краткая сводка математических методов решения экстремальных задач, характерных для исследования оптимальных процессов в макросистемах.

Многие вошедшие в книгу результаты получены сотрудниками, работающими вместе с автором в Институте программных систем РАН и в Московском государственном университете инженерной экологии: В.А. Мироновой, В.А. Казаковым, С.А. Амелиным, Д.А. Зубовым, Н.А. Алимовой, А.В. Руденко, Ю.Н. Софиевой, Д.А. Андреевым, А.В. Татариновым и другими. Всем им автор выражает глубокую благодарность за сотрудничество.

Особо признателен автор М.А. Журавлевой, взявшей на себя труд подготовки рукописи к изданию.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАКРОСИСТЕМАХ

1.1. Особенности математических моделей и задач оптимального управления для макросистем

В главе охарактеризованы общие особенности математического описания макросистем, дана их классификация, перечислены основные постановки оптимизационных задач и изложена методология их решения.

Общие особенности макросистем

Тот факт, что макросистемы состоят из большого числа индивидуально не управляемых и не наблюдаемых элементов, определяет общие особенности их математических моделей. Перечислим эти особенности:

1. Все, характеризующие систему переменные, можно разбить на две категории: *интенсивные* и *экстенсивные*. Первые из них (температура, давление, концентрации в термодинамике, цены в экономике) не изменяются при объединении систем, если в каждой из них до объединения значения этих переменных были одинаковы, а вторые (объем, энергия, число частиц того или иного сорта в термодинамике, запасы денег и ресурсов в экономике) при таком объединении складываются. Очевидно, что отношение двух экстенсивных переменных является переменной интенсивной.

2. При контакте двух систем, различающихся значениями интенсивных переменных, происходят самопроизвольные процессы взаимодействия, в результате которых значения интенсивных переменных вы-

равниваются. Эти процессы никак не влияют на состояние окружающей среды и могут протекать в условиях изоляции контактирующих систем. Обратный процесс разделения однородной системы на подсистемы с разными значениями интенсивных переменных невозможен без изменений, вносимых в окружающую среду. Такие процессы называют *необратимыми*. Необратимы процессы теплообмена и диффузии, даже если они происходят сколь угодно медленно, необратим процесс прямого (бартерного) обмена ресурсами в микроэкономике. Необратимость составляет важнейшую особенность процессов, протекающих в макросистемах. Экстенсивные переменные в процессах обмена удовлетворяют законам сохранения (материи, энергии, капитала ...). Однако законы сохранения не определяют направления потоков обмена. Оно при самопроизвольных потоках обмена определяется фактором необратимости, который возрастает и в равновесии достигает своего максимума.

3. Переменные, характеризующие макросистему, не являются независимыми, в равновесной системе их связывает уравнение состояния. Так, уравнение состояния идеального газа связывает его давление, объем, температуру и число молей. Если уравнение состояния связывает друг с другом экстенсивные переменные и одну из них удастся выразить из него как функцию других, то получившаяся зависимость оказывается однородной функцией первой степени, так как при изменении всех ее аргументов в k раз значение функции также изменится в k раз. Частные производные этой функции по любой из экстенсивных переменных не будут зависеть от изменений масштаба системы, так что они оказываются интенсивными. Если уравнение состояния связывает интенсивную переменную со значениями экстенсивных, то эта зависимость является однородной функцией нулевой степени, т.е. при изменении всех переменных в одно и то же число раз значение функции не изменяется. Размерности векторов независимых друг от друга экстенсивных и интенсивных переменных одинаковы.

4. Потоки обмена, возникающие при контакте систем, удовлетворяют законам сохранения по экстенсивным переменным. С изменением экстенсивных переменных в системах с конечной емкостью изменяются связанные с ними интенсивные (в процессе диффузии меняется концентрация, в процессе обмена теплотой изменяется температура и пр.). Исключения составляют системы двух типов:

— системы с очень большим запасом того или иного ресурса (энергии, товаров, капитала, ...), так что изменение этого ресурса никак не

влияет на величину интенсивной переменной, такие системы с бесконечной емкостью называют *резервуарами*. Примером резервуара может быть атмосфера земли, океан, рынок с постоянными ценами и др.;

— системы, у которых интенсивные переменные могут быть изменены независимо от экстенсивных, далее мы их называем *активными подсистемами*. К ним относятся, например, рабочее тело тепловой машины, посреднические или производственные фирмы, устанавливающие цены на ресурсы независимо от запасов этих ресурсов. Именно интенсивные переменные активных подсистем являются управляющими воздействиями в задачах оптимизации макросистем.

5. Потоки обмена зависят от различия интенсивных переменных контактирующих подсистем и определяют скорость изменения значений экстенсивных переменных. Потоки равны нулю, если векторы интенсивных переменных подсистем совпадают.

Прежде чем обсуждать задачи и методы исследования макросистем приведем примеры, иллюстрирующие близость макросистем реальной природы и роль активных подсистем.

Примеры процессов в макросистемах

А. Термодинамика.

1. *Процесс прямого теплообмена.* При контакте друг с другом двух тел, изолированных от внешней среды и имеющих различные теплоемкости и начальные температуры T_1 и T_2 , через достаточно большое время их температуры выравниваются до некоторой средней температуры. Чтобы вернуть систему к прежнему состоянию, нужно охладить одно из тел и нагреть второе. Для этого можно использовать механическую или электрическую энергию, приведя в действие в первом случае холодильную установку, а во втором — тепловой насос. При этом должна быть затрачена некоторая работа A , а значит изменится состояние окружающей среды. Таким образом, процесс непосредственного теплового контакта необратим. Чем меньше время τ , отпущенное на то, чтобы вернуть систему в исходное неравновесное состояние, тем больше работы потребуется затратить. С ростом τ работа $A(\tau)$ монотонно уменьшается и стремится к некоторому пределу A^0 , зависящему от теплоемкостей и начальных температур. В отличие от A^0 величина $A(\tau)$ определяется законами охлаждения и нагрева, она имеет нижнюю границу, определение которой — результат решения задачи оптимального управления.

2. *Тепловой контакт двух тел через идеальную тепловую маши-*

ну. Пусть в той же системе имеется активная подсистема — идеальная тепловая машина. В такой машине нет потерь на трение, она получает теплоту от горячего тела при температуре рабочего тела в цилиндре, сколь угодно близкой к температуре нагревателя, и отдает теплоту при температуре рабочего тела, сколь угодно близкой к температуре холодильника (холодного тела). Это возможно, если продолжительность контакта или коэффициент теплопередачи стремятся к бесконечности. Машина будет извлекать работу до тех пор, пока температуры тел не выровняются. При этом температура системы также лежит между T_1 и T_2 , но окажется ниже, чем при непосредственном контакте, а работы, полученной при использовании идеальных теплового насоса и холодильной машины, как раз хватит для того, чтобы вернуть систему в исходное состояние, если на этот процесс отпущено неограниченное время. Так что при неограниченной продолжительности процесс контакта через посредника — идеальную тепловую машину оказывается обратимым.

Отметим, что если продолжительность процесса возврата в исходное неравновесное состояние ограничена, то он будет необратимым и в системе с тепловой машиной, хотя и понадобится подводить извне меньше энергии, чем при той же продолжительности возврата в исходное состояние после непосредственного контакта.

Б. Микроэкономика.

3. *Непосредственный контакт двух экономических агентов.* Экономический агент (ЭА) — совокупность собственников, потребителей или производителей того или иного ресурса, характеризуется оценкой ресурса p (минимальной ценой, по которой он готов продавать ресурс). Если цена ниже, чем оценка, то ЭА готов ресурс покупать. Оценка зависит от запаса ресурса N и уменьшается с ростом запаса. При прямом контакте двух ЭА, тот, у которого оценка ресурса выше, покупает ресурс у ЭА с более низкой оценкой до тех пор, пока в результате перераспределения ресурса оценки не выровняются. Система придет в равновесие.

Чтобы вернуть систему в первоначальное состояние, нужно закупить ресурс у того ЭА, у которого оценка снизилась в результате обмена, и продать тому, у которого она повысилась. При этом закупать ресурс придется по цене выше равновесной оценки, а продавать — по цене ниже равновесной, что потребует затрат капитала в количестве E . Так что состояние окружения изменится, значит процесс непосред-

ственного контакта двух ЭА необратим. Чем меньше времени τ отпущено на возврат системы к начальному состоянию, тем больше денег потребуется на приведение системы в исходное состояние. Предел $E(\tau)$ при τ , стремящемся к бесконечности, обозначим через E^0 .

4. *Контакт ЭА через посредника (активную экономическую подсистему)*. Пусть в той же системе имеется посредник, закупающий ресурс у ЭА с низкой оценкой и продающий его ЭА, у которого оценка выше. Если продолжительность процесса не ограничена и посредник стремится из перепродажи ресурса извлечь максимально-возможный капитал, то он будет торговать по ценам, сколь угодно близким к оценкам. При этом он извлекает капитал в количестве E^0 , вложив который, может вернуть систему в исходное состояние. Таким образом, процесс контакта ЭА через посредника обратим. Общая для двух ЭА оценка ресурса, к которой придет система с посредником, будет выше, чем в системе без посредника.

Если продолжительность процесса извлечения капитала или возврата системы в исходное состояние ограничена, то посреднику придется повысить цену закупок и снизить цену продаж. Для возврата системы в исходное состояние не хватит извлеченного капитала, и процесс окажется необратимым.

Эти примеры рассмотрены очень бегло, чтобы продемонстрировать близость оптимизационных задач (извлечению работы соответствует извлечение капитала, температурам — оценки ресурсов, тепловой машине — посредническая фирма, извлечение работы или капитала возможно лишь в исходно неравновесной системе, а затраты извне для возврата системы в исходное состояние связаны с необратимостью и растут с уменьшением продолжительности процессов). Отметим и различие. В термодинамике макросистемы обмениваются только энергией, в экономике два встречных потока обмена: поток ресурса и поток капитала (при продаже). Вместо капитала может быть использован другой вид ресурса (при бартере), но встречный поток обязателен.

Учет необратимости экономических процессов не менее важен, чем термодинамических, тем более, что аналогия между обратимой термодинамикой и обратимой экономикой прослеживается давно и оказывается достаточно полной [41], [46], [117], [118], [146]. Подобная аналогия для необратимой микроэкономики последовательно не проведена, несмотря на значительное число работ, появившихся в последние годы [122], [124], [160] и др.

Виды макросистем

Макросистема находится в равновесии, если значения интенсивных переменных для любой выделенной из нее подсистемы одинаковы, так что в такой системе на макроуровне потоки обмена отсутствуют. Часто принимают гипотезу о том, что неравновесную систему можно разбить на несколько равновесных подсистем. В этом случае потоки возникают между подсистемами, но не внутри каждой из них, которые *внутренне равновесны*. Такое допущение (принцип локального равновесия) позволяет использовать для каждой из подсистем математические модели, справедливые только в условиях равновесия. Если равновесие в макросистеме устойчиво, то справедлив принцип Ле Шателье-Самуэльсона: *Изменение того или иного внешнего фактора вызывает в системе процессы, компенсирующие влияние этого изменения*.

Макросистема может быть открытой, изолированной и замкнутой. *Открытая система* обменивается с окружающей средой всеми потоками, возникающими из-за различий векторов интенсивных переменных системы и окружения. *В изолированной системе* обмен с окружением отсутствует; наконец, в *замкнутой или закрытой системе* обмен с окружением возможен лишь по части экстенсивных переменных [44].

Потоки обмена, возникающие в изолированной неоднородной макросистеме, имеют такое направление, что в результате показатель необратимости возрастает и с достижением равновесия достигает максимального значения. Активная подсистема может извлечь в изолированной системе некоторый целевой вид ресурса (работу, капитал и пр.), только если в исходном состоянии макросистема неравновесна. В равновесной изолированной системе такой возможности нет.

В открытой системе, окружающей средой для которой являются не менее двух резервуаров с различными значениями интенсивных переменных, возникают потоки обмена между подсистемами в установившемся режиме. Установившийся режим может соответствовать стационарному состоянию подсистем и постоянству потоков, а также периодическому или квазипериодическому их изменению. В любом случае образуется неоднородная структура и распределение интенсивных переменных между подсистемами. Активная подсистема в этих условиях, устанавливая контакт с различными подсистемами, может извлекать целевой ресурс в установившемся режиме или поддерживать заданное распределение интенсивных переменных. Примерами таких активных подсистем являются турбины, системы отопления, финансовые посред-

ники, производственные фирмы и пр. Если в замкнутой равновесной макросистеме, изъятие любой ее части никак не сказывается на интенсивных переменных оставшейся системы, то распределение значений интенсивных переменных открытой системы в стационарном состоянии изменяется при любых изменениях той или иной из ее частей.

Макросистемы могут иметь иерархическую структуру, т.е. состоять не из двух (макро и микро) уровней, а из большего их числа. Примером макросистем, состоящих из трех уровней, являются *сегрегированные системы* [76]. Элементы таких систем на микроуровне объединены в элементарные макросистемы — агрегаты или ячейки. Если таких агрегатов много и они взаимодействуют друг с другом непосредственно, то их совокупность образует двухуровневую макросистему. Но если агрегаты взаимодействуют друг с другом только через промежуточную макросистему — среду, то они образуют сегрегированную систему. Примером такой сегрегированной системы может служить процесс обжига в кипящем слое. Агрегаты, в каждом из которых могут происходить химические превращения, взаимодействуют друг с другом через среду. Параметры среды усредненно зависят от процессов, протекающих в агрегатах. Сами агрегаты отличаются друг от друга, они могут иметь разные размеры, состав, случайным является время их пребывания в системе (возраст).

Другим примером двухуровневых макросистем являются эволюционирующие системы. Каждый их элемент характеризуется запасом двух типов ресурсов. Причем по одному из них подсистемы изолированы друг от друга, его количество определяется внутренними процессами эволюции в подсистеме и его изменения происходят достаточно медленно. По второму виду ресурсов подсистемы могут обмениваться друг с другом, причем этот обмен происходит быстро, так что в каждый момент времени запасы этого вида ресурсов удовлетворяют условиям равновесия. Задачи эволюции макросистем рассмотрены в работах Ю.С. Попкова [41].

1.2. Задачи оптимизации в макросистемах

История термодинамики началась с решения *экстремальной задачи о предельных возможностях макросистем*. Сади Карно в своем мемуаре «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных

развивать эту силу» рассмотрел модель термодинамической системы, состоящей согласно принятой выше терминологии из двух резервуаров с различными температурами T_+ и T_- и активной подсистемы (рабочего тела тепловой машины), контактирующей с резервуарами и обменивающейся с ними тепловой энергией. Задача состояла в том, чтобы выяснить, каков максимальный коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины — отношение количества механической работы, извлекаемой из системы, к количеству теплоты, отбираемой от резервуара с высокой температурой. Карно в 1824 г. нашел правильное решение этой задачи, показав, что КПД, большего чем

$$\eta_k = 1 - T_-/T_+ \quad (1.1)$$

получить невозможно.

Замечательно, что этот результат он получил, не зная закона сохранения энергии, придерживаясь теории теплорода, не сформулировав математической постановки задачи. Последнее обстоятельство возможно облегчило решение, так как задача Карно, строго говоря, решения не имеет. Соответствующий (1.1) КПД — не максимум, а точная верхняя грань (супремум) и, если считать продолжительность цикла τ одним из искомых параметров, его значение может быть найдено как предел отношения полученной за время цикла работы к затраченной за то же время теплоте при стремлении τ к бесконечности. В течение девяти лет результаты Карно не были должным образом оценены современниками, и лишь через год после смерти автора Б. Клапейрон понял их важность.

Целый ряд новых задач возникает, если зафиксировать продолжительность цикла и при этом условии найти максимальный КПД тепловой машины. В этом случае необходимо учесть интенсивности потоков обмена с резервуарами, потери, связанные с теплопереносом. Аналогичные задачи возникают, если задать мощность тепловой машины (у машины Карно мощность оказывается сколь угодно близкой к нулю). При этом оказывается, что не любое значение мощности может быть достигнуто — существует некоторый предел, зависящий от температур резервуаров и коэффициентов теплопередачи между ними и рабочим телом. Исследование предельных возможностей термодинамических систем при заданной интенсивности протекающих в них процессов или при фиксированной их продолжительности составляет предмет *термодинамики при конечном времени*, активно развивающейся в последние годы на стыке термодинамики и теории оптимального управления.

В результате осмысления задач, возникших при обобщении задачи Карно, и их распространения на макросистемы различной природы определились перечисленные ниже типовые задачи:

1. *Задача об извлечении максимальной работы.* Дано начальное состояние неравновесной термодинамической системы. Требуется найти максимальную работу, которую может извлечь из этой системы активная подсистема за заданное время τ при заданных зависимостях между потоками обмена и интенсивными переменными контактирующих подсистем (кинетике взаимодействия), а также найти такое значение τ , для которого максимальна средняя мощность, развиваемая активной подсистемой. Найденную в результате решения максимальную работу называют *работоспособностью* системы. Подсистемы в неравновесной системе могут иметь различные температуры, концентрации составляющих их веществ, электрические потенциалы и пр. Так что активная подсистема — не обязательно тепловая машина.

Задача оценки работоспособности системы является обобщением задачи расчета *эксергии* — максимальной работы, которую можно извлечь в неравновесной системе с заданными значениями интенсивных переменных при переходе в состояние термодинамического равновесия с окружающей средой. В задаче расчета эксергии продолжительность не фиксируют, поэтому ее решение соответствует пределу решения сформулированной выше задачи об оценке работоспособности в том частном случае, когда в системе есть резервуар (окружающая среда) и τ стремится к бесконечности. Естественно, эксергия системы не зависит от кинетических характеристик.

2. *Задача о затрате минимальной работы.* Даны начальное и конечное состояния термодинамической системы, состоящей из нескольких подсистем, и кинетика взаимодействия между ними. Какую минимальную работу нужно затратить активной подсистеме для того, чтобы за заданное время τ перевести систему из начального в конечное состояние? В том случае, когда начальное состояние соответствует равновесной системе, данная задача представляет собой задачу о предельных возможностях систем разделения (разделения смеси, разделения термически однородного потока на два потока с разными температурами и пр.).

3. *Задача о предельных возможностях активной подсистемы в открытой макросистеме.* Найти, какую максимальную мощность может извлечь активная подсистема в открытой неоднородной термодинами-

ческой системе при заданной кинетике взаимодействия. Обратная ей задача состоит в том, чтобы найти минимальные затраты энергии активной подсистемой для того, чтобы поддерживать заданное неравновесное состояние открытой термодинамической макросистемы.

Аналогом этих задач в экономике является задача о максимальной интенсивности прибыли, которую может получать посредник в открытой экономической системе.

4. *Задача об извлечении капитала.* Найти максимальный объем капитала, который активная подсистема (посредник) может извлечь из неравновесной экономической системы за заданное время при заданной кинетике обмена. Эта задача представляет собой аналог задачи о максимальной работе.

5. *Задача о распределении интенсивных и экстенсивных переменных между подсистемами в открытой макросистеме в стационарном режиме.* Найти, какие значения интенсивных переменных системы могут быть реализованы при наличии в системе активной подсистемы. Какие системы позволяют извлечь целевой ресурс, а в при каких условиях система требует его затрат.

Перечисленные постановки не исчерпывают всей проблематики, но являются типовыми в оптимизационной теории макросистем.

1.3. Общая схема решения оптимизационных задач, процессы минимальной диссипации

Уравнения балансов по экстенсивным переменным (энергии, веществу, капиталу) налагают некоторые условия на потоки, поступающие в систему и выходящие из нее, и на потоки обмена между подсистемами или на количества ресурсов и капитала, переходящих из одной системы в другую. К этим балансовым соотношениям нужно добавить уравнение для фактора, характеризующего необратимость процессов внутри системы. В термодинамике таким фактором является энтропия. В экономических макросистемах ее аналог — суммарный капитал, связанный с имеющимися в системе запасами ресурсов *связанный капитал*. Фактор необратимости в изолированной неравновесной системе не убывает, поэтому в уравнение для него входит неотрицательное слагаемое σ . Величина σ характеризует интенсивность прироста фактора необратимости за счет процессов, протекающих в системе. В термоди-

намике ее называют *производством энтропии*. Далее будет показано, что рост фактора необратимости связан с потерей возможности извлечения из системы целевого ресурса (работы, капитала и пр.) Известно, что энергия не исчезает, но она рассеивается (диссипирует) и становится невозможным превращение ее в механическую или электрическую. Величина σ монотонно связана с диссипацией энергии, поэтому ее часто называют *диссипацией*. Эта терминология перенесена и на экономические системы. Так как σ больше или равна нулю, то совокупность балансовых уравнений вместе с условием $\sigma > 0$ выделяет область, внутри которой процессы реализуемы, и границу этой области, для которой $\sigma = 0$. Обратимым процессам соответствует либо сколь угодно малая интенсивность потоков обмена (сколь угодно большая продолжительность τ), либо при заданной величине потока сколь угодно большие значения *кинетических* коэффициентов (тепло- и массопереноса, коэффициентов, определяющих скорость химических реакций, и пр).

Ограничения, наложенные на продолжительность процесса τ , на его интенсивность и на кинетические коэффициенты, позволяют найти оценку снизу $\sigma_{\min} > 0$ для величины σ . В этом случае область реализуемых процессов сжимается, на ее границе $\sigma = \sigma_{\min}$, а внутри $\sigma > \sigma_{\min}$. Процессы, для которых при заданных ограничениях диссипация минимальна, называют *процессами минимальной диссипации*. Вид таких процессов зависит от кинетики обмена, структуры макросистемы, наложенных на нее ограничений. Соответствующие этим процессам точки в пространстве, определяющем область реализуемости макросистемы, лежат на границе области. Именно на этой границе находятся и решения поставленных выше задач.

Область реализуемости для случая, когда не исключены обратимые процессы (кинетические коэффициенты сколь угодно велики), как правило, не ограничена. Например, без учета необратимости мощность n тепловой машины связана с потоком q_+ затрачиваемой теплоты так, что точка на плоскости n, q_+ лежит по одну сторону от прямой, наклон которой равен КПД Карно. Если же кинетические коэффициенты конечны, то область реализуемости ограничена.

Таким образом, общая схема решения сформулированных выше экстремальных задач для макросистем с управлением такова:

1. Записывают уравнения балансов (по энергии, веществу для термодинамических, по денежным и материальным ресурсам для экономических систем) и добавляют к этим соотношениям баланс по фактору

необратимости.

2. Для ограничений, наложенных на решение задачи (продолжительность процесса, средние интенсивности тех или иных потоков и пр.), определяют зависимость σ_{\min} от кинетических коэффициентов и интенсивностей потоков. Строят область реализуемых значений интенсивностей потоков, продолжительности процессов и др., для которой $\sigma > \sigma_{\min}$.

3. Находят точку границы области реализуемости, соответствующую конкретным условиям задачи.

В этой схеме центральным является п. 2, требующий решения экстремальной задачи нахождения процесса минимальной диссипации. К счастью, специфика кинетики обменов и структуры подобной задачи во многих случаях упрощает ее решение. Условия минимальной диссипации, полученные в разд. 4.1 в общей форме, относятся не только к термодинамическим, но и в значительной степени к экономическим макросистемам, так как скорость изменения фактора необратимости в любых макросистемах неотрицательна и равна скалярному произведению вектора потоков обмена на вектор движущих сил. Оба эти вектора зависят от интенсивных переменных контактирующих подсистем и обращаются в нуль при равенстве этих переменных.

Условия минимальной диссипации могут быть найдены заранее для типовых процессов (теплообмена, диффузии, растворения, химических превращений, закупки и продажи ресурсов). Эти найденные при тех или иных граничных условиях процессы минимальной диссипации играют при оптимизации макросистем в классе необратимых процессов ту же роль, которую обратимые процессы играют в теории равновесных макросистем. А именно, для приведенных выше задач оптимальный процесс состоит из нескольких стадий, на каждой из которых реализуется процесс минимальной диссипации.

Так, для тепловой машины заданной мощности цикл, соответствующий максимуму КПД, в зависимости от кинетики теплообмена может состоять не более чем из трех стадий, на каждой из которых реализуется процесс теплообмена минимальной диссипации между источниками и рабочим телом. Близость моделей и проблематики для макросистем различного типа делает заманчивым распространение на них методологии как классической термодинамики так и термодинамики при конечном времени.

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В главе приведены математические модели термодинамических систем, и процессов их взаимодействия друг с другом, уравнения термодинамических балансов. Даны выражения для производства энтропии в типовых процессах.

2.1. Математическое описание термодинамических систем

Переменные и связи между ними, характеризующие термодинамическую систему на макроуровне, имеют смысл лишь для равновесной системы. Однако неравновесную систему, в которой интенсивные переменные для различных подсистем отличны друг от друга, можно разбить на такие подсистемы, в каждой из которых в любой момент времени отклонения интенсивных переменных от их средних по объему значений пренебрежимо малы, а значит, отсутствуют связанные с этими отклонениями потоки внутри подсистем. При таком подходе предполагают, что изменение интенсивных переменных происходит только на границах подсистем. Это допущение позволяет использовать при описании подсистем уравнения состояния, справедливые в условиях равновесия, для описания переходных процессов в системе оказывается возможным применить обыкновенные дифференциальные уравнения,

а для решения экстремальных задач — методы оптимального управления объектами с сосредоточенными параметрами.

Равновесные термодинамические системы. Основные переменные и уравнения состояния. Термодинамическую равновесную систему выделяют контрольной поверхностью и для ее описания используют физические величины, характеризующие макроскопическое состояние системы в целом и составляющих ее подсистем. Подсистемы могут взаимодействовать, т.е. обмениваться теплотой или веществом. Взаимодействия могут быть различного рода — теплообмен (обмен тепловой энергией), массообмен (обмен веществом), механическое взаимодействие (совершение работы), деформационное (изменение объема подсистемы) и т.д. Каждому типу взаимодействия соответствуют две величины: координата и потенциал.

Координата и потенциал взаимодействия. Координатой называют величину, изменение которой свидетельствует о наличии взаимодействия данного рода. Если эта величина не изменяется, то взаимодействия данного рода нет. Например, координатой деформационного взаимодействия является объем; если объем не изменяется, то деформационное взаимодействие отсутствует. Координатой массообменного взаимодействия является количество того или иного компонента в системе. Если количество ни одного из компонентов не изменяется, то массообмен отсутствует.

Потенциалом взаимодействия называют величину, различие в значениях которой для двух контактирующих подсистем является причиной взаимодействия между ними. Для деформационного взаимодействия потенциалом является давление, для теплообмена — температура. Различие температур тел вызывает обмен теплотой. Отличие значений потенциалов вызывает взаимодействие, а изменение координаты — его следствие. Координаты и потенциалы будем обозначать z_i и Y_i , где i — индекс, отражающий вид взаимодействия. Координата взаимодействия — экстенсивная, а потенциал взаимодействия — интенсивная величина.

Равновесное и неравновесное состояния. Говорят, что подсистема находится в равновесном состоянии, если величины потенциалов каждого рода по ее объему одинаковы (давление, температура, концентрации всех компонентов одинаковы во всех точках объема). Равновесное состояние подсистемы полностью характеризуется заданием значений потенциалов всех взаимодействий в одной точке объема. При этом нужно задавать потенциалы не всех мыслимых взаимодействий, а только тех,

которые в рассматриваемых условиях существенно влияют на процесс. Например, все тела находятся в поле действия гравитации, в электрическом и магнитном полях. Однако, если их влияние на интересующий нас процесс мало, то наличие гравитационного, электрического, магнитного взаимодействий можно не учитывать.

Если значения потенциалов, например, температуры, по объему подсистемы отличаются, то в ней идет некоторый процесс. В этом случае говорят, что состояние системы неравновесно.

Если термодинамическая система выведена из состояния равновесия, например, в нее введено некоторое количество вещества или энергии, то начнется переходной процесс, в ходе которого значения потенциалов (температуры, давления) будут выравниваться. Такой процесс называют релаксацией. Он протекает с определенной скоростью и требует времени, называемого временем релаксации.

Обратимый и необратимый процессы. Если внешние условия для системы изменяются медленно, так что скорость их изменения существенно меньше скорости релаксации, то в каждый момент времени состояние системы будет пренебрежимо мало отличаться от равновесного. Такой процесс называется квазиравновесным или просто равновесным [16].

Равновесные процессы могут быть как обратимыми, так и необратимыми. Если в результате равновесного процесса из системы извлекают механическую или электрическую энергию и, затратив ее, можно вернуть систему в прежнее состояние, то процесс обратим. Извлечь энергию может только активная подсистема — посредник. Поэтому для проведения обратимого процесса он должен быть равновесным, а взаимодействие подсистем должно осуществляться через активную подсистему.

Процессы прямого тепло- и массообмена, в результате которых энергию из системы не извлекают, а потенциалы подсистем сближаются, необратимы даже при их сколь угодно медленном их протекании. Например, необратимы процессы смешения жидкостей или газов с разными начальными концентрациями, а также процесс непосредственного обмена теплотой тел с разными начальными температурами. Для разделения таких подсистем нужно приложить дополнительную работу, которая не получена в прямом процессе.

Реальные процессы протекают при конечной разности потенциалов с конечной скоростью. Такие процессы называют неравновесными. Все

неравновесные процессы необратимы.

Процессы теплообмена, массообмена, химического взаимодействия. Для взаимодействий всех видов в термодинамических системах существует количественная мера dQ , равная произведению потенциала на изменение координаты:

$$dQ_i = Y_i dz_i,$$

и имеющая размерность энергии. Конкретизируем это выражение для основных видов взаимодействий.

Деформационное взаимодействие. Рассмотрим деформационное взаимодействие, проявляющееся в изменении объема. Координатой этого взаимодействия является объем V , а потенциалом — давление p . Количество деформационного взаимодействия определяется величиной pdV , которая оценивает совершенную работу.

Принято считать работу pdV положительной, если она совершается подсистемой. В то же время в термодинамике для всех видов взаимодействий принято считать количественную меру взаимодействия dQ положительной, если в результате взаимодействия энергия подсистемы увеличивается. Чтобы не возникало противоречия, потенциалом деформационного взаимодействия нужно считать не давление, а величину, отличающуюся от давления знаком, так что $dQ = -pdV$.

Теплообмен. Процесс теплообмена возникает, если отличаются температуры взаимодействующих тел, поэтому потенциалом этого взаимодействия является температура T . Так как обмен теплотой представляет собой одну из форм обмена энергией, то для него должна существовать своя координата. Ее обозначили S и назвали энтропией (от греческого $\tau\rho\pi\eta$ — преобразование). Энтропия — параметр преобразования; введена в 1865 г. Рудольфом Клаузиусом. Количественная мера теплового взаимодействия

$$dQ = TdS, \tag{2.1}$$

откуда изменение энтропии определяется величиной

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{2.2}$$

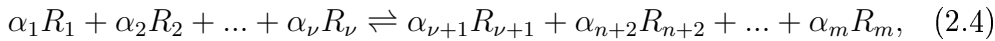
Это — известное соотношение Р. Клаузиуса.

Массообмен. При массообмене изменяется масса m , она является координатой массообменного взаимодействия и выражается количеством

молей N того или иного вещества. Потенциалом является энергия, заключенная в одном моле (молярная энергия). Он введен в 1874 г. Д. Гиббсом и обозначается μ . Количественная мера массообменного взаимодействия —

$$dQ = \mu dm. \quad (2.3)$$

Химическое взаимодействие. Пусть происходит химическая реакция



где R_i — реагенты; α_i — стехиометрические коэффициенты.

Коэффициенты α_i отрицательны для исходных веществ ($\alpha_i < 0$, $i = 1, \dots, \nu$) и положительны для продуктов реакции ($\alpha_i > 0$, $i = \nu + 1, \dots, m$). В результате реакции изменяется количество молей каждого из реагентов, причем для всех реагентов

$$dm_i = \alpha_i d\xi, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

где ξ — степень полноты реакции (степень превращения). Она и является координатой химического взаимодействия.

Реакция протекает слева направо, если некоторая величина A , называемая химическим средством реакции, положительна, $A > 0$. Реакция протекает справа налево, если $A < 0$, и скорость реакции равна нулю, если $A = 0$. Химическое средство реакции представляет собой взвешенную с учетом стехиометрических коэффициентов сумму химических потенциалов реагентов (исходных веществ и продуктов реакции)

$$A = - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i. \quad (2.6)$$

Она введена де Донде [44] и его можно считать потенциалом химического взаимодействия. Тогда $dQ = Ad\xi$ определяет количественную меру химического взаимодействия.

Координаты состояния. В каждый момент времени состояние равновесной термодинамической системы может быть охарактеризовано набором различных макроскопических величин, таких, как внутренняя энергия E , объем V , энтропия S , вектор состава N с составляющими N_i — количество молей в системе i -го вещества, $i = 1, \dots, m$, температура T , давление p , химические потенциалы μ_i , $i = 1, \dots, m$, и т.д. Ниже мы будем рассматривать системы электрически нейтральные, поэтому такую их характеристику, как электрический заряд, не вводим.

Остановимся несколько подробнее на одной из перечисленных величин — энтропии. Как и внутреннюю энергию, энтропию непосредственно нельзя измерить. Изменение внутренней энергии определяют через изменение температуры и давления, которые можно измерить. Аналогично и изменение энтропии системы может быть вычислено по непосредственно измеряемым переменным. Первоначально энтропия была введена Клаузиусом как мера полноты преобразования теплоты в работу. Позднее был выявлен статистический смысл энтропии применительно к термодинамическим, информационным и другим системам. В этих системах, состоящих из множества элементарных подсистем (молекул, агрегатов), одному и тому же макросостоянию системы (давлению, температуре, объему и пр.) могут соответствовать различные микросостояния (состояния элементарных подсистем). Число таких микросостояний Ω и характеризует энтропия (она пропорциональна логарифму Ω). Таким образом, энтропия при данном макросостоянии характеризует неопределенность состояния системы на микроуровне. Если две независимые системы, имеющие число возможных состояний Ω_1 и Ω_2 , объединяются в одну, то для объединенной системы $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$, так как для каждого микросостояния первой возможно Ω_2 микросостояний второй подсистемы. Энтропия объединенной системы S как логарифм Ω равна сумме S_1 и S_2).

Если к системе при температуре T подводится порция энергии dQ , то энтропия системы возрастает (см. соотношение (2.2)).

Перечисленные величины не являются независимыми. Они связаны друг с другом уравнениями состояния. Обычно в качестве независимых переменных выбирают E , V , N или S , V , N , а остальные переменные выражают, используя уравнение состояния. Так, если в качестве независимых переменных приняты E , V и N , то энтропию выражают как функцию этих переменных:

$$S = S(E, V, N). \quad (2.7)$$

Интенсивные же переменные — температура T , давление p , вектор химических потенциалов μ , могут быть выражены через экстенсивные переменные и функцию (2.7) с помощью соотношений

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)^{-1}, \quad p = T \frac{\partial S}{\partial V}, \quad \mu_i = -T \frac{\partial S}{\partial N_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.8)$$

Если же в качестве независимых переменных принять S, V, N , то внутренняя энергия

$$E = E(S, V, N). \quad (2.9)$$

Связь между приращениями энтропии и внутренней энергии может быть записана в энтропийной и энергетической формах

$$dS = \frac{1}{T} (dE + pdV - \sum \mu_i dN_i), \quad (2.10)$$

$$dE = TdS - pdV + \sum \mu_i dN_i. \quad (2.11)$$

Интенсивные переменные могут быть выражены через экстенсивные переменные и функцию (2.9) с помощью соотношений

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial E}{\partial V}, \quad \mu_i = \frac{\partial E}{\partial N_i}, \quad (2.12)$$

(аналогично соотношениям (2.8) для производных энтропии).

Так как при одновременном изменении всех аргументов в (2.7), (2.9) в k раз значения S или E изменятся во столько же раз, то эти функции однородные первой степени. Интенсивные же переменные, найденные в силу равенств (2.12), также зависят от экстенсивных, но при изменении последних не изменяются, так что $T(S, V, N)$, $p(S, V, N)$, $\mu(S, V, N)$ являются однородными функциями нулевой степени.

Так как E зависит от экстенсивных переменных, то dE — полный дифференциал. Будем рассматривать E как функцию не только вектора экстенсивных переменных $x = (S, V, N)$, но и интенсивных $P = (T, p, \mu)$. Тогда в силу однородности этой функции ее можно записать по формуле Эйлера как

$$E = (P, x) = TS - pV + \sum \mu_i N_i, \quad (2.13)$$

$$dE = \sum p_i dx_i + \sum x_i dP_i.$$

Из сравнения равенств (2.13) и (2.11) следует, что второе слагаемое в (2.13) равно нулю, т.е. справедливо равенство

$$SdT - Vdp + \sum N_i d\mu_i = 0, \quad (2.14)$$

связывающее друг с другом интенсивные переменные, которое называют уравнением Гиббса–Дюгема.

Из того, что dE — полный дифференциал, следует

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S, N} = \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{V, N} = T \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{V, N} \quad (2.15)$$

Другие энергетические функции, преобразование Лежандра. В том случае, когда энергию системы E выражают через экстенсивные переменные, ее трудно измерить, так как энтропию, количество того или иного вещества и др. трудно измерить непосредственно. Иное дело интенсивные переменные (температура, концентрация, давление), их измерять существенно проще. Условия (2.12) позволяют заменить одну или несколько экстенсивных переменных в (2.9) интенсивными. Для этого используют преобразование Лежандра.

Оно основано на том, что для дважды дифференцируемой функции одной переменной x , первая производная которой y' монотонна по x , т.е. вторая производная не изменяет знака (см.рис. 2.1),

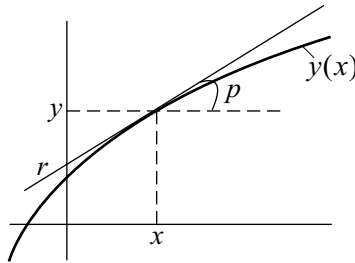


Рис. 2.1. К выводу преобразования Лежандра

Между производной $\frac{dy}{dx} = p(x)$ в точке x , значением $y(x)$ и ординатой r точки пересечения с осью ординат касательной к $y(x)$ существует зависимость $y = r + xp \Rightarrow r = y - xp$. Эта зависимость взаимнооднозначная, если значение $p(x)$ свое для каждого x , т.е. если $p(x)$ не имеет экстремума

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \neq 0.$$

При этом

$$p = \frac{y - r}{x}, \quad x = -\frac{dr}{dp}. \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16) позволяет заменить аргумент функции $y(x)$ через ее первую производную.

Аналогичные соотношения имеют место для двух и более переменных. Чтобы от функции $y(x_1, x_2, x_3)$ перейти к функции $r(p_1, p_2, x_3)$, где

$$p_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad x_i = -\frac{\partial r}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.17)$$

нужно потребовать взаимно-однозначной зависимости между $x = (x_1, x_2)$ и $p = (p_1, p_2)$. Она гарантирована, если определитель матрицы Якоби вторых производных с элементами $a_{i,j} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ не обращается в ноль ($i, j = 1, 2$). Тогда

$$r = y - \sum_{i=1}^2 p_i x_i, \quad p_3 = \frac{\partial y}{\partial x_3} = \frac{\partial r}{\partial x_3}. \quad (2.18)$$

Дифференциал преобразованной функции

$$dr = p_3 dx_3 - \sum_{i=1}^2 x_i dp_i. \quad (2.19)$$

Если исходная функция $y(x)$ однородная первой степени, то и функция r однородная первой степени, если она зависит хотя бы от одной из составляющих x . Например, в качестве исходной функции примем энергию $E(x) = E(S, V, N)$. Если преобразованная функция r не содержит экстенсивных переменных, то $dr = \sum_i x_i dP_i$. Но в силу уравнения Гиббса–Дюгема правая часть равна нулю, т.е. функция r теряет определенность.

Примеры преобразований

1. Замена объема давлением:

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V}. \quad (2.20)$$

В соответствии с (2.16)

$$I = E - V \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right) = E + pV. \quad (2.21)$$

Функцию I называют энтальпией. Дифференциал энтальпии

$$dI = TdS + \sum \mu_i dN_i + Vdp.$$

2. Замена энтропии температурой:

При переходе от $E(S, V, N)$ к преобразованной функции F , зависящей от T, V, N , получим связь (см. (2.16))

$$F(T, V, N) = E - ST. \quad (2.22)$$

Эту форму записи энергии называют энергией Гельмгольца. Ее дифференциал

$$dF = -pdV + \sum \mu_i dN_i - SdT. \quad (2.23)$$

Термодинамические потенциалы. Неподвижное тело, находящееся в поле тяготения, обладает потенциальной энергией. Величина потенциальной энергии не зависит от того, каким путем тело оказалось в том или ином состоянии, она зависит только от состояния. При переходе из одного состояния в другое тело совершает работу (или внешняя среда совершает работу над телом, затрачивая энергию), максимально возможная величина этой работы равна разности потенциальных энергий в исходном и конечном состояниях. Если переход осуществлялся с рассеянием энергии (необратимо), например, путем трения, то произведенная телом работа может только уменьшиться, а подводимая энергия только увеличиться по сравнению с потенциально возможной.

Функции, аналогичные потенциальной энергии, вводят и для термодинамических систем. Однако здесь максимальная полезная работа, которую может совершить система при переходе из одного состояния в другое, зависит от того, при каких условиях проделан такой переход. В силу этого термодинамических потенциалов несколько. Общим для всех термодинамических потенциалов является то, что они зависят только от состояния системы. Разность потенциалов характеризует предельную работу, которую может совершить система при переходе из одного состояния в другое при тех или иных условиях. Запишем равенство, связывающее между собой возможные изменения параметров замкнутой термодинамической системы при подводе к ней некоторой порции энергии dQ :

$$dQ = dE + pdV - \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i, \quad (2.24)$$

где dE — изменение внутренней энергии системы; pdV — работа, совершаемая системой и связанная с изменением ее объема; $\mu_i dN_i$ — изменение энергии системы, вызванное изменением количества i -го вещества (в замкнутой системе такие изменения могут возникнуть при наличии химических реакций).

С учетом связи (2.1) между dQ и dS равенство (2.24) примет форму

$$TdS = dE + pdV - \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i. \quad (2.25)$$

В случае, когда химические реакции отсутствуют

$$TdS = dE + pdV. \quad (2.26)$$

При постоянной температуре приращение работы pdV равно $d(TS - E)$, а значит, предельная работа расширения, совершенная телом при переходе в изотермических условиях из состояния 1 в состояние 2, равна

$$A_T = F_1 - F_2 \quad (dA_T = -dF), \quad (2.27)$$

где

$$F = TS - E \quad (2.28)$$

— свободная энергия Гельмгольца. Так как внутренняя энергия E и энтропия S зависят только от состояния системы и являются экстенсивными переменными, то и энергия Гельмгольца обладает теми же свойствами.

В изоэнтропическом обратимом процессе, когда система изолирована от внешней среды нетеплопроводными ограждениями, $dS = 0$, из уравнения (2.26) следует, что потенциально возможная работа расширения

$$A_S = E_1 - E_2 \quad (dA_S = -dE). \quad (2.29)$$

Таким образом, внутренняя энергия также является термодинамическим потенциалом и характеризует предельное значение работы термодинамической системы при этих условиях.

Кроме работы расширения, связанной с изменением объема тела и равной

$$A = \int_1^2 pdV, \quad dA = pdV, \quad (2.30)$$

часто используют понятие полезной внешней работы. Эта работа L образуется как разность между работой расширения и так называемой работой проталкивания, равной pV . Последняя представляет собой работу, которую нужно затратить, чтобы ввести тело объема V в среду с давлением p :

$$dL = dA - d(pV).$$

Так как $dA = pdV$, а $d(pV) = Vdp + pdV$, то $dL = -Vdp$. Заменяя в равенстве (2.26) dA на dL , получим

$$TdS = dE + d(pV) + dL. \quad (2.31)$$

В условиях адиабатического процесса, когда левая часть в этом равенстве равна нулю,

$$dL_S = -d(E + pV) = -dI,$$

т.е. дифференциалу энтальпии.

Энтальпия, как E и F , является термодинамическим потенциалом и определяет предельное значение полезной внешней работы, произведенной телом при переходе из одного состояния в другое в обратимом адиабатическом процессе

$$L_S = I_1 - I_2. \quad (2.32)$$

Наконец, в изотермическом процессе из равенств (2.21) и (2.31) следует, что

$$dL_T = -d(I - TS),$$

а предельное значение полезной внешней работы, произведенной телом, может быть выражено через термодинамический потенциал

$$\Phi = I - TS, \quad (2.33)$$

называемый свободной энергией Гиббса. Очевидно, что, как и остальные термодинамические потенциалы E , F , I , энергия Гиббса является функцией состояния и аддитивна. Так что в системе, состоящей из нескольких тел,

$$E = \sum_{\nu} E_{\nu}, \quad F = \sum_{\nu} F_{\nu}, \quad I = \sum_{\nu} I_{\nu}, \quad \Phi = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}. \quad (2.34)$$

Вернемся теперь к случаю, когда состав системы может изменяться и условие закона сохранения энергии имеет форму (2.25). Перепишем это уравнение с заменой внутренней энергии E на энергию Гиббса Φ . Получим

$$\sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = d\Phi + SdT - Vdp.$$

В условиях постоянства температуры и давления два слагаемых в правой части этого уравнения равны нулю, а химический потенциал i -го компонента

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{P, T, N_{j \neq i}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.35)$$

Так как энергия Гиббса аддитивна, то $d\Phi = \sum_{i=1}^n d\Phi_i$, а химический потенциал μ_i представляет собой молярную энергию Гиббса i -го вещества.

Использование термодинамических потенциалов позволяет определить предельную работу, которую можно получить при различных ограничениях, наложенных на условия контакта системы с окружающей

средой. Пусть, например, система состоит из m подсистем и имеет тепловой контакт с термостатом, так что температура T_j каждой j -й подсистемы постоянна и равна температуре термостата T_0 . Объем каждой из подсистем может изменяться, но их суммарный объем $V = \sum_{j=1}^m V_j$ постоянен. Предельная работа, совершаемая в такой системе, в силу равенства (2.27) и свойства аддитивности внутренней энергии (2.34) равна

$$A_{T,V} = \sum_{j=1}^m \Delta F_j = \sum_{j=1}^m \Delta E_j - T_0 \sum_{j=1}^m \Delta S_j, \quad (2.36)$$

где $\Delta F_j = F_{j1} - F_{j2}$, аналогичный вид имеют ΔE_j и ΔS_j . Таким же образом при контакте системы, состоящей из равновесных подсистем, с термостатом и баростатом, т.е. при $T_j = T_0$, $p_j = p_0$ для всех значений j , предельная полезная работа системы

$$L_{T,p} = \sum_{j=1}^m \Delta \Phi_j = \sum_{j=1}^m \Delta I_j - T_0 \sum_{j=1}^m \Delta S_j. \quad (2.37)$$

Так как термодинамические потенциалы, а значит, и их приращения ΔF_j , $\Delta \Phi_j$ и т. д., являются функциями состояния, то достаточно, чтобы требования $T_j = T_0$ и $p_j = p_0$ выполнялись не в течение всего процесса, а лишь для начального и конечного состояний системы.

Таким образом, связи между термодинамическими потенциалами и параметрами системы в дифференциальной форме выглядят так:

$$\begin{aligned} dE &= TdS - pdV, & dI &= TdS + Vdp, \\ d\Phi &= Vdp - SdT, & dF &= -(SdT + pdV). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Если в системе возможны химические превращения, то в правые части каждого из этих равенств нужно добавить слагаемое $\sum_{i=1}^n \mu_i dN_i$.

Из равенств (2.38) следует, что интенсивные переменные могут быть выражены через различные термодинамические потенциалы

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V,N} = \left(\frac{\partial I}{\partial S} \right)_{p,N}, & p &= - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}, \\
V &= \left(\frac{\partial I}{\partial P} \right)_{S,N} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{T,N}, & S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{p,N}, \\
\mu_i &= \left(\frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial I}{\partial N_i} \right)_{S,p} = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{V,T} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_i} \right)_{p,T}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Если задана одна из зависимостей, то можно найти значения остальных величин, характеризующих систему в данном состоянии. Например, пусть известна функция $F(T, V, N)$. По соотношениям (2.39) можно найти S и p при заданных T, V, N , после этого вычислить $E = F - TS$ и т.д.

Энтропия системы и условия равновесия. Замечательным свойством энтропии является то, что в любом термодинамическом процессе, протекающем в изолированной системе, энтропия системы не уменьшается. Если процесс протекает обратимо, т.е. суммарная энтропия системы S_Σ не возрастает, то система может быть возвращена в исходное состояние только за счет энергии, извлеченной из нее в прямом процессе. В необратимом же процессе величина S_Σ растет. Прирост энтропии может служить характеристикой необратимости процесса. *Если изолированная система состоит из нескольких подсистем, то в состоянии равновесия энтропия системы достигает своего максимально возможного значения при тех или иных ограничениях, наложенных на систему.*

Рассмотрим, например, изолированную систему, состоящую из двух подсистем, объемы которых V_1, V_2 и составы N_1, N_2 фиксированы, а обмен энергией между ними может осуществляться только через теплопроводящую перегородку. Внутренняя энергия системы E равна сумме энергий подсистем, как и ее энтропия:

$$E = E_1 + E_2; \quad S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2).$$

Так как системы находятся в равновесии, то их суммарная энтропия для заданного значения E максимальна, так что E_1 и E_2 должны быть таковы, чтобы доставлять решение следующей экстремальной задаче:

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2) \rightarrow \max / E_1 + E_2 = E.$$

Необходимым условием оптимальности в этой задаче является стационарность по E_1 и E_2 функции Лагранжа

$$R = S_1(E_1) + S_2(E_2) + \lambda(E_1 + E_2 - E),$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}.$$

С учетом формулы (2.8) это равенство соответствует тому, что в тепловом равновесии температуры подсистем должны быть одинаковы.

Две системы находятся в механическом равновесии, если поршень, их разделяющий, неподвижен. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в этом случае объемы подсистем должны распределяться так, чтобы производные энтропии каждой из подсистем по величине их объемов были одинаковы, а это соответствует равенству давлений (см. (2.8)).

При рассмотрении химического равновесия те же соображения о максимуме суммарной энтропии при заданном суммарном количестве каждого из компонентов в системе приводят к условию равенства производных энтропии каждой из подсистем по количеству молей в ней i -го вещества, т. е. к равенству векторов химических потенциалов μ_i .

Таким образом, если, кроме теплового равновесия, наблюдаются еще механическое и химическое, то равны не только температуры, но и давления и химические потенциалы подсистем. *Условия равновесия в изолированных термодинамических системах представляют собой условия максимума суммарной энтропии по экстенсивным переменным подсистем с учетом балансовых соотношений, наложенных на эти переменные.*

Идеальные газы и идеальные растворы. Уравнение состояния может быть конкретизировано при тех или иных допущениях о свойствах термодинамической системы. Это может быть сделано феноменологически на основе экспериментального исследования свойств системы или с использованием математической модели поведения каждого из составляющих ее микроэлементов. Такой моделью является идеальный газ, который по предположению состоит из большого числа частиц, чье взаимодействие друг с другом пренебрежимо мало. Близки к этой модели в достаточно разреженном состоянии и реальные газы.

Напомним без вывода основные соотношения, связывающие термодинамические переменные для идеального газа.

Уравнение состояния имеет вид

$$pV = NRT, \quad (2.40)$$

где p , V , T — давление, объем и температура N молей газа, R — универсальная газовая постоянная, равная 8,314 Дж/(моль К).

Внутренняя энергия E идеального газа зависит только от температуры. Она изменяется, например, при подводе или отводе теплоты. Производную $\partial Q/\partial T$ называют теплоемкостью газа. Однако эта производная зависит от того, при каких условиях происходит нагрев или охлаждение газа. Если объем газа V остается постоянным, то теплоемкость обозначают как C_V , а если остается постоянным давление, то C_p . При постоянном объеме вся подводимая теплота ΔQ идет только на повышение внутренней энергии, а при постоянном давлении изменение температуры в соответствии с уравнением состояния (2.40) вызывает изменение объема, и газ совершает работу, равную $p\Delta V$. Ясно, что при том же ΔQ изменение температуры, а значит, и внутренней энергии во втором случае окажется меньше, так что $C_p > C_V$. Разность двух этих теплоемкостей для одного моля газа постоянна, так как при постоянном объеме

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \frac{dE}{dT},$$

при постоянном же давлении

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \frac{dE}{dT} + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Но, как следует из уравнения состояния (2.40), при $N = 1$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}.$$

Так что $C_p = C_V + R$. Подчеркнем, что при выводе этого равенства мы использовали полную производную dE/dT , так как от p и V внутренняя энергия не зависит.

Используя уравнение состояния (2.40), получим зависимость энтропии от параметров идеального газа. При $N = 1$ в равновесном процессе

по условию (2.25)

$$TdS = dE + dA = C_V dT + pdV. \quad (2.41)$$

При постоянной теплоемкости C_V

$$dS = d(C_V \ln T + R \ln V). \quad (2.42)$$

Если выразить $\ln T$ из уравнения состояния $pV = RT$,

$$\ln T = \ln p + \ln V - \ln R$$

и учесть связь между R , C_p и C_V , то получим

$$dS = d(C_V \ln p + C_p \ln V). \quad (2.43)$$

Величина энтропии может отличаться от величин, стоящих в (2.42), (2.43) под знаком дифференциала, только на некоторую константу. Если известна энтропия при некоторых стандартных параметрах p_0 , V_0 (обозначим ее как S_0), то энтропия S одного моля идеального газа удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} S - S_0 &= C_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = S - S_0 = C_V \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + \\ &+ C_p \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = S - S_0 = C_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left(\frac{p}{p_0} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Часто принимают S_0 равной нулю и записывают (2.44) как зависимость энтропии S от переменных состояния системы. Чтобы подсчитать по формуле (2.44) энтропию N молей газа, занимающих объем \tilde{V} , надо умножить S на N и подставить вместо V объем одного моля \tilde{V}/N . Получим

$$S_N = N \left(C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{\tilde{V}}{NV_0} \right) = N \left(C_V \ln \frac{p}{p_0} + C_p \ln \frac{\tilde{V}}{NV_0} \right). \quad (2.45)$$

При смешении идеальных газов каждый из них ведет себя в общем объеме так, как будто других газов не существует. Давление p_i i -го компонента смеси удовлетворяет уравнению (2.40), в которое входит

число молей N_i , температура T и объем V , занимаемый смесью. Так что

$$p_i V = N_i R T.$$

Давление p_i называют парциальным давлением i -го газа. Общее давление смеси равно сумме парциальных давлений (закон Дальтона)

$$p = \sum_{i=1}^M p_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^M N_i. \quad (2.46)$$

При смешении идеальных газов теплота не подводится и не совершается никакой работы, значит, температура смеси и внутренняя энергия не изменяются. Таким образом, внутренняя энергия смеси равна сумме внутренних энергий отдельных компонент:

$$E = \sum_{i=1}^m E_i.$$

Подсчитаем изменение энтропии газов при их смешении при фиксированной температуре T и давлении p , взяв для простоты два газа с количеством молей N_1 и N_2 и объемами V_1 и V_2 соответственно. По формуле (2.45) энтропия системы до смешения равна

$$S^H = N_1 \left(C_{v1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V_1}{N_1 V_0} \right) + N_2 \left(C_{v2} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V_2}{N_2 V_0} \right).$$

После смешения энтропия определяется выражением

$$S^C = N_1 \left(C_{v1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{N_1 V_0} \right) + N_2 \left(C_{v2} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{N_2 V_0} \right),$$

так как каждый из газов занял весь объем, $V = V_1 + V_2$. Учтем, что при одинаковых температурах и давлениях объемы газов пропорциональны количеству молей, так что

$$\frac{V_1}{V} = \frac{N_1}{N}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{N_2}{N}, \quad N = N_1 + N_2.$$

Энтропией смешения называют приращение энтропии $\Delta S_{\text{см}} = S^C - S^H$. Она равна

$$\Delta S_{\text{см}} = R \left(N_1 \ln \frac{N}{N_1} + N_2 \ln \frac{N}{N_2} \right). \quad (2.47)$$

В расчете на один моль смеси

$$\Delta \tilde{S}_{\text{см}} = \frac{\Delta S_{\text{см}}}{N} = -R(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2), \quad (2.48)$$

где $x_i = N_i/N$ — молярная доля. Процесс смешения необратим, о чем и свидетельствует увеличение энтропии. Отметим, что для одинаковых газов энтропия смеси равна

$$S^C = (N_1 + N_2) \left(C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0(N_1 + N_2)} \right).$$

Нетрудно показать, что в этом случае $\Delta S_{\text{см}} = 0$. Увеличение энтропии приводит к тому, что свободная энергия Гиббса при смешении уменьшается.

Чтобы получить зависимость химического потенциала от температуры и давления для идеального газа, используем равенство (2.38) для дифференциала энергии Гиббса чистого вещества

$$d\Phi = Vdp - SdT + \mu dN.$$

Так как $d\Phi$ — полный дифференциал, то значение его второй производной не зависит от порядка дифференцирования:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N \partial p} \right)_T = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial N} \right)_T \quad (2.49)$$

или

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_T = \frac{V}{N}.$$

Из уравнения состояния идеального газа $V/N = \frac{RT}{p}$, так что

$$d\mu = RT \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя это соотношение при $T = \text{const}$, получим

$$\mu = \mu^0(T) + RT \ln p. \quad (2.50)$$

Постоянная интегрирования $\mu^0(T)$ представляет собой химический потенциал газа при температуре T и давлении, равном единице.

В смеси идеальных газов каждая составляющая характеризуется парциальным давлением p_i , и уравнение (2.50) примет форму

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.51)$$

Так как $p_i = \frac{N_i}{V} RT = C_i RT$, то

$$\mu_i(C, T) = \mu_{iC}^0 + RT \ln C_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\mu_{iC}^0(T)$ — химический потенциал чистого вещества. Если концентрации компонентов исчисляются в молярных долях, то $p_i = px_i$ и

$$\mu_i(x_i, p, T) = \mu_i^0 + RT \ln(px_i) = \bar{\mu}_{iC}(T, p) + RT \ln x_i. \quad (2.52)$$

Здесь $\bar{\mu}_{iC}(T, p)$ — химический потенциал i -го газа, взятого в чистом виде при давлении и температуре смеси. По аналогии со смесями идеальных газов другие смеси, у которых химические потенциалы подчиняются равенствам (2.50), (2.51), называют *идеальными растворами*.

Рассмотрим систему, состоящую из жидкой смеси нескольких компонентов, и паров этой жидкости. Если температура и давление таковы, что каждый из компонентов жидкости способен в рассматриваемых условиях находиться в конденсированном состоянии, то газовая фаза будет смесью насыщенных паров тех же компонентов. Газовую фазу можно считать смесью идеальных газов, так что химический потенциал i -го компонента в ней имеет вид (2.51)

$$\mu_i^\Gamma = \mu_i^0 + RT \ln p_i.$$

Для жидкости, являющейся идеальным раствором, химические потенциалы в соответствии с (2.51) равны

$$\mu_i^{\text{ж}} = \bar{\mu}_i + RT \ln x_i.$$

В условиях равновесия $\mu_i^\Gamma = \mu_i^{\text{ж}}$, так что

$$\mu_i^0 + RT \ln p_i = \bar{\mu}_i + RT \ln x_i,$$

откуда после преобразований следует

$$\frac{p_i}{x_i} = \exp\left(\frac{\bar{\mu}_i - \mu_i^0}{RT}\right). \quad (2.53)$$

Правая часть этого выражения зависит от давления и температуры смеси. Обозначим ее как $F_i(p, T)$, оставив пока функцию F_i неопределенной. В таких обозначениях из (2.53) следует равенство

$$p_i = F_i x_i. \quad (2.54)$$

Чтобы найти функцию F_i , устремим молярную долю x_i к единице, т.е. рассмотрим случай, когда состав раствора приближается к чистому i -му компоненту. При этом парциальное давление i -го компонента над раствором должно приближаться к равновесному давлению \bar{p}_i пара чистого i -го вещества. Так что $F_i = \bar{p}_i$, и уравнение (2.54) примет вид

$$p_i = \bar{p}_i x_i. \quad (2.55)$$

Давление насыщенного пара над раствором пропорционально давлению насыщенного пара чистого вещества и молярной доле этого компонента в растворе. Соотношение (2.55) называют законом Рауля.

Обратимая работа разделения. Формула (2.52) для химических потенциалов позволяет рассчитать потери свободной энергии при смешении газов или идеальных растворов. Рассмотрим смесь двух компонентов A и B . Их химические потенциалы имеют вид

$$\mu_A = \bar{\mu}_A + RT \ln x_A, \quad \mu_B = \bar{\mu}_B + RT \ln x_B.$$

Свободная энергия Гиббса для моля смеси

$$\Phi_{\text{см}} = x_A \mu_A + x_B \mu_B.$$

Свободная энергия Гиббса чистых компонентов, взятых в тех же количествах,

$$\bar{\Phi} = x_A \bar{\mu}_A + x_B \bar{\mu}_B.$$

Потери свободной энергии при смешении

$$A_0 = \bar{\Phi} - \Phi_{\text{см}} = -RT(x_A \ln x_A + x_B \ln x_B). \quad (2.56)$$

Очевидно, что $A_0 > 0$. Эту величину называют обратимой работой разделения. Она равна минимальной работе, которую нужно затратить для разделения одного моля смеси на чистые компоненты. Этот минимум достигается в обратимом процессе. Функция $A_0(x_A)$ показана на

рис. 2.2, при этом учтено, что $x_B = 1 - x_A$. Сравнение функции $A_0(x)$ с энтропией смешения (2.48) приводит к соотношению

$$\Delta S_{\text{см}} = \frac{A_0}{T}. \quad (2.57)$$

В более общем случае для смеси m компонентов совершенно аналогичным образом потери энергии Гиббса при смешении примут форму

$$A_0 = -RT \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i. \quad (2.58)$$

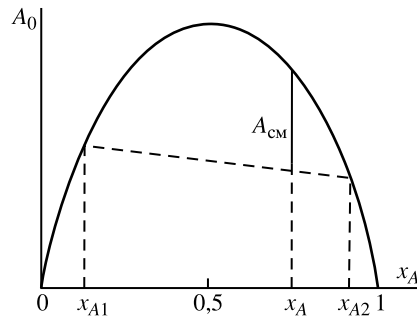


Рис. 2.2. Зависимость потерь свободной энергии при смешении от молярной доли ключевого компонента А

Рассмотрим случай, когда один моль смеси, состоящей из двух компонентов A и B , нужно разделить на два потока, в первом из которых концентрации равны x_{A1} и x_{B1} , а во втором x_{A2} и x_{B2} . Обозначим долю первого потока через γ , так что доля второго потока равна $1 - \gamma$. Энергии Гиббса для каждого из выходных потоков и сумма этих энергий имеют вид

$$\Phi_1 = \gamma(x_{A1}\mu_{A1} + x_{B1}\mu_{B1}), \quad \Phi_2 = \gamma(1 - \gamma)(x_{A2}\mu_{A2} + x_{B2}\mu_{B2}),$$

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Потери свободной энергии при смешении (они же равны минимальной работе разделения)

$$A_{\text{см}} = \Phi_{\Sigma} - \Phi_{\text{см}}.$$

После подстановки в это равенство выражений для химических потенциалов минимальная работа разделения оказывается равной

$$A_{\text{см}} = A_0(x_A) - [\gamma A_0(x_{A1}) + (1 - \gamma)A_0(x_{A2})]. \quad (2.59)$$

Если учесть, что $x_A = \gamma x_{A1} + (1 - \gamma)x_{A2}$, то $A_{\text{см}}$ представляет собой расстояние между точкой $A_0(x_A)$ и ординатой отрезка, соединяющего $A_0(x_{A1})$ и $A_0(x_{A2})$, для $x = x_A$. Так как функция $A_0(x_A)$ выпукла вверх, работа разделения неотрицательна.

Работа разделения пропорциональна количеству молей N разделяемой смеси. Если учесть это обстоятельство и разделить левые и правые части равенств (2.57) и (2.59) на величину, определяющую масштаб времени, то в левых частях этих равенств мы получим «обратимую мощность» разделения, а в правых — вместо количества молей молярный расход разделяемой смеси. Так, из (2.56) следует

$$N_a = -gRT(x_A \ln x_A + x_B \ln x_B),$$

где N_a — мощность разделения, а g — молярный расход смеси.

Внутренняя энергия смеси до и после разделения не изменяется, уменьшается только энтропия смеси и, следовательно, увеличивается свободная энергия Гиббса. Если, например, мы совершаем для разделения смеси в изотермическом процессе некоторую работу, то энергия, подводимая с этой работой, отводится в форме теплоты при температуре смеси. Энтропия системы, состоящей из разделяемой смеси и ее окружения не уменьшается (в необратимом процессе растет) за счет роста энтропии окружающей среды.

Изменение энтропии при фазовых превращениях. При фазовых превращениях, проходящих при постоянном давлении p и температуре T , энтропия изменяется на величину отношения прироста энтальпии к температуре фазового превращения. Так, при плавлении льда

$$\Delta S_a = \frac{\Delta H}{T_a} = \frac{6008}{273,2} = 29,99 \left(\frac{\text{Дж}}{(\text{моль К})} \right), \quad (2.60)$$

а при испарении воды при нормальном атмосферном давлении

$$\Delta S_b = \frac{\Delta H}{T_b} = \frac{40673}{373,2} = 108,93 \left(\frac{\text{Дж}}{(\text{моль К})} \right). \quad (2.61)$$

При нагреве тела с заданной теплоемкостью от температуры T_1 до T_2 за сколь угодно большое время (обратимо) изменение энтропии равно

$$\Delta S_v = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C d \ln T. \quad (2.62)$$

Если нагревание происходит при постоянном объеме, то $C = C_v(T)$, а если при постоянном давлении, то $C = C_p(T)$. Зависимости теплоемкости от температуры для различных веществ находят экспериментально.

Следует отметить, что расчет по формулам (6.17)–(2.62) предполагает равновесный характер процессов. Эти формулы непригодны, например, для расчета изменения энтропии при застывании переохлажденной жидкости или при кристаллизации из пересыщенного раствора. Изменение фазового состояния системы нужно разбить в этом случае на равновесные стадии. Пусть, например, температура замерзания T_0 , а температура жидкости $T_1 < T_0$. Для подсчета изменения энтропии нужно переход от жидкости к твердому телу провести в три равновесных стадии:

- 1) нагрев переохлажденной жидкости от T до T_0 ;
- 2) равновесный фазовый переход при $T = T_0$;
- 3) охлаждение твердого тела до T_1 .

Так как энтропия — функция состояния, то прирост энтропии при кристаллизации переохлажденной жидкости равен сумме ее приростов на каждой стадии.

2.2. Термодинамические балансы

Открытая система. Термодинамические балансы целесообразно записать для открытой системы. В изолированной системе внешние потоки отсутствуют, а в замкнутой отсутствует часть из них, так что термодинамические балансы для них вытекают из общего вида этих условий для открытой системы.

Термодинамические балансы устанавливают связь между потоками каждого из веществ, энергии и энтропии, которыми система обменивается с окружающей средой, возникновением этих величин в системе и скоростью их накопления. Все потоки далее мы будем суммировать,

считая входящие потоки положительными, а выходящие — отрицательными. Разделим потоки на конвективные и диффузионные, отметив последние индексом d . Конвективные потоки вводят в систему и отводят из нее принудительно, их интенсивность можно изменять, и это один из способов воздействия на систему. В отличие от конвективного потока диффузионный зависит от различия между интенсивными переменными исследуемой системы в точке, куда он входит или откуда выходит и интенсивными переменными окружающей среды.

Будем использовать следующие обозначения: j — индекс потока; e_j, v_j , — внутренняя энергия и объем одного моля соответствующего потока; p_j — его давление; $h_j = e_j + p_j v_j$ — молярная энтальпия; h_{dj} — энтальпия в потоке, поступающем диффузионно; q_j — j -й поток теплоты; N_a — мощность, производимая системой; g_j — молярный расход j -го вещества.

Приведем общий вид балансовых уравнений.

Энергетический баланс. Скорость изменения энергии E системы определяется потоками энергии, приносимой и уносимой вместе с конвективными потоками вещества; изменением энергии за счет диффузионного обмена веществом; потоками теплоты, передаваемой кондуктивно, и мощностью совершаемой работы:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j g_{dj} h_{dj} + \sum_j q_j - N_a.$$

Материальный баланс. Изменение количества N_i молей i -го компонента в системе определяется потоками вещества, поступающими конвективно и диффузионно, а также протеканием химических реакций:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} x_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu,$$

где x_{ij} — молярная доля i -го компонента в j -м потоке, $\alpha_{i\nu}$ — стехиометрический коэффициент, с которым i -й компонент входит в уравнение ν -й реакции, W_ν — скорость ν -й реакции.

Энтропийный баланс. Изменение энтропии S системы происходит вследствие притока энтропии вместе с веществами, поступающими конвективно и диффузионно, притока или отвода теплоты (q_j/T_j — изменение энтропии под влиянием j -го потока теплоты с температурой T_j) и

производства энтропии σ вследствие необратимости процессов обмена, протекающих внутри системы:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j g_{dj} s_{dj} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma.$$

Увеличение энтропии вследствие диффузионного притока вещества можно выразить через потоки вносимой энергии $q_{dj} = g_{dj} h_{dj}$. Так как молярная энергия Гиббса $\phi_{dj} = h_{dj} - T_{dj} s_{dj}$, то $s_{dj} = (h_{dj} - \phi_{dj})/T_{dj}$, где s_{dj} — молярная энтропия j -го диффузионного потока; h_{dj} — молярная энтальпия. Следовательно, $g_{dj} s_{dj} = g_{dj} (h_{dj} - \phi_{dj})/T_{dj}$. Если диффузионно переносится несколько потоков вещества, то для каждого

$$g_{dj} s_{dj} = \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dij} \mu_{dij}}{T_{dj}},$$

где μ_{dij} — химический потенциал i -го компонента в j -м диффузионном потоке. Уравнение энтропийного баланса примет форму

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dij} \mu_{dij}}{T_{dj}} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma.$$

Таким образом, уравнения для энергии, вещества и энтропии имеют вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_{dj} + \sum_j q_j - N_a, \quad (2.63)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_{ij} x_{ij} + \sum_j g_{dij} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \quad (2.64)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dij} \mu_{dij}}{T_{dj}} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma, \quad (2.65)$$

где $n_{i\nu} = -\alpha_{i\nu} W_\nu$ — интенсивность образования i -го вещества в ν -й реакции; T_ν — температура ν -й реакции. Если диффузионных потоков нет, то

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_j - N_a, \quad (2.66)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_{ij} x_{ij} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \quad (2.67)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sigma. \quad (2.68)$$

При записи этих уравнений в число тепловых потоков включены потоки теплоты, выделяющейся или поглощаемой при химических реакциях, которые зависят от скорости реакций.

Если рассматривается стационарный режим процесса, когда $dE/dt = dN_i/dt = dS/dt = 0$, то записанные уравнения из дифференциальных превращаются в конечные соотношения. При рассмотрении циклического процесса балансы можно записать не для каждого момента времени, а в среднем за цикл работы установки. Так как в начале и конце цикла состояние системы одинаково, то общее изменение энергии, количества вещества и энтропии за цикл равно нулю. Балансы в этом случае также сводятся к системе соотношений, связывающих средние за цикл значения слагаемых, стоящих в правых частях уравнений (2.63)–(2.65).

Перенос точки ввода теплового потока. При записи термодинамических балансов для веществ, энергии и энтропии в первых двух из них фигурируют только величины входных и выходных потоков и их составы, значение же интенсивной переменной в точке ввода роли не играет. В балансе по энтропии это не так, поток энтропии, связанный с тепловым потоком, зависит от температуры в точке его ввода. Однако в ряде случаев эта температура не фиксирована, а определяется через заданную температуру во внутренней точке системы и тепловой поток. Например, в колонне ректификации заданный состав кубового продукта определяет температуру в кубе, а тепловой поток подводится в куб через теплообменник, для которого известен коэффициент теплопроводности.

Обозначим фиксированную температуру внутри системы через T_i , величину теплового потока q , температуру в точке ввода T_e . Будем предполагать, что зависимость $q(T_i, T_e)$ известна. Производство энтропии на участке от T_e до T_i равно (см. далее)

$$\sigma(T_i, T_e) = q(T_i, T_e)(1/T_i - 1/T_e).$$

Таким образом, мы можем перенести точку ввода теплового потока в T_i , добавив в энтропийный баланс слагаемое $\sigma(T_i, T_e)$. При этом, если величина теплового потока фиксирована, то внешнюю температуру

можно выразить через q и T_i из условия $q(T_i, T_e) = q$, так что производство энтропии, добавленное к энтропийному балансу при переносе точки ввода, будет функцией от q и T_i .

Термодинамические балансы связывают интенсивность и составы потоков, поступающих в систему, скорости химических превращений и производство энтропии в системе. Они позволяют решить и обратную задачу: найти производство энтропии в неоднородной системе, при обмене подсистем друг с другом веществом и энергией.

2.3. Производство энтропии для различных видов взаимодействия

Будем предполагать, что система изолирована и неоднородна. В этом случае между i -й и j -й подсистемами, которые предполагаем равновесными, возникают потоки теплоты, диффузионные потоки вещества, протекают химические реакции. Внешние потоки отсутствуют, и изменение энтропии j -й подсистемы с учетом ее внутреннего равновесия ($\sigma_j = 0$) имеет вид

$$\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{T_j} \left[\sum_i \left(q_{ij} + q_{dij} + \sum_k g_{dij} x_{ijk} \mu_{jk} \right) + \sum_{k\nu} \mu_{k\nu} n_{k\nu} \right], \quad (2.69)$$

где $k\nu$ — индекс k -го вещества, образующегося в ν -й реакции. Скорость изменения энтропии в такой системе связана с ее неоднородностью. Она равна

$$\sigma = \sum_j \frac{dS_j}{dt}. \quad (2.70)$$

Производство энтропии неотрицательно и в том случае, когда те или иные процессы отсутствуют, так что зависимости потоков от интенсивных переменных подсистем $q_{ij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j)$, $g_{dij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j)$, $n_{k\nu}(p_j, T_j, \mu_j)$ должны быть таковы, чтобы сумма по j определяющихся ими слагаемых в (2.70) была неотрицательна при отсутствии остальных потоков.

Отметим, что для записи термодинамических балансов не требуется знания уравнения состояния подсистем $S(E, V, N)$, нужно лишь, чтобы такая зависимость существовала. Тогда

$$\dot{S} = S_E \dot{E} + S_V \dot{V} + \sum_{i=1}^m S_{N_i} \dot{N}_i,$$

что совпадает с выражением (2.69) для равновесной подсистемы, если учесть, что частные производные имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial N_i} = -\frac{\mu_i}{T}, \quad \dot{E} = q - N_a = q - P\dot{V}.$$

Используя термодинамические балансы, найдем выражения для производства энтропии σ при различных взаимодействиях между подсистемами.

Теплообмен. Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух равновесных подсистем с температурами T_1 и T_2 . Поток теплоты q между ними зависит от T_1 и T_2 , так что

$$\text{sign } q(T_1, T_2) = \text{sign}(T_1 - T_2), \quad q(T_1, T_2) = 0 \quad \text{при} \quad T_1 = T_2. \quad (2.71)$$

В соответствии с (2.69) имеем

$$\dot{S}_1 = -\frac{q}{T_1}, \quad \dot{S}_2 = \frac{q}{T_2},$$

так что

$$\dot{S} = \sigma = q(T_1, T_2) \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \quad (2.72)$$

В силу условия (2.71) производство энтропии неотрицательно.

Перенос тепла в слое. Найдем производство энтропии в слое теплопроводного вещества. Для этого выражение (2.72) запишем через градиент температуры как

$$\sigma = q \nabla \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{q \nabla(T)}{T^2}.$$

Если тепловой поток пропорционален градиенту температуры с коэффициентом $-k$, то

$$\sigma = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2.$$

Изотермический массоперенос. Для двух однородных подсистем, имеющих температуру T и химические потенциалы μ_1 и μ_2 , g_k — поток k -го вещества. Согласно (2.69)

$$\dot{S}_j = -\frac{1}{T} \sum_k g_k(\mu_1, \mu_2) \mu_{kj}, \quad j = 1, 2.$$

Скорость изменения суммарной энтропии

$$\sigma = \dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \frac{1}{T} \sum_k g_k(\mu_1, \mu_2)(\mu_{2k} - \mu_{1k}). \quad (2.73)$$

При этом законы массопереноса удовлетворяют условию неотрицательности σ при μ_1 , не равном μ_2 .

Неизотермический массоперенос. Пусть температуры подсистем различны, как и их химические потенциалы, и между ними осуществляется массоперенос. Совершенно аналогично тому, как это было сделано в рассмотренных ранее случаях, производство энтропии в системе можно записать в форме

$$\sigma = \sum_k \left[g_k \left(\frac{\mu_{1k}}{T_1} - \frac{\mu_{2k}}{T_2} \right) + q_k \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right], \quad (2.74)$$

где q_k — приток энергии с потоком вещества $g_k(\mu_1, \mu_2, T_1, T_2)$.

Деформационное взаимодействие. Рассмотрим две подсистемы, разделенные поршнем; p_1 и p_2 — давления в подсистемах, T — их температура. Разность давлений вызывает перемещение поршня. Обозначим через v скорость изменения объема каждой из подсистем, связанную с перемещением поршня.

Производство энтропии определяется отношением энергии $q = v(p_1, p_2)(p_1 - p_2)$, рассеивающейся (превращающейся в теплоту) при перемещении поршня, к температуре:

$$\sigma = \frac{v(p_1, p_2)}{T}(p_1 - p_2). \quad (2.75)$$

Вид зависимости скорости от перепада давлений определяется характером трения поршня о стенки.

Дросселирование газа. При прохождении газа через сужающее устройство (дроссель) давление газа изменяется от p_1 до p_2 , а расход газа g зависит от перепада давлений. Будем предполагать, что поток теплоты q подводится к системе, так что температура газа не изменяется

$$\sigma = g(s_2 - s_1) + \frac{q}{T}.$$

Ввиду того, что в изотермическом процессе подводимая теплота равна

$$q = g(h_2 - h_1),$$

а также учитывая, что химические потенциалы имеют вид

$$\mu_i = h_i - T s_i, \quad i = 1, 2,$$

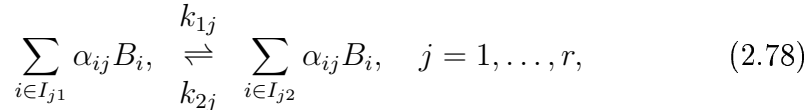
получим

$$\sigma = g(p_1, p_2)(\mu_1 - \mu_2)/T. \quad (2.76)$$

Для идеальных газов энтальпия зависит только от температуры, поэтому

$$\sigma = g(p_1, p_2)(s_1 - s_2) = g(p_1, p_2)R \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right). \quad (2.77)$$

Процесс химического превращения. Рассмотрим термодинамическую систему, в которой при постоянных температуре T и давлении p происходит химический процесс вида



где j — номер реакции; B_i — участвующие компоненты; I_{j1} и I_{j2} — множество индексов исходных компонентов и конечных продуктов реакции; α_{ij} — стехиометрические коэффициенты (они положительны для продуктов реакции и отрицательны для исходных компонентов); k_{1j} и k_{2j} — константы скоростей прямых и обратных реакций.

Если через W_j обозначить скорость j -й реакции, то изменение количества молей i -го вещества в реакционном объеме определяется как

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j \alpha_{ij} W_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.79)$$

Производство энтропии вследствие химического превращения имеет вид

$$\sigma_x = -\frac{1}{T} \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{T} \sum_j W_j A_j, \quad (2.80)$$

где $A_j = -\sum_i \alpha_{ij} \mu_i$ — химическое сродство j -й реакции. В обратной реакции в состоянии равновесия $A_j = 0$. Скорости реакций в свою очередь зависят от концентраций, температуры и давления.

Тепломассоперенос. Подсистемы, контактирующие друг с другом, имеют разные температуры T_1 и T_2 и векторы химических потенциалов

μ_1 и μ_2 с составляющими μ_{ji} ($j = 1, 2; i = 1, \dots, n$). Эти различия вызывают поток теплоты q и векторный поток вещества $g = \{g_1, \dots, g_h\}$, каждый из которых зависит и от температуры T_j и от химических потенциалов μ_j . Производство энтропии примет форму

$$\sigma = q(T_1, T_2, \mu_1, \mu_2) \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) + \sum_i g_i(T_1, T_2, \mu_1, \mu_2) \left(\frac{\mu_{i2}}{T_2} - \frac{\mu_{i1}}{T_1} \right). \quad (2.81)$$

Смешение потоков. Рассмотрим первоначально случай, когда в системе смешиваются потоки чистых веществ, имеющих одинаковую температуру T . Обозначим через g_k количество молей k -го вещества, поступающего в систему в единицу времени (молярный расход). Процесс смешения необратим, производство энтропии может быть найдено как разность между энтропией выходного и входных потоков. Учитывая неизменность их энтальпии, получим

$$\sigma = -\frac{1}{T} \sum_k g_k (\mu_k - \mu_k^0). \quad (2.82)$$

Для идеальных газов и идеальных растворов разность между химическим потенциалом k -го вещества в смеси $\mu_k(x_k)$ и его потенциалом в чистом виде μ_k^0 равна $RTx_k \ln x_k$, так что

$$\sigma = -R \sum_k g_k x_k \ln x_k,$$

где

$$x_k = \frac{g_k}{\sum_\nu g_\nu}.$$

В более общем случае в смеситель поступают потоки с молярными расходами g_j , каждый из которых содержит x_{kj} молярных долей k -го компонента. Химический потенциал k -го компонента в j -м потоке обозначим как μ_{kj} . Состав смеси на выходе определяется равенством

$$x_k = \frac{\sum_j g_j x_{kj}}{\sum_j g_j} = \frac{g_k}{\sum_\nu g_\nu}, \quad (2.83)$$

а производство энтропии — соотношением

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left(\sum_k \mu_k(x_k) \sum_j g_j x_{kj} - \sum_k \sum_j g_j x_{kj} \mu_{kj}(x_{kj}) \right).$$

Здесь $\mu_k(x_k)$ — химический потенциал k -го вещества в выходном потоке. С учетом (2.82)

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left[\sum_k n_k \mu_k(x_k) - \sum_j g_j x_{kj} \mu_{kj}(x_{kj}) \right],$$

или, переходя к приращениям химических потенциалов,

$$\sigma = -\frac{1}{T} \left[\sum_k n_k (\mu_k(x_k) - \mu_k^0) - \sum_j g_j x_{kj} (\mu_{kj}(x_{kj}) - \mu_k^0) \right].$$

При смешении двух однородных потоков идеального газа с молярными расходами g_1 и g_2 и температурами T_1 и T_2 производство энтропии равно

$$\sigma_{\text{см}} = \left(g_1 \ln \frac{T_{\text{см}}}{T_1} + g_2 \ln \frac{T_{\text{см}}}{T_2} \right) C_p,$$

где температура смеси $T_{\text{см}}$ определяется из уравнения теплового баланса

$$T_{\text{см}}(g_1 + g_2) = T_1 g_1 + T_2 g_2.$$

Теплоемкость потоков C_p предполагается одинаковой, как и их давление p .

Учет смешения в химическом реакторе. Для изотермического реактора периодического действия, в который в момент $t = 0$ загружают чистые компоненты, в качестве производства энтропии естественно принять отношение прироста энтропии смеси к продолжительности процесса τ . В изотермическом процессе прирост энтропии равен

$$\Delta S = S(\tau) - S(0) = \Delta S_{\text{см}} + \Delta S_x. \quad (2.84)$$

Первое слагаемое в этом выражении — прирост энтропии за счет смешения

$$\Delta S_{\text{см}} = -\frac{1}{T} \sum_k N_{k0} (\mu_k(x_k) - \mu_k^0),$$

где N_{k0} — число молей k -го компонента в смеси в момент $t = 0$. Для любого момента t

$$x_k(t) = \frac{N_k(t)}{\sum_{\nu} N_{\nu}(t)},$$

x_{k0} — начальная молярная доля k -го компонента.

Прирост энтропии за счет протекания химической реакции можно выразить через химические потенциалы и концентрации в момент окончания процесса τ :

$$\Delta S_x = -\frac{1}{T} \sum_k \left(\bar{N}_k \mu_k(\bar{x}_k) - N_{k0} \mu_k(x_{k0}) \right).$$

Количество молей k -го компонента в момент τ зависит от стехиометрических коэффициентов и скоростей реакции:

$$\bar{N}_k = N_{k0} + \int_0^\tau \sum_j \alpha_{kj} W_j(x(t)) dt.$$

Суммируя приросты энтропии, получим

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\tau} = -\frac{1}{T} \sum_k \left(\bar{N}_k \mu_k(\bar{x}_k) - N_{k0} \mu_k^0 \right).$$

Для реактора идеального смешения непрерывного действия, в который подают чистые компоненты с молярными расходами g_{k0} , производство энтропии можно представить как сумму двух составляющих:

$$\sigma = \sigma_{\text{см}} + \sigma_x. \quad (2.85)$$

Обозначая через \bar{x} вектор концентраций на выходе из реактора, а значит, и в его объеме, получим для первого слагаемого в (2.85) (см. (2.82))

$$\sigma_{\text{см}} = -\frac{1}{T} \sum_k g_{k0} (\mu_k(\bar{x}_k) - \mu_k^0).$$

Второе слагаемое в (2.85), аналогично выражению (2.80), равно

$$\sigma_x = -\frac{1}{T} \sum_k \mu_k(\bar{x}_k) \sum_j \alpha_{kj} W_j(\bar{x}) = \frac{1}{T} \sum_j W_j(\bar{x}) A_j.$$

В свою очередь, вектор \bar{x} определяют из уравнений материального баланса

$$\bar{x}_k = \frac{N_k + \sum_j \alpha_{kj} W_j(\bar{x})}{\sum_\nu \left(N_\nu + \sum_j \alpha_{\nu j} W_j(\bar{x}) \right)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2.4. Эффективность термодинамических систем и производство энтропии

Уравнения термодинамических балансов позволяют качественно проследить связь показателей эффективности процесса с производством энтропии σ , внешними потоками и структурой системы. Покажем это на примере различных термодинамических систем.

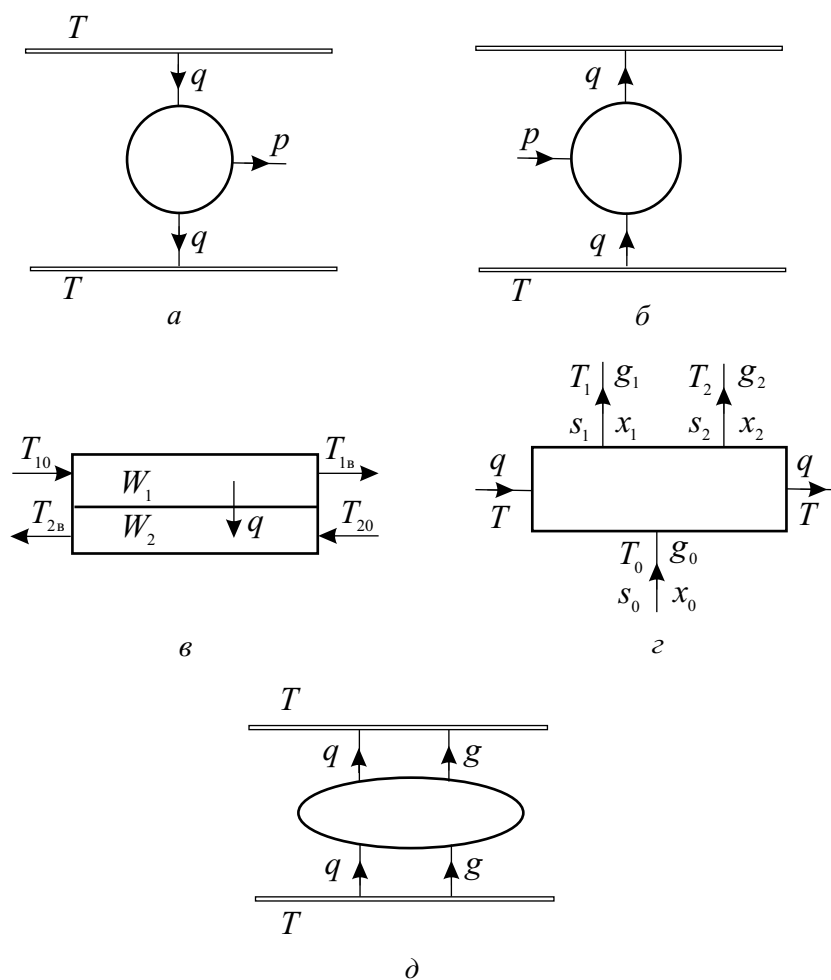


Рис. 2.3. Структуры потоков термодинамических систем:
 а — тепловая машина; б — тепловой насос; в — стационарный теплообмен; г — система разделения; д — абсорбционно-десорбционный цикл

Действительно, рассмотрим установившийся процесс, в котором левая часть уравнения (2.65) равна нулю (в каждый момент времени или в среднем за цикл). Согласно принятому ранее правилу положительным считается направление потоков вещества и энергии, поступающих в систему, а отрицательным — выходящих из нее. Организация процессов в системе определяет ее необратимость и, в силу уравнения (2.65), сказывается при фиксированных параметрах входных потоков на характеристике выходных. Рост σ приводит к росту энтропии выходных потоков, при прочих равных условиях этот рост уменьшает температуру потоков на выходе либо при фиксированной температуре увеличивает отходящий поток теплоты. И в том, и в другом случае это приводит к уменьшению механической работы, вырабатываемой системой, или работы разделения. Энергетическая эффективность термодинамической системы, характеризуемая отношением полезной работы, вырабатываемой в ней, к затратам энергии, достигает максимума в обратимых процессах, когда $\sigma = 0$.

Покажем последовательность получения этих зависимостей на примерах конкретных систем, структура которых изображена на рис. 2.3.

Тепловая машина (рис. 2.3, а). Тепловая машина преобразует теплоту, получаемую от резервуара с температурой T_+ (горячего источника), в работу. Состояние рабочего тела изменяется циклично, при этом оно отдает часть энергии холодному источнику с температурой T_- . Показателем эффективности может служить отношение произведенной работы к количеству теплоты, отобранной у горячего источника (термический КПД $\eta = p/q_+$).

Введя обозначения для средних интенсивностей потоков теплоты, отбираемой от горячего источника (q_+) и отдаваемой холодному источнику (q_-), а также для вырабатываемой мощности p , запишем уравнения балансов энергии и энтропии для рабочего тела:

$$q_+ - q_- - p = 0, \quad (2.86)$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0. \quad (2.87)$$

Нули в правых частях этих уравнений соответствуют тому факту, что состояние рабочего тела либо вообще не изменяется во времени (паровые и газовые турбины), либо изменяется циклически (паровые машины).

Из уравнения (2.86) выразим термический КПД:

$$\eta = \frac{p}{q_+} = 1 - \frac{q_-}{q_+}.$$

В свою очередь из (2.87) следует, что

$$\frac{q_-}{q_+} = \frac{T_-}{T_+} + \sigma \frac{T_-}{q_+}.$$

Таким образом,

$$\eta = \left(1 - \frac{T_-}{T_+}\right) - \sigma \frac{T_-}{q_+} = \frac{1 - T_-/T_+}{1 + \sigma T_-/p}. \quad (2.88)$$

При отсутствии необратимости ($\sigma = 0$) термический КПД равен КПД Карно (см. (2.88)):

$$\eta_k = 1 - \frac{T_-}{T_+}.$$

Если есть возможность как-то оценить производство энтропии, т.е. найти σ_0 такое, что реальное $\sigma > \sigma_0 > 0$, то, подставив σ_0 в формулу (2.88), можно найти более точную оценку для η . В гл. 4 показано, как такая оценка может быть найдена.

Тепловой насос (рис. 2.3, б). В системе с тепловым насосом мощность p используют для передачи тепла q_+ горячему источнику с температурой T_+ от холодного источника с температурой T_- . Показателем эффективности теплового насоса является отопительный коэффициент $\epsilon = q_+/p$.

Уравнения баланса энергии и энтропии имеют вид

$$q_+ = p + q_-, \quad \frac{q_-}{T_-} - \frac{q_+}{T_+} + \sigma = 0. \quad (2.89)$$

Исключая q_- , получим

$$q_+ \left(\frac{q_-}{T_-} - \frac{q_+}{T_+} \right) - \frac{p}{T_-} + \sigma = 0.$$

Откуда отопительный коэффициент равен

$$\epsilon = \frac{q_+}{p} = \frac{T_+}{T_+ - T_-} - \frac{\sigma}{p} \left(\frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-} \right). \quad (2.90)$$

С ростом σ отопительный коэффициент падает. Первое слагаемое в правой части равенства (2.90) представляет собой отопительный коэффициент обратимого теплового насоса.

Стационарный теплообмен (рис. 2.3, в). Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из двух потоков вещества, обменивающихся друг с другом теплотой. Предположим, что изменением давления потоков можно пренебречь. Обозначим g_i , C_i , T_{i0} , T_{iB} , s_{i0} , s_{iB} — расход, теплоемкость, температуру и энтропию i -го потока (на входе и выходе соответственно $i = 1, 2$); $W_i = C_i g_i$ — водяной эквивалент i -го потока.

Уравнения балансов энергии и энтропии имеют форму

$$\begin{aligned} W_1(T_{10} - T_{1B}) + W_2(T_{20} - T_{2B}) &= 0, \\ g_1(s_{10} - s_{1B}) + g_2(s_{20} - s_{2B}) &= \sigma, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где σ — производство энтропии за счет необратимости процессов теплообмена.

Пусть нагрузка теплообменника (поток теплоты) $q = W_1(T_{10} - T_{1B})$ задана, тогда из (2.91) следуют равенства

$$g_1 = \frac{q}{C_1(T_{10} - T_{1B})}, \quad g_2 = -\frac{q}{C_2(T_{20} - T_{2B})}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение баланса энтропии получим

$$\frac{s_{1B} - s_{10}}{C_1(T_{10} - T_{1B})} - \frac{s_{2B} - s_{20}}{C_2(T_{20} - T_{2B})} - \frac{\sigma}{q} = 0.$$

Если потоки вещества по своим свойствам близки к идеальным газам, то при изохорическом теплообмене приросты энтропии для них имеют вид

$$s_{1B} - s_{10} = C_1 \ln \left(\frac{T_{1B}}{T_{10}} \right), \quad s_{2B} - s_{20} = C_2 \ln \left(\frac{T_{2B}}{T_{20}} \right).$$

Так что уравнение (2.91) примет форму

$$\frac{\ln(T_{20}/T_{2B})}{T_{20} - T_{2B}} - \frac{\ln(T_{10}/T_{1B})}{T_{10} - T_{1B}} = \frac{\sigma}{q}. \quad (2.92)$$

Отношение $\Theta_i = \frac{T_{i0} - T_{iB}}{\ln(T_{i0}/T_{iB})}$ имеет размерность температуры, оно монотонно зависит от средней температуры i -го потока вещества, а при

малой разности температур сколь угодно близко к этой средней температуре ($\Theta_i \approx 0,5(T_{i0} + T_{iB})$). Будем называть Θ_i эффективной температурой i -го потока. Из (1.75) следует, что с уменьшением необратимости процесса эффективная температура нагреваемого потока возрастает. Действительно,

$$\frac{1}{\Theta_2} - \frac{1}{\Theta_1} = \frac{\sigma}{q}.$$

При заданной тепловой нагрузке и температуре T_{10} величина Θ_1 фиксирована. Минимизация производства энтропии σ за счет выбора W_1 , W_2 и за счет организации теплообмена позволяет при фиксированной поверхности теплообменника увеличить эффективную температуру нагреваемого потока, а значит, при заданной T_{20} повысить T_{2B} .

Процесс термического разделения двухкомпонентной смеси (рис. 2.3, з). Рассмотрим процесс разделения смеси, состоящей из двух компонентов. Обозначим через $q_i, T_i, s_i, p_i, h_i, x_i, \mu_i$ — молярный расход, температуру, молярную энтропию, давление, молярную долю ключевого компонента и его химический потенциал в i -м потоке. Примем индекс $i = 0$ для разделяемого потока, $i = 1$ для потока, обогащенного ключевым компонентом (так что $x_1 > x_0$), индекс $i = 2$ для потока, очищенного от ключевого компонента ($x_2 < x_0$). К схеме разделения подводится поток теплоты q_+ от источника с температурой T_+ и отводится поток теплоты q_- к источнику с температурой T_- .

Запишем уравнения материального, энергетического и энтропийного балансов для схемы разделения. Они имеют вид

$$g_0 = g_1 + g_2, \quad g_0 x_0 - g_1 x_1 - g_2 x_2 = 0,$$

$$q_+ - q_- + g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0, \quad (2.93)$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0.$$

Два последних равенства удобно переписать так, чтобы в них вошли не абсолютные значения, а приращения энтальпии и энтропии. С учетом (2.93), выразив поток g_0 через потоки g_1 и g_2 , получим

$$q_+ - q_- + g_1 \Delta h_{01} + g_2 \Delta h_{02} = 0, \quad (2.94)$$

$$g_2 \Delta s_{02} + g_1 \Delta s_{01} + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0, \quad (2.95)$$

где $\Delta s_{01} = s_0 - s_1$, $\Delta s_{02} = s_0 - s_2$ — приросты энтропий, а $\Delta h_{01} = h_0 - h_1$, $\Delta h_{02} = h_0 - h_2$ — приросты энтальпий соответствующих потоков. Как правило, концентрации ключевого компонента в потоках заданы.

В качестве термического КПД процесса разделения может быть принято отношение целевого потока g_1 и потока теплоты q_+ :

$$\eta = \frac{g_1}{q_+}. \quad (2.96)$$

Воспользовавшись уравнениями материального баланса (2.93), выразим g_2 через g_1 и обозначим $a = (x_1 - x_0)/(x_0 - x_2)$. Тогда второй поток $g_2 = ag_1$. Уравнения (2.94), (2.95) примут форму

$$q_+ - q_- + g_1(\Delta h_{01} + a\Delta h_{02}) = 0, \quad (2.97)$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_1(\Delta s_{01} + a\Delta s_{02}) + \sigma = 0. \quad (2.98)$$

Из (2.97) получим $q_- = q_+ + g_1(\Delta h_{01} + a\Delta h_{02})$ и подставим это выражение в (2.98). Приходим к равенству

$$q_+ \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right) = g_1 \left(\Delta s_{01} + a\Delta s_{02} - \frac{\Delta h_{01} + a\Delta h_{02}}{T_-} \right) + \sigma,$$

из которого следует, что

$$\eta = \frac{g_1}{q_+} = \frac{1}{F} \left(1 - \frac{T_-}{T_+} \right) - \sigma \frac{T_-}{Fq_+}, \quad (2.99)$$

где $F = T_-(\Delta s_{01} + a\Delta s_{02}) - \Delta h_{01} - a\Delta h_{02}$. Приращения энтальпии и энтропии, входящие в F , имеют вид

$$\Delta h_{0i} = C_p(T_0 - T_i), \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta s_{0i} = C_{p0} \ln T_0 - C_{pi} \ln T_i - R \ln \frac{P_0}{P_i} + \Delta s_{cm0} - \Delta s_{cmi}, \quad i = 1, 2,$$

Энтропия смешения одного моля смеси i -го потока:

$$\Delta s_{cmi} = R[(1 - x_i) \ln(1 - x_i) + x_i \ln x_i], \quad i = \overline{0, 2}.$$

Первое слагаемое в выражении (2.99), как и отношение T_-/F , зависят только от параметров внешних потоков. В обратимом процессе

производство энтропии σ равно нулю, и термический КПД достигает максимума, равного первому слагаемому в (2.99) (своей обратимой оценки). Найдя тем или иным способом минимальную необратимость процесса, т.е., найдя минимально возможную при данной производительности и кинетике тепло- и массопереноса величину σ , можно уточнить обратимую оценку термического КПД процесса разделения.

Абсорбционно-десорбционный цикл (рис. 2.3 д). В том случае, когда разделение осуществляется за счет циркуляции рабочего тела с поочередным поглощением им примеси в первом полуцикле (абсорбция или адсорбция) и выделением во втором полуцикле (десорбция), выражение для термического КПД, близкое к (2.99), но включающее химические потенциалы потоков, можно получить из термодинамических балансов для рабочего тела.

Так как параметры рабочего тела меняются периодически, то изменение его массы ΔM , внутренней энергии ΔE и энтропии ΔS за цикл равны нулю. В термодинамические балансы входят средние за время цикла потоки теплоты и вещества. Из уравнения материального баланса следует, что расход вещества, поглощенного из смеси в первом полуцикле и отданного во втором полуцикле, равны. Обозначим их через g . Уравнения балансов энергии и энтропии примут форму

$$q_+ - q_- + g\Delta h_{01} = 0, \quad (2.100)$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0} \right) + \sigma = 0. \quad (2.101)$$

Из условия (2.100) $q_- = q_+ + g\Delta h_{01}$, подставляя это равенство в (2.101), получим термический КПД цикла разделения

$$\eta = \frac{g}{q_+} = \frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{T_-}{T_+} \right) - \sigma \frac{T_-}{\varphi q_+}. \quad (2.102)$$

Функция φ зависит, как и F в выражении (2.99), от параметров входного потока и потока, обогащенного ключевым компонентом:

$$\varphi = T_- \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0} \right) - \Delta h_{01}.$$

В том случае, когда температуры разделяемой смеси и первого потока одинаковы ($T_0 = T_1 = T$), приращение энтальпии $\Delta h_{01} = 0$, и

функция φ примет вид

$$\varphi = \frac{T_-}{T}(\mu_1 - \mu_0).$$

Для оценки производства энтропии σ весь процесс можно разбить на стадии. Например, абсорбционно-десорбционный цикл можно условно разбить на стадии тепло- и массопереноса. Оценив снизу производство энтропии σ_1 на стадии теплообмена, когда горячий раствор, выходящий из десорбера, отдает свое тепло раствору, поступающему в десорбер, производство энтропии σ_2 на стадии абсорбции, σ_3 на стадии нагрева раствора в десорбере внешним источником и σ_4 на стадии выделения примеси в десорбере, можно найти $\sigma = \sum_{i=1}^4 \sigma_i$. Эта величина после подстановки в (2.102) позволяет найти необратимую верхнюю оценку для термического КПД цикла.

Эти и другие более сложные системы будут рассмотрены в последующих главах.

Использование уравнений термодинамических балансов для выделения области реализуемых значений параметров. Рассмотрим стационарный процесс, в котором $\dot{E} = \dot{N} = \dot{S} = 0$. В этом случае из уравнений термодинамических балансов (2.63)–(2.65) и неравенства $\sigma \geq \sigma_{\min}$ вытекают условия, которым должны удовлетворять реализуемые значения переменных в стационарном режиме термодинамического процесса:

$$\sum_j g_j h_j + \sum_j q_{dj} + \sum_j q_j - N_a = 0, \quad (2.103)$$

$$\sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu = 0, \quad (2.104)$$

$$\sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dj} \mu_{dij}}{T_{dj}} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} \leq -\sigma_{\min}. \quad (2.105)$$

При этом нужно учесть, что величина σ_{\min} в свою очередь зависит от значений потоков, коэффициентов тепло- и массопереноса, гидродинамики аппаратов и пр.

Последовательность решения оптимизационных задач термодинамики. Для всех рассмотренных примеров из уравнений термодинамических балансов следует, что показатель эффективности использования энергии в термодинамических системах (термический

КПД) монотонно уменьшается с ростом производства энтропии σ , т.е. с ростом необратимых потерь энергии. Величина σ зависит от кинетики тепло- и массообменных процессов, а также кинетики химических реакций. Уравнения кинетики связывают диссипативные потоки энергии и вещества с интенсивными переменными взаимодействующих подсистем.

Задача оптимальной в термодинамическом смысле организации процесса состоит в том, чтобы выбором интенсивных переменных (температур, давлений, химических потенциалов) взаимодействующих подсистем, а также коэффициентов в уравнениях кинетики добиться минимума производства энтропии при заданной интенсивности потоков. В распределенных стационарных системах (трубчатых теплообменниках, реакторах, колоннах ректификации и пр.) интенсивные переменные меняются по длине, и требуется найти оптимальный закон изменения этих переменных и коэффициентов тепло- и массопереноса вдоль аппарата. В нестационарных процессах требуется найти закон изменения интенсивных переменных во времени.

Важным свойством производства энтропии σ в системе является ее аддитивность, что позволяет на первом этапе разбить сложную систему на отдельные подсистемы, оптимизировать каждую из подсистем при тех или иных параметрах поступающих и выходящих из нее потоков. На следующем этапе требуется так согласовать средние интенсивности потоков, чтобы удовлетворить системным связям и минимизировать суммарное производство энтропии.

Как правило, для реализации найденных законов изменения температур, давлений, химических потенциалов мы можем изменять объемы подсистем, коэффициенты тепло- и массообмена. Самым простым и самым распространенным способом изменить коэффициенты тепло- и массообмена является установление и разрыв контактов между подсистемами. В тех случаях, когда перечисленные способы управления не позволяют реализовать оптимальное решение, величина σ^* , соответствующая найденному решению, дает оценку снизу для производства энтропии σ в реальном процессе. Таким образом, при заданной интенсивности процесса нельзя получить производство энтропии, меньшее, чем σ^* . Подстановка σ^* в выражение для термического КПД или другого показателя эффективности, монотонно зависящего от σ , позволяет получить верхнюю оценку, которую при заданной интенсивности нельзя превзойти. Эта оценка ближе к реальности, чем обратимое значение

показателя эффективности, она зависит от производительности, коэффициентов тепло- и массообмена, т.е. от конструкции и размеров аппарата, что позволяет сопоставить термодинамические показатели со стоимостными и найти компромиссное решение. Подстановка σ^* в условия (2.103)–(2.105) определяет область реализуемости необратимых процессов с заданной производительностью по тем или иным целевым потокам.

Важно и то, что условия минимума производства энтропии (условия минимальной диссипации) позволяют выяснить, близок ли процесс в реальной системе к процессу в системе, которая при данных ограничениях термодинамически совершенна.

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С СЕГРЕГАЦИЕЙ

Сегрегированные макросистемы представляют собой совокупность подсистем-агрегатов, каждый из которых изолирован от остальных, но может обмениваться с ними энергией или веществом через общую для всех агрегатов среду. Так что скорость изменения состояния агрегата зависит от его текущего состояния и потоков обмена со средой, состояние которой, в свою очередь, есть функция усредненного состояния находящихся в ней агрегатов.

Примерами сегрегированных систем являются растворение, кристаллизация, грануляция, сушка, процессы, протекающие в псевдооживленном слое. Сегрегированное описание адекватно и экономическим системам (см. гл. 7), в которых обмен ресурсами между подсистемами осуществляется не непосредственно, а через систему конечной емкости (среду). Если сегрегация в системе отсутствует, будем ее называть *однородной*. Важной особенностью сегрегированных систем является то обстоятельство, что состояние каждого агрегата зависит от продолжительности его пребывания в системе (возраста), это существенно и для термодинамических систем с сегрегацией и для систем экономических, в которых возраст участников влияет на их возможности.

В изолированных системах время пребывания каждого из агрегатов одинаково, открытые системы обмениваются с окружением входящими и покидающими их агрегатами, время пребывания в них агрегата — случайная величина. Каждый агрегат характеризуется индивидуальными параметрами (начальное состояние, размеры, время пребывания). Эти параметры не поддаются измерению, но их статистические характери-

стики (плотности распределения, дисперсии, средние значения) могут быть найдены экспериментальным путем или рассчитаны по уравнениям математической модели.

Важно выяснить, в каких случаях и насколько существенно влияет сегрегированность на характеристики системы. В этой главе исследованы математические модели сегрегации, получены уравнения, характеризующие эволюцию плотностей распределения индивидуальных параметров агрегатов. Вначале рассмотрен наиболее простой случай, когда среда отсутствует, затем приведена общая модель, которая в дальнейшем конкретизирована для случая, когда состояния среды и каждого из агрегатов характеризуются скалярными величинами. При этом уравнения упрощаются, и некоторые из них удается решить аналитически.

3.1. Сегрегированные системы без обмена через среду

При отсутствии обмена каждый агрегат является замкнутой макросистемой, отличающейся от других своим начальным состоянием и временем пребывания в системе. Пусть состояние агрегата характеризует вектор c , имеющий начальное значение c_0 , а скорость изменения состояния определяется функцией $r(c)$. Время τ пребывания агрегата в системе случайно и имеет плотность распределения $p(\tau)$ со средним значением θ . Таким образом, кинетика процесса в агрегате характеризуется уравнением

$$\frac{dc}{dt} = -r(c). \quad (3.1)$$

Проследим влияние сегрегации на состояние системы.

Для однородной идеально перемешиваемой системы вектор состояния постоянен и равен состоянию c на выходе. Он определяется условием

$$c - c_0 = -r(c)\theta. \quad (3.2)$$

Для сегрегированной системы состояние агрегата через время τ пребывания в системе равно

$$c(\tau) = c_0 - \int_0^{\tau} r[c(t)]dt.$$

Среднее значение вектора состояния на выходе из системы получают усреднением $c(\tau)$ по времени пребывания:

$$c = \int_0^{\infty} c(\tau)p(\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

Пример. Рассмотрим систему, в которой вероятность того, что агрегат покидает систему, не зависит от того, когда он в ней оказался. Начальное состояние одинаково для всех агрегатов. Такая система соответствует аппарату идеального смешения. Плотность распределения времени пребывания (ПРВП) агрегатов в нем описывается уравнением

$$p(\tau) = \frac{1}{\theta} \exp(-\tau/\theta), \quad (3.4)$$

где $\theta = V/G$ — среднее время пребывания агрегатов в системе; V — объем системы; G — объемный расход агрегатов.

С учетом выражения (3.4) получим:

$$\frac{c}{c_0} = \int_0^{\infty} \frac{c(\tau)}{c_0\theta} \exp(-\tau/\theta) d\tau. \quad (3.5)$$

Для случая линейной кинетики, когда $r(c) = kc$, решение уравнения кинетики (3.1) примет вид

$$c(\tau) = c_0 \exp(-k\tau).$$

Подставляя это решение в уравнение (3.5), найдем степень превращения

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(k + \frac{1}{\theta} \right) \tau \right] d\tau = \frac{1}{1 + k\theta}. \quad (3.6)$$

В однородной системе согласно формуле (3.2) имеем

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{kc}{c_0} \theta.$$

Откуда

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{1 + k\theta},$$

что идентично выражению (3.6). Таким образом, сегрегация не оказывает влияния на среднее состояние системы. Это объясняется тем, что $\overline{r(\bar{c})} = \overline{r(c)}$ при $r = kc$ (черта означает усреднение).

При нелинейной функции $r(c)$ сегрегация влияет на среднее значение c , она увеличивает разницу между c и c_0 , если $r(\bar{c}) < \overline{r(c)}$, т.е. для выпуклой вниз функции r . Следует заметить, что усреднение скорости нужно вести не по времени пребывания τ агрегатов, покидающих систему, а по времени пребывания α агрегатов, находящихся в ней (α называют возрастом агрегатов). Однако, как будет показано ниже, плотности распределения α и τ однозначно связаны друг с другом.

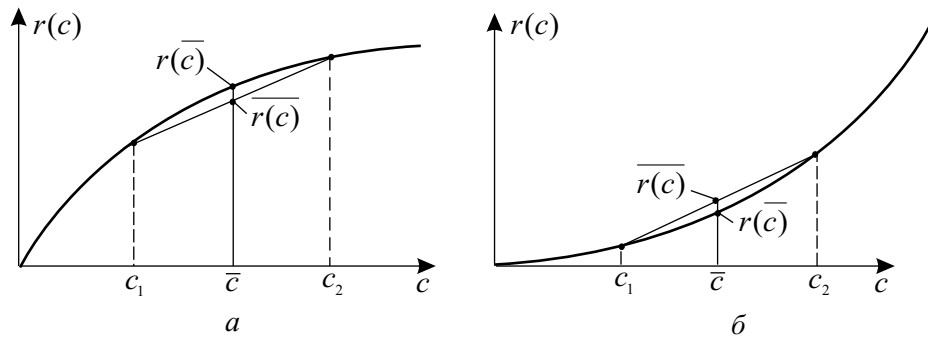


Рис. 3.1. Зависимость скорости реакции от концентрации при порядке реакции меньшем единицы (а) и большем единицы (б)

На рис. 3.1, а изображена зависимость $r(c)$, выпуклая вверх, на рис. 3.1, б — выпуклая вниз. В первом случае среднее значение скорости

$$\overline{r(c)} = \frac{1}{2}[r(c_1) + r(c_2)]$$

меньше, чем

$$r(\bar{c}) = r\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right).$$

Во втором случае $\overline{r(c)} > r(\bar{c})$.

В качестве примера рассмотрим квадратичную кинетику ($n = 2$)

$$r(c) = kc^2.$$

В этом случае решение уравнения кинетики (3.1) имеет вид [22]

$$c(\tau) = c_0 / (1 + c_0 k \tau). \quad (3.7)$$

Плотность распределения времени пребывания будем считать соответствующей идеальному смешению (см. выражение (3.4)).

Согласно формуле (3.3) получим

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\tau/\theta)}{1 + c_0 k \tau} d\tau.$$

Вычисление этого интеграла приводит к выражению

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{c_0 k \theta} \exp\left(\frac{1}{c_0 k \theta} E_i(c_0 k \theta)\right), \quad (3.8)$$

где E_i — интегральная функция Эйлера, значения которой даны в таблицах специальных функций.

Для однородной системы при подстановке $r(c) = kc^2$ в выражение (3.2) получим

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{kc_0\theta}{c_0}. \quad (3.9)$$

Можно зафиксировать отношение c/c_0 и найти среднее время пребывания в системе, которое ему соответствует при той или иной кинетике вида $r(c) = kc^n$.

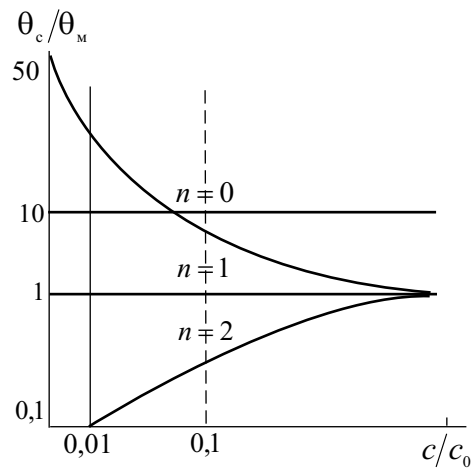


Рис. 3.2. Зависимость отношения средних времен пребывания при заданной степени превращения для сегрегированной и однородной систем от степени n в уравнении кинетики

На рис. 3.2 показано отношение значений среднего времени пребывания для случая идеального смешения в сегрегированной и в однородной системах при различных степенях превращения и кинетических функциях.

Для линейной ($n = 1$) кинетики средние времена пребывания одинаковы (кривая 1). Для постоянной, не зависящей от c скорости изменения состояния ($n = 0$) в агрегированной системе время пребывания должно быть больше, чем в однородной, а для квадратичной ($n = 2$) кинетики — меньше.

Различие в начальных состояниях агрегатов приводит к необходимости усреднения в сегрегированных системах не только по времени пребывания τ или по возрасту агрегатов α , но и по вектору c_0 .

Влияние структуры системы на степень превращения. Как следует из выражения (3.3), степень превращения в сегрегированной системе целиком определяется видом решения кинетического уравнения $c(\tau)$ и ПРВП $p(\tau)$. Это обстоятельство часто облегчает расчет, так как кинетическая кривая может быть найдена экспериментально. При этом уравнения кинетики знать не требуется. Одной и той же плотности распределения времени пребывания может соответствовать различная структура потоков в системе. Для систем с сегрегацией это обстоятельство роли не играет. В случае системы со смешением на молекулярном уровне это не так. Степень превращения зависит в такой системе не только от вида функции $p(\tau)$, но и от структуры потоков.

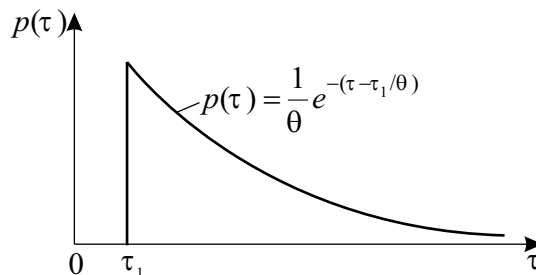


Рис. 3.3. Пример плотности распределения времени пребывания

Проиллюстрируем это на примере химического реактора, в котором протекает реакция второго порядка $c = -kc^2$. ПРВП для него показана на рис. 3.3. Подобная функция может быть реализована, например, в системе, состоящей из последовательно включенных реакторов идеаль-

ного смешения и вытеснения (рис. 3.4, а) или идеального вытеснения и смешения (рис. 3.4, б).

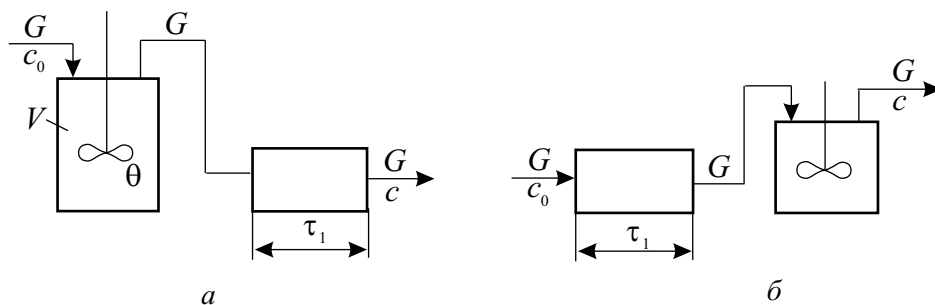


Рис. 3.4. Возможные схемы реализации плотности распределения времени пребывания, изображенной на рис. 3.3

Для реакторов идеального смешения и вытеснения степень превращения равна

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{1 + 4kc_0\theta} - 1}{kc_0[2\theta - \tau_1(1 - \sqrt{1 + 4kc_0\theta})]}, \quad (3.10)$$

где $\theta = V/G$ — среднее время пребывания реагентов в аппарате с мешалкой; τ_1 — время пребывания реагентов в трубчатом реакторе.

При $kc_0\tau_1 = 1$ и $\theta/\tau_1 = 4$ из равенства (3.10) получим $c/c_0 = 0,281$.

В случае реакторов идеального вытеснения и смешения выражение для степени превращения имеет вид

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2kc_0\theta} \left(\sqrt{1 + 4\frac{kc_0\theta}{1 + kc_0\tau_1}} - 1 \right), \quad (3.11)$$

что при тех же значениях k, c_0, τ и θ дает $c/c_0 = 0,25$.

Таким образом, на степень превращения влияет не только кинетика процесса и ПРВП, но и структура потока, определяющая последовательность смешения молекул, поступающих в аппарат. Наличие сегрегации в этом случае позволяет упростить расчеты, так как помимо ПРВП и вида кинетической функции не требуется никакой дополнительной информации.

3.2. Сегрегированные системы с обменом через среду

Структура модели. Будем считать, что система имеет две фазы. Одна из них состоит из агрегатов, вторая образует сплошную однородную среду. Агрегаты могут обмениваться веществом, энергией и пр. только через среду, не взаимодействуя между собой непосредственно. Учет среды существенно расширяет сферу применимости сегрегированных моделей (по сравнению с упрощенными моделями, рассмотренными в разд. 3.1).

Коэффициенты обмена по каждой составляющей вектора x состояния агрегатов различны. Если агрегат не обменивается со средой, получаем модель, рассмотренную в подразд. 3.1; если коэффициент обмена по некоторой составляющей вектора x сколь угодно велик, то по этой составляющей состояния агрегатов и среды мгновенно выравниваются. Например, в некоторых процессах полимеризации интенсивность теплообмена очень велика, что приводит к однородной по температуре и неоднородной по концентрациям системе агрегатов. В этом случае модели сегрегированных систем близки к моделям эволюции макросистем, рассмотренным в [41].

Время τ пребывания агрегатов в системе может зависеть от их начального состояния x^0 . Так, для процессов, протекающих в псевдооживленном слое, время пребывания зависит от начальной массы частиц.

В рамках введенных представлений могут быть рассмотрены не только открытые, но и изолированные системы. В этом случае время пребывания τ одинаково для всех агрегатов и перестает быть индивидуальным параметром.

Изолированные системы

Кинетика агрегата (рис. 3.5) характеризуется уравнением

$$\dot{x} = f[x(t), y(t)], \quad (3.12)$$

где x — вектор состояния агрегата, y — вектор состояния среды. Начальное значение вектора $x(0) = x^0$ является случайной величиной с известной плотностью распределения $p(x^0)$. Уравнение (3.12) удобно переписать в форме

$$\dot{x}_\nu = r_\nu(x) + \lambda_\nu q_\nu(x, y), \quad x_\nu(0) = x_\nu^0, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (3.13)$$

Для каждой ν -й составляющей x_ν первое слагаемое правой части этого уравнения характеризует процессы, протекающие внутри агрегата, а второе — его обмен со средой. Коэффициент λ_ν показывает интенсивность взаимодействия (коэффициент тепло- и массообмена).

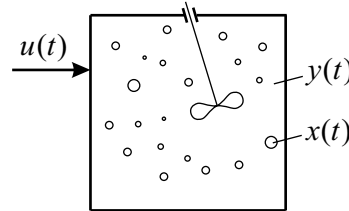


Рис. 3.5. Схема сегрегированного процесса в изолированной системе

Кинетика среды определяется как вектором состояния y , внешними воздействиями u , так и усредненным в момент времени t состоянием агрегатов. Для характеристики множества агрегатов в текущий момент времени потребуется плотность распределения $p(x, t)$, не заданная априори. Выведем соотношения, используемые для получения этой плотности распределения.

Первоначально рассмотрим случай, когда x — скалярная величина, и составим уравнение баланса для фракции агрегатов, характеризующихся состоянием от x до $x + dx$ в интервале времени от t до $t + dt$. Доля агрегатов, переходящих из данной фракции в другие за время dt , равна $p(x, t)dx$. Если $dx = f(x, y)dt$ — изменение параметров агрегата за время dt , то

$$A_- dt = p(x, t)f(x, y)dt,$$

где $f(x, y)$ — правая часть уравнения (3.12). Доля агрегатов, перешедших в рассматриваемую фракцию за то же время из других фракций, получена на основе аналогичных соображений:

$$A_+ dt = p(x - dx, t)f(x - dx, y)dt.$$

Изменение доли агрегатов, входящих в данную фракцию, равно

$$(A_+ - A_-)dt = [p(x - dx, t)f(x - dx, y) - p(x, t)f(x, y)]dt = \frac{\partial}{\partial t}[p(x, t)dx]. \quad (3.14)$$

При достаточно малом значении dx

$$p(x - dx, t)f(x - dx, y) = p(x, t)f(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}(p(x, t)f(x, y))dx.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (3.14) и сокращения на dx получим дифференциальное уравнение в частных производных для плотности распределения:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}[p(x, t)f(x, y)]. \quad (3.15)$$

Начальное условие для этого уравнения задано:

$$p(x, 0) = p(x^0).$$

Для случая, когда x — вектор, уравнение (3.15) выводят аналогичным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t) = -\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}[p(x, t)f_{\nu}(x, t)]. \quad (3.16)$$

Запишем уравнение кинетики среды с использованием плотности распределения $p(x, t)$:

$$y_{\nu} = Q_{\nu}(y, \bar{x}) + \lambda_{\nu} \overline{q_{\nu}(x, y)}^x, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

где черта с верхним индексом x означает усреднение по x . Плотность распределения $p(x_{\nu}, t)$ ν -й составляющей вектора x определяется как интеграл от совместной плотности распределения по всем составляющим x , кроме x_{ν} :

$$p(x_{\nu}, t) = \int_{V_1} \dots \int_{V_{\nu-1}} \int_{V_{\nu+1}} \dots \int_{V_n} p(x, t) dx_1 \dots dx_{\nu-1} dx_{\nu+1} \dots \quad (3.18)$$

Средние значения x и q_{ν} , входящие в уравнение (3.17), равны

$$\bar{x} = \int_{V_x} xp(x, t) dx, \quad \overline{q_{\nu}^x} = \int_{V_{\nu}} q_{\nu}(x_{\nu}, y) p(x_{\nu}, t) dx_{\nu}.$$

Как и для агрегатов (см.3.13), первое слагаемое в уравнении (3.17) описывает процессы, протекающие в среде, а второе — процессы взаимодействия агрегатов и среды.

В тех случаях, когда уравнение (3.12) имеет аналитическое решение

$$x(t) = \varphi[x^0, y(t), t],$$

правая часть уравнения (3.17) может быть переписана так, чтобы усреднение проводилось только по x^0 с известной плотностью распределения $p(x^0)$. При этом отпадает необходимость решения уравнения (3.16).

В ряде процессов количество агрегатов N не остается постоянным, так как происходит их дробление, слияние, зарождение новых агрегатов. Это характерно, например, для процессов кристаллизации, грануляции, некоторых процессов микробиологического синтеза. В подобных случаях представляет интерес изменение не только свойств, но и числа агрегатов. Соотношения, определяющие плотность распределения вектора состояния и количества агрегатов в таких процессах получены в работе [76].

Стационарное состояние открытой системы

Плотность распределения возраста агрегатов в системе. Пусть нам известна плотность распределения $p(\tau)$ времени τ пребывания агрегатов в системе. Чтобы агрегат пробыл в системе время α , он не должен ее покинуть ни в один из моментов времени $\tau < \alpha$, а вероятность противоположного события (что он пробудет время, меньшее чем α), равна

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau. \quad (3.19)$$

Так что

$$p(\alpha) = \frac{1 - \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \left(1 - \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau\right) d\alpha} = \frac{1 - \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau}{\theta}. \quad (3.20)$$

Далее будет показано, что знаменатель в равенстве (3.20) равен среднему времени пребывания агрегатов в системе. Из (3.20) видно, что в системе с идеальным смешением, когда $p(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\theta}}$, плотности распределения возраста и времени пребывания одинаковы, а в системе, с одинаковым временем пребывания всех выходящих из нее агрегатов, когда $p(\tau) = \delta(\tau - \theta)$, плотность распределения возраста равномерна на интервале от нуля до θ .

Одинаковые начальные параметры агрегатов. Рассмотрим случай, когда значения начальных параметров x^0 для всех агрегатов одинаковы, т.е. $p(x)$ определяется только распределением $p(\alpha)$ возраста агрегатов, находящихся в аппарате.

Кинетика агрегата характеризуется уравнением типа (3.12), в котором аргументом является не календарное время t , а α — возраст агрегата в системе:

$$\frac{dx}{d\alpha} = f(x(\alpha), y), \quad x(0) = x^0, \quad (3.21)$$

где y — вектор состояния среды, неизменный во времени.

Состояние среды определяется балансовым соотношением, учитывающим ее обмен с окружением, процессы, протекающие в среде, и взаимодействие с агрегатами:

$$\mu_\nu \varphi(y_\nu, u_\nu) + \rho_\nu(y, \bar{x}) + \lambda_\nu q_\nu(\overline{x_\nu, y_\nu})^{x_\nu} = 0, \quad (3.22)$$

где μ_ν и λ_ν — коэффициенты, учитывающие интенсивность обмена с окружением и с агрегатами соответственно; второе слагаемое учитывает процессы, протекающие в среде, и зависит как от состояния среды, так и от среднего значения вектора x интенсивных переменных агрегата.

Химический реактор. Конкретизируем записанные соотношения для химического реактора, в котором интенсивными переменными агрегата являются концентрация c_x и температура T_x ; аналогично для вектор интенсивных переменных среды $y = (c_y, T_y)$. В соответствии с этим перепишем уравнения (3.21), (3.22).

Для агрегата получим

$$\frac{dc_x}{d\alpha} = r(c_x, T_x) + \lambda_c q_c(c_x, c_y), \quad c_x(0) = c_x^0, \quad (3.23)$$

$$m_x \frac{dT_x}{d\alpha} = \lambda_T q_T(T_x, T_y) + l_x r(c_x, T_x), \quad T_x(0) = T_x^0, \quad (3.24)$$

где l_x — теплота реакции, протекающей в агрегате; m_x — теплоемкость агрегата. Предполагаем также, что взаимодействие агрегата и среды сводится лишь к обмену теплотой и массой. При этом поток вещества $\lambda_c q_c$ зависит лишь от концентраций агрегата и среды, а поток теплоты $\lambda_T q_T$ — от их температур.

С учетом идеального перемешивания можно записать уравнения материального и теплового балансов для среды:

$$G_y(c_y^0 - c_y) + V_y p(c_y, \bar{c}_x) + \tilde{\lambda}_c V_x \bar{q}_c(c_x, c_y) = 0, \quad (3.25)$$

$$G_y m_y (T_y^0 - T_y) + \tilde{\lambda}_T V_x \bar{q}_T(T_x, T_y) + V_y l_y p(\bar{c}_x, c_y) = 0. \quad (3.26)$$

В этих уравнениях G_y, V_y, m_y, l_y — расход и объем среды, ее теплоемкость и теплота реакции, протекающей в среде; $\tilde{\lambda}_c \bar{q}_c$ и $\tilde{\lambda}_T \bar{q}_T$ — потоки вещества и теплоты, поступающие от агрегатов, отнесенные к единице объема, занимаемого агрегатами; c_y^0, T_y^0 — начальная концентрация и температура среды:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_x &= \int_0^\infty c_x(\alpha) p(\alpha) d\alpha, \\ \bar{q}_c &= \int_0^\infty q_c[c_x(\alpha), c_y] p(\alpha) d\alpha, \\ \bar{q}_T &= \int_0^\infty q_T[T_x(\alpha), T_y] p(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Усредненные величины, стоящие в левой части равенств (3.27), могут быть найдены без расчета $c_x(\alpha)$ и $T_x(\alpha)$, если известно распределение для c_x и для T_x , т.е. $p(c_x)$ и $p(T_x)$. В отличие от $p(\alpha)$ эти функции зависят от кинетики процесса.

Система (3.23)–(3.26) во многих случаях упрощается. В частности, при больших значениях коэффициента λ_T и при $\lambda_c = 0$ теплообмен настолько интенсивен, что температура агрегатов и среды одинакова ($T_x = T_y = T$). В этом случае получаем так называемую модель полусегрегации:

$$\frac{dc_x}{d\alpha} = r(c_x, T), \quad c_x(0) = c_x^0, \quad (3.28)$$

$$Gm(T_0 - T) + \tilde{l}_x V \int_0^\infty r[c_x(\alpha), T] p(\alpha) d\alpha - kS(T - T_{ст}) = 0, \quad (3.29)$$

где k и S — соответственно коэффициент теплопередачи и площадь стенки; G — расход реакционной смеси (агрегатов и среды); V — ее объем; m — теплоемкость.

Концентрацию на выходе подсчитывают как среднюю по агрегатам, выходящим из системы; для ее расчета используют плотность распределения времени пребывания агрегатов в системе:

$$c_{\text{вых}} = \int_0^{\infty} c_x(\tau)p(\tau)d\tau, \quad (3.30)$$

где $c_x(\tau)$ — решение уравнения (3.28), в котором вместо аргумента α фигурирует τ .

Расчет плотности распределения вектора состояния агрегата. В некоторых случаях вместо плотности распределения возраста удобнее пользоваться непосредственно плотностью распределения вектора состояния агрегата. Покажем, каким уравнением определяется эта плотность распределения. Для упрощения записи состояние агрегата будем считать скалярной величиной. Обобщение соответствующих соотношений на векторный случай не составляет труда.

Запишем уравнение материального баланса для фракции агрегатов, характеризующихся значениями переменной x в пределах от x до $x+dx$. Основные слагаемые этого уравнения:

а) количество агрегатов, поступающих в выбранную фракцию с входным потоком в единицу времени, равно

$$np_{\text{вх}}(x)dx$$

где n — общее количество агрегатов, поступающих с входным потоком; $p_{\text{вх}}(x)$ — распределение переменной x во входном потоке. В случае, когда состояния всех агрегатов на входе одинаковы, $p_{\text{вх}}(x) = \delta(x - x^0)$;

б) количество агрегатов, пополняющих выбранную фракцию в результате реакции, характеризующейся уравнением $\dot{x} = f(x, y)$, равно

$$Nf(x - dx, y)p(x - dx)dx$$

где N — общее количество агрегатов в объеме аппарата;

в) количество агрегатов, покидающих фракцию с выходным потоком в единицу времени, равно

$$np_{\text{вых}}(x)dx,$$

где $p_{\text{вых}}(x)$ — распределение переменной x в выходном потоке;

г) количество агрегатов, покидающих фракцию в результате реакции, равно

$$Nf(x, y)p(x)dx.$$

Суммируя выписанные слагаемые и представив

$$f(x - dx, y)p(x - dx, y) \approx f(x, y)p(x) - \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)p(x)]dx,$$

получим дифференциальное уравнение

$$\theta \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)p(x)] = p_{\text{вх}}(x) - p_{\text{вых}}(x) = \delta(x - x^0) - p_{\text{вых}}(x). \quad (3.31)$$

В этом уравнении учтено, что N пропорционально объему V , а n — расходу G реакционной смеси, так что отношение $N/n = \theta$ — среднее время пребывания в аппарате. Уравнение (3.31) содержит в себе две неизвестные функции $p(x)$ и $p_{\text{вых}}(x)$. Если по экспериментальным данным найдено $p_{\text{вых}}(x)$, то из уравнения (3.31) может быть подсчитано $p(x)$.

В случае идеального перемешивания по агрегатам $p(x) = p_{\text{вых}}(x)$, и уравнение (3.31) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)p(x)] = \frac{1}{\theta}[\delta(x - x^0) - p(x)]. \quad (3.32)$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ не меняет знака и $x \neq x^0$. Учитывая, что $\delta(x - x^0) = 0$ при $x \neq x^0$, перепишем уравнение (3.32) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)p(x)] = -\frac{1}{\theta f(x, y)}f(x, y)p(x).$$

Обозначим $p(x/y)$ плотность распределения вектора x при фиксированном значении y . Тогда решение уравнения (3.32) примет вид

$$f(x, y)p(x/y) = k \exp \left[-\frac{1}{\theta} \int_{x^0}^x \frac{dx}{f(x, y)} \right].$$

Постоянную интегрирования k определим из условия нормирования $p(x/y)$:

$$\int_0^{\infty} p(x/y)dx = 1,$$

или

$$\exp \left[-\frac{1}{\theta} \int_{x^0}^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x}, y)} \right] k \int_0^\infty \frac{x^0}{f(x, y)} dx = 1.$$

откуда

$$\exp \left[-\frac{1}{\theta} \int_{x^0}^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x}, y)} \right] k = \left\{ \int_0^\infty \frac{x^0}{f(x, y)} dx \right\}^{-1}.$$

Учитывая это соотношение, запишем решение уравнения (3.32) в виде, удобном для использования в том случае, когда в ходе процесса переменная состояния x растет:

$$p(x/y) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{\theta} \int_{x^0}^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x}, y)} \right]}{f(x, y) \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{\theta} \int_{x^0}^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x}, y)} \right] \frac{dx}{f(x, y)}}. \quad (3.33)$$

Различные начальные параметры агрегатов. Математическая модель статистики процесса при различных начальных параметрах агрегатов отличается от модели (3.21), (3.22) тем, что начальные условия x^0 для уравнения (3.21) случайны и заданы плотностью распределения $p(x^0)$. Это сильно затрудняет численное решение, так как в формулах (3.27) вместо $c_x(\alpha)$ и $T_x(\alpha)$ фигурируют $c_x(\alpha, c_x^0, T_x^0)$, и $T_x(\alpha, c_x^0, T_x^0)$, а усреднение ведется по всем аргументам этих функций с плотностью распределения $p(\alpha, c_x^0, T_x^0)$.

В уравнении (3.31) $p_{\text{вх}}(x)$ равна уже не δ -функции, а плотности $p(x^0)$, в которой аргумент x^0 заменен на x . Это уравнение может быть решено в случае, когда агрегаты подчиняются режиму идеального перемешивания и плотность распределения вектора x в объеме аппарата совпадает с плотностью его распределения на выходе. В этом случае уравнение (3.31) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dx} [p(x)f(x, y)] + \frac{1}{\theta f(x, y)} [p(x)f(x, y)] = \frac{1}{\theta} p_{\text{вх}}(x). \quad (3.34)$$

Пусть $p_{\text{вх}}(x) = 0$ для всех x , меньших некоторого значения \hat{x} . Решение уравнения (3.34) имеет вид [22]

$$p(x/y) = \frac{1}{f(x, y)} \left[\exp[-F(x, y)]k + \int_{\hat{x}}^x g(\tilde{x}) \exp F(\tilde{x}, y) d\tilde{x} \right], \quad (3.35)$$

где

$$F(x, y) = \frac{1}{\theta} \int_{\tilde{x}}^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x}, y)}, \quad g(x) = \frac{p_{\text{вх}}(x)}{\theta}.$$

Постоянную интегрирования k определим из условия нормирования

$$\int_0^{\infty} p(x/y) dx = 1.$$

Откуда

$$k = \left[1 - \int_0^{\infty} \frac{\exp(-F(x, y))}{f(x, y)} \int_{\tilde{x}}^x g(\tilde{x}) \exp F(\tilde{x}, y) dx \right] \left(\int_0^{\infty} \frac{\exp(-F(\tilde{x}, y))}{f(x, y)} dx \right)^{-1}.$$

Таким образом, плотность распределения (3.35) определена. Обозначение $p(x/y)$ использовано здесь, как и в уравнении (3.33), чтобы подчеркнуть, что найденное распределение справедливо для фиксированного значения y . Подстановка выражения (3.35) в систему (3.27) и полученных интегралов в соотношение (3.22) позволяет найти y и $p(x/y)$ при этом фактическом значении y .

3.3. Динамика и необратимость процессов в открытой сегрегированной системе

Динамика распределения возраста агрегатов. Возраст агрегата α , т.е. время, прошедшее от момента попадания агрегата в систему до текущего момента, является важным фактором, определяющим процессы, протекающие в агрегате, а плотность распределения возраста необходима для расчета характеристик системы. Динамика распределения возраста агрегатов не связана с кинетикой изменения состояния агрегатов и их взаимодействием со средой. На плотность распределения возраста $p(\alpha, t)$ влияет только изменение потока через систему и изменение начальных состояний агрегатов.

Приведем зависимости, определяющие динамику возрастной структуры некоторой совокупности агрегатов, считая, что в систему или в некоторый элемент системы поступают агрегаты, имеющие плотность распределения возраста $p_{\text{вх}}(\alpha, t)$ (для «новых» агрегатов оно равно $\delta(\alpha)$).

Расход на входе равен $G_{\text{вх}}(t)$, на выходе $G_{\text{вых}}(t)$, а плотность распределения возраста $p_{\text{вых}}(\alpha, t)$ равна плотности распределения времени пребывания. Известны начальное (при $t = 0$) распределение возрастов в системе $p(\alpha, 0)$ и начальный объем системы.

Запишем уравнение, связывающее $V(t)$ и $p(\alpha, t)$ с характеристиками входных и выходных потоков. Оно представляет собой материальный баланс для фракции агрегатов, имеющих возраст от α до $\alpha + d\alpha$. Не повторяя выкладок, аналогичных приведенным выше, получим

$$\frac{d}{dt}[V(t)p(\alpha, t)] = G_{\text{вх}}(t)p_{\text{вх}}(\alpha, t) - G_{\text{вых}}(t)p_{\text{вых}}(\alpha, t). \quad (3.36)$$

Здесь левая часть — скорость накопления агрегатов в выбранной фракции; первое слагаемое в правой части — приток агрегатов в выбранную фракцию с входным потоком, второе — отток из фракции с выходным потоком. С учетом зависимости возраста α от времени ($\alpha = t - t_0$, где t_0 — момент попадания агрегата в систему) имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} = 1, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}.$$

После выполнения операции дифференцирования левой части уравнения (3.36) получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{G_{\text{вх}}(t)}{V}p_{\text{вх}}(\alpha, t) - \frac{G_{\text{вых}}(t)}{V}p_{\text{вых}}(\alpha, t) - \dot{V}p(\alpha, t). \quad (3.37)$$

Объем V , занимаемый агрегатами, изменяется в соответствии с условием

$$\dot{V} = G_{\text{вх}}(t) - G_{\text{вых}}(t). \quad (3.38)$$

Уравнение (3.37) имеет аналитическое решение [76]:

$$p(\alpha, t) = \frac{1}{V(t)} \left\{ V_0 p(\alpha - t, 0) + \int_0^t [G_{\text{вх}}(\xi)p_{\text{вх}}(\alpha - t + \xi, \xi) - G_{\text{вых}}(\xi)p_{\text{вых}}(\alpha - t + \xi, \xi)] d\xi \right\}, \quad (3.39)$$

где ξ — переменная интегрирования.

Из равенства (3.39) вытекает выражение для определения зависимости среднего возраста агрегатов от времени

$$\bar{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \alpha p(\alpha, t) d\alpha.$$

После несложных преобразований получим

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{V_0}{V} \int_0^{\infty} \alpha p(\alpha - t, 0) d\alpha + \frac{1}{V} \int_0^t \{G_{\text{вх}}(\xi)(t - \xi) - G_{\text{вых}}(\xi)[t - \xi - \Delta(t)]\} d\xi, \quad (3.40)$$

где $\Delta(t)$ — средний возраст в выходном потоке, удовлетворяющий уравнению с запаздывающим аргументом

$$\frac{d\Delta}{dt} = 1 - \frac{G_{\text{вых}}(t)}{G_{\text{вх}}[t - \Delta(t)]}. \quad (3.41)$$

Уравнение (3.41) вытекает из очевидного равенства

$$\int_{t-\Delta(t)}^t G_{\text{вх}}(\tau) d\tau = V(t), \quad (3.42)$$

где $V(t)$ — объем, а $G(\tau)$ — объемный расход агрегатов. Продифференцировав обе части равенства (3.42) и учтя уравнение (3.38), получим

$$g_{\text{вх}}(t) - (1 - \Delta)G_{\text{вх}}(t - \Delta) = \dot{V}(t) = G_{\text{вх}}(t) - G_{\text{вых}}(t),$$

откуда после приведения подобных следует выражение (3.41). Для получения начального значения $\Delta(0)$ подставим $t = 0$ в выражение (3.42):

$$\int_{-\Delta(0)}^0 G_{\text{вх}}(t) dt = V_0.$$

Аналогично уравнению для среднего возраста можно записать выражение для дисперсии возраста агрегатов:

$$D(\alpha) = \int_0^{\infty} (\alpha - \bar{\alpha})^2 p(\alpha, t) d\alpha = \frac{V_0}{V(t)} \int_0^{\infty} [\alpha - \bar{\alpha}(t)]^2 p(\alpha - t, 0) d\alpha + \frac{1}{V(t)} \int_0^t \{G_{\text{вх}}(\xi)[t - \xi - \bar{\alpha}(t)]^2 - G_{\text{вых}}(\xi)[t - \xi - \Delta(t)]^2\} d\xi. \quad (3.43)$$

Выражения (3.43) и (3.40) не содержат в себе $p(\alpha, t)$, так что для вычисления среднего возраста и дисперсии возраста нужно знать только

начальное распределение $p(\alpha, 0)$ и изменения входного и выходного потоков.

Рассмотрим случай идеально перемешанной системы, вследствие чего плотности распределения времени пребывания $p(\tau, t)$ и возраста находящихся в системе агрегатов совпадают. Обозначая расходы агрегатов на входе в систему и на выходе из нее $G_{\text{вх}}(t)$ и $G_{\text{вых}}(t)$, а объем агрегатов $V(t)$, запишем уравнение для скорости изменения объема агрегатов, находящихся в системе в момент $t - \alpha + \xi$ как функции времени пребывания ξ :

$$d[V(t - \alpha + \xi)p(\xi, t - \alpha + \xi)] = -G_{\text{вых}}(t - \alpha + \xi)p(\xi, t - \alpha + \xi)d\xi.$$

Здесь правая часть пропорциональна числу агрегатов, покидающих систему за время $d\xi$, начиная с момента $t - \alpha + \xi$, и характеризуемых временем пребывания ξ . количество агрегатов, имеющих нулевой возраст, определяется параметрами входного потока. В силу сказанного решение записанного уравнения при $\xi = \alpha$ определяет плотность распределения возрастов:

$$p(\alpha, t) = \frac{G_{\text{вх}}(t - \alpha)}{V(t)} \exp \left[- \int_0^\alpha \frac{G_{\text{вых}}(t - \alpha + \xi)}{V(t - \alpha + \xi)} d\xi \right] \quad (3.44)$$

Динамика изменения состояния агрегатов и среды. В отличие от статической задачи в данном случае вектор состояния агрегата x зависит от возраста α и календарного времени t и подчиняются дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}x(\alpha, t) = f[x(\alpha, t), y(t)]. \quad (3.45)$$

С учетом связи между α и t это уравнение можно переписать так:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \alpha} = f[x(\alpha, t), y(t)]. \quad (3.46)$$

Изменение состояния среды во времени характеризуется равенством

$$\frac{d}{dt}(yV) = \mu_\nu \varphi(y_\nu, u_\nu) + \rho_\nu(y, \bar{x}) + \lambda_\nu q_\nu(\overline{x, y})^x, \quad (3.47)$$

в котором $V(t)$ — объем среды; а остальные переменные имеют тот же смысл, что и в уравнении (3.22). Усреднение в (3.47) проводится с учетом плотности распределения возраста $p(\alpha, t)$, для подсчета же изменяющихся во времени средних значений выходных переменных нужно использовать плотность распределения времени пребывания агрегатов в системе $p(\tau, t)$.

Производство энтропии в системах с сегрегацией. Процессы тепло- и массопереноса и химических превращений, протекающие в сегрегированных системах, необратимы. Если x и y — векторы интенсивных переменных для агрегата и среды, а изменение x соответствует уравнению (3.13), то производство энтропии

$$\sigma(x, y) = \sigma^i(x) + \sum_{\nu} \lambda_{\nu} q_{\nu}(x, y)(x_{\nu} - y_{\nu}), \quad (3.48)$$

где первое слагаемое $\sigma^i(x)$ — производство энтропии за счет процессов, протекающих внутри агрегата; второе — производство энтропии за счет обмена между агрегатами и средой; $\lambda_{\nu} q_{\nu}$ — поток обмена по ν -й составляющей x ; $(x_{\nu} - y_{\nu})$ — движущая сила.

В стационарном режиме открытой системы состояние среды y неизменно (см. (3.22)) и зависит от среднего значения \bar{x} и обмена с агрегатами и окружением. Пусть найдено решение уравнения кинетики $x(t, x_0, y)$, тогда производство энтропии в системе равно

$$\sigma(y, x_0) = \int_0^{\infty} p(\alpha) \left[\sigma^i(x(\alpha, x_0, y)) + \sum_{\nu} \lambda_{\nu} q_{\nu}(x(\alpha, x_0, y), y)(x_{\nu}(\alpha, x_0, y) - y_{\nu}) \right] d\alpha + \sum_{\nu} \mu_{\nu} g_{\nu}(y, u)(y_{\nu} - u_{\nu}). \quad (3.49)$$

Последнее слагаемое в правой части этого равенства учитывает обмен среды с окружением, а $p(\alpha)$ — плотность распределения возраста агрегатов в системе.

3.4. Структурный подход к расчету плотностей распределения возраста и времени пребывания агрегатов

В сегрегированных системах одним из основных индивидуальных параметров агрегата является продолжительность α его пребывания в

системе (возраст) или время в ней пребывания τ . Эти величины случайны, их плотности распределения, как показано ранее, связаны друг с другом соотношением

$$p(\alpha) = \left(1 - \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau\right) / \int_0^{\infty} \left(1 - \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau\right) d\alpha = \frac{1}{\theta} \left(1 - \int_0^{\alpha} p(\tau) d\tau\right). \quad (3.50)$$

Далее будет показано, что знаменатель в этом выражении равен θ — среднему времени пребывания в системе. Связь между плотностями распределения возраста и времени пребывания позволяет рассмотреть только методы расчета $p(\tau)$ в системе, имеющей заданную структуру. Знание этой функции позволяет найти и плотность распределения возраста, определяющую кинетику взаимодействия агрегатов и среды.

Расчет плотности распределения времени пребывания (ПРВП) облегчается тем обстоятельством, что для двух последовательных подсистем время пребывания равно сумме времен пребывания в каждой из них, а значит плотность распределения времени пребывания в системе может быть найдена как свертка плотностей распределения для каждой из подсистем. Вычисление же свертки удобно проводить с использованием интегрального преобразования Лапласа. Ниже изложен структурный подход к расчету ПРВП. Смысл его состоит в том, чтобы для произвольной системы выразить ПРВП через соответствующие характеристики подсистем и структурные особенности их соединения.

Плотности распределения времени пребывания для простейших подсистем

ПРВП может быть найдена экспериментально или на основе модельных представлений. При экспериментальном определении в систему вводят порцию агрегатов и измеряют изменение их количества во времени на выходе системы $c(\tau)$. Эту зависимость часто называют кривой вымывания (рис. 3.6). Для получения ПРВП кривую вымывания нужно нормировать так, чтобы площадь получившейся функции оказалась равной единице. Тогда

$$p(\tau) = c(\tau) / \int_0^{\infty} c(\tau) d\tau. \quad (3.51)$$

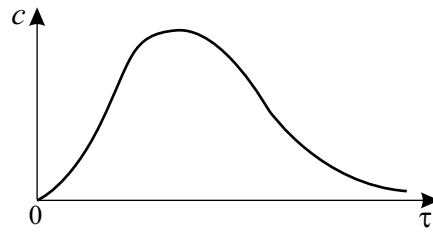


Рис. 3.6. Характер кривой вымывания

Среднее значение времени пребывания рассчитывают как математическое ожидание случайной величины τ :

$$\theta = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau, \quad (3.52)$$

а дисперсию как

$$D = \int_0^{\infty} (\tau - \theta)^2 p(\tau) d\tau. \quad (3.53)$$

Приведем эти характеристики для некоторых простейших подсистем.

Вытеснение. Все агрегаты пребывают в системе одинаковое время, которое равно отношению объема системы к объемной скорости движения среды:

$$\theta = V/g. \quad (3.54)$$

В этом случае ПРВП представляет собой δ -функцию

$$p(\tau) = \delta(\tau - \theta). \quad (3.55)$$

Дисперсия D равна нулю.

Система идеального перемешивания. В системе с идеальным смешением в любой точке объема содержится одинаковое количество агрегатов и вероятность того, что агрегат покинет систему, не зависит от его возраста. Уравнение материального баланса для агрегатов имеет форму

$$\frac{dc}{dt}V = -gc, \quad (3.56)$$

где g — объемный расход агрегатов.

Решение уравнения (3.56) позволяет определить кривую вымывания

$$c(\tau) = c(0) \exp(-\tau g/V), \quad (3.57)$$

а после ее нормирования по форме (3.51) найти ПРВП элемента идеального смешения:

$$p(\tau) = \frac{1}{\theta} \exp(-\tau/\theta), \quad (3.58)$$

где через θ обозначено отношение объема аппарата V к объемному расходу g .

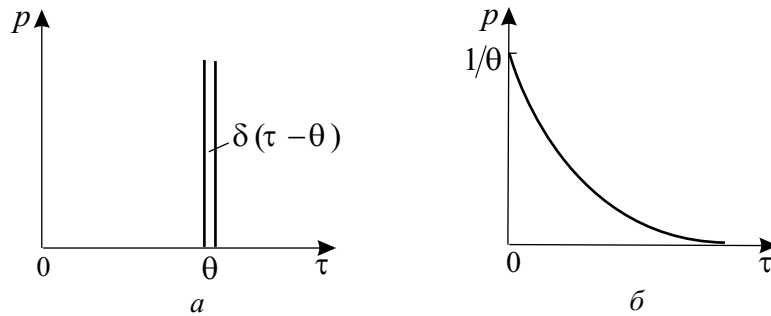


Рис. 3.7. Плотность распределения времени пребывания в аппаратах идеального вытеснения (а) и идеального перемешивания (б)

Аналогично может быть найдена ПРВП для систем неоднородных с диффузией агрегатов между отдельными сечениями и др.

Расчет плотности распределения времени пребывания при элементарных операциях

Слияние потоков. Пусть для каждого из потоков g_i известны плотности распределения времени пребывания агрегатов в системе, а также доли этих потоков в общем потоке:

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_n, \quad \gamma_i = g_i/g, \quad i = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что $\gamma_i \geq 0$, а $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$.

Чтобы подсчитать долю агрегатов в общем потоке g , время пребывания которых лежит в интервале от τ до $\tau + d\tau$, необходимо найти эту долю в каждом из потоков. Она равна

$$p_i(\tau)d\tau.$$

Тогда для потока, полученного после слияния,

$$gp(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^n g_i p_i(\tau)d\tau.$$

Откуда (рис. 3.8)

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i(\tau). \quad (3.59)$$

Пример 3.1. Расчет ПРВП при слиянии потоков (рис 3.8). Пусть поток, поступающий из системы с перемешиванием с объемом $V_1 = 2 \text{ м}^3$, равен $g_1 = 1 \text{ м}^3/\text{ч}$, а из такой же системы объемом $V_2 = 1 \text{ м}^3$ равен $g_2 = 2 \text{ м}^3/\text{ч}$. Требуется найти ПРВП в потоке, образовавшемся после слияния g_1 и g_2 .

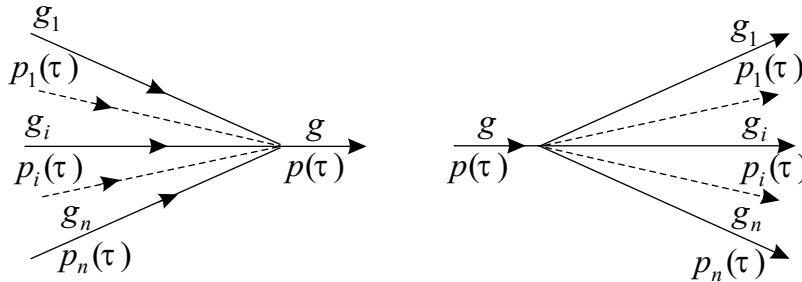


Рис. 3.8. Схемы слияния и разветвления потоков

Согласно выражению (3.58) найдем ПРВП для каждого из потоков

$$p_1(\tau) = \frac{1}{2} \exp(-0,5\tau), \quad p_2(\tau) = 2 \exp(-2\tau).$$

Суммарный расход $g = 1 + 2 = 3 \text{ м}^3/\text{ч}$; $\gamma_1 = 1/3$; $\gamma_2 = 2/3$. В соответствии с формулой (3.59) после слияния потоков получим

$$p(\tau) = \frac{1}{6} \exp(-0,5\tau) + \frac{8}{6} \exp(-2\tau).$$

Разветвление потоков. Если поток, характеризуемый расходом g при ПРВП $p(\tau)$, разветвляется на n потоков (рис. 3.8), то вид функции ПРВП сохраняется, так что

$$p_i(\tau) = p(\tau) \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.60)$$

Изменение расхода. Если характер ПРВП не зависит от изменения объемной скорости потока, то время пребывания агрегатов обратно пропорционально расходу g . Тогда при увеличении расхода ПРВП изменяется так, что график ее сжимается вдоль оси абсцисс, а при уменьшении расхода растягивается во столько раз, во сколько раз изменяется расход. При этом масштаб по оси ординат должен измениться так, чтобы площадь под получившейся кривой была по-прежнему равна единице (рис. 3.9).

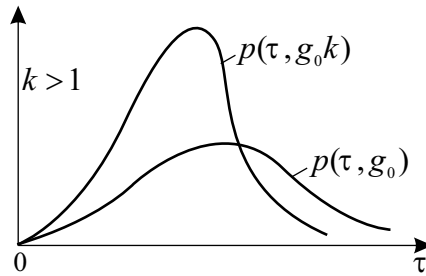


Рис. 3.9. Изменение ПРВП при увеличении расхода g_0 в аппарате в k раз

Обозначим первоначальное значение расхода через g_0 , а измененное — через g и выразим ПРВП при расходе g через ПРВП при расходе g_0 . С учетом сказанного получим

$$p(\tau, g_0 k) = \frac{p(k\tau, g_0)}{\int_0^{\infty} p(k\tau, g_0) d\tau} = kp(k\tau, g_0). \quad (3.61)$$

Здесь k обозначено отношение расходов $k = g/g_0$. Действительно, обозначим $z = k\tau$ и перепишем интеграл из уравнения (3.61):

$$\int_0^{\infty} p(k\tau, g_0) d\tau = \int_0^{\infty} p(z, g_0) dz / k.$$

Так как

$$\int_0^{\infty} p(z, g_0) dz = 1,$$

знаменатель в уравнении (3.61) равен $1/k$.

Т а б л и ц а 3.1.

Изменение плотности распределения времени пребывания в результате элементарных операций

ПРВП	Слияние потоков	Разветвление потоков	Изменение расхода потока	Последовательное соединение
Связь между ПРВП	$p(\tau, G) = \sum_i \gamma_i p(\tau, G_i)$ $G = \sum_i G_i$ $\gamma_i = G_i / G$	$p(\tau, G_i) = p(\tau, G),$ $i = 1, 2, \dots$	$p(\tau, G_0 k) = k p(k\tau, G_0)$	$p(\tau) = \int_0^\tau p_1(\tau_1) p_2(\tau - \tau_1) d\tau_1$
Связь между изображениями ПРВП по Лапласу	$p(s, G) = \sum_i \gamma_i p(s, G_i)$	$p(s, G_i) = p(s, G)$ $i = 1, 2, \dots$	$p(s, G_0 k) = p(s/k, G_0)$	$p(s) = p_1(s) p_2(s)$
Среднее время пребывания	$\theta = \sum_i \gamma_i \theta_i$	$\theta_i = \theta,$ $i = 1, 2, \dots$	$\theta(G_0 k) = \theta(G_0) / k$	$\theta = \theta_1 + \theta_2$
Дисперсия времени пребывания	$D = \sum_i \gamma_i (D_i - \tilde{\theta}_i^2);$ $\tilde{\theta}_i = \sum_{\nu \neq i} \gamma_\nu \theta_\nu - (1 - \gamma_i) \theta_i$	$D_i = D,$ $i = 1, 2, \dots$	$D(G_0 k) = D(G_0) / k^2$	$D = D_1 + D_2$

Пример 3.2. Изменение расхода через систему с перемешиванием. В системе с перемешиванием

$$p(k\tau, g_0) = (1/\theta_0) \exp(-k\tau/\theta_0), \quad \theta_0 = V/g_0,$$

интеграл от этого выражения

$$\int_0^\infty \frac{1}{\theta_0} \exp(-k\tau/\theta_0) d\tau = 1/k.$$

В соответствии с уравнением (3.61) получаем

$$p(\tau, g) = (k/\theta_0) \exp(-k\tau/\theta_0), \quad k = g/g_0.$$

Последовательное соединение подсистем (рис. 3.10). Время пребывания в системе агрегатов, выходящих из двух последовательно соединенных подсистем, равно сумме времен τ_1 и τ_2 пребывания в

каждой из них. Плотность же распределения суммы двух случайных величин можно выразить через плотности распределения $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$ используя операции свертки

$$p(\tau) = \int_0^{\infty} p_1(\tau) p_2(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (3.62)$$

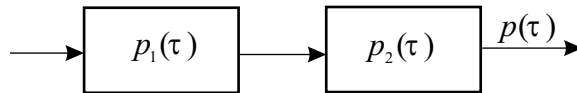


Рис. 3.10. Последовательное соединение подсистем

Смысл равенства (3.62) состоит в том, что сумма $\tau_1 + \tau_2$ равна τ во всех тех случаях, когда время пребывания в первой подсистеме равно произвольному значению τ_1^0 , при этом время пребывания во второй равно $\tau_2 = \tau - \tau_1^0$. Одновременному выполнению условий $\tau_1 = \tau_1^0$ и $\tau_2 = \tau - \tau_1^0$ соответствует произведение вероятностей этих событий, а произвольности τ_1 соответствует интегрирование полученного произведения по всем значениям τ_1 . Верхний предел интегрирования в выражении (3.62) может быть принят равным τ , так как при $\tau_1 > \tau$ функция $p_2(\tau - \tau_1)$ равна нулю.

Среднее время пребывания и дисперсия при элементарных операциях. Во многих случаях при выполнении тех или иных расчетов вместо функциональной характеристики $p(\tau)$ стараются использовать соответствующие ей числовые характеристики — среднее время пребывания θ и дисперсию D . Проследим, как связаны между собой эти величины до и после выполнения элементарных операций.

Слияние потоков. Подставив в формулу (3.52) правую часть равенства (3.59), получим

$$\theta = \int_0^{\infty} \tau \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \gamma_i \theta_i. \quad (3.63)$$

Аналогично для дисперсии времени пребывания в формуле (3.53) $\theta = \theta_i + (\theta - \theta_i)$. Полученное после такой замены выражение подставим в уравнение (3.59):

$$D = \int_0^{\infty} [(\tau - \theta_i) - (\theta - \theta_i)]^2 \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i(\tau) d\tau.$$

После возведения в квадрат под знаком интеграла и выполнения операции интегрирования приходим к выражению

$$D = \sum_{i=1}^n \gamma_i (D_i + \theta_i^2) - \theta^2. \quad (3.64)$$

Разветвление потоков. В соответствии с выражением (3.60) ПРВП до и после разветвления не меняется, поэтому неизменны и ее числовые характеристики

$$\theta_i = \theta, \quad D_i = D, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.65)$$

Изменение расхода. Найдем связь между средним временем пребывания до и после изменения расхода. Так как при изменении g рабочий объем не изменяется,

$$\theta(g) = \theta(g_0)/k, \quad k = g/g_0.$$

Нетрудно показать, что к тому же результату приводит и подстановка в формулу (3.52) правой части равенства (3.61) с заменой $k\tau$ на z ; в этом случае $\tau = z/k$, $d\tau = dz/k$, а

$$\theta(g) = \int_0^{\infty} \tau k p(k\tau, g_0) d\tau = \int_0^{\infty} \frac{z}{k} p(z, g_0) dz = \frac{\theta(g_0)}{k}.$$

Проводя аналогичные выкладки для дисперсии и пользуясь выражением (3.53), получим

$$D(g) = \int_0^{\infty} \left(\tau - \frac{\theta(g_0)}{k} \right)^2 k p(k\tau, g_0) d\tau = \int_0^{\infty} \frac{(z - \theta(g_0))^2}{k^2} p(z, g_0) dz = \frac{D(g_0)}{k^2}. \quad (3.66)$$

Последовательное соединение. Поскольку среднее значение суммы двух независимых случайных величин (а времена пребывания в двух последовательных аппаратах не зависят одно от другого) равно сумме средних значений, постольку среднее время пребывания θ равно сумме средних времен пребывания в каждом из аппаратов:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2. \quad (3.67)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для дисперсии суммы независимых случайных величин:

$$D = D_1 + D_2. \quad (3.68)$$

3.5. Использование преобразования Лапласа для расчета ПРВП

При анализе процессов в линейных динамических системах широко используют интегральное преобразование Лапласа. Основная причина этого состоит в упрощении операции свертки двух функций. Элементарные операции, которые были рассмотрены выше, отличаются от операций структурного анализа линейных динамических систем главным образом необходимостью учитывать расход и требованием, чтобы площадь ПРВП равнялась единице, а сама эта функция была неотрицательна. Тем не менее и здесь операция свертки (3.62) является наиболее трудоемкой, что обуславливает целесообразность применения преобразования Лапласа.

Основные свойства преобразования Лапласа

Функция $f(t)$ и ее изображение по Лапласу $F(s)$ взаимосвязаны операциями прямого и обратного преобразования:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt = L[f(t)], \quad (3.69)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s) \exp(ts) ds = L^{-1}[F(s)]. \quad (3.70)$$

При этом $f(t)$ называют оригиналом, а $F(s)$ — изображением по Лапласу. Из формул (3.69) и (3.70) следуют свойства преобразования Лапласа, перечисленные ниже.

Линейность преобразования. Функция $f(t)$ входит в подынтегральное выражение (3.69) в первой степени, что вместе с линейностью операции интегрирования приводит к тому, что преобразование суммы двух функций равно сумме преобразований для каждой из них, а преобразование функции $f(t)$, умноженной на число k , равно $kF(s)$. Таким образом

$$L \left[\sum_i k_i f_i(t) \right] = \sum_i k_i F_i(s). \quad (3.71)$$

Интегрирование оригинала. Если функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(s)$, то интеграл от этой функции

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + \varphi(0)$$

имеет изображение по Лапласу, равное

$$L[\varphi(t)] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\varphi(0)}{s} = \Phi(s). \quad (3.72)$$

Дифференцирование оригинала. Если производная функции $f(t)$ преобразуема по Лапласу, то ее изображение связано с изображением самой функции $F(s)$ соотношением

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0). \quad (3.73)$$

Изменение масштаба аргумента. При изменении масштаба аргумента оригинала в k раз изображение функции $f(t)$ изменяется согласно правилу

$$L[f(tk)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right). \quad (3.74)$$

Свертка двух функций. Изображение по Лапласу результата свертки двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ согласно формуле

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

чрезвычайно просто выражается через изображения этих функций

$$L[\varphi(t)] = F_1(s)F_2(s). \quad (3.75)$$

Таким образом, свертке оригиналов соответствует произведение изображений.

Сдвиг оригинала по оси времени. Сдвигу оригинала вправо по оси t на величину a соответствует умножение изображения на $\exp(-as)$, так что

$$L[f(t-a)] = \exp(-as)F(s). \quad (3.76)$$

Начальное значение функции. Начальное значение функции может быть вычислено через ее изображение согласно формуле

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (3.77)$$

Конечное значение функции. Значение функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ может быть найдено через ее изображение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (3.78)$$

Умножение на аргумент в области оригиналов. Результату умножения функции $f(t)$ на t соответствует изменение ее изображения согласно равенству

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}. \quad (3.79)$$

В более общем случае

$$L[t^\nu f(t)] = (-1)^\nu \frac{d^\nu F(s)}{(ds)^\nu}. \quad (3.80)$$

Эти свойства преобразования Лапласа вытекают из выражения (3.69), связывающего оригинал и изображение.

Общая схема использования преобразования Лапласа распадается на три операции: 1) переход в область преобразований; 2) выполнение в области преобразований таких операций, как свертка оригиналов, их дифференцирование и пр.; 3) вычисление обратного преобразования от результирующего отображения. Для выполнения первой и третьей операций используют подробные таблицы прямых и обратных преобразований [22], а если их недостаточно, то представляют преобразуемые функции в форме разложения в ряд по табличным функциям и используют свойство линейности преобразования Лапласа.

Часто интерес представляет не результат проведения тех или иных операций над оригиналами, а некоторые числовые характеристики результирующей функции; в этом случае можно воспользоваться теоремами о начальном и конечном значениях и не делать обратного преобразования, чем мы и воспользуемся ниже.

Из приведенных свойств преобразования Лапласа вытекают некоторые следствия, полезные при анализе ПРВП:

1. Если площадь $Q = \int_0^{\infty} f(t)dt$ функции f ограничена, то она может быть вычислена через преобразование Лапласа $F(s)$:

$$Q = \lim_{s \rightarrow 0} F(s). \quad (3.81)$$

Действительно, преобразование интеграла $\varphi(t)$ от функции $f(t)$ равно $(1/sF(s))$, а площадь под кривой функции $f(t)$ представляет собой предел $\varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$, что применительно к изображению интеграла дает право воспользоваться теоремой о конечном значении. В частности, поскольку площадь ПРВП всегда равна единице, то

$$\lim_{s \rightarrow 0} L[p(\tau)] = \lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 1. \quad (3.82)$$

2. Среднее значение времени пребывания

$$\theta = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau$$

представляет собой площадь под кривой $f(\tau) = \tau p(\tau)$. Учитывая, что изображение $\tau p(\tau)$ равно

$$-\frac{d}{ds}[p(s)]$$

и, применяя формулу (3.81), получим

$$\theta = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ -\frac{d}{ds}[p(s)] \right\}. \quad (3.83)$$

3. Дисперсия времени пребывания

$$D = \int_0^{\infty} (\tau - \theta)^2 p(\tau) d\tau.$$

После возведения в квадрат в подынтегральном выражении получим сумму интегралов. Применяя к каждому из них формулу (3.81) и учитывая уравнение (3.80), приходим к выражению

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2 p(s)}{ds^2} - \theta^2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d^2 p(s)}{ds^2} - \left(\frac{dp(s)}{ds} \right)^2 \right]. \quad (3.84)$$

Преобразование по Лапласу ПРВП при элементарных операциях. *Слияние потоков.* Из формулы (3.59) и свойства линейности преобразования Лапласа (3.71) следует, что преобразование ПРВП, получившейся после слияния потоков (схема на рис. 3.8), связано с ПРВП исходных потоков зависимостью

$$p(s) = \sum_i \gamma_i p_i(s). \quad (3.85)$$

Разветвление потоков. Из равенства (3.60) вытекает, что

$$p_i(s) = p(s), \quad i = 1, 2, \dots$$

Изменение расхода. С учетом равенства (3.61) и теоремы об изменении масштаба оригинала (3.85) получим

$$L[p(\tau, g_0 k)] = p[(s/k), g_0] = p(s, g). \quad (3.86)$$

Последовательные системы. ПРВП системы представляет собой свертку ПРВП каждой из подсистем, а изображение свертки равно произведению изображений $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$, так что

$$L[p(\tau)] = p_1(s)p_2(s). \quad (3.87)$$

Легко видеть, что формула (3.87) обобщается на любое число последовательных подсистем.

ПРВП для простейших структур.

Структурный подход к расчету ПРВП проиллюстрируем примерами конкретных схем.

Параллельное соединение подсистем. Пусть при параллельном соединении (рис. 3.11.) расход через i -ю ветвь схемы равен g_i и составляет долю γ_i от общего расхода агрегатов. Тогда ПРВП в точке слияния потоков определена выражением

$$p(\tau) = \sum_i \gamma_i p_i(\tau), \quad (3.88)$$

а преобразование Лапласа для этой функции запишется как

$$p(s) = \sum_i \gamma_i p_i(s). \quad (3.89)$$

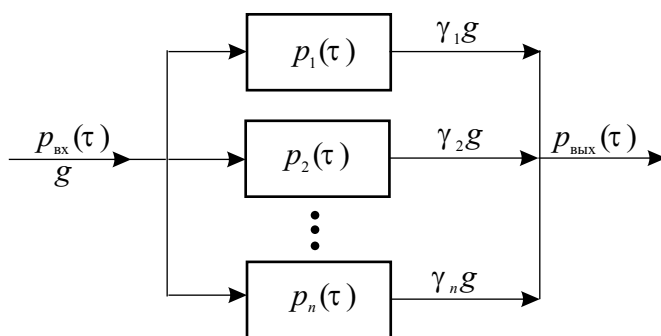


Рис. 3.11. Параллельное соединение аппаратов

При этом предполагалось, что время пребывания в системе всех агрегатов, поступающих на ее вход, равно нулю. Если же это не так, то ПРВП на выходе равна свертке функции (3.88) и ПРВП на входе схемы, а преобразование по Лапласу этой функции равно произведению соответствующих функций.

Схема с возвратом части агрегатов на вход. В подобную систему (рис. 3.12) поступает поток g_0 , который вместе с обратным потоком rg_0 подается в систему, характеризующейся ПРВП $p_a(\tau)$. После этого поток агрегатов частично поступает на выход системы, а частично направляется на ее вход, через подсистему, для которой ПРВП $p_p(\tau)$.

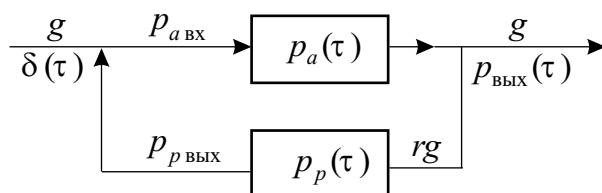


Рис. 3.12. Соединение подсистем с подачей части агрегатов с выхода на вход системы

Пусть функции $p_a(\tau)$ и $p_p(\tau)$ соответствуют расходу g_0 в аппараты, найдем связь между плотностью распределения времени пребывания агрегатов в схеме $p_{сх}(\tau)$, с характеристиками $p_a(\tau)$ и $p_p(\tau)$ и долей обратного потока r . Эту связь удобно искать в области преобразования Лапласа. Учитывая, что $p_{вх}(s) = 1$, так как $p_{вх}(\tau) = \delta(\tau)$, в соответ-

ствии с выражением (3.89) мы можем записать для потока агрегатов на входе в после точки слияния

$$p_{\text{ВХ}}(s) = \frac{g_0 + r g_0 p_{p_{\text{ВЫХ}}}(s)}{(r+1)g_0} = \frac{1 + r p_{p_{\text{ВЫХ}}}(s)}{r+1},$$

где $p_{a_{\text{ВХ}}}(s)$ и $p_{p_{\text{ВЫХ}}}(s)$ — изображения ПРВП на входе в систему и на выходе обратного потока.

По формулам (3.86) и (3.87) находим

$$p_{\text{СХ}}(s) = p_{\text{ВЫХ}}(s) = p_{\text{ВХ}}(s) p_a[s/(r+1)], \quad p_{p_{\text{ВЫХ}}}(s) = p_{\text{ВЫХ}}(s). \quad (3.90)$$

Наконец,

$$p_{p_{\text{ВЫХ}}}(s) = p_{\text{СХ}}(s) p_p(s). \quad (3.91)$$

Подставляя формулу (3.91) в равенство (3.90), получим

$$p_{\text{СХ}}(s) = p_a[s/(r+1)] \frac{1 + r p_{\text{СХ}}(s) p_0(s/r)}{r+1}.$$

Откуда

$$p_{\text{СХ}}(s) = \frac{1}{r+1} \frac{p_a[s/(r+1)]}{1 - \frac{1}{r+1} p_a[s/(r+1)] r p_p(s/r)}. \quad (3.92)$$

Пример 3.3. Расчет ПРВП для схемы с обратным потоком агрегатов. Определим $p_{\text{СХ}}(\tau)$ для схемы, состоящей из системы смешения:

$$p_a(\tau) = \frac{1}{\theta} \exp(-\tau/\theta), \quad p_a(s) = 1/(\theta s + 1) \quad (3.93)$$

и системы возврата агрегатов, характеризующейся сдвигом во времени

$$p_p(\tau) = \delta(\tau - \tau_0), \quad p_p(s) = \exp(-\tau_0 s). \quad (3.94)$$

В соответствии с уравнением (3.92) имеем

$$p_{\text{СХ}}(s) = \frac{\frac{1}{r+1} \frac{1}{[\theta s/(r+1)] + 1}}{1 - r \exp(-\tau_0 s/r) \frac{1}{r+1} \frac{1}{[\theta s/r(r+1)] + 1}}.$$

Для системы ПРВП $p_{\text{СХ}}(\tau)$ при $r = 1$, $\theta = 1$, $\tau_0 = 1$ показана на рис. 3.13,а. Для сравнения там же нанесена ПРВП (пунктирная линия)

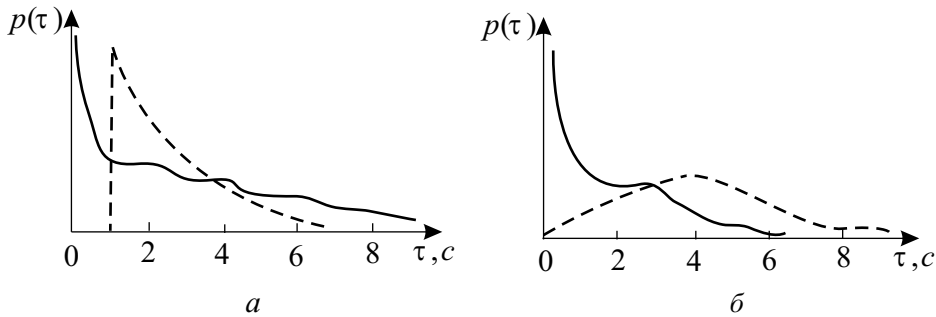


Рис. 3.13. ПРВП сегрегированных систем при различных способах их соединения

для включенных последовательно подсистем с характеристиками (3.93) и (3.94) и расходом q_0 .

В случае, когда возврат осуществляется через подсистему смешения,

$$p_p(s) = 1/(\theta s + 1),$$

$$p_{cx}(s) = \frac{1}{\{[\theta s/(r + 1)] + 1\} \left\{ r + 1 - r \frac{1}{[\theta s/(r + 1) + 1]^2} \right\}}.$$

При $r = 1$ ПРВП $p_{cx}(\tau)$ показана на рис. 3.13,б; там же пунктиром изображена кривая для последовательного включения этих подсистем.

Когда по тем или иным причинам удастся снять экспериментально ПРВП лишь для системы в целом, а для всех ее подсистем, кроме одной, характеристики известны, возникает обратная задача — определение неизвестной характеристики этой подсистемы. Выразив $p_{cx}(s)$ через характеристики подсистем, получаем во временной области интегральное, а в области преобразований Лапласа — алгебраическое уравнение относительно искомой характеристики.

Связь изображений по Лапласу плотностей распределения времени пребывания и возраста агрегатов

Покажем, как связаны изображения по Лапласу плотностей распределения возраста и времени пребывания агрегатов.

Обозначая изображения по Лапласу для $p(\tau)$ через $p_\tau(s)$, а для $p(\alpha)$ — через $p_\alpha(s)$ и учитывая свойства линейности преобразования интеграла

ла от $p(\tau)$, можем переписать связь (3.50) в области преобразований:

$$p_\alpha(s) = \frac{1}{\theta s}(1 - p_\tau(s)). \quad (3.95)$$

Знаменатель в выражениях (3.20), (3.50) равен пределу при $s \rightarrow 0$ преобразования по Лапласу подынтегрального выражения, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow 0} L \left[1 - \int_0^\alpha p(\tau) d\tau \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s} - \frac{p(s)}{s} \right].$$

Устремляя s к нулю и раскрывая неопределенность, убеждаемся, что этот предел равен пределу $-dp/ds$, а он, в свою очередь, равен среднему времени пребывания θ .

Между средними значениями и дисперсиями возраста и соответствующими характеристиками времени пребывания τ имеют место зависимости, вытекающие из уравнений (3.20), (3.50),

$$m_\alpha = 0,5 \left(\theta + \frac{D_\tau}{\theta} \right), \quad D_\alpha = \frac{m_\tau^3}{3\theta} - \left(\frac{m_{\tau^2}^2}{4\theta^2} \right),$$

где m_α , θ , m_τ^2 и m_τ^3 — средние значения α , τ , τ^2 , и τ^3 соответственно, а D_α , D_τ — дисперсии соответствующих величин.

Глава 4

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ

Для термодинамических систем, содержащих активные подсистемы, характерны два класса экстремальных задач, в определенном смысле обратных друг другу:

— задачи о предельном извлечении целевого потока (энергии, вещества и пр.);

— задачи о минимальных затратах целевого потока при тех или иных условиях, наложенных на систему.

Задачи этих двух типов, тесно связаны друг с другом. Если на продолжительность процесса не наложено ограничений, то решения задач об извлечении максимальной работы из неравновесной термодинамической системы и о минимальных затратах работы на разделение равновесной системы на подсистемы с заданными значениями интенсивных переменных совпадают, так как достигаются в классе обратимых процессов: как при извлечении максимальной работы в прямой задаче, так и при затрате ее в обратной задаче управляющая подсистема (рабочее тело преобразователя) должна при контакте с каждой из термодинамических подсистем изменять свои интенсивные переменные так, чтобы разность между ними и интенсивными переменными подсистем была сколь угодно мала. При этом максимум извлеченной работы A_i^* и минимум затраченной работы A_z^* одинаковы (равны A^0), если начальные и конечные состояния подсистем в обеих задачах соответствуют друг другу.

В том случае, когда продолжительность процесса фиксирована, предельное значение извлеченной работы уменьшается, а минимум затраченной увеличивается по сравнению со случаем обратимого процесса, однако решение каждой из задач достигается тогда, когда при заданных коэффициентах переноса и других кинетических факторов достигнут минимум прироста энтропии системы. Так как минимум производства энтропии соответствует минимуму диссипации энергии, такие процессы называют процессами минимальной диссипации.

В данной главе рассмотрены процессы, которые при заданной средней интенсивности (средней величине движущих сил) имеют минимальную диссипацию. В этих процессах движущие силы так распределены во времени или в пространстве, что необратимость процесса, оцениваемая производством энтропии, минимальна. В ряде случаев точный минимум найти не удастся или для его определения требуется слишком много исходных данных. Тогда стремятся получить оценку производства энтропии снизу.

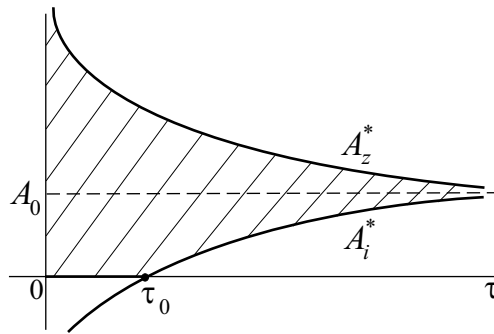


Рис. 4.1. Характер зависимости максимума извлеченной (A_i^*) и минимума затраченной (A_z^*) работы от продолжительности процесса

В том случае, когда процесс состоит из нескольких стадий, каждая из них должна быть проведена с минимальной диссипацией. Последняя зависит от интенсивности процесса, коэффициентов переноса и пр. Поэтому задача проектировщика состоит в том, чтобы выбрать такое распределение коэффициентов переноса и средних интенсивностей потоков между стадиями, чтобы при заданной производительности системы и ее стоимости минимизировать суммарное производство энтропии.

Класс процессов минимальной диссипации столь же важен, как и класс обратимых процессов. Он сужает границы наших возможностей.

Область, заштрихованная на рис. 4.1, оказывается недостижимой для процессов с фиксированной продолжительностью или заданной средней интенсивностью потоков. Так, при τ , меньшем τ_0 , никакой работы из системы извлечь нельзя. Условия минимальной диссипации связывают друг с другом законы изменения интенсивных переменных термодинамических подсистем и рабочего тела. Эти условия зависят от кинетики потоков и могут быть одинаковыми для целого класса кинетических зависимостей.

Первоначально рассмотрим задачу о минимальной диссипации в общем виде. Затем полученные соотношения конкретизируем для целого ряда процессов (тепло- и массопереноса, дросселирования, химических превращений и пр.).

4.1. Условия минимальной диссипации

Обозначим интенсивные переменные для i -й системы u_i , а экстенсивные x_i . В общем случае эти переменные векторные. Когда две подсистемы контактируют друг с другом, различие между u_1 и u_2 приводит к возникновению потока $J(u_1, u_2)$. Функция J обычно непрерывна, дифференцируема по совокупности аргументов и для скалярных u_1 и u_2 обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_j}{\partial u_{1j}} > 0, & \quad \frac{\partial J_j}{\partial u_{2j}} < 0, \\ J(u_1, u_2) = 0 & \quad \text{при} \quad u_2 = u_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В более общем случае $J = (J_1, \dots, J_j, \dots, J_m)$ — вектор потоков, $u_\nu = (u_{\nu 1}, \dots, u_{\nu j}, \dots, u_{\nu m})$ — вектор интенсивных переменных ν -й подсистемы ($\nu = 1, 2$). При совпадении интенсивных переменных вектор потоков равен нулю.

Различие между векторами u_1 и u_2 приводит к появлению движущих сил X_j , каждая из которых определяется только u_{1j} и u_{2j} , удовлетворяет условиям, аналогичным (4.1), и имеет тот же знак, что и поток J_j . Производство энтропии σ , характеризующее необратимость процесса, равно значению скалярного произведения вектора потоков на вектор движущих сил, а среднее его значение

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_0^L \sum_{j=1}^m J_j(u_1, u_2) X_j(u_{1j}, u_{2j}) dl, \quad (4.2)$$

где l — имеет смысл времени или поверхности контакта. Подынтегральное выражение в этом равенстве всегда больше или равно нулю.

Будем предполагать, что в нашем распоряжении находится одна из интенсивных переменных (для определенности $u_2(l)$), которая может принимать значения из некоторого множества V . Вторая же переменная в силу изменения экстенсивных переменных первой подсистемы $Y_1 \left(\frac{dY_{1j}}{dl} = -J_j(u_1, u_2) \right)$ изменяется так, что

$$\frac{du_{1j}}{dl} = \varphi_j(u_1, u_2), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Средние значения всех или части потоков заданы:

$$\frac{1}{L} \int_0^L J_j(u_1, u_2) dl = \bar{J}_j, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad k_1 \leq m. \quad (4.4)$$

При этих условиях требуется найти минимальное производство энтропии $\bar{\sigma}$.

Скалярный случай. Получим условия оптимальности задачи (4.2)–(4.4) первоначально для скалярного случая ($m = 1$), а затем для векторного. В скалярном случае задача примет форму

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_0^L J(u_1, u_2) X(u_1, u_2) dl \rightarrow \min_{u_2 \in V} \quad (4.5)$$

при условиях

$$\frac{du_1}{dl} = \varphi(u_1, u_2), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L J(u_1, u_2) dl = \bar{J}. \quad (4.7)$$

Величина L может быть как фиксированной, так и подлежащей оптимальному выбору.

Допустим, что в оптимальном процессе $\varphi(u_1, u_2) \neq 0$; это позволяет провести замену переменной

$$dl = \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)}. \quad (4.8)$$

После этой замены задача (4.5)–(4.7) примет вид (считаем первоначально L заданной)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{J(u_1, u_2)X(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)} du_1 \rightarrow \min_{u_2 \in V} \quad (4.9)$$

при условиях

$$\frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{J(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)} du_1 = \bar{J}, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_{1L}} \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)} = 1 \quad (4.11)$$

и фиксированном значении u_{10} .

Эта задача существенно проще исходной задачи (4.5)–(4.7), так как не содержит дифференциального уравнения (4.6). Ее решение u_2^* получается не как функция l , а как функция u_1 , что во многих случаях гораздо полезнее. Функция Лагранжа для задачи (4.9)–(4.11) имеет вид

$$R = \frac{1}{\varphi(u_1, u_2)} [J(u_1, u_2)(X(u_1, u_2) + \lambda_1) + \lambda_2]. \quad (4.12)$$

Так как эта задача усредненная, условия оптимальности для нее имеют форму принципа максимума (см. приложение П.3)

$$u_2^*(u_1, \lambda) = \arg \max_{u_2 \in V} R(u_1, u_2, \lambda). \quad (4.13)$$

При отсутствии ограничений или внутри допустимой области V функция R стационарна по u_2

$$(X + \lambda_1)(\varphi J'_{u_2} - \varphi'_{u_2} J) + \varphi J X'_{u_2} - \lambda_2 \varphi'_{u_2} = 0. \quad (4.14)$$

Условие (4.14) совместно с равенствами (4.10), (4.11), а также с требованием

$$R(u_{1L}, u_2(u_{1L}), \lambda) = 0 \quad (4.15)$$

позволяет найти $u_2^*(u_1)$, u_{1L} , λ_1 , λ_2 .

Задача сильно упрощается в одном распространенном случае, когда скорость изменения переменной u_1 пропорциональна потоку:

$$\varphi(u_1, u_2) = c(u_1)J(u_1, u_2). \quad (4.16)$$

В этом случае первое слагаемое в равенстве (4.14) обращается в нуль, и оно примет форму

$$J^2(u_1, u_2) = \lambda_2 \left(\frac{\partial J(u_1, u_2)}{\partial u_2} : \frac{\partial X(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right), \quad (4.17)$$

а условие (4.10) переписывается как

$$\int_{u_{10}}^{u_{1L}} \frac{du_1}{c(u_1)} = \bar{J} \cdot L, \quad (4.18)$$

что определяет u_{1L} независимо от оптимального решения $u_2^*(u_1)$.

Распределение поверхности. В том случае, когда заданную общую поверхность нужно распределить по времени или по длине аппарата, поток записывают в форме

$$J(u_1, u_2) = a(l)\tilde{J}(u_1, u_2), \quad (4.19)$$

коэффициент переноса $a(l)$ в этом выражении удовлетворяет ограничению

$$\int_0^L a(l)dl = \int_{u_{10}}^{u_{1L}} a(u_1) \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)} = A, \quad (4.20)$$

функция $a(l)$ подлежит оптимальному выбору. Условие стационарности по $a(u_1)$ функции Лагранжа

$$R_1 = R(u_1, u_2, \lambda) - \lambda_3 \frac{a(u_1)}{\varphi(u_1, u_2)},$$

где R определяется выражением (4.12), приводит с учетом (4.19) к равенству

$$\tilde{J}(u_1, u_2)(X(u_1, u_2) + \lambda_1) = \lambda_3, \quad (4.21)$$

которое нужно добавить к условиям (4.14), (4.15) вместе с ограничением (4.20) и условием неотрицательности $a(u_1) \geq 0$.

Векторный случай. Условия оптимальности для задачи (4.2)–(4.4) могут быть получены с использованием принципа максимума Понтрягина (см. приложение П.4). Функция Гамильтона для этой задачи имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^k [\psi_0 J_j(u_1, u_2) X_j(u_{1j}, u_{2j}) + \psi_j \varphi_j(u_1, u_2) + \lambda_j J_j(u_1, u_2)].$$

Сопряженные переменные ψ_j удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\psi_j}{dl} = -\frac{\partial H}{\partial u_{1j}}, \quad j = 1, \dots, k, \quad \psi_j(L) = 0, \quad (4.22)$$

а переменные u_2^* определяются по условию максимума H

$$u_{2j}^*(l) = \operatorname{argmax}_{u_{2j} \in V} H(u_1^*(l), \psi(l), \lambda), \quad j = 1, \dots, k, \quad \lambda_j = 0 \quad \text{при} \quad j > k_1. \quad (4.23)$$

В невырожденном случае $\psi_0 = -1$.

Аналитическое решение уравнений (4.22), (4.23) совместно с уравнениями (4.3) и условиями (4.4) возможно лишь в редких случаях, поэтому представляют интерес способы получения более простых соотношений, определяющих процесс минимальной диссипации с учетом особенностей кинетических зависимостей, а также способы получения оценок $\bar{\sigma}_{\min}$ снизу и сверху.

Использование уравнения Эйлера. В работе [151] учитывают при выводе условий минимальной диссипации связь между интенсивными и экстенсивными переменными первой подсистемы и тот факт, что поток равен скорости изменения экстенсивных переменных. Задача о минимальной диссипации в этом случае примет форму

$$\bar{\sigma} = \int_0^{-L} \sum_i (u_{1i}(Y) - u_i) J_i(u_1, u) dl \rightarrow \min \quad (4.24)$$

при условиях

$$\frac{dY_i}{dl} = -J_i(u_1, u), \quad Y_i(0) = Y_{i0}, \quad Y_i(\tau) = \bar{Y}_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (4.25)$$

где u — вектор интенсивных переменных управляющей подсистемы.

Уравнения (4.25) с учетом монотонности функции $J = \dot{Y}$ по u можно разрешить относительно u :

$$u_i = f_i \left(u_1, \frac{dY}{dl} \right), \quad i = 0, \dots, n, \quad (4.26)$$

где f — обратная кинетическая функция. После подстановки выражений (4.26) в интеграл (4.24) задача принимает форму классической задачи вариационного исчисления и условие оптимальности для нее может быть записано в виде уравнения Эйлера (см. приложение П.4)

$$\sum_i \frac{dY_i}{dl} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j} - \frac{d}{dl} \left(\sum_i \frac{dY_i}{dl} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j} + f_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

После преобразования этого уравнения получают условия минимальной диссипации в форме

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n J_i(u_1, u) \frac{\partial f_i}{\partial Y_j'} J_j(u_1, u) = \text{const}, \quad (4.28)$$

где $\partial Y_j' = \frac{dY_j}{dl}$.

В процессе преобразований уравнения Эйлера (4.27) авторы [151], специально этого не оговаривая, полагают, что для любых i и j

$$\frac{\partial u_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial u_j}{\partial Y_i}.$$

Можно показать, что это равенство, в свою очередь, справедливо лишь при выполнении условия

$$\sum_{\nu=0}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_{1\nu}} \frac{\partial u_{1\nu}}{\partial Y_j} - \frac{\partial f_j}{\partial u_{1\nu}} \frac{\partial u_{1\nu}}{\partial Y_i} \right) = 0, \quad \forall i, j. \quad (4.29)$$

Таким образом, прежде чем использовать условия (4.28), нужно проверить, выполнены ли требования (4.29).

Потоки — функции движущих сил. Условия оптимальности для векторного термодинамического процесса упрощаются, когда между вектором потоков J_i в (4.24) и вектором движущих сил

$$X = (X_0, \dots, X_n), \quad X_i = u_{1i}(Y) - u_i.$$

есть взаимно однозначная зависимость.

Задача (4.24), (4.25) примет в этом случае вид

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\tau} \sum_{i=0}^n X_i(J) J_i dt \rightarrow \min_J \quad (4.30)$$

при условиях

$$\int_0^{\tau} J_i dt = \bar{Y}_i - Y_{i0}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.31)$$

Задача (4.30), (4.31) представляет собой задачу о вычислении значения выпуклой оболочки функции $(n+1)$ -й переменной

$$\sigma(J) = \sum_{i=0}^n X_i(J) J_i \quad (4.32)$$

в точке $J = (\bar{Y} - Y_0)/\tau$. Решение этой задачи может быть найдено по условию (см. приложение П.3)

$$L = \left(\sigma(J) + \sum_{i=0}^n \lambda_i J_i \right) \rightarrow \min_{J_i} \max_{\lambda_i}, \quad (4.33)$$

которое определяет базовые значения J^k вектора потоков. В этих точках, количество которых не более $(n+2)$ -х, достигается одно и то же минимальное по J и максимальное по λ значение L .

На оптимальном решении задачи (4.30), (4.31) вектор движущих сил переключается в произвольном порядке между значениями $X(J^k)$, принимая каждое из них в течение времени $\gamma_k \tau$. Доли интервала γ_k находят из условий

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k J_i^k &= (\bar{Y}_i - Y_{i0})/\tau, \quad i = 0, \dots, n, \\ \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k &= 1, \quad \gamma_k \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Так как потоки J_i принимают базовые значения J_i^k , то в оптимальном процессе функции $Y_i^*(t)$ кусочно-линейные. Построив по ним функции $u_{1i}^*(t) = u_{1i}(Y^*(t))$, можно найти оптимальные управления

$$u_i^*(t) = u_{1i}^*(t) - X_i^*(t), \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.35)$$

В случае, когда функция $\sigma(J)$ выпукла вниз (это можно проверить по условиям Сильвестра), она совпадает со своей выпуклой оболочкой. Тогда

$$X_i^*(t) = \text{const} = \frac{\bar{Y}_i - Y_{i0}}{\tau}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (4.36)$$

$$Y_i^*(t) = Y_{i0} + \frac{\bar{Y}_i - Y_{i0}}{\tau} t. \quad (4.37)$$

Подставив эти функции в $u_{1i}(Y)$, найдем изменение интенсивных переменных в процессе минимальной диссипации и по формулам (4.35) $u_i^*(t)$, отличающиеся от $u_{1i}^*(t)$ на постоянные величины $X_i^*(J_i)$.

Линейная зависимость потоков от движущих сил. При малом отклонении от термодинамического равновесия, когда потоки J и силы X связаны соотношениями Онзагера

$$J = AX, \quad (4.38)$$

в которых матрица феноменологических коэффициентов A симметрическая и положительно определенная, выражение, стоящее под знаком

интеграла в (4.2), — положительно определенная квадратичная форма от термодинамических сил. В этом случае решение задачи кардинально упрощается, а именно: на первом ее этапе можно отбросить условия (4.3) и перейти к задаче о минимуме среднего значения квадратичной формы

$$\bar{\sigma} = \overline{(X^T A X)} \rightarrow \min \quad (4.39)$$

при условиях

$$\sum_{\nu=1}^k a_{\nu j} \overline{X_{\nu}} = \overline{J_j}, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad (k_1 \leq k). \quad (4.40)$$

Переменными в этой усредненной задаче (см. приложение П.3) является вектор движущих сил X . Так как задача (4.39), (4.40) выпуклая, то ее решение соответствует постоянству искомым переменных, а значит, определение X_{ν}^* сводится к решению задачи квадратичного программирования, получающейся из (4.39), (4.40) при отбрасывании усреднения.

На втором этапе находят значения вектора $u_2 \in V$, удовлетворяющие условиям

$$X_j(u_{1j}, u_{2j}) = X_j^*, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4.41)$$

и уравнениям (4.3). Для этого можно рассматривать условия (4.41) как уравнения, определяющие зависимость $u_2(u_1)$. После подстановки этой зависимости в (4.3) и решения уравнений получим $u_1^*(l)$, а значит, и $u_2^*(u_1^*(l)) = u_2^*(l)$. Если найденное решение удовлетворяет ограничениям, то задача (4.39), (4.40) эквивалентна исходной, и процесс минимальной диссипации найден. Если $u_2^*(l) \notin V$, то значение $\bar{\sigma}^*$ задачи (4.39), (4.40) дает оценку снизу для минимального производства энтропии в необратимом процессе.

Оценки минимальной диссипации. Оценку снизу для $\bar{\sigma}_{\min}$ можно получить, если отбросить условия (4.3) и считать $u(l) = (u_1(l), u_2(l))$ управлением в задаче (4.2), (4.4). Точность оценки увеличится, если предварительно ограничить множество возможных значений $u_1(l)$ с учетом заданных граничных условий и вида функций φ_j .

Задача (4.2), (4.4) — усредненная задача нелинейного программирования (см. приложение П.3). Ее оптимальное решение $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ либо постоянно, либо кусочно-постоянно, причем количество базовых значений $u^{*\nu}$ не превышает $(k+1)$. Если задача

$$\sum_{j=1}^k \overline{J_j} X_j(u_j) + \sum_{j=k+1}^m J_j(u) X_j(u_j) \rightarrow \min_{u \in V} / J_j(u) = \overline{J_j}, \quad j = 1, \dots, k \quad (4.42)$$

выпукла, то решение усредненной задачи постоянно по l и определяется условием

$$L(u, \lambda) = \left[\sum_{j=1}^k (\bar{J}_j X_j(u_j) + \lambda_j J_j(u)) + \sum_{j=k+1}^m J_j(u) X_j(u_j) \right] \rightarrow \min_u \max_\lambda. \quad (4.43)$$

Если в минимаксной задаче (4.43) минимум по u достигается в нескольких точках (не более $k+1$), то соответствующие значения $u^{*\nu}$ являются базовыми и функция $u^*(l)$ переключается между ними, принимая каждое из них в течении доли $\gamma_\nu L$ от интервала $[0, L]$. Значения $\gamma_\nu \geq 0$, находятся при подстановке решения в условия (4.4), которые примут форму

$$\sum_{\nu} \gamma_\nu J_j(u_\nu^*) = \bar{J}_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad \sum_{\nu} \gamma_\nu = 1. \quad (4.44)$$

Последовательность, в которой $u^*(l)$ принимает базовые значения, не сказывается на величине оценки $\bar{\sigma}$ снизу, но может быть выбрана так, чтобы решение $\tilde{u}_1(l)$, найденное при подстановке $u^*(l, \gamma)$ в уравнение (4.3), оказалось возможно ближе к составляющей $u_1^*(l, \gamma)$ переключательного решения, т.е. к реализуемому решению.

Оценку сверху для $\bar{\sigma}^*$ дает любое допустимое решение задачи, например, решение, при котором потоки постоянны и равны \bar{J} . Из этого условия можно найти $u_2(u_1)$, после подстановки этой зависимости в выражение (4.3) найти изменение $u_1(l)$, соответствующее ему изменение $u_2(l)$ и величину $\bar{\sigma}$, которая заведомо не превосходит $\bar{\sigma}^*$. Разность между нижней и верхней оценкой характеризует их точность.

Потоки не связаны друг с другом. Решение многомерной задачи кардинально упрощается в случае, когда взаимодействия независимы, т.е. каждый из потоков зависит только от своих переменных

$$J_j = J_j(u_{1j}, u_{2j}), \quad j = 1, \dots, k,$$

то же относится и к термодинамическим силам X_j , причем

$$\frac{du_{1j}}{dl} = \varphi_j(u_{1j}, u_{2j}), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = \bar{u}_1, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.45)$$

В этом случае задача о минимуме диссипации распадается на k одномерных задач вида

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{L} \int_0^L J_j(u_{1j}, u_{2j}) X_j(u_{1j}, u_{2j}) dl \rightarrow \min \quad (4.46)$$

при условии (4.45) и

$$\frac{1}{L} \int_0^L \varphi_j(u_{1j}, u_{2j}) dl = \frac{u_1(L) - u_1(0)}{L}. \quad (4.47)$$

Аналогично одномерному случаю для выбора каждой из переменных u_{2j} можно записать требование

$$u_{2j}^* = \arg \max_{u_{2j} \in V_j} \left[\frac{1}{L} (J_j X_j + \lambda_j) \right], \quad (4.48)$$

или, при отсутствии ограничений на u_{2j} ,

$$\frac{J_j(u_{1j}, u_{2j})}{dJ_j/\partial u_{2j}} \frac{d}{du_{2j}} (J_j X_j) - J_j X_j = \text{const} = \lambda_j. \quad (4.49)$$

Величины λ_j определяют из условий

$$\int_{u_{1j}(0)}^{\bar{u}_{1j}} \frac{du_{1j}}{\varphi_j(u_{1j}, u_{2j}^*(\lambda_j, u_{1j}))} = L, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.50)$$

Может оказаться, что значения \bar{u}_{1j} заданы не для всех j , а только для $j = 1, \dots, k_1$, $k_1 < k$. Тогда для определения λ_j совместно с u_{1j} при $j = \overline{k_1 + 1, k}$ имеем дополнительно условия равенства нулю выражения, стоящего под знаком $\arg \max$ в (4.48), причем в функциях φ_j, g_j, f_j вместо u_{1j} стоит искомое \bar{u}_{1j} , а вместо u_{2j} стоит $u_{2j}^*(\lambda_j, \bar{u}_{1j})$. Эти требования следуют из принципа максимума Понтрягина (см. П.4).

Выбор значения L . Введение множителя $1/L$ в критерий (4.2) и условия (4.4) при фиксированном значении L никак не влияет на оптимальное решение, однако оно делает задачу осмысленной и при стремлении L к бесконечности. Кроме того, само значение L может подлежать оптимальному выбору.

При таком выборе функционал Лагранжа для соответствующей экстремальной задачи должен быть стационарен по L .

Например, в задаче (4.9)–(4.11) функционал Лагранжа

$$\bar{R} = \frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_{1L}} R(u_1, u_2, \lambda) du_1,$$

где функция R определяется равенством (4.12). Условие стационарности \bar{R} по L приводит к уравнению

$$R(u_1(L), u_2(L), \lambda) = \frac{1}{L} \int_{u_{10}}^{u_1(L)} R(u_1, u_2, \lambda) du_1.$$

В общей задаче (4.2)–(4.4) для выбора L к условиям (4.22), (4.23) следует добавить условия

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k J_j(u_1(L), u_2(L)) [X_j(u_1(L), u_2(L)) + \lambda_j] = \\ = \frac{1}{L} \int_0^L \sum_{j=1}^k J_j(u_1, u_2) (X_j(u_1, u_2) + \lambda_j) dl, \end{aligned} \quad (4.51)$$

вытекающие из требования стационарности по L интеграла от функции H , в которую добавлены множители $1/L$ перед первым и третьим слагаемыми под знаком суммы.

4.2. Условия минимальной диссипации для конкретных процессов

Конкретизируем условия минимальной диссипации для некоторых термодинамических процессов.

Теплообмен. Управляющей интенсивной переменной будем для определенности считать температуру нагреваемого тела. Движущая сила X в задаче о минимальной диссипации процесса теплопереноса равна

$$X(T_1, T_2) = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right), \quad (4.52)$$

а поток теплоты $q(T_1, T_2)$. Функция φ в условиях (4.6), определяет скорость изменения температуры T_1 . В большинстве случаев можно считать, что

$$\frac{dT_1}{dl} = -\frac{1}{c_1(T_1)} q(T_1, T_2), \quad T_1(0) = T_{10}, \quad (4.53)$$

где $c_1(T_1)$ — теплоемкость горячего источника. Для процесса, протекающего во времени, с сосредоточенными параметрами горячего источника аргумент l имеет смысл времени, а L — продолжительности процесса. Для трубчатого теплообменника, в котором температура горячего потока меняется от сечения к сечению, величина c представляет собой водяной эквивалент потока (произведение его расхода на удельную теплоемкость), а L — длину теплообменника.

В соответствии с условиями (4.17), (4.18), (4.11) минимальной диссипации при заданной средней интенсивности теплового потока \bar{q} для

процесса теплообмена получим условие минимальной диссипации для произвольного закона теплопереноса

$$q^2(T_1, T_2) : \frac{\partial q}{\partial T_2} T_2^2 = -\lambda_2 = \text{const}, \quad (4.54)$$

$$\int_{T_{1L}}^{T_{10}} c_1(T_1) dT_1 = \bar{q} \cdot L, \quad (4.55)$$

$$\int_{T_{1L}}^{T_{10}} \frac{c_1(T_1) dT_1}{q(T_1, T_2)} = L. \quad (4.56)$$

Первое из этих условий определяет $T_2^*(T_1, \lambda_2)$, второе — T_{1L} , а третье — константу в условии (4.54).

Рассмотрим в качестве примера использования условий (4.54)–(4.56) ньютоновский закон теплопереноса

$$q = \alpha(T_1 - T_2) \quad (4.57)$$

с постоянной теплоемкостью (водяным эквивалентом) c . Из условий (4.53)–(4.55) получим

$$\alpha^2(T_1 - T_2)^2 = -\lambda_2(-\alpha)T_2^2 \Rightarrow \alpha \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)^2 = \lambda_2. \quad (4.58)$$

Таким образом в процессе минимальной диссипации для любого l отношение $\frac{T_1}{T_2}$ должно быть постоянно и равно

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}. \quad (4.59)$$

Из (4.55) следует, что $T_{1L} = T_{10} - \bar{q}L/c$; наконец, из условия (4.55) вытекает, что

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}}{1 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}} = -\frac{c}{\alpha L} \ln \left(1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}} \right). \quad (4.60)$$

Минимальное производство энтропии, получаемое после подстановки (4.59), (4.60) в выражение

$$\sigma = \frac{c}{L} \int_{T_{1L}}^{T_{10}} \left(\frac{1}{T_2(T_1)} - \frac{1}{T_1} \right) dT_1,$$

равно

$$\sigma_{\min} = \frac{c^2 \ln^2 \left(1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}} \right)}{\left[\alpha L + c \ln \left(1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}} \right) \right] L}.$$

Отметим, что в процессе минимальной диссипации для ньютоновского теплообмена производство энтропии в каждом сечении теплообменника или в каждый момент времени одинаково.

Для более общего закона теплопереноса вида

$$q(T_1, T_2) = \alpha(T_1^n - T_2^n) \quad (4.61)$$

условия (4.54) примут форму

$$\alpha(T_1^n - T_2^n)^2 = \lambda_2 n T_2^{n+1},$$

или

$$\frac{q(T_1, T_2)}{\alpha T_2^{(n+1)/2}} = \left(\frac{T_1^n}{T_2^{(n+1)/2}} - T_2^{(n-1)/2} \right) = \sqrt{\frac{\lambda_2 n}{\alpha}} = \text{const.} \quad (4.62)$$

В частности, для лучистого теплообмена, когда поток пропорционален разности четвертых степеней температур, условие минимальной диссипации имеет вид

$$\frac{T_2^4 - T_1^4}{T_2^{5/2}} = \text{const.} \quad (4.63)$$

В общем случае из условия (4.62) следует, что при $n > -1$ оптимальный тепловой поток с ростом температуры T_2 растет, а при $n < -1$ — падает. При $n = -1$ (закон теплообмена Фурье) тепловой поток, соответствующий минимальной диссипации, постоянен и равен \bar{q} , а само минимальное производство энтропии, подсчитанное по формуле (4.5), равно

$$\sigma_{\min} = \frac{\bar{q}^2}{\alpha}. \quad (4.64)$$

При этом для $n = -1$ минимуму диссипации и постоянству потока теплоты соответствует постоянство производства энтропии в каждом сечении теплообменника или для каждого момента времени как и для ньютоновского теплообмена.

На первый взгляд, кажется, что для любого термодинамического процесса минимальной диссипации производство энтропии σ равномерно распределено по времени или по поверхности контакта. Если бы это

было справедливо, то сильно упростило бы все расчеты. Но оказывается, что далеко не всегда в процессе минимальной диссипации производство энтропии постоянно. В разд. 4.4 получено условие, выделяющее те термодинамические процессы, для которых это свойство справедливо.

Изотермический массоперенос. Интенсивными переменными подсистем в этом случае являются векторы концентраций C_i ($i = 1, 2$) с составляющими C_{ik} , характеризующими состав подсистем. Как потоки веществ, так и химические потенциалы зависят от концентраций. В выражении (4.2) потоки и движущие силы имеют вид

$$\begin{aligned} J_j(u_1, u_2) &= J_j(C_1, C_2), \\ X_j(u_{1j}, u_{2j}) &= \frac{1}{T(C_1, C_2)} (\mu_{1j}(C_{2j}, T) - \mu_{2j}(C_{1j}, T)). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Остановимся на случае, когда из одной подсистемы в другую переходит только один ключевой компонент. При этом давление в подсистеме вследствие диффузии не изменяется. Концентрацию ключевого компонента в первой подсистеме обозначим через C_1 , а во второй — через C_2 . Начальный состав каждой подсистемы задан, а так как задан средний поток \bar{g}

$$\int_0^L g(C_1, C_2) dl = \bar{g}L, \quad (4.66)$$

то и конечный состав фиксирован. Минимизация диссипации сводится к минимизации среднего производства энтропии, возникающего вследствие диффузии:

$$\bar{\sigma}_d = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{g(C_1, C_2)}{T(C_1, C_2)} (\mu_1(C_1, T) - \mu_2(C_2, T)) dl \rightarrow \min. \quad (4.67)$$

Чтобы получить зависимость от C_1 и C_2 скорости изменения концентрации C_1 , необходимо учесть, что поток g меняет как состав первой подсистемы, так и общее количество вещества G_1 в ней, так как это поток лишь одного (ключевого) компонента. По условиям материального баланса

$$\frac{d(G_1 C_1)}{dl} = \frac{dG_1}{dl} = -g(C_1, C_2). \quad (4.68)$$

Из уравнения (4.68) следует, что

$$\frac{dC_1}{dl} = -\frac{1 - C_1}{G_1} g(C_1, C_2), \quad C_1(0) = C_{10}, \quad (4.69)$$

а

$$\frac{dG_1}{dC_1} = \frac{G_1}{1 - C_1},$$

откуда

$$G_1(C_1) = \frac{G_1(0)(1 - C_{10})}{1 - C_1} = \frac{\tilde{G}}{1 - C_1},$$

где \tilde{G} — количество инертного компонента в первой подсистеме. После подстановки $G_1(C_1)$ в (4.69) получим

$$\frac{dC_1}{dl} = -\frac{1}{\tilde{G}}(1 - C_1)^2 g(C_1, C_2), \quad C_1(0) = C_{10}. \quad (4.70)$$

Общие условия минимальной диссипации (4.17), (4.18) примут форму

$$\frac{\partial T}{\partial C_2} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T} - \frac{\partial \mu_2}{\partial T} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{T} \right) - \frac{\partial \mu_2}{\partial C_2} = \lambda_2 \left(\frac{\partial g}{\partial C_2} \right) \frac{T}{g^2(C_1, C_2)}, \quad (4.71)$$

$$C_{1L} = \frac{C_{10}G_{10} - \bar{g}L}{G_{10} - \bar{g}L}. \quad (4.72)$$

Для химических потенциалов вида

$$\mu_i = \mu_0(P, T) + RT \ln C_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.73)$$

производная $\frac{\partial \mu_2}{\partial C_2} = \frac{RT}{C_2}$, так что условия (4.71) перепишем как

$$-\frac{R}{C_2} = \lambda_2 \left(\frac{\partial g}{\partial C_2} \right) \frac{1}{g^2}. \quad (4.74)$$

Константу λ_2 находят из условия

$$\int_{C_{1L}}^{C_{10}} \frac{\tilde{G}}{T(C_1, C_2)(1 - C_1)^2} dC_1 = L$$

после подстановки в него решения $C_2^*(C_1, \lambda_2)$ уравнения (4.74).

Особенно простое решение соответствует случаю, когда поток диффузии пропорционален разности химических потенциалов и температура T постоянна:

$$g = \alpha (\mu_1(C_1) - \mu_2(C_2)).$$

В этом случае из (4.71) следует, что поток массопереноса постоянен

$$g^* = \text{const} = \bar{g},$$

$$\frac{dC_1}{dl} = \frac{\bar{g}(1 - C_1)}{G_{10} - \bar{g}l} \Rightarrow C_1(l) = 1 - (1 - C_{10}) \frac{G_{10}}{G_{10} - \bar{g}l}.$$

Для химических потенциалов в форме (4.73) постоянству потока соответствует постоянство отношения концентраций

$$\frac{C_1}{C_2} = \exp\left(\frac{\bar{g}}{2T}\right).$$

Минимальное производство энтропии при этом

$$\bar{\sigma}_{\min} = \frac{\bar{g}^2}{\alpha T}.$$

Другие законы массопереноса рассмотрены в работе [61].

Деформационное взаимодействие. Пусть две термодинамические подсистемы разделены поршнем. В этом случае функции $g(u_1, u_2)$ соответствует зависимость скорости перемещения поршня v от давлений p_1 и p_2 контактирующих подсистем. В большинстве случаев скорость зависит только от разности $p_1 - p_2$, так что производство энтропии можно записать как

$$\sigma = \frac{v(p_1 - p_2)}{T}(p_1 - p_2) \rightarrow \min. \quad (4.75)$$

Среднее значение этой величины минимизируют при заданном среднем значении скорости \bar{v}

$$\frac{1}{L} \int_0^L v(p_1(l) - p_2(l)) dl = \bar{v}. \quad (4.76)$$

Выражая $\Delta p = p_1 - p_2$ через v как $\Delta p(v)$, можно записать усредненную задачу о минимуме диссипации как

$$\bar{\sigma}(v) = \frac{1}{T} \overline{v \Delta p(v)} \rightarrow \min / \bar{v} - \text{fix}. \quad (4.77)$$

Если $\sigma(v)$ выпукла вниз, то оптимальная скорость должна быть постоянна и равна \bar{v} . В противном случае решению усредненной задачи нелинейного программирования (4.77) соответствует ордината выпуклой оболочки функции $\sigma(v)$ для $v = \bar{v}$. Скорость в этом последнем случае принимает не более двух значений v^1 и v^2 , определяемых (см. приложение П.3) условиями

$$L(\lambda^*, v^i) = \max_{\lambda} \min_v [\sigma(v) + \lambda(v - \bar{v})]. \quad (4.78)$$

Значения функции L в точках v^i ($i = 1, 2$) одинаковы. Долю γ периода L , в течение которой $v^*(l) = v^1$, находят из условия

$$\gamma v^1 + v^2(1 - \gamma) = \bar{v}, \quad \gamma \geq 0.$$

Дросселирование. Рассмотрим процесс расширения газа, проходящего через сужающее устройство. Обозначим p_1 и p_2 давление до и после сужающего устройства, а $g(p_1, p_2)$ — расход газа и предположим, что процесс происходит изотермически, т.е. температура не изменяется. Производство энтропии

$$\sigma = g(p_1, p_2) \frac{\mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_2, T)}{T}. \quad (4.79)$$

Для идеального газа выражение (4.79) примет форму

$$\sigma = g(p_1, p_2) \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (4.80)$$

Пусть p_1 — давление в замкнутой емкости объема V , оно снижается при истечении газа через сужающее устройство. Задана продолжительность процесса τ и средний поток \bar{g} . Требуется минимизировать диссипацию:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(p_1, p_2) \frac{\mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_2, T)}{T} dt \rightarrow \min, \quad (4.81)$$

при условиях

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(p_1, p_2) dt = \bar{g}, \quad (4.82)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{RTg(p_1, p_2)}{V}, \quad p_1(0) = p_{10}. \quad (4.83)$$

Из общих условий (4.17), (4.18) для этой задачи получим соотношение

$$Tg^2(p_1, p_2) = -\lambda_2 \left(\frac{\partial g}{\partial p_2} : \frac{\partial \mu_2}{\partial p_2} \right), \quad (4.84)$$

$$p_1(\tau) = p_{10} - \frac{RT}{V} \bar{g} \tau. \quad (4.85)$$

Для идеального газа и зависимости

$$g(p_1, p_2) = \alpha(p_1 - p_2)^{1/2}$$

условие (4.84) приводит к соотношению

$$\frac{(p_1 - p_2)^3}{p_2^2} = \text{const} = \eta. \quad (4.86)$$

Подстановка условия (4.86) в уравнения (4.81) и (4.83) позволяет найти оптимальный закон изменения $p_2^*(t)$ и минимальное производство энтропии $\bar{\sigma}_{\min}$. Оптимальный закон изменения давления определяется после решения уравнений (4.83), (4.86) с точностью до константы η

$$p_2^*(t, \eta) = \left\{ \sqrt{\frac{4}{3}\eta^{2/3} - \frac{2}{3}\eta^{1/6} \left[\frac{\gamma RT}{V} t - f(p_{20}, \eta) \right]} - \frac{2}{3}\eta^{1/3} \right\}^3, \quad (4.87)$$

где

$$f(p_{20}, \eta) = \frac{3}{2}\eta^{-1/6} p_{20}^{2/3} + 2\eta^{1/6} p_{20}^{1/3}. \quad (4.88)$$

Величину p_{20} находят из (4.86) как решение уравнения

$$p_{20} + \eta^{1/3} p_{20}^{2/3} = p_{10}, \quad (4.89)$$

$$\bar{\sigma}_{\min} = \frac{V}{RT\tau} \left[p_{10}(\ln p_{10} - 1) - p_1(\tau)(\ln p_1(\tau) - 1) - r(p_{20}) - r(p_2(\tau)) \right],$$

где

$$r(p_2) = p_2(\ln p_2 - 1) + \eta^{1/3} p_2^{2/3} \left(\ln p_2 - \frac{3}{2} \right).$$

Кристаллизация. Производство энтропии в процессе кристаллизации, как в любом процессе массопереноса, выражается формулой

$$\sigma = g(C_1, C_2) \frac{\mu_1(C_1) - \mu_2(C_2)}{T}. \quad (4.90)$$

Для идеальных растворов химический потенциал кристаллизующегося вещества в растворе при постоянных температуре и давлении зависит от его концентрации C_1 ,

$$\mu_1 = \mu^0(T, p) + RT \ln C_1.$$

Потенциал μ_2 определяется равновесной концентрацией $C_2 = \bar{C}$:

$$\mu_2 = \mu^0(T, p) + RT \ln \bar{C},$$

так что

$$\sigma = g(C_1, \bar{C}) R \ln \frac{C_1}{\bar{C}}. \quad (4.91)$$

Поток g зависит от поверхности кристаллов F , которая в свою очередь определяется массой кристаллов M . Для линейной кинетики масса изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dM}{dt} = \alpha F(C_1 - \bar{C}), \quad M(0) = M_0, \quad M(\tau) = \bar{M}.$$

Если размеры и форма кристаллов при $t = 0$ одинаковы, то

$$\dot{M} = KM^{2/3}(C_1 - \bar{C}). \quad (4.92)$$

Коэффициент K зависит как от коэффициента массопередачи, так и от формы кристалла.

Задача о минимуме диссипации в процессе кристаллизации примет форму

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} KM^{2/3}(C_1 - \bar{C})R \ln \frac{C_1}{\bar{C}} dt \rightarrow \min_{C_1}, \quad (4.93)$$

$$\int_0^{\tau} KM^{2/3}(C_1 - \bar{C}) dt = (\bar{M} - M_0). \quad (4.94)$$

Условия оптимальности этой задачи вытекают из общих условий (4.17), (4.18) и имеют вид

$$\frac{M^{2/3}(C_1 - \bar{C})^2}{C_1} = \frac{\lambda_2}{KR} = \text{const} = \eta. \quad (4.95)$$

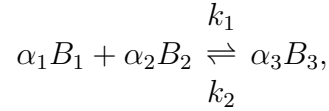
Из условий (4.95) и уравнения (4.92) получим дифференциальное уравнение, которое с точностью до константы $\tilde{\eta} = \eta$ определяет $C^*(t)$. Для этого заменим \dot{M} и M через \dot{C}_1 и C_1 :

$$\dot{C}_1^* = -\sqrt{\tilde{\eta}} \frac{\sqrt{C_1^*}(C_1^* - \bar{C})^3}{C_1^* + \bar{C}}, \quad C_1(0) = C_{10}. \quad (4.96)$$

Нетрудно видеть, что для случая, когда начальные массы кристаллов различны, использование уравнения (4.92) для средней начальной массы дает (в силу выпуклости вверх зависимости поверхности от M), оценку снизу для производства энтропии.

Химические превращения. Кинетика химических превращений очень разнообразна. Поэтому покажем использование общих условий минимальной диссипации на конкретном примере.

Рассмотрим изотермический периодически действующий реактор идеального смешения, в котором протекает реакция вида



где α_i — стехиометрические коэффициенты; B_i — реагенты; k_i — константы прямой и обратной реакций. Далее будем считать, что $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 > 0$. Скорость реакции определяется законом действующих масс

$$W(x) = W_1 - W_2 = k_1 x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} - k_2 x_3^{\alpha_3}, \quad (4.97)$$

где $x_i = \frac{N_i(t)}{N(t)}$ — молярная доля i -го компонента, n_i — количество молей i -го компонента в аппарате, $N(t) = \sum_i n_i(t)$.

Производство энтропии

$$\sigma = \frac{W}{T} A, \quad (4.98)$$

где

$$A = - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i$$

— химическое сродство реакции.

Для идеальных растворов

$$\mu_i = \mu_i^0(T, p) + RT \ln x_i,$$

откуда

$$A = - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i^0(T, p) - RT \sum_i \alpha_i \ln x_i.$$

Первое слагаемое в этом выражении равно [7]

$$- \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mu_i^0 = RT \ln k_p(T, p),$$

где константа равновесия k_p представляет собой отношение констант скоростей прямой и обратной реакций:

$$k_p(T, p) = \frac{k_1(T, p)}{k_2(T, p)}.$$

Таким образом,

$$A = RT \left(\ln \frac{k_1}{k_2} - \sum_i \ln x_i^{\alpha_i} \right) = RT \ln \frac{k_1 x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2}}{k_2 x_3^{\alpha_3}} = RT \ln \frac{W_1}{W_2}.$$

Пусть задана средняя скорость реакции

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} W(t) dt = \overline{W}, \quad (4.99)$$

а скорость реакции $W(t)$ является управлением. Она определяет изменение степени превращения $\xi(t)$

$$\frac{d\xi}{dt} = W \quad (4.100)$$

и количество молей каждого из компонентов в ходе реакции

$$\frac{dN_i}{dt} = \alpha_i W, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда

$$N_3(t) = N_{30} + \alpha_3 \xi(t),$$

а общее количество молей

$$N(t) = N_0 + \xi(t) \sum_{i=1}^3 \alpha_i.$$

Скорость обратной реакции

$$W_2 = k_2 \frac{N_3(t)}{\sum_i N_i(t)} = k_2 \frac{N_{30} + \alpha_3 \xi(t)}{N_0 + \xi(t) \sum_{i=1}^3 \alpha_i}.$$

С учетом сказанного, задача о минимуме диссипации примет вид

$$\sigma = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} RW \ln \frac{W + W_2(\xi)}{W_2(\xi)} dt \rightarrow \min$$

при условиях

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} W(t) dt = \overline{W}, \quad \frac{d\xi}{dt} = W, \quad \xi(0) = 0, \quad W_2(\xi) = k_2 \frac{N_{30} + \alpha_3 \xi}{N_0 + \xi \sum_i \alpha_i}. \quad (4.101)$$

Т а б л и ц а 4.1.

Условия минимальной диссипации термодинамических процессов

Процесс	Условия минимальной диссипации и производство энтропии
Теплообмен $q = \alpha(T_2 - T_1)$	$\frac{T_1(l)}{T_2(l)} = 1 - \frac{\beta}{\alpha L}; \quad \sigma_{\min} = \frac{\beta^2}{\alpha L - \beta}$ $\beta = W \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{W T_1(0)} \right)$
Векторный поток $J = LX$	$X = \text{const}; \quad J = \bar{J}; \quad \sigma_{\min} = \bar{J}^T L^{-1} \bar{J}$
Односторонний изотермический массоперенос $g(c_1, c_2) = k(c_1(l) - c_2(l))$	$c_2(l) = c_1(l) + \frac{m}{2} - \sqrt{c_1(l)m + \frac{m^2}{4}}$ $\int_{c_1(L)}^{c_1(0)} \frac{G dC_1}{k(1 - c_1^2) \sqrt{c_1 m + \frac{m}{4} - \frac{m}{2}}} = L;$ $\sigma_{\min} = \int_{c_1(L)}^{c_1(0)} \frac{RG}{(1 - c_1)^2} \ln \frac{c_1 dc_1}{c_1 + \frac{m}{2} - \sqrt{c_1 m + \frac{m^2}{4}}}$
Двусторонний изотермический эквимольный массоперенос	$\frac{\partial g}{\partial c_1} / \frac{\partial g}{\partial c_2} = m \frac{c_2(l)(1 - c_2(l))}{c_1(l)(1 - c_1(l))};$ $\frac{dc_1}{dl} = -\frac{g(c_1, c_2)}{G_1};$ $c_1(0) = C_{10}, \quad c_1(L) = c_{1L};$ $\sigma_{\min} = R \int_0^L g(c_1, c_2) \ln \left[\frac{c_1(1 - c_2)}{c_2(1 - c_1)} \right] dl$

Используя замену переменных $dt = \frac{d\xi}{W}$, запишем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{R}{\tau} \ln \frac{W + W_2(\xi)}{W_2(\xi)} + \frac{\lambda}{W}.$$

Из условия стационарности L по W получим

$$\frac{W^2}{W + W_2(\xi)} = \frac{\lambda \tau}{R} = \text{const}. \tag{4.102}$$

Это требование вместе с уравнением (4.100) и условием на среднее значение W позволяют найти $W^*(t)$, $\xi^*(t)$ и оценку для производства энтропии.

Для некоторых процессов условия минимальной диссипации и полученные из них выражения для минимального производства энтропии приведены в табл. 4.1.

4.3. Стационарное состояние открытых термодинамических систем

Рассмотрим стационарный режим неоднородной термодинамической системы, состоящей из однородных подсистем. Производство энтропии в такой системе сосредоточено на границах подсистем. Подобная открытая система для существования в ней стационарного неравновесного режима должна содержать не менее двух резервуаров с различающимися значениями интенсивных переменных или точки ввода и вывода конвективных потоков. На рис. 4.2 изображен фрагмент такой системы. Производство энтропии в ней равно сумме по всем подсистемам скалярных произведений векторов потоков на векторы движущих сил.

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{k,j} J_{kj}(u_j, u_k) x_{kj}(u_j, u_k), \quad (4.103)$$

где k и j — индексы контактирующих подсистем.

Множитель $1/2$ связан с тем, что каждое слагаемое входит в правую часть этого равенства дважды, слагаемые, содержащие J_{kk} , равны нулю.

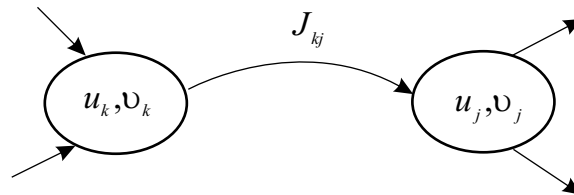


Рис. 4.2. Фрагмент открытой термодинамической системы

В стационарном режиме скорости изменения экстенсивных переменных v равны нулю и соблюдаются балансовые соотношения

$$\dot{v}_k = \sum_j J_{kj}(u_j, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.104)$$

При малом отклонении от состояния равновесия предполагают, что потоки линейно зависят от движущих сил, т. е. могут быть записаны в форме Онзагера

$$J_j = \sum_{\nu} \gamma_{j\nu} x_{\nu}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.105)$$

Причем для кинетических коэффициентов γ_{ji} справедливы условия

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji},$$

а матрица коэффициентов $||\gamma_{ij}||$ положительно определенная. В правой части равенства (4.103) в этом случае оказывается положительно определенная квадратичная форма. Условия ее минимума по составляющим вектора u совпадают с условиями стационарности (4.104) состояния подсистем

$$\sum_{j\nu} \gamma_{\nu j} x_{\nu}(u_{\nu}, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.106)$$

Таким образом, в стационарном режиме открытой неоднородной термодинамической системы, состоящей из равновесных подсистем, при линейной зависимости потоков от движущих сил и справедливости условий взаимности, экстенсивные переменные распределяются таким образом, чтобы суммарное производство энтропии было минимально.

Так, для теплового потока и одной промежуточной подсистемы поток теплоты пропорционален разности температурных потенциалов $u_+ = 1/T_+$, $u_- = 1/T_-$, $u = 1/T$

$$q_+ = \alpha_+(u - u_+), \quad q_- = -\alpha_-(u_- - u).$$

Производство энтропии

$$\sigma = q_+ \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_+} \right) - q_- \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T} \right) = \alpha_+(u - u_+)^2 + \alpha_-(u_- - u)^2. \quad (4.107)$$

Условие стационарности состояния промежуточной системы:

$$q_+ + q_- = \alpha_+(u - u_+) - \alpha_-(u_- - u) = 0. \quad (4.108)$$

Требование минимума σ по u в силу выпуклости вниз этой функции

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 2\alpha_+(u - u_+) - 2\alpha_-(u_- - u) = 0$$

совпадает с условием (4.108) стационарности системы.

Утверждение о том, что в стационарном состоянии открытой системы, близкой к равновесию, производство энтропии минимально, называют теоремой Пригожина. Ее доказательство для систем с распределенными параметрами приведено, например, в книге [13].

4.4. Классификация кинетики обмена по типу условий минимальной диссипации

В условия минимальной диссипации входят кинетические функции, определяющие закономерности тепло- и массообмена, скорости химических реакций и пр. Так как критерий в этих задачах однотипный — минимум необратимых потерь, то именно функции кинетики $n(x, u)$, связывающие переменные контактирующих систем с потоками обмена, определяют свойства оптимального управления u . Условия минимальной диссипации имеют форму постоянства некоторого комплекса, зависящего от переменных контактирующих систем на оптимальном решении. Возникает задача о выделении такого класса кинетических зависимостей, для которых условия минимума диссипации одинаковы. В частности, о выделении таких систем, для которых минимуму диссипации соответствует постоянство производства энтропии.

Схема решения. Пусть условие, наложенное на процесс оптимального управления, может быть записано в форме связи между управляющим воздействием $u(t)$ и переменной состояния $x(t)$ вида

$$\varphi(x, u) = \text{const}, \quad (4.109)$$

где функция φ непрерывна и дифференцируема по совокупности аргументов, величина константы не определена, а $u(t)$ и $x(t)$ — скалярные функции.

Предположим, что индивидуальность системы характеризуется функцией $n(x, u)$, а условия оптимальности имеют форму

$$F(n(x, u), x, u, n_x, n_u) = \text{const}, \quad (4.110)$$

где через n_x, n_u обозначены частные производные n по соответствующим переменным.

На функцию n могут быть наложены те или иные условия, например, требование вида

$$n(x, u) = 0 \quad \text{при} \quad x = u. \quad (4.111)$$

Требуется выделить класс функций $n(x, u)$, для которых решение уравнения (4.110) удовлетворяет требованию (4.109).

Общая схема решения поставленной задачи основана на У т в е р ж д е н и и: *Решение задачи оптимального управления удовлетворяет*

условию (4.109) тогда и только тогда, когда функция $n(x, u)$ является решением уравнения

$$\frac{F_x}{F_u} = \frac{\varphi_x}{\varphi_u}. \quad (4.112)$$

Действительно, из условия (4.109) следует, что

$$\varphi_x dx = -\varphi_u du,$$

а из (4.110) вытекает, что

$$F_x dx = -F_u du,$$

следовательно, справедливо (4.112). Очевидно и обратное: если при выполнении условия (4.110) равенство (4.112) не имеет места, то не выполнено и условие (4.109).

Левая часть равенства (4.112) зависит от вида функции n и ее частных производных, что позволяет получить уравнение в частных производных для функции n , общее решение которого и является искомым классом зависимостей. Далее приведены примеры решения поставленной задачи для термодинамических систем, а в гл. 8 рассмотрены экономические макросистемы.

Управляемые термодинамические системы. Пусть условия (4.110) являются условиями минимальной диссипации, x — интенсивные переменные пассивной, а u — активной подсистемы. Рассмотрим первоначально процесс теплообмена, а затем обобщим полученные результаты на более широкий класс термодинамических процессов и получим соотношение, которое необходимо и достаточно для того, чтобы в процессе минимальной диссипации производство энтропии было постоянно.

Необратимый теплообмен. Процессом теплообмена минимальной диссипации называют процесс при котором от тела с температурой $T(t)$ и конечной теплоемкостью за заданное время отбирается заданное количество теплоты и при этом прирост энтропии системы оказывается минимальным. Температура охладителя $T_0(t)$ — управляющее воздействие. Зависимость теплового потока $n(T_0, T)$ между охлаждаемым телом и охладителем от их температур T и T_0 называют законом теплообмена. Формально задача имеет вид

$$\Delta S = \int_0^\tau n(T_0, T)(1/T_0 - 1/T)dt \Rightarrow \min$$

при условиях

$$\int_0^{\tau} n(T_0, T) dt = 0, \quad C \frac{dT}{dt} = -n(T_0, T), \quad T(0) = \text{fix},$$

где C — теплоемкость охлаждаемого тела.

Условие минимальной диссипации для необратимого теплообмена, как показано ранее, имеет вид

$$\frac{T^2}{n^2(T_0, T)} \frac{\partial n}{\partial T_0} = \text{const}, \quad n(T_0, T) = 0 \quad \text{при} \quad T_0 = T. \quad (4.113)$$

Какого вида должен быть закон теплообмена $n(T_0, T)$, чтобы выполнялось условие (4.109) с функцией $\varphi(T_0, T) = T_0 - T$? Другими словами, для каких законов теплопереноса минимальной диссипации соответствует постоянная разность температур? Покажем, что *условиям минимальной диссипации соответствует постоянная разность температур для тех и только тех законов теплообмена, которые могут быть представлены в форме*

$$n(T_0, T) = \frac{M(T_0 - T)T^2}{1 + R(T)M(T_0 - T)}, \quad (4.114)$$

где M и R — произвольные дифференцируемые функции, $M(0) = 0$.

Примером закона теплопереноса, удовлетворяющего условиям (4.114), может служить кинетика теплообмена с коэффициентом теплопроводности, пропорциональным квадрату температуры,

$$n(T_0, T) = \alpha T^2 (T_0 - T). \quad (4.115)$$

Нетрудно показать, что для функции φ , зависящей от отношения температур T и T_0 , класс законов теплопереноса, обеспечивающих минимальную диссипацию, включает в себя ньютоновский закон, при котором поток пропорционален разности температур.

Условие (4.112) может быть использовано как для проверки того, выполнено ли в процессе минимальной диссипации при заданной кинетике некоторое соотношение между переменными, так и для того, чтобы найти весь класс кинетических зависимостей, для которых заданное соотношение выполнено.

Приведем доказательство условия (4.114):

Введем функцию $m(T_0, T)$

$$m(T_0, T) = \frac{n(T_0, T)}{T^2}, \quad (4.116)$$

предполагая ее как и $n(T_0, T)$ непрерывно дифференцируемой, и подставим в (4.113). После несложных преобразований перепишем это условие в форме

$$F = \frac{1}{m^2(T_0, T)} \frac{\partial m}{\partial T_0} = \text{const}, \quad m(T_0, T) = 0 \quad \text{при} \quad T_0 = T. \quad (4.117)$$

Из (4.112) с учетом вида функции $\varphi(T_0, T)$ следует, что

$$\frac{F_T}{F_{T_0}} = \frac{\varphi_T}{\varphi_{T_0}} = -1. \quad (4.118)$$

Найдем F_T и F_{T_0}

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{1}{m^2(T_0, T)} \frac{\partial^2 m}{\partial T_0 \partial T} - \frac{2}{m^3(T_0, T)} \frac{\partial m}{\partial T} \frac{\partial m}{\partial T_0}, \\ F_{T_0} &= \frac{1}{m^2(T_0, T)} \frac{\partial^2 m}{\partial T_0 \partial T_0} - \frac{2}{m^3(T_0, T)} \left(\frac{\partial m}{\partial T_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.119)$$

После подстановки (4.119) в (4.118) получим

$$m_{T_0 T} + m_{T_0 T_0} = \frac{2}{m} m_{T_0} (m_{T_0} + m_T)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial T_0} (m_T + m_{T_0}) = \frac{2}{m} m_{T_0} (m_T + m_{T_0}). \quad (4.120)$$

Преобразуем (4.120) следующим образом

$$\frac{\frac{\partial}{\partial T_0} (m_{T_0} + m_T)}{m_{T_0} + m_T} = 2 \frac{m_{T_0}}{m}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \ln |m_{T_0} + m_T| = 2 \frac{\partial}{\partial T_0} \ln |m|.$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \ln \left| \frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} \right| = 0. \quad (4.121)$$

Из (4.121) следует, что выражение, стоящее под знаком производной, является произвольной непрерывной функцией от T , т.е.

$$\ln \left| \frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} \right| = \xi(T)$$

или

$$\frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} = -f(T). \quad (4.122)$$

Уравнение в частных производных (4.122) решаем методом характеристик

$$\dot{T}_0 = 1, \quad \dot{T} = 1, \quad \dot{m} = -f(T)m^2.$$

Решения этих уравнений

$$\begin{aligned} T_0(t) = t + r_1, \quad T(t) = t + r_2, \quad \dot{m} = -f(t + r_2)m^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{m} \right) = f(t + r_2), \quad \Rightarrow m(t) = \frac{1}{\int f(t + r_2)dt + c}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

где c — константа; $f(t)$ — непрерывная функция. С учетом (4.123), исключая t и заменяя dt через dT , получим общее решение в форме

$$m(T_0, T) = \frac{1}{\int f(T)dT + \mu(T_0 - T)}, \quad (4.124)$$

где f и μ — произвольные функции. Здесь учтено, что в силу (4.123) разность $(T_0 - T)$ и произвольная функция от нее постоянны.

Будем искать функцию $\mu(T_0 - T)$ в виде

$$\mu(T_0 - T) = \frac{1}{M(T_0 - T)}.$$

В силу произвольности функций f и μ в (4.123) перепишем решение в эквивалентной форме

$$m(T_0, T) = \frac{M(T_0 - T)}{1 + R(T)M(T_0 - T)}, \quad (4.125)$$

где $R(T) = \int f(T)dT$ — дифференцируемая функция.

Чтобы учесть дополнительное требование $m(T_0, T) = 0$ при $T_0 = T$, наложим на функцию $M(T_0 - T)$ дополнительное условие $M(0) = 0$ и с учетом (4.116) и (4.125) получим общий вид зависимости $n(T_0, T)$ в форме (4.114).

Условия постоянства производства энтропии в процессе минимальной диссипации. Задача о минимуме диссипации для термодинамического процесса со скалярным потоком имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau n(x, u)R(x, u)dt \rightarrow \min_u \quad (4.126)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (4.127)$$

$$\int_0^\tau n(x, u) dt = \Delta N. \quad (4.128)$$

Здесь $\bar{\sigma}$ — среднее производство энтропии; условие (4.127) характеризует скорость изменения интенсивной переменной системы (температуры, давления, химического потенциала); $R(x, u)$ — движущая сила процесса; $n(x, u)$ — поток. Условие (4.128) определяет среднюю величину потока. Необходимое условие оптимальности задачи (4.126)–(4.128) получено выше и имеет вид

$$F = \frac{n^2(x, u)}{n_u} R_u = \text{const}. \quad (4.129)$$

Требуется найти, для каких зависимостей $n(x, u)$ в оптимальном процессе выполнено условие

$$\varphi(x, u) = \text{const},$$

где φ задана. В соответствии с (4.112) имеем условие

$$\left(2\frac{n_x}{n} + \frac{R_{ux}}{R_u} - \frac{n_{ux}}{n_u}\right) \Big/ \left(2\frac{n_u}{n} + \frac{R_{uu}}{R_u} - \frac{n_{uu}}{n_u}\right) = \frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad (4.130)$$

определяющее все функции n и R , для заданной φ .

В том частном случае, когда $\varphi = \sigma = n(x, u)R(x, u)$, условие (4.130) выделяет кинетические зависимости для всех тех процессов, у которых минимальной диссипации при заданной средней величине потока соответствует постоянство производства энтропии.

Глава 5

ТЕПЛООБМЕННЫЕ И ТЕПЛОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В главе рассмотрены задачи о предельных возможностях термодинамических систем, в которых происходит обмен потоками теплоты и преобразование тепловой энергии в работу и работы в теплоту. К ним относятся системы теплообмена, тепловые и холодильные машины, тепловые насосы и преобразователи тепловой энергии в работу разделения.

При этом возникают задачи двух типов: поддержание заданных температур подсистемам с минимальной затратой работы и извлечение максимальной работы в системе, отдельные части которой имеют различные температуры. Каждая из этих задач может быть поставлена применительно к замкнутой и открытой системе. В первом случае речь идет о затратах и получении некоторого количества работы за фиксированное время, во втором — о потоке извлекаемой или затрачиваемой мощности в стационарном процессе.

Ниже мы остановимся на каждой из этих задач, предварительно рассмотрев процессы теплообмена.

Решение упомянутых задач позволяет найти такие температурные поля, которые при заданных ограничениях могут быть реализованы в системе с преобразователем. Разбить множество реализуемых полей на те, в которых можно извлечь работу, и те, которые требуют для своего поддержания ее затрат.

5.1. Системы теплообмена

Сложную теплообменную систему с несколькими греющими и нагреваемыми потоками можно представить как набор теплообменных ячеек, в каждую из которых поступают два потока. Задача проектирования такой системы предполагает распределение ограниченной суммарной поверхности контакта между ячейками; выбор температур и расходов для тех потоков, у которых эти параметры не фиксированы; распределение «тепловой нагрузки» между ячейками. Под тепловой нагрузкой здесь понимается тепловой поток, отбираемый от нагревателя в единицу времени. Если ячейка работает в нестационарном режиме (регенеративный теплообмен), то тепловая нагрузка соответствует среднему за цикл тепловому потоку.

Пределные возможности двухпоточного теплообменника

Оценить степень совершенства теплообмена с использованием методов термодинамики обратимых процессов нельзя. Процесс в теплообменнике при фиксированной тепловой нагрузке обратим только в том случае, когда коэффициент теплопереноса сколь угодно велик. Теплообменник с бесконечным коэффициентом теплопереноса должен иметь бесконечную поверхность контакта.

В термодинамике при конечном времени можно ставить вопрос о степени термодинамического совершенства теплообмена при заданных коэффициентах теплопередачи, продолжительности процесса и количестве переданного тепла. Теплообмен термодинамически лучше организован, если при фиксированной тепловой нагрузке, расходе и температуре греющего потока, нагреваемый поток на выходе из теплообменника имеет более высокую температуру. А это, как показано далее соответствует минимальной диссипации теплообмена.

Известно, что противоточный теплообмен в этом смысле совершеннее прямоточного или перекрестного тока. Как показано в разд. 5.2, в противоточном трубчатом теплообменнике при соблюдении некоторых дополнительных условий может быть достигнут предел термодинамического совершенства процесса теплообмена.

Условие минимальной диссипации. Будем рассматривать теплообменник как систему, состоящую из источника с температурой T_0 , энтропией S_0 , теплоемкостью c , и рабочего тела с энтропией S и тем-

пературой T (рис. 5.1). Другими словами, мы допускаем, что температурой одного из потоков можно управлять.

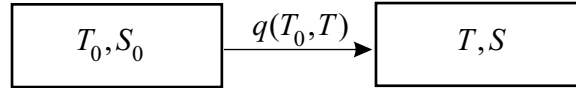


Рис. 5.1. Структура теплообменной системы, состоящей из источника с конечной емкостью и рабочего тела

При контакте двух этих элементов системы возникает поток теплоты $q(T_0, T)$. Процесс теплообмена может протекать во времени, если он реализован в замкнутой системе, или может быть распределен по поверхности контакта, если он стационарен и реализован в открытой системе. В замкнутой системе температура источника изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dT_0}{dt} = -\frac{q(T_0, T)}{c}, \quad T_0(0) = T_H. \quad (5.1)$$

В открытой системе процесс распределен по длине теплообменника l , температура источника (горячего потока) изменяется так, что

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T)}{W}, \quad T_0(0) = T_H. \quad (5.2)$$

Здесь для определенности принято, что $T_0 > T$, а через W обозначен водяной эквивалент горячего потока (произведение его объемного расхода на теплоемкость).

В первом случае считаем заданной продолжительность процесса τ , во втором — длину аппарата L . Так как уравнения (5.1) и (5.2) не отличаются друг от друга ничем, кроме обозначений, то будем рассматривать только второе из них. При замене W на c и L на τ во всех результирующих соотношениях они оказываются справедливыми для нестационарного теплообмена. При этом в процессе, протекающем во времени, минимума на оптимальном решении достигает прирост энтропии системы $D = \Delta S$, а в процессе, распределенном по длине аппарата, $D = \sigma$ — производству энтропии для всей поверхности теплообменника.

Рассмотрим задачу о таком законе изменения отбора теплоты $q(l)$, для которого производство энтропии минимально:

$$\sigma = \int_0^L q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dl \rightarrow \min, \quad (5.3)$$

при заданной тепловой нагрузке

$$\int_0^L q(T_0, T) dl = Q \quad (5.4)$$

и при изменении температуры источника в соответствии с уравнением (5.2).

Задача (5.2)–(5.4) представляет собой задачу оптимального управления. При использовании для ее решения принципа максимума Понтрягина (см. приложение П.4) функция Гамильтона для этой задачи имеет вид

$$H = q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{W} \right). \quad (5.5)$$

Условия оптимальности можно записать в форме

$$H(T_0, T, \lambda, \psi) = \text{const} = M, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{W} \right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \quad (5.7)$$

При записи этих соотношений принято, что управлением является температура T рабочего тела. Мы оставляем в стороне вопрос о том, как реализовать полученный оптимальный закон изменения температуры, так как целью решения является получение оценки для минимальной необратимости теплообмена, которую при заданных условиях нельзя уменьшить ни в одном теплообменнике. Способ реализации найденного оптимального закона охлаждения источника определяется конструкцией теплообменника. От нее зависит, насколько мы приблизимся к найденному пределу.

Из условий оптимальности (5.6), (5.7) следует равенство

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{W} = \frac{M}{q(T_0, T)}, \quad (5.8)$$

что позволяет упростить условие (5.7). Если функция H выпукла вниз по T , то, переписав (5.7) в виде

$$\frac{\partial q}{\partial T} \frac{M}{q(T_0, T)} - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0,$$

получим, что в оптимальном процессе в любом сечении теплообменника l должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{q(T_0, T)}{T}\right)^2 : \frac{\partial q}{\partial T} = M. \quad (5.9)$$

Полученное условие (5.9) *минимальной диссипации* процесса необратимого теплообмена позволяет найти связь между минимальной диссипацией, тепловой нагрузкой Q , водяным эквивалентом (теплоемкостью источника) и эффективным коэффициентом теплопередачи $K = kL$.

Поскольку выражения для минимальной диссипации оказываются компактнее, если использовать в качестве аргумента не Q , а скорость изменения энтропии источника σ_0 , предварительно найдем связь между Q и σ_0 . Для любого закона теплопереноса

$$\sigma_0 = - \int_0^L \frac{q(T_0, T)}{T_0} dl.$$

В свою очередь для источника с постоянным водяным эквивалентом W справедливо уравнение (5.2). Проведя замену $dl = -W(dT_0/q(T_0, T))$, получим при произвольном законе теплопереноса

$$\sigma_0(T_H, W, Q) = \int_{T_H}^{T_H - Q/W} W \frac{dT_0}{T_0} = W \ln \left(1 - \frac{Q}{WT_H}\right). \quad (5.10)$$

Связь, аналогичную равенству (5.10), нетрудно получить и для любой заданной зависимости $W(T_0)$ водяного эквивалента (для нестационарных процессов — теплоемкости) от температуры греющего потока.

Области достижимости теплообменных процессов. Условия минимальной диссипации позволяют выделить в пространстве параметров теплообменника границу реализуемых режимов, так как для любого реального теплообменника производство энтропии больше минимально-возможного. Различие между фактической и минимально-возможной диссипацией говорит о термодинамическом совершенстве аппарата. Если по тем или иным технологическим требованиям гидродинамический режим в теплообменнике фиксирован, то для такого аппарата может быть построена своя оценка минимальной диссипации, более высокая, чем для теплообменника с произвольной гидродинамикой.

Ньютоновский закон теплопереноса $q(T_0, T) = k(T_0 - T)$. Условие (5.9), как нетрудно видеть, приводит к постоянству отношения температур [24]:

$$\frac{T}{T_0} = \text{const.} \quad (5.11)$$

Обозначим это отношение \tilde{m} . Тогда $q(T_0) = kT_0(1 - \tilde{m})$. Скорость изменения энтропии источника в каждом сечении постоянна:

$$d\sigma_0 = -\frac{q(T_0)}{T_0} = K(\tilde{m} - 1), \quad K = kL,$$

следовательно, ее интегральное значение для всей поверхности контакта L

$$\sigma_0 = K(\tilde{m} - 1). \quad (5.12)$$

Из сравнения равенств (5.10) и (5.12) следует, что

$$\tilde{m} = 1 + \frac{W}{K} \ln \left(1 - \frac{Q}{WT_H} \right). \quad (5.13)$$

Так как отношение $\frac{q(T_0)}{T_0}$ постоянно, то минимальная диссипация равна

$$\sigma_{\min} = \int_0^L q(T_0) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dl = \left[\frac{q(T_0)}{T_0} \right] \frac{1 - \tilde{m}}{\tilde{m}} L = \frac{K(1 - \tilde{m})^2}{\tilde{m}}. \quad (5.14)$$

Нетрудно показать, что эта оценка может быть достигнута в противоточном трубчатом теплообменнике, если параметры второго потока: температура на входе в теплообменник $T(0)$ и водяной эквивалент W_1 , удовлетворяют условиям термодинамической согласованности, связывающими их с водяным эквивалентом W и температурой первого потока на входе в теплообменник $T_0(0)$,

$$W_1 = \frac{W}{\tilde{m}}, \quad T(0) = \tilde{m}T_0(0) \exp\left(-\frac{K(1 - \tilde{m})}{W}\right). \quad (5.15)$$

Исключив константу \tilde{m} из равенств (5.12), (5.14), получим выражение для минимальной диссипации через исходные данные

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_0^2(T_H, W, Q)}{\sigma_0(T_H, W, Q) + K} = \frac{W^2 \ln^2 \left(1 - \frac{Q}{WT_H} \right)}{K + W \ln \left(1 - \frac{Q}{WT_H} \right)}. \quad (5.16)$$

Откуда следует, что для процесса теплообмена с ньютоновским законом теплопередачи между двумя внутренне обратимыми системами справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{k\tau}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_0} \leq 0, \quad (5.17)$$

определяющее область достижимости на плоскости с координатами σ и $\sigma_0(T_H, W, Q)$ (рис. 5.2, а). При этом, как следует из (5.14), производство энтропии в каждом сечении или в каждый момент времени постоянно.

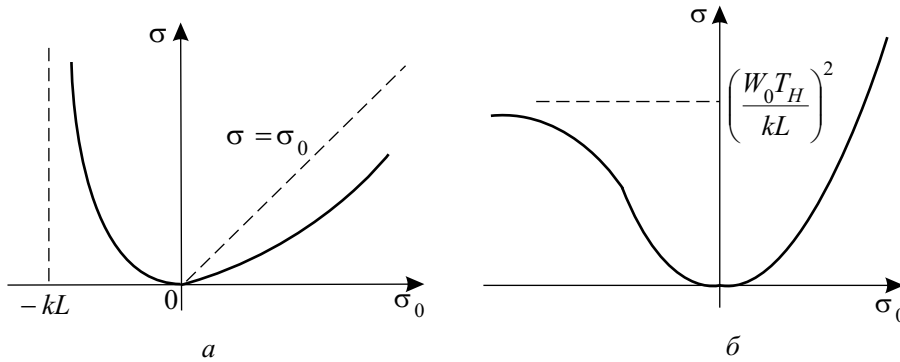


Рис. 5.2. Области достижимости для процесса теплообмена с ньютоновским законом теплопереноса (а) и законом теплопереноса Фурье (б)

Закон теплопередачи Фурье. Этот закон линеен относительно термодинамических потенциалов,

$$q(T_0, T) = k \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right),$$

проделаем выкладки аналогичные тем, которые были проведены для ньютоновского закона. В этом случае из условия минимальной диссипации (5.9) следует, что для любого сечения (момента времени) тепловой поток q постоянен. Обозначим его величину через $\bar{q} = Q/L$. Температура источника подчиняется уравнению

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{\bar{q}}{W} \Rightarrow T_0(l) = T_H - \frac{\bar{q}}{W} l.$$

Минимальное производство энтропии для непрерывной системы (минимальный прирост для периодической):

$$\sigma_{\min} = \int_0^L q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) dl = \frac{Q^2}{K}.$$

Из этого равенства и соотношения (5.10) получим

$$\sqrt{\sigma_{\min} kL} = WT_H \left[1 - \exp \frac{\sigma_0(T_H, W, Q)}{W} \right].$$

Области достижимых режимов теплообмена в пространстве с координатами (σ_0, σ) определяются границами неравенства

$$\frac{\sqrt{\sigma kL}}{WT_H} + \exp \left(\frac{\sigma_0(T_H, W, Q)}{W} \right) \geq 1. \quad (5.18)$$

Вид этой границы показан на рис. 5.2, б. Как и для ньютоновского закона в процессе минимальной диссипации для закона Фурье производство энтропии в каждом сечении теплообменника (в каждый момент времени в периодическом процессе) постоянно.

Для источника бесконечной емкости температура постоянна ($T_0 = T_H$) и при любом законе теплопередачи зависимость минимальной диссипации от $\sigma_0(T_H, W, Q)$ квадратичная

$$\sigma_{\min} = \frac{T_0^2}{kL} \sigma_0^2(T_H, W, Q).$$

Источнику бесконечной емкости соответствует для распределенного стационарного теплообмена бесконечно большой поток горячего теплоносителя.

Таким образом, для оценки степени термодинамического совершенства теплообменника необходимо по заданной тепловой нагрузке Q , водяному эквиваленту потока W (теплоемкости источника c) рассчитать σ_0 по формуле (5.10), а также фактическую диссипацию σ как разность суммарной энтропии входящих и выходящих потоков (разность между энтропией системы в начале и в конце процесса). Полученные данные соответствуют точке на плоскости с координатами (σ_0, σ) . Она лежит заведомо выше границы, определяемой неравенствами типа (5.17) или (5.18). Разность ординат изображающей точки и соответствующей точки границы области позволяет судить о том, есть ли резервы для улучшения термодинамической организации процесса.

Отметим, что найденные оценки не являются грубыми, так как для ньютоновского закона теплообмена в трубчатом противоточном теплообменнике оценка (5.17) может быть, как показано далее, достигнута (неравенство становится равенством) за счет подбора водяных эквивалентов и начальных температур потоков.

5.2. Предельные возможности теплообменных систем с заданной гидродинамикой потоков

Для реальных теплообменников часто те или иные технологические требования определяют гидродинамику потоков. Можно менять лишь параметры потока (температуру, концентрацию, скорость) на входе в аппарат.

Рассмотрим четыре типа теплообменников, различающихся моделями гидродинамики потоков (рис. 5.3). Естественно, что при сопоставимых условиях производство энтропии в таких аппаратах будет больше оценок, полученных выше. Для различных вариантов конструктивного оформления найдем нижние границы показателя необратимости D и соответствующие им связи между параметрами потоков.

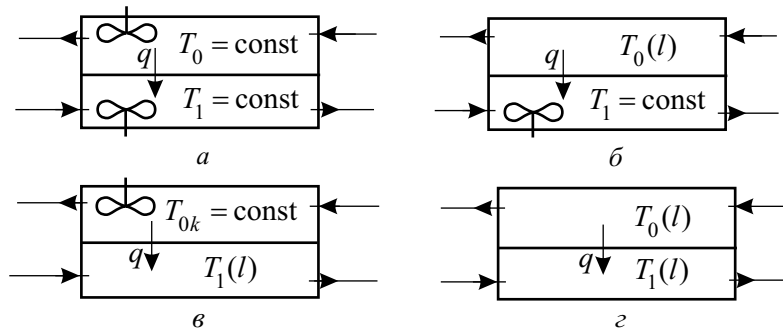


Рис. 5.3. Теплообменные аппараты, различающиеся гидродинамикой потоков: a — «смешение — смешение»; $б$ — «вытеснение — смешение»; $в$ — «смешение — вытеснение»; $г$ — «вытеснение — вытеснение»

В каждом сечении аппарата интенсивность процесса переноса зависит от параметров потоков в этом сечении. Параметры одного из потоков заданы; назовем этот поток фиксированным. Параметры второго — управляемого — потока на входе в аппарат должны быть выбраны таким образом, чтобы минимизировать производство энтропии.

Будем предполагать, что кинетика теплообмена определяется ньютоновским законом теплопереноса, а тепловая нагрузка задана, так что

$$\int_0^L k_l [T_0(l) - T_1(l)] dl = Q, \quad (5.19)$$

где k_l — коэффициент теплопередачи, отнесенный к единице поверхности (далее будем использовать также эффективный коэффициент теплопередачи $K = k_l L$); $T_0(l), T_1(l)$ — температуры фиксированного и управляемого потоков соответственно.

В случае, когда фиксированный поток описывается моделью идеального вытеснения, изменение его энтропии рассчитывается как (см. (5.10))

$$\sigma_{0v}(W_0, T_{0H}, Q) = W_0 \ln \frac{T_{0K}}{T_{0H}} = W_0 \ln \frac{T_{0H} - Q/W_0}{T_{0H}}, \quad (5.20)$$

где W_0 — водяной эквивалент фиксированного потока, T_{0K} и T_{0H} — его конечная и начальная температуры.

Если фиксированный поток описывается моделью идеального смешения, то температура теплоносителя в процессе теплообмена постоянна и равна его температуре на выходе, так что скорость изменения его энтропии

$$\sigma_{0s}(W_0, T_{0H}, Q) = -\frac{Q}{T_{0K}} = \frac{W_0 Q}{Q - W_0 T_{0H}}. \quad (5.21)$$

Поскольку скорость изменения энтропии фиксированного потока определена тепловой нагрузкой и моделью гидродинамики, то задачу о минимальной необратимости теплообмена можно формализовать как

$$\sigma_1 = \int_0^L \frac{q(T_0, T_1)}{T_1(l)} dl \rightarrow \min \quad (5.22)$$

при условии (5.19), а также при условии

$$\frac{dT_i}{dl} = \frac{q(T_0, T_1)}{W_i}, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (5.23)$$

Значение T_{0H} предполагаем фиксированным.

С х е м а « в ы т е с н е н и е — в ы т е с н е н и е ». Условие минимальной диссипации (5.9) для ньютоновского случая соответствует тому, что для любого сечения аппарата оптимальное отношение температур теплоносителей должно быть постоянно:

$$\frac{T_1}{T_0} = \tilde{m} = \left[1 - \frac{W_0}{K} \ln \frac{T_{0H}}{T_{0H} - Q/W_0} \right]. \quad (5.24)$$

С другой стороны, из уравнений (5.23) видно, что это отношение обратно пропорционально отношению водяных эквивалентов потоков. Так что условие термодинамической согласованности примет форму

$$W_1 = \frac{W_0}{\tilde{m}}, \quad (5.25)$$

а для сечения $l = 0$ имеем

$$T_{1K} = \tilde{m}T_{0H} = \tilde{m}[T_{0H} - Q/W_0]. \quad (5.26)$$

Условия (5.25), (5.26) представляют собой условия термодинамической согласованности противоточного трубчатого теплообмена. Минимальное производство энтропии при таком выборе равно полученной выше (см. (5.16)) оценке

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_{0v}^2}{K + \sigma_{0v}} \quad (5.27)$$

С х е м а « с м е ш е н и е — с м е ш е н и е ». Если фиксированный поток описывается моделью идеального смешения, его температура постоянна. Постоянство отношения температур потоков достигается в том случае, когда гидродинамика управляемого потока соответствует идеальному смешению. При этом температура T_1 внутри аппарата определяется из условия (5.19):

$$T_1 = T_{0K} - \frac{Q}{K},$$

а производство энтропии определено тепловой нагрузкой и гидродинамикой однозначно

$$\sigma = QW_0 \left[\frac{K}{T_{0H}W_0K - Q(W_0 + K)} - \frac{1}{T_{0H}W_0 - Q} \right]. \quad (5.28)$$

Для схемы «смешение — вытеснение» величина σ монотонно уменьшается с ростом водяного эквивалента W_1 управляемого потока, стремясь к значению (5.28) при стремлении W_1 к бесконечности.

С х е м а « в ы т е с н е н и е — с м е ш е н и е ». В этой схеме гидродинамика фиксированного потока соответствует модели идеального вытеснения, а температура T_{1K} постоянна и определена тепловой

нагрузкой. Найдем ее, учитывая, что для ньютоновского закона теплообмена изменение температуры имеет вид

$$T_0(l) = T_{1K} + (T_{0H} - T_{1K})e^{-al}, \quad (5.29)$$

где $a = K/LW_0$. Так как интеграл от потока теплоты равен заданной тепловой нагрузке, то, подставляя в интеграл выражение (5.29), получим

$$T_{1K} = T_{0H} - \frac{Q}{W_0(1 - e^{-\frac{K}{W_0}})}.$$

Производство энтропии, как и для случая «смешение — смешение», однозначно определено тепловой нагрузкой и гидродинамикой потоков. Оно равно

$$\sigma = \sigma_{0v} + \frac{Q}{T_{1K}} = W_0 \ln \frac{T_{0H}W_0 - Q}{T_{0H}W_0} + \frac{Q(1 - e^{-\frac{K}{W_0}})}{T_{0H}(1 - e^{-\frac{K}{W_0}}) - Q}. \quad (5.30)$$

Возможности использования полученных оценок для расчета теплообменных систем

При расчете теплообменных систем, как правило, заданы расходы и начальные температуры некоторых потоков, нужно оптимально распределить общую поверхность теплообмена и тепловые нагрузки. Распределение поверхности и тепловых нагрузок между теплообменниками в системах с большим количеством нагреваемых и охлаждаемых потоков представляет собой непростую задачу, для решения которой неоднократно предлагались разного рода эмпирические алгоритмы. Найденные оценки позволяют облегчить решение этой задачи.

Пусть закон теплообмена близок к ньютоновскому и известен характер гидродинамики в каждом i -ом теплообменнике. Полученные выше выражения связывают производство энтропии в каждом из теплообменников с его поверхностью (коэффициентом K_i) и тепловой нагрузкой. Оптимальное распределение сводится к минимизации суммарного производства энтропии в системе при заданных суммарном коэффициенте теплопереноса и суммарной тепловой нагрузке. Решение этой задачи методом Лагранжа приведет к условию равенства частных производных $\sigma_{i \min}$ по K_i и по Q_i для всех i . В качестве примера получим условия оптимальности в задаче распределения поверхности для системы,

состоящей из теплообменников «вытеснение — вытеснение», в каждом из которых задана тепловая нагрузка и выполнены условия термодинамической согласованности потоков.

Производство энтропии в каждом теплообменнике близко к минимально-возможному, определяемому выражениями (5.10), (5.16). Функция $\sigma_{i \min}$ выпуклая вниз по эффективному коэффициенту теплопроводности $K_i = k_i L$ ($K_i = k_i \tau$). Задача оптимального распределения поверхности теплообмена сводится к такому выбору коэффициентов $K_i \geq 0$, чтобы при заданной их сумме диссипация в системе была минимальна:

$$\sigma = \sum_i \sigma_{i \min}(K_i) \rightarrow \min / \sum_i K_i = K. \quad (5.31)$$

По условиям оптимальности этой задачи для всех теплообменников с ненулевой поверхностью производные по K_i должны быть одинаковы:

$$\frac{d\sigma_{i \min}}{dK_i} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

После дифференцирования (5.16) по K_i получим

$$\frac{\sigma_{i0}(T_H, W, Q)}{\sigma_{i0}(T_H, W, Q) + K_i} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.33)$$

Условие (5.33) можно переписать в эквивалентной форме

$$d_i(K_i) = \frac{\sigma_{i \min}(K_i)}{\sigma_{i0}(T_H, W, Q)} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

Назовем величину d_i приведенной диссипацией для i -го теплообменника и сформулируем правило для оптимального распределения поверхностей:

В теплообменной системе с оптимально спроектированными противоточными теплообменниками поверхности теплообмена между ними надо распределять так, чтобы приведенные диссипации для всех теплообменников оказались одинаковы. Это правило позволяет организовать вычислительную процедуру, на каждом шаге которой увеличивают поверхность того теплообменника, для которого приведенная диссипация наибольшая, за счет уменьшения поверхности того, для которого она наименьшая.

Нетрудно показать, что при выполнении условий (5.34) оптимальные поверхности равны

$$K_i^* = \frac{K \sigma_{i0}(Q_i)}{\sum_{\nu} \sigma_{\nu 0}(Q_{\nu})},$$

а минимум производства энтропии в системе

$$\sigma_{\min} = \frac{\left(\sum_i \sigma_{i0}(Q_i) \right)^2}{\sum_i \sigma_{i0}(Q_i) + K}.$$

Условия оптимальности для распределения поверхностей позволяют выразить оптимальные эффективные коэффициенты теплопередачи через тепловые нагрузки и на следующем этапе таким же путем найти оптимальное распределение тепловых нагрузок.

5.3. Задача о максимальной работе в замкнутой системе

Одной из классических задач термодинамики является задача о максимальной работе, которую можно извлечь из термически неоднородной системы. Отдельные элементы системы могут иметь различные температуры, а значит можно, включив в эту систему тепловую машину, получить работу. Максимум такой работы достигается в обратимом процессе. При этом процесс длится сколь угодно долго или, если его продолжительность ограничена, то коэффициенты теплопередачи должны быть сколь угодно велики. В реальных системах ни то, ни другое не имеет места.

Эксергия. При термодинамическом анализе технологических систем широко используют эксергетический подход. При этом под *эксергией* понимают максимальное количество работы, которое может быть получено при переходе системы из исходного состояния в состояние равновесия с окружающей средой [8]. Так как продолжительность процесса или его интенсивность не оговорены, то максимальной работе соответствует работа в обратимом процессе.

Найдем работу, которую может произвести система в обратимом процессе, если она находится в среде с температурой T^0 и давлением p^0 . Для простоты считаем, что химические процессы отсутствуют.

Обратимый процесс должен состоять из двух участков: изменения температуры в адиабатическом процессе от начальной температуры до температуры окружения и изменения давления в изотермическом процессе при $T = T^0$ от начального давления в системе до p^0 . Работа на каждом участке процесса:

$$A^0 = -\Delta E - T^0 \Delta S + p^0 \Delta V,$$

где $\Delta E, \Delta S, \Delta V$ — изменения внутренней энергии, энтропии и объема системы.

На адиабатическом участке энтропия системы не меняется и работа

$$A_a = -\Delta E_a + p^0 \Delta V_a = \Delta I_a$$

равна изменению энтальпии системы. На изотермическом участке неизменна внутренняя энергия, так что изменение энтальпии равно $\Delta I_t = p^0 \Delta V_t$, а работа $A_t = \Delta I_t - T^0 \Delta S$. Суммарная работа

$$A = A_a + A_t = \Delta I - T^0 \Delta S.$$

Если ввести обозначение $L = I - T^0 S$ и учесть, что при совпадении начального состояния системы с состоянием окружающей среды никакой работы получить нельзя, то максимальная работа, которую может совершить система при выравнивании своих параметров с параметрами окружения, $A_{\max} = \Delta L$.

Эксергия зависит не только от состояния системы, но и от состояния окружающей среды. Так как процесс при подсчете A предполагался обратимым, то она не учитывает значений кинетических коэффициентов (тепло- и массообмена, скоростей реакций и пр.). При эксергетическом анализе термодинамическое совершенство процесса или его отдельной стадии определяется потерями эксергии.

Эксергетический метод имеет два н е д о с т а т к а:

1. Сравнение с обратимым процессом не учитывает объективной необратимости, связанной с величинами потоков, конечными коэффициентами тепло- и массопередачи.

Например, в теплообменнике при заданных коэффициенте теплопередачи и тепловой нагрузке неизбежна необратимость, которую нельзя уменьшить, ей соответствуют неизбежные потери эксергии.

2. Рассматриваются только системы с резервуаром, интенсивные переменные которого (температуры, давления, концентрации и пр.) совпадают с интенсивными переменными окружающей среды. Последние изменяются и не всегда могут быть точно найдены. Кроме того, многие системы вообще не содержат резервуара.

В термодинамике при конечном времени решают задачи о максимуме извлеченной работы для систем, как содержащих, так и не содержащих резервуара, при ограниченной продолжительности процесса или при заданной интенсивности потоков. Максимальную работу (*работоспособность*), найденную при этих ограничениях, будем обозначать через L_τ или L_p соответственно. Это понятие является обобщением эксергии, она совпадает с эксергией, если:

- целевой поток (мощность) p сколь угодно мала,
- продолжительность процесса τ сколь угодно велика,
- система содержит резервуар — окружающую среду.

Рассмотрим задачи о расчете работоспособности для ряда систем и покажем, какова структура оптимального решения в подобных задачах.

Общая постановка и характер оптимального решения задачи о максимальной работе. Разобьем все подсистемы, входящие в рассматриваемую термодинамическую систему, на три категории:

- 1) источники бесконечной емкости (резервуары);
- 2) источники конечной емкости (пассивные подсистемы);
- 3) активные подсистемы с управляемыми интенсивными переменными (рабочие тела).

Векторы интенсивных переменных подсистем каждого типа будем обозначать соответственно как z_n, z_e, z_p . Составляющими этих векторов являются температуры, давления и химические потенциалы подсистем. Вектор экстенсивных переменных каждой i -й подсистемы характеризуется внутренней энергией E_i , энтропией S_i и количеством N_{ij} ($j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$) каждого из веществ. При наличии контакта между подсистемами возникают энергетические и материальные потоки $q_{i\nu}(z_i, z_\nu)$ и $g_{i\nu}(z_i, z_\nu)$. Здесь индексы означают, что поток направлен от i -й подсистемы к ν -й. При этом поток $g_{i\nu}$ векторный и содержит m составляющих — по количеству веществ, содержащихся в системе. Функции $q_{i\nu}$ и $g_{i\nu}$ равны нулю при $z_i = z_\nu$. В силу законов сохранения энергии и вещества

$$q_{i\nu}(z_i, z_\nu) = -q_{\nu i}(z_\nu, z_i), \quad g_{i\nu}(z_i, z_\nu) = -g_{\nu i}(z_\nu, z_i) \quad \forall i, \nu. \quad (5.35)$$

Интенсивные переменные резервуаров z_n предполагаются заданными и неизменными; интенсивные переменные рабочего тела u для каждого момента t принадлежат некоторому множеству D_z и являются в задаче управляющими воздействиями; наконец, интенсивные переменные пассивных подсистем являются функциями их экстенсивных переменных

$$z_e = f(E_e, S_e, N_e). \quad (5.36)$$

Наряду с вектором $u(t)$ управляющими воздействиями являются и функции контакта $U_{iv}^q(t)$ и $U_{iv}^g(t)$, принимающие значения ноль или единица. Если функция контакта равна единице, то соответствующий поток возможен, если она равна нулю, поток отсутствует.

Рабочее тело может контактировать одновременно с несколькими подсистемами, устанавливая при контакте с каждой из них свои значения интенсивных переменных. Мы будем называть такое рабочее тело рабочим телом с распределенными параметрами, предполагая, что потоки в нем конвективные и не связаны с ростом энтропии системы. Примером такого рабочего тела может служить турбина, контактирующая одновременно с двумя резервуарами. Так как переменные $u_i(t)$ при контакте с каждой подсистемой могут быть различны, нет смысла вводить функции контакта. Выбор $u_i(t) = z_i(t)$ соответствует нулевому значению потока.

Экстенсивные переменные каждой из подсистем удовлетворяют уравнениям термодинамических балансов:

Условию энергетического баланса —

$$\dot{E}_\nu = \sum_{i=1}^n [U_{iv}^q q_{iv}(z_i, z_\nu) + U_{iv}^g \mu_{iv} g_{iv}(z_i, z_\nu)] - r_\nu(u_\nu, z_\nu), \quad \nu = 1, \dots, n, \quad (5.37)$$

где суммирование проводится по всем i , включая $i = \nu$, с учетом того, что $q_{\nu\nu} = g_{\nu\nu} = 0$; $r_\nu(u, z)$ — энергия, получаемая от ν -й подсистемы рабочим телом преобразователя, если $r > 0$, и затрачиваемая им, если $r < 0$; второе слагаемое в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение, т. е. сумму по индексу j от единицы до m для каждого сочетания i и ν .

Условием материального баланса по каждому из веществ —

$$\dot{N}_{j\nu} = \sum_{i=1}^n U_{ij\nu}^g g_{ij}(z_i, z_j) - n_{j\nu}(u_\nu, z_\nu), \quad j = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad (5.38)$$

где $n_{j\nu}$ — поток j -го вещества от ν -й подсистемы к рабочему телу.

Балансу по энтропии —

$$\dot{S}_\nu = \frac{1}{T_\nu} \sum_{i=1}^n [U_{i\nu}^q q_{i\nu}(z_i, z_\nu) + U_{i\nu}^g \mu_{i\nu} g_{i\nu}(z_i, z_\nu)] \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (5.39)$$

Входящие потоки предполагают положительными, а выходящие — отрицательными.

На функции контакта, кроме упомянутых условий, могут быть наложены дополнительные ограничения, так что будем предполагать, что $U \in D_u$, где множество D_u представляет собой подмножество вершин куба с единичными гранями, расположенного в положительном квадранте с вершиной в начале координат.

Критерием оптимальности задачи является извлеченная работа A , которая равна уменьшению внутренней энергии системы

$$A = \Delta E = \sum_{\nu=1}^n (E_\nu(0) - E_\nu(\tau)) \rightarrow \max. \quad (5.40)$$

Начальное состояние системы задано, поэтому критерий (5.40) соответствует условию

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu(\tau) \rightarrow \min.$$

Так как внутренняя энергия каждой из подсистем в силу уравнения состояния зависит от S_ν, V_ν, N_ν , то приходим к требованию

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu[S_\nu(\tau), N_\nu(\tau), V_\nu(\tau)] \rightarrow \min_{u, V}. \quad (5.41)$$

Минимум внутренней энергии нужно искать при заданном начальном состоянии системы с учетом уравнений (5.38), (5.39), связей (5.36) для пассивных подсистем, ограничений, наложенных на объем подсистем,

$$V(t) \in D_V, \quad (5.42)$$

на переменные U и u —

$$U(t) \in D_U, \quad u(t) \in D_u \quad (5.43)$$

и на конечные состояния (значения энтропии и состава) для некоторых подсистем:

$$\begin{aligned} S_\nu(\tau) &= S_\nu^k, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad r \leq n, \\ \mu_{\nu j}(\tau) &= \bar{\mu}_{\nu j}, \quad p_\nu(\tau) = \bar{p}_\nu, \quad T_\nu(\tau) = \bar{T}_\nu, \quad (j, \nu) \in \Omega. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Здесь Ω — множество сочетаний индексов j, ν , для которых конечные значения части переменных в ν -й подсистеме фиксированы.

Пусть общее число условий (5.44), наложенных на конечное состояния системы, равно m . При этом справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial E_\nu}{\partial S_\nu} \right)_{t=\tau} = T_\nu(\tau), \quad - \left(\frac{\partial E_\nu}{\partial V_\nu} \right)_{t=\tau} = p_\nu(\tau), \quad \left(\frac{\partial E_\nu}{\partial N_{\nu j}} \right)_{t=\tau} = \mu_{\nu j}(\tau), \quad (5.45)$$

где p_ν — давление, а $\mu_{\nu j}$ — химический потенциал j -го вещества в ν -й подсистеме.

Остановимся на математических особенностях задачи, позволяющих в ряде случаев существенно упростить ее решение.

1. Объемы $V_\nu(\tau)$ входят только в критерий оптимальности (5.41) и ограничения (5.42) и никак не влияют на $S(\tau)$ и $N(\tau)$, поэтому для их оптимального выбора достаточно решить задачу

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu(S_\nu^*(\tau), N_\nu^*(\tau), V_\nu(\tau)) \rightarrow \min_{V \in D_V}. \quad (5.46)$$

В частности, если задан суммарный объем системы в конце процесса

$$\sum_{\nu=1}^n V_\nu(\tau) = V_0 \quad (5.47)$$

и зависимость E_ν выпукла вниз по V_ν , то требование (5.46), (5.47) приводит к условиям

$$\left(\frac{\partial E_\nu}{\partial V_\nu} \right)_\tau = -p_\nu(\tau) = \text{const} \quad \forall \nu. \quad (5.48)$$

Таким образом, в конечный момент объемы подсистем при оптимальных либо заданных значениях $S_\nu(\tau)$ и $N_\nu(\tau)$ следует выбирать из условия равенства давлений. Если среди подсистем имеется резервуар, давление в котором фиксировано, то из условия (5.48) следует, что в момент τ давления всех подсистем, объемы которых можно менять, должны совпадать с давлением этого резервуара p_n .

2. Пусть все подсистемы, с которыми контактирует рабочее тело, являются резервуарами, не контактирующими друг с другом. Тогда задача (5.41), (5.38), (5.39) оказывается не задачей оптимального управления, а усредненной задачей нелинейного программирования (см. приложение П.3). Действительно, в этом случае уравнения (5.38), (5.39) могут быть отброшены и заменены условиями (5.44), которые приводят к m равенствам

$$\begin{aligned}\bar{\dot{S}}_\nu &= \frac{1}{\tau}(S_\nu^k - S_{\nu 0}) = \bar{\sigma}_\nu = \frac{1}{T_\nu} \overline{q(z_\nu, u_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \\ \bar{\dot{N}}_{j\nu} &= \frac{1}{\tau}(N_{\nu j}^k - N_{\nu j 0}) = \overline{n_{j\nu}(z_\nu, u_\nu)}, \quad (j, \nu) \in \Omega.\end{aligned}\quad (5.49)$$

Пусть приросты энтропии и количества некоторых веществ заданы для r резервуаров и сочетания $(\nu, j \in \Omega)$, общее число условий (5.49) равно $m - 1$. Остальные переменные $S_\nu^*(\tau)$ зависят от средних потоков $N_{\nu j}(\tau)$ при $(j, \nu \neq \Omega)$, свободны и подлежат оптимальному выбору. Средняя скорость изменения E равна

$$\bar{\dot{E}} = \sum_\nu \frac{\partial E}{\partial S_\nu} \bar{\dot{S}}_\nu + \sum_{\nu, j} \frac{\partial E}{\partial N_{\nu j}} \bar{\dot{N}}_{\nu j} = \sum_\nu T_\nu \bar{\sigma}_\nu + \sum_{\nu, j} \mu_{\nu j} \overline{n_{\nu j}}. \quad (5.50)$$

Условия (5.49) представляют собой $(m - 1)$ усредненное ограничение. К ним надо добавить ограничения на состояние рабочего тела. Как правило, эти ограничения имеют вид условий ненакопления

$$\Delta S_p = 0 \rightarrow S_p(0) = S_p(\tau), \quad \Delta N_{jp} = 0 \rightarrow N_{jp}(0) = N_{jp}(\tau), \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.51)$$

Так как приросты энтропии и количества вещества в рабочем теле имеют вид

$$\frac{\Delta S_p}{\tau} = - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{u_{\nu T}} \overline{q(z_\nu, u_\nu)}, \quad \frac{\Delta N_{jp}}{\tau} = - \sum_{\nu=1}^n \overline{n_{j\nu}(z_\nu, u_\nu)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

то условия (5.51) представляют собой ограничения на средние значения потоков, число которых равно $(m+1)$. Через $u_{\nu T}$ обозначены температуры рабочего тела при контакте с ν -м резервуаром. Таким образом, мы приходим к усредненной задаче о минимуме усредненного выражения (5.50), при условиях (5.49) и (5.51) по $u_\nu(t)$. Общее число усредненных условий равно $(r + m + 1)$.

Оптимальное решение $W^*(t) = (U^*(t), u^*(t))$ задачи (5.50), (5.51) [65] представляет собой кусочно-постоянную вектор-функцию, принимающую на $(0, \tau)$ не более $(r + m + 1)$ -го значения W^l . Каждое из этих значений (их называют базовыми) управление $W^*(t)$ принимает в течение доли γ_l интервала $(0, \tau)$. При этом $\gamma_l \geq 0$, $\sum_{l=0}^{1+m+r} \gamma_l = 1$, а последовательность, в которой следуют значения W^l , роли не играет.

Чтобы найти базовые значения W , нужно (см. приложение П.3) составить функцию Лагранжа той же задачи, но без усреднения и искать максимум по вектору λ — множителей от минимума этой функции по u

$$L = \left[\sum_{\nu=1}^n \left(T_{\nu} \sigma_{\nu} + \sum_{j=1}^m \mu_{\nu j} n_{\nu j} \right) + \Lambda \sum_{\nu=1}^n \frac{q(z_{\nu}, u_{\nu})}{u_{\nu T}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{\nu=1}^n n_{j\nu}(z_{\nu}, u_{\nu}) + \sum_{(j,\nu) \in \Omega} \lambda_{j\nu} n_{j\nu}(z_{\nu}, u_{\nu}) + \frac{1}{T_{\nu}} \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} q(z_{\nu}, u_{\nu}) \right] \rightarrow \min_u \max_{\lambda} . \quad (5.52)$$

3. В задачах о предельной мощности N_a время τ^* определяется по условию

$$N_a(\tau) = \frac{A_n^*(\tau)}{\tau} \rightarrow \max_{\tau > 0},$$

что для дифференцируемой и выпуклой вверх зависимости полученной работы от продолжительности процесса приводит к уравнению для τ^*

$$\left(\frac{dA_n^*}{d\tau} \right)_{\tau^*} = \frac{A_n^*(\tau^*)}{\tau^*}. \quad (5.53)$$

Если функция L в (5.52) при всех значениях λ выпукла вниз по W , то базовое значение единственно; если, наконец, множество D_w допустимых управлений можно разбить на несколько подмножеств, число которых M^0 меньше $(r + m + 1)$ и на каждом из которых функция Лагранжа L выпукла вниз, то количество базовых решений не превосходит числа M^0 . Справедливость этого утверждения следует из (5.52).

Значения γ_l определяют из условий (5.49), (5.51) после подстановки в них базовых решений с соответствующим каждому из них весовым множителем γ_l .

В качестве вывода из вышеизложенного сформулируем утверждение, определяющее структуру оптимального решения в задаче о максимальной работе.

У т в е р ж д е н и е 5.1: *В термодинамической системе, состоящей из резервуаров и рабочего тела с заданным начальным состоянием, для любых законов тепло- и массопереноса максимальной работе, извлеченной за время τ , соответствует процесс, для которого:*

— вектор интенсивных переменных u и функций контакта U на интервале $(0, \tau)$ кусочно постоянен, причем количество значений, которые он принимает, не превосходит $r + m + 2$, где r — число условий, наложенных на конечное состояние подсистем, m — размерность вектора концентраций;

— в начале и в конце процесса интенсивные переменные рабочего тела изменяются скачком до некоторых оптимальных значений, соответствующих оптимальным давлениям;

— энтропия системы растет на интервале $(0, \tau)$ как кусочно линейная функция.

В зависимости от заданных граничных условий максимальная работа может быть больше или меньше нуля. В последнем случае она соответствует минимуму затраченной работы.

Подчеркнем, что такая структура оптимального процесса характерна для любой кинетики тепло- и массопереноса.

С л е д с т в и е: *Когда на состав, энтропию рабочего тела и приросты экстенсивных резервуаров при $t = \tau$ ограничений не наложено ($1 + m + r = 0$), энтропия системы в оптимальном процессе при любых законах тепло- и массопереноса растет с постоянной скоростью, а рабочее тело на протяжении всего процесса, контактирует с одними и теми же резервуарами.*

При наличии подсистем конечной емкости задача о максимальной работе оказывается задачей оптимального управления с целочисленными переменными $U(t)$. При этом справедливо

У т в е р ж д е н и е 5.2: *На каждом интервале постоянства функции контакта между рабочим телом и подсистемой конечной емкости закон изменения вектора $u(t)$ интенсивных переменных рабочего тела в оптимальном процессе должен удовлетворять условиям минимальной диссипации.*

Конкретизируем полученные условия для некоторых структур тепломеханических систем.

Система со стационарным резервуаром и источниками конечной емкости

Продолжительность процесса не ограничена, расчет эксергии системы. Пусть система содержит резервуар с температурой T_- , k подсистем конечной емкости с начальными температурами T_{i0} и теплоемкостями $c_i (i = 1, \dots, k)$ и рабочее тело, которое может вступать с подсистемами в тепловой контакт. Предположим, что объемы подсистем постоянны, работа может быть получена за счет изменения температуры рабочего тела при контакте с подсистемами.

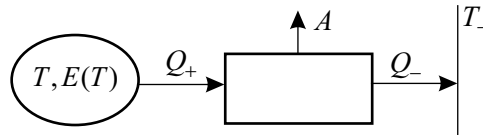


Рис. 5.4. Система, состоящая из подсистемы конечной емкости, рабочего тела и резервуара

Найдем эксергию A_∞ для одной подсистемы. Для этого запишем уравнения баланса по энергии и энтропии для обратимой тепловой машины, работающей за счет обмена энергией подсистемы и резервуара (рис. 5.4):

$$dQ_+ - dQ_- - dA = 0, \quad \frac{dQ_+}{T} - \frac{dQ_-}{T_-} = 0 \Rightarrow dQ_- = dQ_+ \frac{T_-}{T}. \quad (5.54)$$

Последнее равенство соответствует тому, что прирост энтропии рабочего тела равен нулю. Из уравнений (5.54) следует, что

$$dA = dQ_+ \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) = -c(T) \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) dT,$$

так что

$$A_\infty = \int_{T_-}^{T_0} c(T) \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) dT. \quad (5.55)$$

При постоянной теплоемкости

$$A_\infty = c \left(T_0 - T_- \left(1 + \ln \frac{T_0}{T_-}\right) \right).$$

Эта функция неотрицательна и равна нулю в точке $T_0 = T_-$ (рис. 5.5).

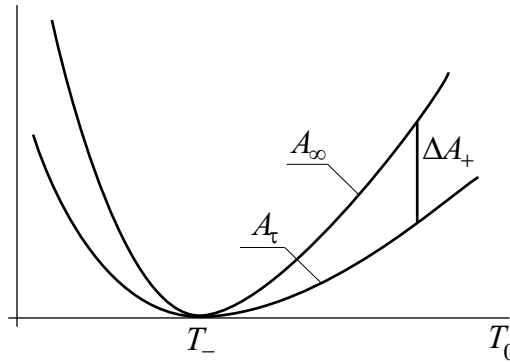


Рис. 5.5. Работоспособность системы (рис. 5.4) при ограниченной и неограниченной продолжительности процесса

Для n подсистем $A_\infty = \sum_{i=1}^n A_{i\infty}$. При $c_i = \text{const}$

$$A_\infty = \sum_{i=1}^n c_i \left(T_{0i} - T_- \left(1 + \ln \frac{T_{i0}}{T_-} \right) \right). \quad (5.56)$$

При прямом контакте подсистем с резервуаром в отсутствие рабочего тела извлекаемая работа равна нулю, и потери эксергии в необратимом процессе выравнивания температур пропорциональны приросту энтропии системы. Так, для системы, содержащей резервуар с температурой T_- , и подсистем с теплоемкостями c_i и начальными температурами T_{i0} при необратимом выравнивании температур потеря эксергии равна неполученной работе:

$$A_\infty = T_- \Delta S,$$

где прирост энтропии системы

$$\Delta S = \sum_i c_i \left(\frac{T_{i0}}{T_-} - \ln \frac{T_{i0}}{T_-} - 1 \right).$$

Продолжительность процесса фиксирована. В этом случае для каждой подсистемы (индекс i опускаем) нужно решить задачу о выборе таких температур рабочего тела $T_1(t)$ и $T_2(t)$, чтобы извлеченная работа была максимальной:

$$A_\tau = \int_0^\tau (q_+(T, T_1) - q_-(T_2, T_-)) dt \rightarrow \max_{T_1, T_2}. \quad (5.57)$$

Так как мы предполагаем, что рабочее тело циклически изменяет свои параметры, то его состояние в среднем за время цикла не изменяется:

$$\Delta S = \int_0^\tau \left(\frac{q_+(T, T_1)}{T_1} - \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2} \right) dt = 0. \quad (5.58)$$

Температура подсистемы при отборе теплоты изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{q_+(T, T_1)}{c(T)}, \quad T(0) = T_0. \quad (5.59)$$

Выражение (5.57) следует из энергетического, а условие (5.58) — из энтропийного баланса рабочего тела; через q_+ и q_- обозначены тепловые потоки от подсистемы к машине и от машины к резервуару.

Обозначим ΔS — прирост энтропии рабочего тела при получении тепла, тогда задачу (5.57)–(5.59) можно разбить на две подзадачи:

$$Q_+ = \int_0^\tau q_+(T, T_1) dt \rightarrow \max_{T_1(t)} \quad (5.60)$$

при условиях (5.59) и условии

$$\int_0^\tau \frac{q_+(T, T_1)}{T_1} dt = \Delta S. \quad (5.61)$$

Вторая подзадача в силу постоянства T_- , а значит, и T_2 , примет вид

$$Q_- = q_-(T_2, T_-)\tau \rightarrow \min_{T_2} \quad (5.62)$$

при условии

$$\frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2} = \frac{\Delta S}{\tau}. \quad (5.63)$$

Условие (5.63) связывает T_2 и ΔS , так что Q_- зависит от ΔS , как и максимум Q_+ . Величину ΔS надо выбрать так, чтобы

$$A_\tau(\Delta S) = [Q_+^*(\Delta S) - Q_-^*(\Delta S)] \rightarrow \max_{\Delta S > 0}. \quad (5.64)$$

Задача (5.62), (5.63), (5.64) рассмотрена выше. Условия оптимальности этой задачи с точностью до обозначений совпадают с условиями минимальной диссипации процесса теплообмена:

$$\frac{\partial q_+}{\partial T_1} \left(\frac{T_1^*(T)}{q_+(T, T_1^*(T))} \right)^2 = \text{const} = k \quad \forall T. \quad (5.65)$$

Они определяют $T_1(T)$ с точностью до константы k .

Величину этой константы находят после подстановки найденной из (5.65) зависимости $T_1^*(T, k)$ в (5.59), (5.61). Она зависит от ΔS , что и приводит к зависимости Q_+^* от ΔS , или, что то же самое, от k .

Для ньютоновских законов теплообмена

$$q_- = \alpha_-(T_2 - T_-), \quad q_+ = \alpha_+(T - T_1) \quad (5.66)$$

и постоянной теплоемкости c равенство (5.65) примет форму

$$\frac{T_1^2}{\alpha_+(T - T_1)^2} = \text{const} \Rightarrow T_1 = kT,$$

где k — некоторая константа ($0 < k < 1$).

Условия (5.59), (5.61) после подстановки в них $T_1(T, k)$ приводят к уравнениям, связывающим k , ΔS и \bar{T} :

$$\Delta S = \frac{c}{k} \ln \frac{T_0}{\bar{T}}, \quad \tau = \frac{c}{\alpha_+(1-k)} \ln \frac{T_0}{\bar{T}}, \quad (5.67)$$

или

$$\bar{T} = T_0 \exp \left(-\frac{\tau \alpha_+(1-k)}{c} \right). \quad (5.68)$$

Подставив \bar{T} в условие (5.67), получим

$$\Delta S = \frac{\tau \alpha_+(1-k)}{k}, \quad (5.69)$$

а после подстановки $T_1 = kT$ и \bar{T} в (5.60) найдем

$$Q_+^*(k) = T_0 c \left(1 - \exp \left(-\frac{\tau \alpha_+(1-k)}{c} \right) \right). \quad (5.70)$$

Из условия (5.63)

$$\alpha_-(T_2 - T_-) = \frac{\Delta S T_2}{\tau} = \frac{\alpha_+(1-k)}{k} T_2$$

следует, что

$$T_2 = T_- \frac{\alpha_- k}{\alpha_- k - \alpha_+(1-k)}.$$

Так как $T_2 > 0$, то $\alpha_- k - \alpha_+(1-k) > 0$, откуда $k > \frac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+}$. Величина

$$Q_-^*(k) = \frac{\tau T_- \alpha_+ \alpha_- (1-k)}{\alpha_- k - \alpha_+(1-k)}. \quad (5.71)$$

По условию (5.64) получим уравнение для k

$$\frac{dA_\tau}{dk} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_+^*}{\partial k} = \frac{\partial Q_-}{\partial k} \Rightarrow T_0 \exp\left(-\frac{\alpha_+ \tau}{c}(1-k)\right) = \frac{T_- \alpha_-^2}{(\alpha_- k - \alpha_+(1-k))^2}. \quad (5.72)$$

Левая часть этого уравнения монотонно растет с изменением k от нуля до единицы, а правая испытывает разрыв при $k^0 = \frac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+}$. При $k < k^0$ правая часть уравнения отрицательна, а при $k > k^0$ она монотонно уменьшается от бесконечности до T_- . Решение уравнения (5.72) существует, единственно и при $T_0 > T_-$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+} < k \leq 1.$$

После того, как для каждой подсистемы найдено значение k_i , доставляющее максимум $A_{i\tau}(\Delta S_i(k_i))$, работоспособность системы при фиксированной продолжительности процесса τ может быть найдена как

$$A_\tau = \sum_i A_{i\tau}^*.$$

Обратная задача. Будем называть задачу об извлечении максимума работы в неравновесной термодинамической системе прямой, а задачу о приведении равновесной системы в заданное неравновесное состояние с минимальной затратой работы — обратной. В первом случае температуры подсистемы и резервуара сближаются, а во втором отдаляются друг от друга. Покажем, как связаны эти задачи друг с другом.

От задачи (5.57)–(5.59) обратная задача отличается тем, что заданы начальная и конечная температуры подсистемы $T(0)$ и $T(\tau)$. Запишем эту задачу в форме

$$A_\tau = \int_0^\tau (q_+(T_-, T_2) - q_-(T_1, T)) dt \rightarrow \min_{T_1, T_2}, \quad (5.73)$$

при условиях

$$\int_0^\tau \left(\frac{q_+(T_-, T_2)}{T_2} - \frac{q_-(T_1, T)}{T_1} \right) dt = 0. \quad (5.74)$$

Температура подсистемы при отборе теплоты изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{q_-(T_1, T)}{c(T)}, \quad T(0) = T_-, \quad T(\tau) = T_0. \quad (5.75)$$

Решение этой задачи может быть проведено по той же схеме, что и решение задачи (5.57)–(5.59) с той разницей, что результат будет зависеть еще и от заданной температуры T_0 . Вместо условия (5.61) получим два интегральных ограничения

$$\int_0^\tau \frac{q_-(T_1, T)}{T_1} dt = \Delta S, \quad (5.76)$$

$$\int_0^\tau \frac{q_-(T_1, T)}{c(T)} dt = T_0 - T_-. \quad (5.77)$$

Ясно, что при τ , стремящемся к бесконечности, минимум затраченной работы равен максимуму полученной и равен обратимой работе A_∞ . При фиксированной продолжительности τ максимальная работа в прямой задаче $A_{\tau+}^*$ меньше, а минимальная работа в обратной задаче $A_{\tau-}^*$ больше обратимой. Обозначим их разность как (см. рис. 5.5)

$$\Delta A_+^* = A_\infty - A_{\tau+}^*.$$

В обратной задаче минимальная затраченная работа больше, чем A_∞ . Их разница

$$\Delta A_-^* = A_{\tau-}^* - A_\infty.$$

В силу того, что в обратной задаче имеется дополнительное условие (5.77), ее множество допустимых решений уже, чем в прямой, и для любого закона теплопереноса справедливо неравенство

$$\Delta A_-^* \geq \Delta A_+^*. \quad (5.78)$$

На рис. 5.6 показан характер зависимости затрачиваемой и максимальной полученной работы от продолжительности процесса. Если продолжительность процесса не превышает некоторого значения τ_0 , то никакой работы извлечь из системы нельзя. Величина τ^* соответствует максимуму средней интенсивности извлечения работы (максимальной мощности).

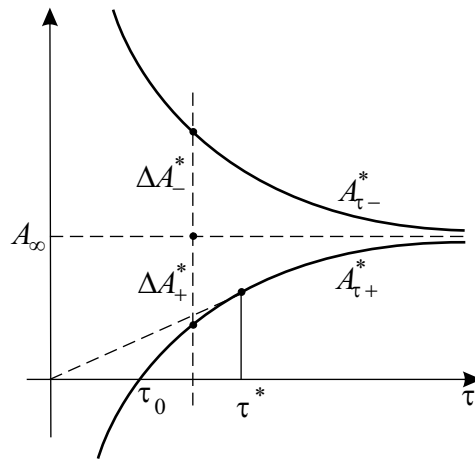


Рис. 5.6. Характер зависимости работоспособности системы в прямой и обратной задачах от продолжительности процесса

Системы без резервуара.

Продолжительность процесса не ограничена. При отсутствии ограничения на продолжительность процесса максимальной работе, извлеченной из системы (см. рис. 5.7), соответствует обратимый процесс, в котором температуры всех подсистем выравниваются и в пределе становятся равными некоторому значению Θ .

Энтропия системы при этом не возрастает, так как рабочее тело получает и отдает теплоту при температуре, сколь угодно близкой к температуре каждой подсистемы. Работоспособность системы при неограниченной продолжительности процесса A_{∞} равна уменьшению ее внут-

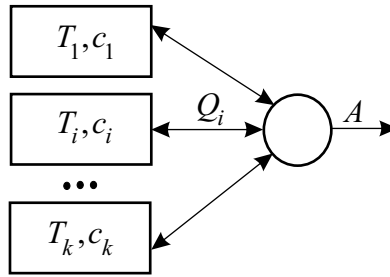


Рис. 5.7. Термодинамическая система с идеальной тепловой машиной, не содержащая резервуара

ренной энергии

$$A_{\infty} = \sum_{i=1}^k \int_{\Theta}^{T_{i0}} c_i(T) dT.$$

Значение Θ определяется из условия постоянства энтропии рабочего тела

$$\sum_{i=1}^k \Delta S_i = \sum_{i=1}^k \int_{\Theta}^{T_{i0}} \frac{c_i(T)}{T} dT = 0. \quad (5.79)$$

В частности, для постоянных теплоемкостей из равенства (5.79) следует, что конечная температура

$$\Theta = \prod_{i=1}^k T_{i0}^{\gamma_i}, \quad \gamma_i = c_i / \sum_{\nu=1}^k c_{\nu},$$

так что работоспособность

$$A_{\infty} = \sum_{i=1}^k c_i (T_{i0} - \Theta) = (\bar{T} - \Theta) \sum_{i=1}^k c_i. \quad (5.80)$$

Связь потерь работоспособности с приростом энтропии системы. Найдем зависимость между потерей работоспособности и приростом энтропии для системы, состоящей из подсистем с теплоемкостями c_i и начальными температурами T_{i0} и не содержащей резервуара. Работоспособность такой системы определяется выражением (5.80), в котором $\bar{T} = \sum_i T_{i0} \gamma_i$ — средняя начальная температура подсистем с учетом их относительных теплоемкостей γ_i .

Прирост энтропии системы в необратимом процессе выравнивания температур подсистем от T_{i0} до \bar{T} равен

$$\Delta S = \sum_i \Delta S_i = \sum_i c_i \ln \frac{\bar{T}}{T_{i0}} = \ln \frac{\bar{T}}{\Theta} \sum_i c_i,$$

откуда

$$\frac{\bar{T}}{\Theta} = \exp \frac{\Delta S}{\sum_i c_i}.$$

После подстановки этого отношения в выражение (5.80) получим связь между работоспособностью системы и приростом ее энтропии в форме

$$A_\infty = \sum_i c_i \bar{T} \left(1 - \frac{\Theta}{\bar{T}}\right) = \sum_i c_i T_{i0} \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta S}{\sum_i c_i}\right)\right]. \quad (5.81)$$

Эта зависимость монотонна, а ее наклон при $\Delta S = 0$ равен средней начальной температуре

$$\left(\frac{dA_\infty}{d\Delta S}\right)_{\Delta S=0} = \bar{T}.$$

Продолжительность процесса фиксирована. Рассмотрим ту же задачу при фиксированной продолжительности процесса τ . Задача отличается от рассмотренной выше тем, что температуры каждой подсистемы в конце процесса \bar{T}_i различны. Прирост энтропии системы положителен. Нулю равны приращения внутренней энергии и энтропии рабочего тела.

Формально задача примет вид

$$A_\tau = \sum_{i=1}^k \int_{\bar{T}_i}^{T_{i0}} c_i(T) dT \rightarrow \max_{\bar{T}_i, T_{pi}(T)} \quad (5.82)$$

при условиях

$$\Delta S_p = \sum_{i=1}^k \int_{\bar{T}_i}^{T_{i0}} \frac{c_i(T)}{T_{pi}(T)} dT = 0, \quad (5.83)$$

$$\int_{\bar{T}_i}^{T_{i0}} \frac{c_i(T) dT}{q_i(T, T_p)} = \tau, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.84)$$

Здесь T_{pi} — температура рабочего тела при контакте с i -й подсистемой. Зависимость этой температуры от температуры подсистемы удовлетворяет условию минимальной диссипации теплообмена. Условие (5.82) соответствует максимальному уменьшению внутренней энергии системы, условие (5.83) — равенству нулю прироста энтропии рабочего тела, а (5.84) — ограничению на продолжительность процесса.

Задача (5.82)–(5.84) сепарабельна и может быть разбита на k подзадач об оптимальном контакте рабочего тела с каждой из подсистем. При этом первоначально считаем прирост ΔS_i энтропии рабочего тела при контакте с i -й подсистемой фиксированным.

Задача об оптимальном контакте примет форму (индекс i опускаем)

$$A_\tau = \int_{\bar{T}}^{T_0} c(T) dT \rightarrow \max_{\bar{T}, T_p(T)} \quad (5.85)$$

при условиях

$$\int_{\bar{T}}^{T_0} \frac{c(T)}{T_p(T)} dT = \Delta S, \quad (5.86)$$

$$\int_{\bar{T}}^{T_0} \frac{c(T) dT}{q(T, T_p)} = \tau. \quad (5.87)$$

Задача (5.85)–(5.87) с точностью до обозначений совпадает с задачей (5.69)–(5.71), поэтому температура рабочего тела при контакте с i -й подсистемой удовлетворяет условию (5.65), определяющему $T_{pi}(T_i, k_i)$. После подстановки этой зависимости в (5.86), (5.87) получим систему из двух уравнений с тремя неизвестными $\bar{T}_i, \Delta S_i, k_i$.

На втором этапе нужно решать задачу о таком выборе этих переменных, чтобы

$$A_\tau = \sum_{i=0}^m A_{\tau i}(\Delta S_i, k_i, \bar{T}_i) \rightarrow \max_{\Delta S_i, \bar{T}_i, k_i} \quad (5.88)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^m \Delta S_i(k_i, \bar{T}_i) = \Delta S_p = 0, \quad (5.89)$$

$$\varphi_i(\Delta S_i, k_i, \bar{T}_i) = \tau, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.90)$$

где φ_i — функция, которая получается в результате взятия интеграла в (5.87) при подстановке туда зависимости $T_{pi}(T, k)$, найденной по условию (5.65).

В частности, для ньютоновских законов теплообмена

$$q_i = \alpha_i(T_i - T_{pi}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.91)$$

условия (5.65), как было показано, приводят к зависимости

$$T_{pi}(T_i) = k_i T_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.92)$$

После подстановки этого выражения в (5.86) и (5.87) получим для постоянных теплоемкостей зависимости $\bar{T}_i(k_i)$ и $\Delta S_i(k_i)$ в форме (5.68), (5.69).

Задача (5.88)–(5.90) состоит в таком выборе k_i , ΔS_i , \bar{T}_i , чтобы достичь максимума

$$A_\tau = \sum_{i=1}^m c_i(T_{i0} - \bar{T}_i) \rightarrow \max_{\bar{T}_i, \Delta S_i, k_i} \quad (5.93)$$

при условиях (5.89), (5.68), (5.69), которые после исключения ΔS_i можно привести к виду

$$\bar{T}_i(k_i) = T_{i0} \exp\left(-\frac{\tau \alpha_i(1 - k_i)}{c_i}\right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.94)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i(1 - k_i)}{k_i} = 0. \quad (5.95)$$

Подставляя $\bar{T}_i(k_i)$ в (5.93), получим сепарабельную задачу (5.93), (5.95) с m неизвестными k_i . Условия стационарности i -го слагаемого функции Лагранжа этой задачи

$$R_i = c_i(T_{i0} - \bar{T}_i(k_i)) - \lambda \frac{\alpha_i(1 - k_i)}{k_i}$$

по k_i приводят к системе уравнений

$$k_i^2 \bar{T}_i(k_i) = \text{const} = \lambda/\tau, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.96)$$

определяющих $k_i(\lambda)$. Значение λ находят после подстановки этих зависимостей в (5.95).

Резервуарные процессы. Работа в термодинамических системах может быть получена и от одного источника, если не предполагать, что параметры рабочего тела в среднем неизменны. Процессы, в которых происходит преобразование некоторого количества тепловой энергии, полученной от резервуара, в работу, называют резервуарными.

Рассмотрим систему в которой n рабочих тел, изолированных друг от друга, контактируют с резервуаром, имеющим температуру T_0 и давление p_0 . Считаем заданными начальные состояния всех подсистем и параметры источника. Суммарный объем всей системы неизменен.

Каждый из тепловых потоков $q_\nu(T_0, T_\nu)$, как и $\sigma_\nu(T_\nu) = \frac{1}{T_\nu} q_\nu(T_0, T_\nu)$, зависит только от одного управляющего воздействия T_ν , причем для рабочего тела выбором $T_\nu = T_0$ этот поток можно сделать равным нулю, поэтому вводить функции контакта U_ν для рабочего тела не имеет смысла.

Задача о максимальной работе в рассматриваемой системе распадается на n подзадач оптимального контакта каждой из подсистем с резервуаром, рассмотренных выше. При этом давления всех подсистем в конечный момент τ равно p_0 . Задача о максимальной мощности требует учета характеристик всех подсистем.

Рассмотрим первоначально одну из них (индекс i опускаем). Если при контакте резервуара с рабочим телом, энтропия рабочего тела $S(\tau)$ в конце процесса задана, а объем V^* определен условием $p = p_0$, то внутренняя энергия рабочего тела $E(\tau)$ фиксирована и минимуму внутренней энергии системы соответствует минимум E_0 . Мы приходим к постановке

$$\overline{q(T_0, T)} \rightarrow \max_T \left/ \left(\frac{q(T_0, T)}{T} \right) \right. = \frac{\Delta S}{\tau}, \quad (5.97)$$

где черта как обычно обозначает усреднение по времени на интервале $[0, \tau]$.

Эта подзадача, как показано выше, для линейного закона теплопереноса

$$q(T_0, T) = \alpha(T_0, T) \quad (5.98)$$

выпукла, ее оптимальное решение единственно

$$T^* = \frac{T_0}{1 + \Delta S / \alpha \tau}, \quad \alpha \tau + \Delta S > 0.$$

Максимальная работа равна

$$A^*(\tau) = \frac{T_n \Delta S \alpha \tau}{\alpha \tau + \Delta S} - \Delta E, \quad (5.99)$$

где $\Delta E = E(S(\tau), V^*(\tau)) - E(S(0), V(0))$.

Чтобы конкретизировать зависимость (5.99), предположим, что каждая из подсистем близка к идеальному газу, при этом

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T(\tau)}{T(0)} - R \ln \frac{p_0}{p(0)}, \quad (5.100)$$

где C_p — теплоемкость при постоянном давлении. Здесь учтены условия равенства давлений подсистем в момент τ давлению источника.

Равенство (5.100) позволяет выразить $T(\tau)$ через ΔS и найти прирост внутренней энергии $\Delta E = C_v(T(\tau) - T(0))$:

$$\Delta E = C_v T(0) \left[\left(\frac{p_0}{p(0)} \right)^{R/C_p} \exp \left(\frac{\Delta S}{C_p} \right) - 1 \right]. \quad (5.101)$$

После подстановки (5.101) в (5.99) получим зависимость $A^*(\tau, \Delta S)$. Характер зависимости работоспособности системы от τ показан на рис. 5.6.

Если энтропия $S(\tau)$ не задана, то вместо задачи (5.97) имеем задачу о минимуме суммарной внутренней энергии системы, что приводит к требованию

$$\left(\frac{T(\tau)}{T} - 1 \right) q(T_0, T) \rightarrow \min_{T>0} \quad (5.102)$$

совместно с равенством

$$\Delta S = S(\tau) - S(0) = \tau \frac{q(T_0, T^*)}{T^*}.$$

Это равенство для идеального газа и линейного закона теплообмена с учетом (5.100) перепишем как

$$C_p \ln \frac{T(\tau)}{T(0)} - R \ln \frac{p_0}{p(0)} = \tau \alpha \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right). \quad (5.103)$$

По условию (5.102) для $q = \alpha(T_0 - T)$ имеем

$$\frac{T(\tau)}{T} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow T(\tau) = \frac{T^2}{T_0}, \quad (5.104)$$

что после подстановки в (5.103) приводит к уравнению для T^*

$$2C_p \ln \frac{T^*}{T_0 T(0)} - R \ln \frac{p_0}{p(0)} = \tau \alpha \left(\frac{T_0}{T^*} - 1 \right). \quad (5.105)$$

Левая часть этого равенства монотонно возрастает, а правая убывает с ростом T^* , так что решение единственно и определяет T^* и предельную работу:

$$A^*(\tau) = -\Delta E_{\min} = C_v \left(T(0) - \frac{(T^*)^2}{T_0} \right) + \alpha \tau (T_0 - T^*). \quad (5.106)$$

Общая структура оптимального процесса в системе с одним резервуаром такова:

— При заданных начальной температуре и начальном объеме рабочего тела $T(0)$ и $V(0)$ его объем мгновенно меняется так, чтобы температура оказалась равной значению T^* (первый адиабатический участок).

— Изменение объема $V^*(t)$, соответствующее постоянной температуре $T^*(t)$, с одновременным производством работы (изотермический участок).

— Мгновенному изменению объема в момент $t = \tau$ до выравнивания давления рабочего тела и резервуара (второй адиабатический участок).

В задаче о максимальной мощности

$$n(\tau) = \frac{\sum_i A_i(\tau)}{\tau} \rightarrow \max_{\tau > 0}$$

условие оптимальности для выпуклых вверх дважды дифференцируемых функций $n(\tau)$, т. е. для функций $A_i(\tau)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_i \left(\frac{d^2 A_i}{d\tau^2} \tau^2 - 2A_i(\tau) \right) < 2\tau \sum_i \frac{dA_i(\tau)}{d\tau},$$

примет вид

$$\sum_i \left(\frac{dA_i}{d\tau} - \frac{A_i(\tau)}{\tau} \right) = 0.$$

С учетом (5.101), (5.102) для рассмотренных выше законов теплопереноса и характеристик рабочего тела получим уравнение для τ^*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \Delta S_i}{\alpha_i \tau + \Delta S_i} \left(\frac{\Delta S_i}{\alpha_i \tau + \Delta S_i} - 1 \right) = \frac{T_0}{\tau} \sum_{i=1}^n \Delta E_i(\Delta S_i).$$

Мощность $n(\tau^*)$, которую можно получить в резервуарном процессе, ограничена, затрачиваемая же мощность может быть сколь угодно велика.

В работе [68] исследованы резервуарные процессы для законов теплопередачи более общего вида.

5.4. Преобразование теплоты в работу в системах с двумя резервуарами.

Рассмотрим систему преобразования тепловой энергии в работу (рис. 5.8), состоящую из двух резервуаров (источников) с температурами T_+ и T_- ($T_+ > T_-$) и рабочего тела, контактирующего с резервуарами и вырабатывающего или получающего извне работу.

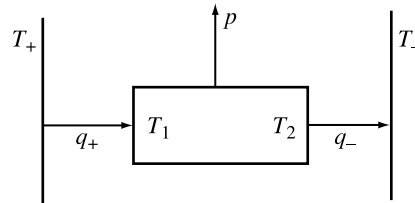


Рис. 5.8. Система преобразования теплоты в работу

Такую систему называют *прямым преобразователем*, если рабочее тело получает теплоту от источника с большей температурой T_+ , часть его передает источнику с меньшей температурой T_- и генерирует работу. Если же рабочее тело получает работу извне, а поток теплоты направлен от холодного источника к горячему, то преобразователь *обратный* (работа \rightarrow теплота).

Прямой преобразователь. Обозначим температуры контакта рабочего тела с источниками через T_1 и T_2 , ($T_1 > T_2$); тепловые потоки от горячего и холодного источников — $q_+(T_+, T_1)$, $q_-(T_2, T_-)$; мощность — p . Балансовые соотношения по энергии и энтропии для рабочего тела запишутся как:

$$q_+(T_+, T_1) = q_-(T_2, T_-) + p, \quad (5.107)$$

$$\frac{q_+(T_+, T_1)}{T_1} = \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2}. \quad (5.108)$$

Последнее равенство связано с тем, что энтропия рабочего тела не изменяется и необратимость процессов внутри рабочего тела не учитывается. Диссипация в системе равна скорости изменения энтропии источников

$$\sigma = \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_-} - \frac{q_+(T_+, T_1)}{T_+}. \quad (5.109)$$

Обозначим КПД преобразователя как

$$\eta = \frac{p}{q_+(T_+, T_1)} \quad (5.110)$$

и найдем связь между мощностью p , КПД и расходом теплоты q_+ .

Исключим из равенств (5.107), (5.108) q_- . Получим

$$q_- = q_+ \frac{T_2}{T_1}, \quad (5.111)$$

$$q_+ \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = p \rightarrow \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (5.112)$$

В свою очередь $T_2 = T_2(q_-, T_-)$, $T_1 = T_1(q_+, T_+)$. С учетом этих зависимостей, и условия (5.111) можно найти связь p с η и q_+ для конкретных законов теплопереноса.

Ньютоновские законы теплопередачи.

$$q_+ = \alpha_+(T_+ - T_-), \quad q_- = \alpha_-(T_2 - T_-). \quad (5.113)$$

Получим

$$T_1 = T_+ - \frac{q_+}{\alpha_+}, \quad T_2 = T_- + \frac{q_-}{\alpha_-} = T_- + \frac{q_+ T_2}{\alpha_- T_1}.$$

Откуда

$$T_2 = \frac{T_-}{1 - \frac{q_+}{\alpha_- T_1}} = \frac{T_-}{1 - \frac{p}{\eta \alpha_- T_1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta = \frac{T_-}{T_1 - \frac{p}{\alpha_- \eta}} = \frac{T_-}{T_+ - \frac{p}{\eta \alpha_+} - \frac{p}{\eta \alpha_-}}$$

Таким образом, мощность и КПД прямого преобразователя для ньютоновских законов теплопередачи (5.113) связаны равенством

$$\frac{(1-\eta)}{\eta} = \frac{T_-}{T_+\eta - \frac{p}{\bar{\alpha}}} \quad (5.114)$$

где $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_+\alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-}$. Так, что

$$p(\eta) = \bar{\alpha}\eta \left(T_+ - T_- \frac{1}{1-\eta} \right). \quad (5.115)$$

Когда η равен КПД Карно обратимой тепловой машины

$$\eta = \eta_k = 1 - \frac{T_-}{T_+},$$

мощность $p(\eta_k) = 0$, так же, как и для $\eta = 0$.

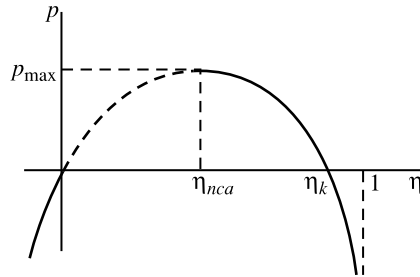


Рис. 5.9. Характер связи между предельной мощностью и КПД преобразователя теплоты в работу

Найдем значение η , для которого мощность прямого преобразователя максимальна, и величину p_{max} . Нетрудно показать, оценив знак второй производной, что функция $p_{max}(\eta)$ выпукла вверх (рис. 5.9), так что условие ее стационарности определяет точку максимума

$$\frac{dp}{d\eta} = 0 \rightarrow T_+ - T_- \frac{1}{1-\eta} - \eta T_- \frac{1}{(1-\eta)^2} = 0,$$

откуда с учетом того, что $p > 0$, получим

$$\eta_{mca} = 1 - \sqrt{T_-/T_+}. \quad (5.116)$$

Значение КПД, соответствующее максимуму мощности, не зависит от коэффициентов теплопереноса. Оно было получено Новиковым [131], а позднее Курзоном и Альбурном [102]. Соответствующее этому КПД значение предельной мощности преобразования теплоты в работу получим после подстановки в (5.115) $\eta_{\text{мса}}$

$$p_{\text{max}} = \bar{\alpha}(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2. \quad (5.117)$$

Разрешая уравнение (5.115) относительно η , получим КПД прямого преобразователя теплоты в работу в функции мощности

$$\eta(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\bar{\alpha}T_+} + \eta_k \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{p}{\bar{\alpha}T_+} + \eta_k \right)^2 - \frac{p}{\bar{\alpha}T_+}}. \quad (5.118)$$

Пунктирная часть кривой на рис. 5.9 соответствует знаку минус перед квадратным корнем в выражении (5.118). Она реализуется, когда тепловой поток q_+ больше того, который соответствует мощности p_{max} .

Закон теплопередачи в форме Фурье. В этом случае

$$q_+ = \alpha_+ \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_+} \right), \quad q_- = \alpha_- \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_2} \right),$$

С учетом равенства (5.111) получим

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_+} + \frac{q_+}{\alpha_+}, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_-} - \frac{q_-}{\alpha_-},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta = \frac{\frac{1}{T_+} + \frac{q_+}{\alpha_+}}{\frac{1}{T_-} - \frac{q_-}{\alpha_-}(1 - \eta)}.$$

Таким образом

$$1 - \eta = \frac{\frac{1}{T_+} + \frac{p}{\alpha_+\eta}}{\frac{1}{T_-} - \frac{p}{\alpha_-\eta}(1 - \eta)},$$

а

$$p(\eta) = \frac{\eta \left(\frac{1 - \eta}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right) \alpha_- \alpha_+}{\alpha_+(1 - \eta)^2 + \alpha_-}. \quad (5.119)$$

Эта зависимость аналогична зависимости (5.115) для ньютоновского теплопереноса. Мощность обращается в нуль при $\eta = 0$ и при $\eta = \eta_k$, и при некотором $\eta = \eta_0$ достигает максимума.

Зависимость между мощностью p и потоком теплоты, отбираемой от горячего источника q_+ , вытекает из выражений (5.115), (5.119) после замены в них $\eta = \frac{p}{q_+}$. С ростом q_+ мощность первоначально увеличивается, достигает своего максимального значения, а потом падает (рис. 5.10).

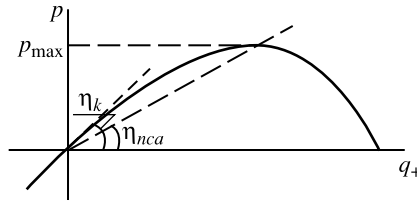


Рис. 5.10. Характер зависимости мощности преобразователя от затрат теплоты

Наклон зависимости $p(q_+)$ в начале координат равен КПД Карно, а наклон отрезка, соединяющего начало координат с точкой максимума, равен η_{nca} . На рис. 5.11 показаны зависимости η_k и η_{nca} от отношения температур источников.

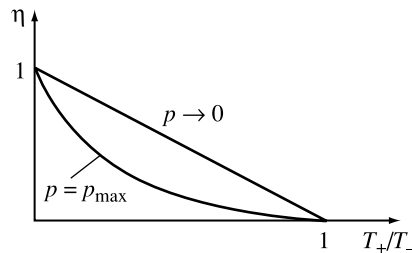


Рис. 5.11. Зависимость КПД от отношения температур источников для обратимого цикла тепловой машины и цикла максимальной мощности

После замены в формуле (5.109) q_- через η и q_+ получим связь между КПД преобразования и производством энтропии

$$\eta = \eta_k - \frac{T_- \sigma}{q_+} = \frac{p \eta_k}{p + \sigma T_-}. \quad (5.120)$$

С ростом σ КПД монотонно уменьшается.

При выводе зависимостей между мощностью и затратами теплоты и между мощностью и КПД мы использовали гипотезу внутреннего равновесия рабочего тела, считая производство энтропии в нем равным

нулю (см. условие (5.108)). Если в системе имеется производство энтропии, не связанное с теплообменом между рабочим телом и источниками, величина σ будет больше, а следовательно при том же потоке теплоты q_+ значения η и мощности p уменьшатся. Так что зависимость $p(q_+)$, построенная на рис. 5.10, представляет собой границу области реализуемости для необратимого преобразования тепловой энергии в работу в открытой системе с двумя резервуарами. Ни одна реальная тепловая машина с ненулевой мощностью не может работать в области, лежащей выше кривой $p(q_+)$. Фактической границей разумных режимов является, естественно, левая ветвь этой зависимости, соответствующая росту p с ростом q_+ . В разделе 5.8 показано, что для ньютоновского закона теплопередачи КПД, соответствующий максимуму мощности, не изменяется даже тогда, когда рабочее тело внутренне неравновесно, при этом сама величина максимальной мощности, естественно, уменьшается.

Отметим, что полученные зависимости не включают в себя уравнения состояния рабочего тела. Они требуют знания только коэффициентов теплообмена. Эти зависимости справедливы не только, когда теплота преобразуется в механическую работу, но и когда она преобразуется в работу разделения. Вследствие этого в системах разделения, использующих тепловую энергию (*термические системы разделения*) вырабатываемая мощность, а значит и производительность, ограничена. Более подробные оценки предельных возможностей систем разделения рассмотрены в гл. 6.

Обратный преобразователь работа \rightarrow теплота. В этом случае мощность p направлена в систему извне, т.е. при принятых выше допущениях о знаке потоков она отрицательна. Потоки теплоты q_+ и q_- также имеют другой знак, поэтому температура $T_2 < T_-$, а $T_1 > T_+$. Внутреннюю необратимость рабочего тела, как и выше, не учитываем. В этом случае балансовые соотношения (5.107) и (5.108) остаются в силе, так как изменятся на противоположные знаки правой и левой частей этих равенств. Эффективность системы оценивается *отопительным коэффициентом* теплового насоса

$$r = \frac{|q_+|}{|p|} = \frac{1}{\eta} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1/\eta_k. \quad (5.121)$$

Это равенство следует из выражения (5.112).

Для ньютоновских законов теплообмена (5.113), проведя выкладки, аналогичные тем, что были использованы выше для прямого преобразования теплоты в работу, получим связь между затрачиваемой мощностью и отопительным коэффициентом r в форме

$$r = \frac{T_+ + rp/\bar{\alpha}}{T_+ - T_- + rp/\bar{\alpha}}.$$

При $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ или $\bar{p} \rightarrow \infty$ величина r стремится к $r_0 = 1/\eta_k = \frac{T_+}{T_+ - T_-}$.

После замены r на отношение $|q_+|/|p|$ получим связь между затрачиваемой мощностью и потоком теплоты

$$|p| = |q_+| \left(1 - \frac{T_-}{T_+ + |q_+|/\bar{\alpha}} \right). \quad (5.122)$$

При фиксированном значении $\bar{\alpha}$ эта зависимость монотонна (рис. 5.12). Отопительный коэффициент всегда больше единицы. При увеличении потока q_+ отопительный коэффициент стремится к единице, оставаясь больше единицы.

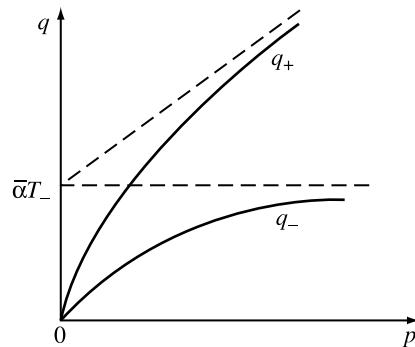


Рис. 5.12. Зависимость потоков подаваемой и отбираемой теплоты от затрачиваемой мощности

Обратный преобразователь работа \rightarrow холод. В ряде случаев целью обратного преобразователя является отбор теплоты у холодного источника. Его эффективность в этом случае характеризуют *холодильным коэффициентом*

$$\epsilon = \frac{|q_-|}{p} = \frac{|q_+| - |p|}{|p|} = r - 1. \quad (5.123)$$

После замены в равенстве (5.122) $|q_+| = |q_-| + |p|$, получим связь между мощностью и потоком отбираемой теплоты

$$|p| = \frac{|q_-|[\bar{\alpha}(T_+ - T_-) + |q_-|]}{\bar{\alpha}T_- - |q_-|}. \quad (5.124)$$

Условие $T_2 > 0$ приводит к тому, что знаменатель в выражении (5.124) положителен (он равен αT_2), а тепловой поток q_- ограничен ($q_- < \alpha T_-$). Из (5.124) следует, что

$$q_-(p, \bar{\alpha}) = -\frac{1}{2}[\bar{\alpha}(T_+ - T_-) + p] + \sqrt{\frac{[\bar{\alpha}(T_+ - T_-) + p]^2}{4} + \bar{\alpha}T_-p}, \quad (5.125)$$

где p — затрачиваемая мощность. Зависимость $q_-(p)$ показана на рис. 5.12.

5.5. Предельные возможности циклов тепловых и холодильных машин

В этом разделе мы рассмотрим циклы преобразователей, в которых рабочее тело периодически изменяет свои параметры во времени или по времени пребывания, циркулируя по замкнутому контуру и поочередно контактируя с источниками. Для оценки предельных возможностей такого преобразователя нужно сформулировать и решить задачу об оптимальной форме изменения параметров рабочего тела, так как в отличие от предыдущей постановки его температура может изменяться по времени или по длине.

Системы с двумя резервуарами

Прямой цикл. Обозначим температуру источника $T_n(f)$, где f может соответствовать времени или сечению аппарата, и будем считать, что она принимает значения T_+ либо T_- . Если обозначить зависимость теплового потока q от температур источника и рабочего тела как $q(T_n, T)$, то задача о предельной мощности прямого преобразователя примет форму

$$\bar{p} = \overline{q(T_n, T)} \rightarrow \max \Big/ \left(\frac{\overline{q(T_n, T)}}{T} \right) = 0, \quad (5.126)$$

$$T_n = (T_+, T_-); T > 0.$$

Это усредненная задача нелинейного программирования с одним условием, связанным с тем, что энтропия рабочего тела за один цикл не изменяется. Одному условию (см. приложение П.3) соответствуют два базовых значения температуры рабочего тела T_1 и T_2 , для каждого из которых значение функции Лагранжа $L = q(T_n, T) \left(1 + \frac{\lambda}{T}\right)$ задачи (5.126) достигает максимума. При этом

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \arg \max_T q(T_+, T) \left(1 + \frac{\lambda}{T}\right), \\ T_2 &= \arg \max_T q(T_-, T) \left(1 + \frac{\lambda}{T}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.127)$$

Величину λ -множителя выбирают из условия равенства этих максимумов (минимума по λ от максимума L по T)

$$q(T_+, T_1) \left(1 + \frac{\lambda}{T_1}\right) = q(T_-, T_2) \left(1 + \frac{\lambda}{T_2}\right). \quad (5.128)$$

Таким образом, независимо от закона теплопередачи цикл предельной мощности в системе с двумя резервуарами состоит из двух изотерм и двух адиабат, так как от T_1 к T_2 температура должна меняться скачкообразно. Оптимальный цикл «похож» на цикл Карно с той разницей, что температура рабочего тела отличается от температур резервуаров. От вида закона теплопередачи зависят только значения T_1 и T_2 в оптимальном цикле.

В том случае, когда закон теплопередачи линеен:

$$q(T_+, T) = \alpha_+(T_+ - T), \quad q(T_-, T) = \alpha_-(T_- - T), \quad (5.129)$$

результаты расчетов по формулам (5.128), (5.129) приводят к соотношениям

$$p_{\max} = \frac{\alpha}{4} \left(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-}\right)^2, \quad (5.130)$$

где

$$\alpha = \frac{4\alpha_+\alpha_-}{\left(\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-}\right)^2}. \quad (5.131)$$

При этом производство энтропии в системе

$$\sigma = \frac{\alpha}{4} \frac{\left(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-}\right)^2}{\sqrt{T_+T_-}}.$$

Для закона теплопередачи Фурье

$$q = \alpha \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right)$$

предельная мощность тепловой машины, найденная из решения системы (5.128), (5.129), и производство энтропии имеют вид

$$\bar{p}_{\max} = \frac{\alpha}{8} \frac{T_+ - T_-}{T_+ T_-},$$

а

$$\sigma = \frac{\alpha}{16} \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right)^2.$$

Задача о предельном термическом КПД тепловой машины при заданной мощности p_0 эквивалентна задаче о минимальном производстве энтропии в системе. Так как энтропия рабочего тела за цикл не изменяется, то производство энтропии в системе σ определяется изменением энтропии резервуаров. Мы приходим к постановке

$$\sigma = \left(\frac{\overline{q(T_n, T)}}{T_n} \right) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \overline{q(T_n, T)} = p_0, \\ \left(\frac{\overline{q(T_n, T)}}{T} \right) = 0, \quad T_n = \{T_+, T_-\}, \quad T > 0. \end{array} \right. \quad (5.132)$$

В этой задаче два усредненных условия, следовательно, в принципе оптимальный цикл может содержать три базовых значения температуры T . Однако, если для $T_n = T_+$ и для $T_n = T_-$ функция Лагранжа, соответствующая задаче (5.132), имеет единственный максимум по T (это почти всегда так), то базовых значений только два. Одно из них (T_1) соответствует контакту с горячим источником ($T_n = T_+$) другое (T_2) - контакту с холодным источником ($T_n = T_-$). При этом

$$\begin{aligned} T_1 &= \arg \max_T \left[q(T_+, T) \left(\frac{1}{T_+} + \lambda + \frac{\mu}{T} \right) - \lambda p_0 \right], \\ T_2 &= \arg \max_T \left[q(T_-, T) \left(\frac{1}{T_-} + \lambda + \frac{\mu}{T} \right) - \lambda p_0 \right]. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Значения функции Лагранжа в этих базовых точках одинаковы (минимум по λ)

$$q(T_+, T_1) \left(\frac{1}{T_+} + \lambda + \frac{\mu}{T_1} \right) = q(T_-, T_2) \left(\frac{1}{T_-} + \lambda + \frac{\mu}{T_2} \right). \quad (5.134)$$

Кроме того, выполнены усредненные ограничения задачи (5.132)

$$\begin{aligned} \gamma q(T_+, T_1) + (1 - \gamma)q(T_-, T_2) &= p_0, \\ \gamma \frac{q(T_+, T_1)}{T - 1} + (1 - \gamma) \frac{q(T_-, T_2)}{T_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.135)$$

Уравнения (5.133)–(5.135) позволяют найти пять неизвестных (T_1, T_2, λ, μ и γ). Значение множителя γ , соответствующего доле времени контакта рабочего тела с горячим источником, удовлетворяет неравенству $0 < \gamma < 1$.

Для ньютоновского закона теплопередачи решение задачи (5.132) приводит к следующим результатам

$$\begin{aligned} \eta_{\max} &= \max \frac{p_0}{\gamma q(T_+, T_1)} = 1 - \frac{1}{2T_+} \times \\ &\times \left(T_+ + T_- - \frac{4p}{\alpha} - \sqrt{(T_+ - T_-)^2 + \left(\frac{4p}{\alpha}\right)^2 - 8\frac{p}{\alpha}(T_+ + T_-)} \right), \end{aligned} \quad (5.136)$$

где α выражается равенством (5.131). Нетрудно проверить, что при $p \rightarrow 0$ величина η_{\max} стремится к КПД Карно, а при $p \rightarrow p_{\max}$ она стремится к значению термического КПД, найденного Новиковым, Курзоном и Альбурном,

$$\eta_{mca} = 1 - \sqrt{\frac{T_-}{T_+}}.$$

Оптимальные продолжительности контакта с горячим и холодным источниками относятся друг к другу, как

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} = \sqrt{\frac{\alpha_-}{\alpha_+}}. \quad (5.137)$$

Обратный цикл. В обратных циклах холодильников и тепловых насосов механическая работа подводится к системе, за счет чего теплота отбирается от холодного и передается горячему источнику. Отличие холодильного цикла от цикла теплового насоса заключается в том, что в первом случае оценкой экономичности служит холодильный коэффициент ϵ , равный отношению потока отбираемой у холодного источника теплоты к подводимой мощности

$$\epsilon = \frac{(1 - \gamma)q(T_-, T)}{p_0}, \quad (5.138)$$

а во втором случае КПД теплового насоса (отопительный коэффициент)

$$r = \frac{\gamma q(T_+, T)}{p_0} \quad (5.139)$$

— отношение потока теплоты, передаваемой горячему источнику, к затрачиваемой мощности. Из энергетического баланса следует, что $r = 1 + \epsilon$, поэтому достаточно найти предельное значение холодильного коэффициента.

Нетрудно показать, что предельному значению значения холодильного коэффициента соответствует при заданной средней мощности p_0 минимальное значение производства энтропии в системе. Получим задачу, совпадающую с задачей (5.132) с той разницей, что температура рабочего тела не должна принадлежать отрезку $[T_-, T_+]$. При контакте с холодным источником $T < T_-$, а при контакте с горячим $T > T_+$. Последовательность решения этой задачи совершенно аналогична задаче (5.132), поэтому приведем результат решения для линейного закона теплопереноса:

$$\epsilon = \frac{1}{2p_0} \left(\sqrt{p_0^2 + \frac{\alpha(T_+ + T_-)}{2} p_0 + \frac{\alpha^2(T_+ - T_-)^2}{16}} - p_0 - \frac{\alpha(T_+ - T_-)}{4} \right). \quad (5.140)$$

Здесь, как и ранее, α вычисляется по (5.131). В статье [50] рассмотрена та же задача для других законов теплопередачи.

Системы с несколькими резервуарами

Предельная мощность тепловой машины. Обозначим температуры источников через T_{i0} , а тепловой поток от i -го источника к рабочему телу через $u_i q_i(T_{i0}, T)$. Функции контакта $u_i(t)$, как и температура $T(t)$ подлежат оптимальному выбору в задаче

$$\bar{p} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i u_i q_i(T_{i0}, T) dt \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\sum_i u_i q_i(T_{i0}, T)}{T} dt = \bar{\sigma} \\ u_i = [0; 1], \quad T > 0. \end{array} \right. \quad (5.141)$$

Среднюю скорость изменения энтропии рабочего тела будем первоначально считать параметром. При фиксированной продолжительности

процесса τ множители $\frac{1}{\tau}$ перед интегралами могут быть опущены, однако в дальнейшем будет рассматриваться задача, в которой τ стремится к бесконечности, в этом случае усреднение потока теплоты и скорости изменения энтропии рабочего тела необходимо. Функции q_i монотонно уменьшаются по T и увеличиваются по T_{i0} . При равенстве температур рабочего тела и источника эти функции равны нулю.

Условия оптимальности задачи (5.141) примут форму (см. приложение П.3)

$$L = \sum_{i=1}^n u_i q_i(T_{i0}, T) \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right) \rightarrow \max_{u_i, T} \min_{\lambda}.$$

С учетом того, что функции контакта u_i входят в L линейно, получим

$$u_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{sign} q_i = \operatorname{sign} \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right), \\ 0, & \text{если } \operatorname{sign} q_i = -\operatorname{sign} \left(1 - \frac{\lambda}{T}\right). \end{cases} \quad (5.142)$$

Таким образом, с учетом свойств функций q_i тело должно контактировать со всеми источниками, у которых $T_{i0} > T$, если $T > \lambda$, получая теплоту от «горячих» источников, и контактировать со всеми источниками, у которых $T_{i0} < T$, отдавая теплоту, когда $T < \lambda$. Если в некоторый момент времени рабочее тело контактирует с i -м источником и $T_{i0} > T$, то оно контактирует с любым j -м источником, у которого $T_{j0} > T_{i0}$. То же касается отдачи теплоты. Далее будем полагать, что $T_{j0} > T_{i0}$, если $j > i$.

Условия оптимальности контакта (5.142) разбивают множество источников на два подмножества («горячих» и «холодных»). Границей между ними служит величина λ , зависящая от $\bar{\sigma}$.

Обозначим $q^+(T)$ суммарный тепловой поток при подводе, а $q^-(T)$ — то же при отводе теплоты от рабочего тела:

$$q^+(T) = \sum_i q_i^+(T_{i0}, T), \quad q^-(T) = \sum_i q_i^-(T_{i0}, T).$$

В свою очередь, для i -го источника потоки подвода и отвода теплоты

$$q_i^+ = \frac{1}{2}(q_i + |q_i|), \quad q_i^- = \frac{1}{2}(q_i - |q_i|)$$

(см. рис. 5.13).

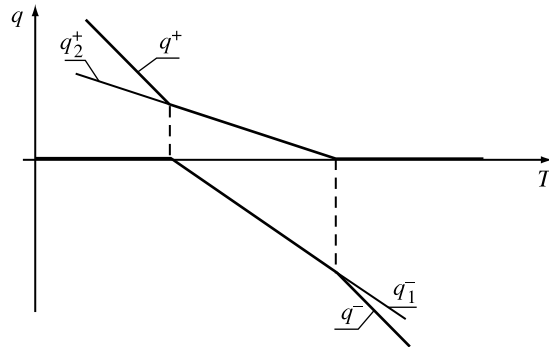


Рис. 5.13. Зависимость потоков теплоты q^+ и q^- от температуры рабочего тела

Оптимальные значения температуры рабочего тела при подводе и отводе теплоты обозначим через $T_+ > \lambda$ и $T_- < \lambda$ соответственно. Так как эти значения являются базовыми в усредненной задаче оптимизации (5.141), то для каждого из них функция Лагранжа L достигает максимума, откуда следуют в предположении гладкости функций q^+ и q^- при температурах контакта рабочего тела равенства

$$\frac{\partial L^+}{\partial T^+} \Rightarrow \frac{dq^+}{dT_+} - \frac{\lambda}{T_+} \left(\frac{dq^+}{dT_+} - \frac{q^+}{T_+} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial L^-}{\partial T^-} \Rightarrow \frac{dq^-}{dT_-} - \frac{\lambda}{T_-} \left(\frac{dq^-}{dT_-} - \frac{q^-}{T_-} \right) = 0,$$

$$L^+(\lambda, T_+) = L^-(\lambda, T_-) \rightarrow q^+(T_+) \left(1 - \frac{\lambda}{T_+} \right) = q^-(T_-) \left(1 - \frac{\lambda}{T_-} \right). \quad (5.143)$$

Условия (5.143) определяют λ , T_+ и T_- , ограничение на среднюю интенсивность изменения энтропии рабочего тела позволяет найти доли времени τ , в течении которых происходит его нагрев и охлаждение

$$\left. \begin{aligned} \gamma_+ \frac{q^+(T_+)}{T_+} + \gamma_- \frac{q^-(T_-)}{T_-} &= \bar{\sigma}, \\ \gamma_+ + \gamma_- &= 1; \quad \gamma_+ \geq 0; \quad \gamma_- \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.144)$$

Функции $q^+(T)$ и $q^-(T)$ испытывают изломы в точках T_{i0} , поэтому, если T_+^* или T_-^* совпадают с температурой одного из резервуаров, то

уравнения (5.143) неприменимы. В этом случае левая часть соответствующего уравнения имеет разрыв при $T = T^*$, причем меняет знак в этой точке, а оптимальная температура равна температуре резервуара.

Чтобы исследовать зависимость оптимального решения задачи (5.141) от изменения $\bar{\sigma}$, перепишем ее как

$$\bar{p} = \gamma_+ q^+(T_+) + \gamma_- q^-(T_-) \rightarrow \max \left/ \gamma_+ \frac{q^+(T_+)}{T_+} + \gamma_- \frac{q^-(T_-)}{T_-} = \bar{\sigma} \right.$$

и, исключая T_+ и T_- , построим зависимости $\sigma_+(q^+)$ и $\sigma_-(q^-)$, где $\sigma_+ = \frac{q^+}{T_+}$ и $\sigma_- = \frac{q^-}{T_-}$. Первая из этих функций определена при $q^+ > 0$ (нагрев рабочего тела), а вторая при $q^- < 0$ (см. рис. 5.14).

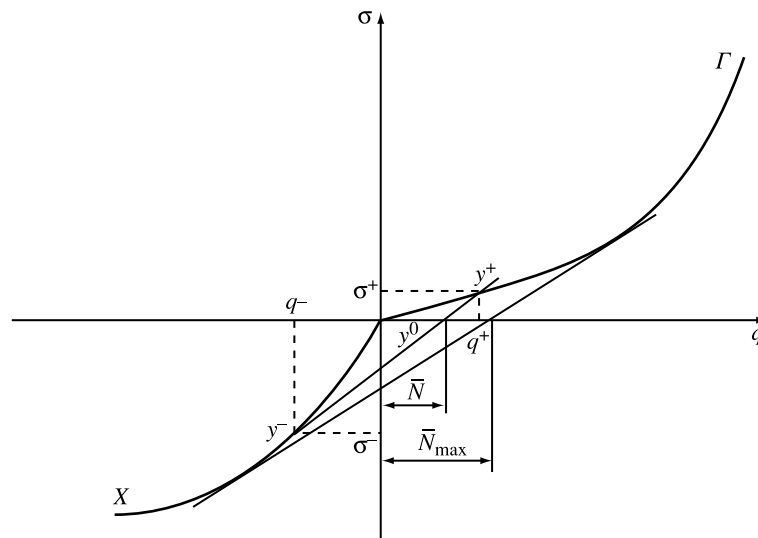


Рис. 5.14. Зависимость теплового потока от скорости изменения энтропии рабочего тела, и ее выпуклая оболочка

Зависимость мощности тепловой машины \bar{p}^* (среднего потока теплоты) от среднего приращения энтропии рабочего тела представляет собой выпуклую оболочку функции $q(\sigma)$, равной σ^+ при $q > 0$ и σ^- при $q < 0$. На рис. 5.14 зависимость $q(\sigma^+)$ обозначена через Γ , а $q(\sigma^-)$ — через X . Выпуклая оболочка $q(\sigma)$ представляет собой общую касательную Γ и X , и совпадает с $q(\sigma)$ за пределами отрезка, расположенного между точками касания σ_1 и σ_2 . Так, что за пределами этого отрезка базовое решение единственно ($\gamma_- = 0$ при $\bar{\sigma} > \sigma_2$ и $\gamma_+ = 0$ при $\bar{\sigma} < \sigma_1$).

В противном случае базовых значений температуры рабочего тела два, одно из них, T_+ , соответствует $\bar{\sigma} = \sigma_2$, другое, T_- , соответствует $\bar{\sigma} = \sigma_1$. При $\sigma_1 < \bar{\sigma} < \sigma_2$ базовые значения температуры не меняются, а изменяются лишь γ_+ и γ_- , доли времени нагрева и охлаждения рабочего тела.

Особенно важен случай, когда $\bar{\sigma} = 0$, что соответствует циклическому изменению состояния рабочего тела в тепловой машине. В этом случае из условий (5.143), (5.144) следует, что для любых законов теплопередачи выполнено требование

$$\gamma_+(\lambda - T_-) = \gamma_-(T_+ - \lambda),$$

причем отношение температур рабочего тела в полциклах нагрева и охлаждения равно

$$\frac{T_-}{T_+} = \frac{dq^+}{dT_+} \left(\frac{dq^-}{dT_-} - \frac{q^-}{T_-} \right) / \frac{dq^-}{dT_-} \left(\frac{dq^+}{dT_+} + \frac{q^+}{T_+} \right). \quad (5.145)$$

В свою очередь,

$$\frac{dq^+}{dT_+} : \frac{dq^-}{dT_-} = \frac{q^-(T)}{T_-^2} : \frac{q^+(T)}{T_+^2}. \quad (5.146)$$

Условия (5.145), (5.146) определяют базовые значения температуры рабочего тела в том случае, когда оно поочередно нагревается и охлаждается.

Для задачи с числом источников, большим двух, понятие термического КПД как отношения полученной работы к теплоте, отобранной у горячего источника, теряет смысл, так как источников несколько и их температуры различны. В этом случае целесообразно решать задачу о цикле с заданной мощностью и минимальной диссипацией энергии. Решение [2] такой задачи показывает, что в оптимальном цикле рабочее тело должно получать теплоту только от тех источников, температуры которых лежат в пределах некоторых оптимально найденных значений $T_{+1} \leq T_0 \leq T_{+2}$ (верхний интервал контактирования), аналогично рабочее тело должно отдавать теплоту источникам, температуры которых удовлетворяют неравенствам $T_{-1} \leq T_0 \leq T_{-2}$ (нижний интервал контактирования). Чем ближе заданная мощность к максимально возможной, тем интервалы контактирования шире.

5.6. Тепломеханические системы с источниками конечной емкости

Система с одним источником. У источника с конечной емкостью температура при контакте с рабочим телом изменяется, причем скорость ее изменения зависит от потока теплоты q

$$\dot{T}_0 = -\frac{1}{C}q(T_0, T); \quad T_0(0) = T_0^0, \quad (5.147)$$

где C — теплоемкость источника.

Будем искать оптимальный закон изменения температуры рабочего тела для достижения максимальной работы A при фиксированном времени процесса τ и количестве теплоты Q_0 , переданной (отданной) источником рабочему телу.

Полученную задачу удобнее решать, переходя к усреднению по множеству значений T_0 с использованием уравнения (5.147). При этом мы предполагаем, что для почти всех t функция $q(T_0, T)$ знакопостоянная. Так как максимуму извлеченной работы соответствует минимум прироста энтропии рабочего тела, критерий оптимальности примет вид

$$\Delta S = \int_{T_0(\tau)}^{T_0^0} \frac{C}{T(T_0)} dT_0 \longrightarrow \min_{T(T_0)} \quad (5.148)$$

при условии

$$\int_0^\tau dt = \int_{T_0(\tau)}^{T_0^0} \frac{C}{q(T_0, T)} dT_0 = \tau, \quad (5.149)$$

где $T_0(\tau) = T_0^0 - \frac{Q_0}{C}$.

Функционал Лагранжа задачи (5.148), (5.149) запишем в форме

$$L = \int_{T_0(\tau)}^{T_0^0} C \left(\frac{1}{T} - \lambda \frac{1}{q(T_0, T)} \right) dT_0,$$

а ее оптимальное решение удовлетворяет требованию

$$\max_\lambda \left[\int_{T_0(\tau)}^{T_0^0} \left\{ \min_T \left[C \left(\frac{1}{T} - \lambda \frac{1}{q(T_0, T)} \right) \right] \right\} dT_0 - \lambda \tau \right].$$

Если функция

$$F(T, T_0, \lambda) = \frac{1}{T} - \lambda \frac{1}{q(T_0, T)}$$

имеет единственный минимум по T , причем $q(T_0, T)$ дифференцируема, то $T_0^*(T, \lambda)$ определяется условием стационарности F . Получим

$$\left(\frac{T}{q(T_0, T)} \right)^2 \frac{\partial q}{\partial T} = \text{const} = \frac{1}{\lambda} \quad \forall t. \quad (5.150)$$

Решение T^* , удовлетворяющее соотношению (5.150), зависит от T_0 и λ . Чтобы исключить λ и найти $T^*(T_0)$, следует решить (5.150) совместно с интегральным условием (5.149).

Для закона теплопередачи

$$q = \alpha(T_0^n - T^n) \quad (5.151)$$

условия (5.150) и (5.149) примут вид

$$T^{n+1} = \frac{\alpha}{n\lambda} (T_0^n - T^n)^2, \quad \int_{T_0 - \frac{Q_0}{C}}^{T_0^0} \frac{dT_0}{\alpha(T_0^n - T^n)} = \frac{\tau}{C}. \quad (5.152)$$

Уравнение (5.152) решается аналитически относительно $T(T_0, \lambda)$ лишь при некоторых $n = \pm 1$, для других n возможно численное решение.

Пример. Решение уравнения (5.152) для случая $n = 1$ примет вид

$$T^2 = \frac{\alpha}{\lambda} (T_0 - T)^2,$$

откуда с учетом того, что $T_0 > T^*$, получим

$$T^* = mT_0 \quad \forall t,$$

где m — некоторая константа.

Исключая m с использованием (5.149), запишем

$$T^*(T_0) = T_0 \cdot \frac{\left(\alpha\tau - C \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \frac{Q_0}{C}} \right)}{\alpha\tau}.$$

Подставив $T^*(T_0)$ в уравнение (5.147), получим зависимость $T^*(t)$

$$T^*(t) = \left(T_0^0 - \frac{Q_0}{C}\right) \frac{\alpha\tau - C \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \frac{Q_0}{C}}}{\alpha\tau} \exp\left(\frac{t}{\tau}\right); \quad t \in (0, \tau).$$

Найдем связь между продолжительностью процесса τ , минимально возможным приростом энтропии системы D и приращением энтропии источника ΔS_0 . На оптимальном процессе скорости изменения D и ΔS_0 постоянны, так что

$$\Delta S_0 = \alpha(m-1)\tau; \quad D = \Delta S + \Delta S_0 = \frac{\alpha(1-m)^2}{m}\tau.$$

Зависимость D от ΔS_0 при различных τ показана на рис. 5.15.

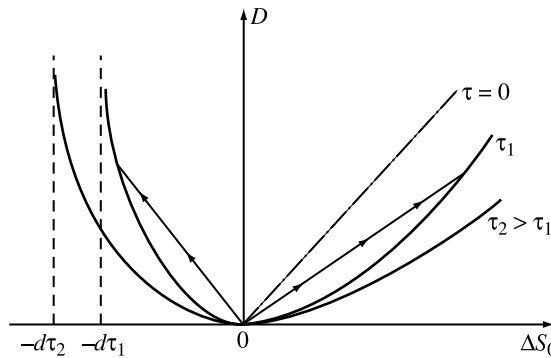


Рис. 5.15. Зависимость минимальной диссипации от прироста энтропии источника и продолжительности τ процесса

Оптимальные траектории — прямые линии, выходящие из начала координат, так как $\frac{dD}{d\Delta S_0} = 1 - \frac{1}{m}$.

В том случае, когда рабочее тело — идеальный газ, максимальная работа A^* , произведенная тепловой машиной, определяется, как нетрудно показать, выражением

$$A^* = Q_0 - E(V(0), T_0^0) \left[\left(\frac{V^*(\tau)}{V(0)} \right)^{R/C} \exp \frac{\Delta S}{C} - 1 \right],$$

где C — объемная теплоемкость рабочего тела, ΔS — прирост его энтропии, равный

$$\Delta S = \frac{\alpha\tau C \ln \left(1 + \frac{Q_0}{CT_0^0 - Q_0} \right)}{\alpha\tau - C \ln \left(1 + \frac{Q_0}{CT_0^0 - Q_0} \right)}.$$

Система с несколькими источниками конечной емкости. Задача о предельных возможностях термодинамических систем с несколькими источниками конечной емкости существенно сложнее задачи с одним источником, рассмотренной ранее, так как здесь замена независимой переменной времени на температуру одного из источников не упрощает задачу. Условия оптимальности могут быть записаны в форме принципа максимума Понтрягина.

Постановка задачи для фиксированной продолжительности контакта τ примет вид

$$f = \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau} u_i q_i(T_{i0}, T) dt \rightarrow \max_{u_i}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{\tau} \frac{u_i q_i(T_{i0}, T)}{T} dt = \Delta,$$

$$\dot{T}_{i0} = -\frac{u_i q_i(T_{i0}, T)}{T}, \quad T_{i0}(0) = T_{i0}^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь u_i — функции контакта, принимающие значения ноль и единица.

Функция Гамильтона для этой задачи

$$H = \sum_{i=1}^n u_i q_i(T_{i0}, T) \left(\psi_0 - \frac{\lambda}{T} - \psi_i/T \right).$$

Предполагая решение невырожденным, будем считать $\psi_0 = 1$. Уравнения для сопряженных переменных

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial T_{i0}} = -\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial q_i}{\partial T_{i0}} \left(1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T} \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.153)$$

В силу того, что граничные условия для температур источников свободны,

$$\psi_i(\tau) = 0, \quad i = 1, n.$$

Из условия максимума H по функциям контакта $u(t)$ имеем в оптимальном процессе

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } q_i(T_{i0}, T) \left(1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T}\right) > 0, \\ 0 & \text{при } q_i(T_{i0}, T) \left(1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T}\right) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, рабочее тело контактирует с i -м «горячим» источником, когда его температура T меньше $T_{i0}(t)$ и больше $\lambda + \psi_i(t)$. Аналогично, оно отдает теплоту j -му «холодному» источнику, когда его температура больше $T_{j0}(t)$ и меньше $\lambda + \psi_j(t)$. С учетом того, что $\psi_i(\tau) = 0$, эти требования в конечный момент τ совпадают с условиями оптимального контакта для источников бесконечной емкости.

Условия оптимальности по температуре рабочего тела T приводят к соотношениям

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n u_i \left\{ \frac{\partial q_i}{\partial T} \left(1 - \frac{\lambda + \psi_i}{T}\right) + q_i(T_{i0}, T) \frac{\lambda + \psi_i}{T^2} \right\} = 0.$$

Задача существенно упрощается, когда источников два, причем один из них «горячий», а второй — «холодный». Она может быть решена посредством разбиения интервала $[0, \tau]$ на два подынтервала, на каждом из которых рабочее тело контактирует с одним источником.

Системы с двумя источниками конечной емкости, циклы Лоренца

Рассмотрим две задачи о предельных возможностях тепловой машины при ограниченной продолжительности цикла τ и конечных теплоемкостях горячего источника c_1 и холодного c_2 . Такие циклы обычно называют циклами Лоренца. Известны начальные температуры этих источников до их контакта с рабочим телом T_1^0 и T_2^0 , законы теплопередачи $q^+(T_1, T)$ и $q^-(T_2, T)$ от горячего и от холодного источника к рабочему телу. Состояние рабочего тела будем характеризовать энтропией S и внутренней энергией E , которые изменяются в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\dot{S} = \frac{q(T_{\text{и}}, T)}{T}, \quad \dot{E} = q(T_{\text{и}}, T) - p(t), \quad (5.154)$$

где тепловой поток q равен q^+ или q^- в зависимости от того, с каким источником, горячим или холодным, находится в контакте рабочее тело; $p(t)$ — мощность, развиваемая тепловой машиной.

На переменные состояния наложены условия цикличности:

$$S(\tau) - S(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\tau \frac{q(T_{\text{и}}, T)}{T} dt = 0, \quad (5.155)$$

$$E(\tau) - E(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\tau q(T_{\text{и}}, T) dt = \int_0^\tau p dt = A. \quad (5.156)$$

Далее решены две задачи, определяющие предельные возможности тепловых машин с двумя источниками ограниченной емкости:

а) Задача о максимальной работе или, что то же самое, о максимальной мощности p , так как $A = p\tau$. Как следует из (5.156), максимальной работе соответствует критерий оптимальности вида

$$A = \int_0^\tau q(T_{\text{и}}, T) dt = (Q^+ - Q^-) \rightarrow \max, \quad (5.157)$$

б) Задача о предельном КПД при заданной работе A_0

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} \rightarrow \max \quad (5.158)$$

при условии

$$Q^+ - Q^- = A_0. \quad (5.159)$$

Требуется найти такой закон изменения температуры рабочего тела во времени $T^*(t)$, для которого функционалы (5.157) или (5.158) достигают максимума. В первой задаче — при условиях (5.154)–(5.156), во второй к перечисленным условиям добавляется равенство (5.159).

Для обеих постановок примем следующую последовательность решения:

— рассмотрим контакт рабочего тела с горячим источником (горячий полуцикл), считая его продолжительность, температуру источника в конце полуцикла и приращение энтропии рабочего тела неопределенными параметрами;

— аналогичным образом рассмотрим холодный полуцикл, в котором рабочее тело отдает теплоту холодному источнику;

— состыкуем результаты оптимизации полуциклов, выбирая неопределенные параметры так, чтобы добиться максимума критериев оптимальности.

Задача о максимальной работе. Так как на стадии оптимизации полуциклов начальные и конечные температуры источников предполагаются фиксированными, то максимальной работе соответствует в таких системах минимальная скорость роста энтропии.

А. *Горячий полуцикл.* Обозначим время горячего полуцикла через \bar{t}_1 , а температуру горячего источника в конце полуцикла — через $\bar{T}_1 = T_1(\bar{t}_1)$. Фиксация \bar{T}_1 при заданной начальной температуре T_1^0 эквивалентна заданию количества теплоты Q^+ , переданной рабочему телу. Задача примет вид

$$\Delta S_1 = \int_0^{\bar{t}_1} \frac{q^+(T_1, T)}{T} dt \rightarrow \min$$

при условиях

$$\int_0^{\bar{t}_1} q^+(T_1, T) dt = Q^+, \quad \dot{T}_1 = -q^+(T_1, T)/c_1, \quad T_1(0) = T_1^0. \quad (5.160)$$

Здесь вместо прироста энтропии системы минимизируется прирост энтропии рабочего тела ΔS_1 , что не повлияет на оптимальное решение.

Б. *Холодный полуцикл.* Аналогично горячему полуциклу приходим к постановке задачи

$$\Delta S_2 = \int_0^{\bar{t}_2} \frac{q^-(T_2, T)}{T} dt \rightarrow \max$$

при условиях

$$\int_0^{\bar{t}_2} q^-(T_2, T) dt = Q^-, \quad \dot{T}_2 = -q^-(T_2, T)/c_2, \quad T_2(0) = T_2^0. \quad (5.161)$$

В холодном полуцикле в отличие от горячего требуется максимизировать прирост энтропии рабочего тела, так как знак теплового потока отрицателен и минимуму прироста энтропии системы соответствует максимум ΔS_2 .

Каждая из поставленных задач представляет собой задачу об оптимальном тепловом контакте, которая решена ранее. Для них справедливо условие минимальной диссипации теплообмена, которое для ньютоновского закона теплопередачи приводит к равенствам $T = T_1 v_1$ в горячей полупереме ($v_1 < 1$), $T = T_2 v_2$ в холодной полупереме ($v_2 > 1$). Далее рассмотрим этот закон теплопередачи.

С учетом пропорциональности температур источника и рабочего тела получим для горячей полуперемы $q^+ = \alpha_+(1 - v_1)T_1 = k_1 T_1$, для холодной полуперемы $q_- = \alpha_-(1 - v_2)T_2 = -k_2 T_2$. Минимальный прирост энтропии рабочего тела в i -м полупереме

$$\Delta S_i^* = \bar{t}_i \frac{\alpha_i}{v_i} (1 - v_i), \quad i = 1, 2.$$

В. *Стыковка полуперем.* Перепишем задачу о максимальной работе, считая v_1 и v_2 наряду с \bar{t}_1 и \bar{t}_2 неизвестными параметрами. Получим

$$A = Q^+ - Q^- = c_1(T_1^0 - \bar{T}_1) + c_2(T_2^0 - \bar{T}_1) \rightarrow \max \quad (5.162)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \tau, \quad \bar{t}_i > 0, \quad i = 1, 2, \\ \Delta S_1^* + \Delta S_2^* = \bar{t}_1 \frac{\alpha_1}{v_1} (1 - v_1) + \bar{t}_2 \frac{\alpha_2}{v_2} (1 - v_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.163)$$

Выразим из решения дифференциальных уравнений (5.160) и (5.161) температуры источников в конце полуперем через их продолжительность

$$\bar{T}_1 = T_1^0 \exp\left(-\frac{k_1 \bar{t}_1}{c_1}\right), \quad T_2 = T_2^0 \exp\left(\frac{k_2 \bar{t}_2}{c_2}\right),$$

что позволяет переписать задачу (5.162) и (5.163) как

$$A = c_1(T_1^0 - T_1) + c_2(T_2^0 - \bar{T}_2) \rightarrow \max$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \frac{c_1}{k_1} \ln \frac{T_1^0}{T_1} + \frac{c_2}{k_2} \ln \frac{\bar{T}_2}{T_2^0} = \tau, \\ \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{c_1 \alpha_1}{\alpha_1 - k_1} \ln \frac{T_1^0}{T_1} - \frac{c_2 \alpha_2}{\alpha_2 + k_2} \ln \frac{\bar{T}_2}{T_2^0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.164)$$

Для краткости обозначим относительные изменения температуры источников как $\Delta_1 = \bar{T}_1/T_1^0$, $\Delta_2 = \bar{T}_2/T_2^0$ ($\Delta_1 < 1, \Delta_2 > 1$) и запишем функцию Лагранжа этой задачи, отбросив постоянные слагаемые,

$$R = c_1 T_1^0 \Delta_1 + c_2 T_2^0 \Delta_2 + \Lambda_1 \left(\frac{c_2}{k_2} \ln \Delta_2 - \frac{c_1}{k_1} \ln \Delta_1 \right) - \\ - \Lambda_2 \left(\frac{c_1 \alpha_1}{\alpha_1 - k_1} \ln \Delta_1 + \frac{c_2 \alpha_2}{\alpha_2 + k_2} \ln \Delta_2 \right).$$

Условия ее стационарности по искомым переменным $\Delta_1, \Delta_2, k_1, k_2$ приводят к уравнениям

$$R_{\alpha_1} = T_1^0 - \Lambda_1 (k_1 \Delta_2)^{-1} - \Lambda_2 \alpha_1 [\Delta_1 (\alpha_1 - k_1)]^{-1} = 0, \\ R_{\alpha_2} = T_2^0 + \Lambda_1 (k_2 \Delta_2)^{-1} - \Lambda_2 \alpha_2 [\Delta_2 (\alpha_2 + k_2)]^{-1} = 0, \\ R_{k_1} = \Lambda_1 k_1^{-2} - \Lambda \alpha_1 (\alpha_1 - k_1)^{-2} = 0, \\ R_{k_2} = -\Lambda_1 k_2^{-2} + \Lambda_2 \alpha_2 (\alpha_2 + k_2)^{-2} = 0.$$

Из двух последних равенств получаем

$$\frac{k_2}{k_1} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1}(\alpha_2 + k_2)}{\sqrt{\alpha_2}(\alpha_1 - k_1)} \Rightarrow k_1 = \pm \frac{k_2 \alpha_1 \sqrt{\alpha_2}}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1} + k_2 (\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}, \quad (5.165)$$

а условие цикличности по энтропии (5.164) примет вид

$$\frac{\ln \Delta_2}{\ln \Delta_1} = - \frac{c_1 \alpha_1 (\alpha_2 + k_2)}{c_2 \alpha_2 (\alpha_1 - k_1)}.$$

Так как в этом равенстве знак левой части отрицательный ($\Delta_1 < 1$), то разность $(\alpha_1 - k_1)$ положительна, а значит, положительна и правая часть в (5.165), так что

$$\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} = - \frac{k_1 c_2 \ln \Delta_2}{k_2 c_1 \ln \Delta_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Сумма $\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \tau$, так что оптимальные продолжительности контакта

$$\bar{t}_1 = \tau \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \bar{t}_2 = \tau \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}.$$

Выразим Δ_1 и Δ_2 через \bar{t}_1 и \bar{t}_2 :

$$\Delta_1 = \exp\left(-\bar{t}_1 \frac{k_1}{c_1}\right), \quad \alpha_2 = \exp\left(\bar{t}_2 \frac{k_2}{c_2}\right) \quad (5.166)$$

и подставим их в критерий оптимальности, учтя, что согласно (5.165) k_1 есть функция k_2 . Получим

$$A = T_1^0 c_1 \left[1 - \exp\left(-\bar{t}_1 \frac{k_1(k_2)}{c_1}\right)\right] + T_2^0 c_2 \left[1 - \exp\left(\bar{t}_2 \frac{k_2}{c_2}\right)\right] \rightarrow \max.$$

Условия максимума этого выражения по k_2 с учетом (5.165) приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{T_{10}}{T_{20}} = & \left[1 + \frac{k_2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}}\right]^2 \times \\ & \times \exp\left\{k_2 \left[\frac{\bar{t}_2}{c_2} + \frac{t_1}{c_1} \frac{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1} + k_2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Так как правая часть этого уравнения при $k_2 > 0$ монотонно зависит от k_2 , то оно имеет единственное решение k_2^* . Из (5.165) определяем k_1^* , из (5.166) Δ_1^* и Δ_2^* , а по ним $\bar{T}_i^* = \Delta_i^* T_i^0$, $i = 1, 2$. Максимальная работа подсчитывается согласно (5.162), а соответствующий ей КПД как

$$\eta_{A_{\max}} = \frac{A_{\max}(\tau)}{c_1(T_1^0 - T_1^*)}.$$

Увеличение количества контактов рабочего тела с источниками не дает преимуществ по сравнению с двумя контактами, доказательство этого факта, полученное А.Г. Кузнецовым, приведено в книге [68].

Задачи о получении максимальной работы в цикле Лоренца фиксированной продолжительности и о минимальной продолжительности цикла при заданном значении полученной работы эквивалентны друг другу. Однако минимальную продолжительность цикла можно явно выразить через теплоемкости источников, их начальные и конечные температуры. Это выражение имеет вид

$$\tau^* = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2 \left[\frac{1}{c_1 \ln T_1^0 / \bar{T}_1} + \frac{1}{c_2 \ln T_2^0 / \bar{T}_2}\right]^{-1}. \quad (5.167)$$

Из очевидного требования $\tau > 0$ с учетом (5.167) следует, что множество состояний, достижимых с использованием цикла Лоренца на плоскости T_1, T_2 , выделяется условием

$$\bar{T}_1^{c_1} \bar{T}_2^{c_2} > (T_1^0)^{c_1} (T_2^0)^{c_2}.$$

Кривая $T_1^{c_1} T_2^{c_2} = (T_1^0)^{c_1} (T_2^0)^{c_2}$ соответствует времени $\tau = \infty$.

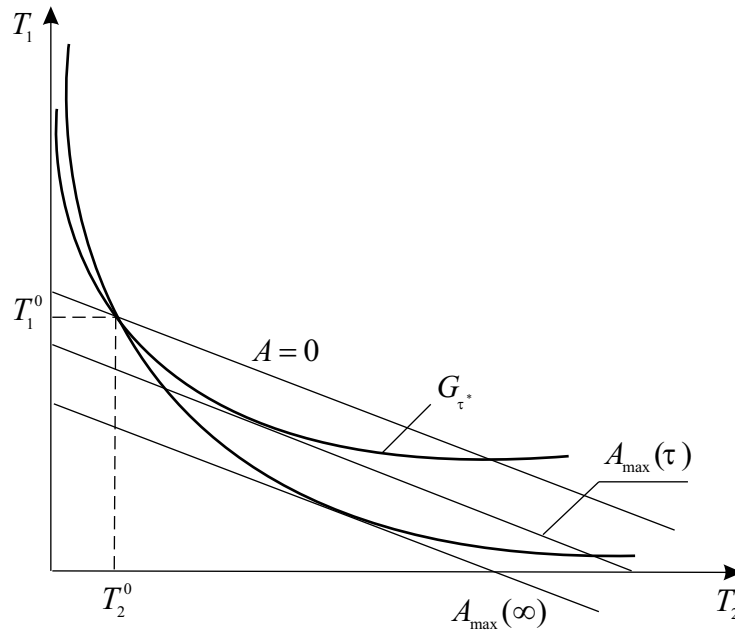


Рис. 5.16. Взаимное расположение областей, достижимых за время τ , и линий постоянной работы

Условие (5.167) при фиксированном значении τ^* выделяет на плоскости T_1, T_2 множество точек, достижимых за время τ^* (рис. 5.16). Обозначим его как G_{τ^*} . Точка касания прямых из семейства $A = \text{const}$ к границе множества G_{τ^*} определяет предельную работу, которую можно получить с использованием цикла Лоренца за фиксированное время τ . При $\tau \rightarrow \infty$ она оказывается равной работе обратимого цикла Лоренца

$$A_{\text{max}}^{\infty} = c_1 T_1^0 + c_2 T_2^0 - (c_1 + c_2) (T_1^0)^{c_1/(c_1+c_2)} (T_2^0)^{c_2/(c_1+c_2)}. \quad (5.168)$$

Извлеченная работа равна $A = c_1(T_1^0 - T_1) + c_2(T_2^0 - T_2)$. Фиксированным значениям A соответствуют на рис. 5.16 параллельные прямые.

Чем больше извлеченная работа, тем ниже проходит соответствующая ей прямая. Максимуму работы, извлеченной за время τ , соответствует прямая, касающаяся границы множества достижимых за время τ температур.

В этом случае температуры T_1 и T_2 источников в конце полуциклов равны друг другу:

$$T_1 = T_2 = (T_1^0)^{c_1/(c_1+c_2)}(T_2^0)^{c_2/(c_1+c_2)}.$$

Соответствующий максимальной работе КПД

$$\eta_{A_{\max}} = \frac{1 - (T_2^0/T_1^0)^{c_2/(c_1+c_2)}}{(T_1^0/T_2^0)^{c_1/(c_1+c_2)} - 1} = 2 - \frac{\eta_k}{1 - (1 - \eta_k)^{c_1/(c_1+c_2)}}, \quad (5.169)$$

где η_k — КПД цикла Карно, имеющего температуры горячего и холодного источников T_1^0 и T_2^0 соответственно.

Задача о предельном КПД при заданной работе. Используем для решения этой задачи тот же подход, что и в задаче о максимальной работе. При этом подзадачи оптимизации горячего и холодного полуциклов не изменяются, так как Q^+ и Q^- в них считаются фиксированными. Условие же (5.159) необходимо учесть на стадии стыковки полуциклов. Ввиду этого в каждом из полуциклов температуры источника и рабочего тела пропорциональны и, как следствие, $q^+ = k_1 T_1$, $q^- = -k_2 T_2$. Коэффициенты k_1 и k_2 , естественно, окажутся иными, чем в задаче о максимальной работе.

С учетом заданной работы максимуму КПД соответствует минимум теплоты Q^+ , отданной горячим источником, и задача стыковки полуциклов запишется как

$$I = Q^+ = c_1 T_1^0 \Delta_1 \rightarrow \min_{k_i, T_i}, \quad i = 1, 2$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 &= -\frac{c_1}{k_1} \ln \Delta_1 + \frac{c_2}{k_2} \ln \Delta_2 = \bar{t}, \\ \bar{S}_1 + \bar{S}_2 &= \frac{c_1 \alpha_1}{\alpha_1 - k_1} \ln \Delta_1 + \frac{c_2 \alpha_2}{\alpha_2 + k_2} \ln \Delta_2 = 0, \\ Q^+ - Q^- &= c_1 T_1^0 (1 - \Delta_1) + c_2 T_2^0 (1 - \Delta_2) = A_0, \end{aligned} \quad (5.170)$$

где $\Delta_1 = T_1/T_1^0$; $\Delta_2 = T_2/T_2^0$. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$R_1 = c_1 T_1^0 \Delta_1 + \Lambda_1 \left(\frac{c_2}{k_2} \ln \Delta_2 - \frac{c_1}{k_1} \ln \Delta_1 \right) - \\ - \Lambda_2 \left(\frac{c_1 \alpha_1 \ln \Delta_1}{\alpha_1 - k_1} + \frac{c_2 \alpha_2 \ln \Delta_2}{\alpha_2 + k_2} \right) + \Lambda_3 [c_1 T_1^0 (1 - \Delta_1) + c_2 T_2^0 (1 - \Delta_2)].$$

Сравнение этой функции с функцией R в задаче о предельной работе показывает, что

$$\frac{\partial R_1}{\partial k_1} = \frac{\partial R}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial R_1}{\partial k_2} = \frac{\partial R}{\partial k_2} = 0.$$

А так как из этих условий и из равенства (5.164), которое также остается без изменений в нашей задаче, следуют формулы (5.166), то оптимальные продолжительности полуциклов такие же, как и в задаче о предельной работе. Оптимальные значения k_1 и k_2 определяются в данном случае из совместного решения уравнения (5.165), которое остается без изменения, и последнего из условий (5.170), которое после исключения Δ_1 и Δ_2 примет вид

$$c_1 T_1^0 \left[1 - \exp \left(-\frac{\bar{t}_1 k_1}{c_1} \right) \right] + c_2 T_1^0 \left[1 - \exp \left(\frac{\bar{t}_2 k_2}{c_2} \right) \right] = A_0, \quad (5.171)$$

k_1 и k_2 оказываются несколько меньше, чем в задаче о предельной работе.

Отметим, что задача о максимуме КПД цикла типа Лоренца эквивалентна задаче о получении максимальной работы, при условии, что горячий источник охладится до заданной температуры T_1 .

Максимальная работа при заданном потреблении теплоты

$$Q_+ = c_1 (T_1^0 - T_1)$$

равна

$$A^0 = Q_+ - c_2 (T_2(T_1, \tau) - T_{20}),$$

а

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{c_2 (T_2(T_1, \tau) - T_{20})}{c_1 (T_1^0 - T_1)} \quad (5.172)$$

Зависимость $T_2(T_1, \tau)$ находят из условий (5.170).

Обратные циклы типа Лоренца. Задача о предельных возможностях обратных циклов типа Лоренца сводится к вопросу о том, какую минимальную работу нужно затратить для того, чтобы два тела с фиксированными теплоемкостями и начальными температурами T_1^0 и T_2^0 перевести в заданное конечное состояние за фиксированное время τ . Если $T_1^0 = T_2^0 = T^0$, то это *задача разделения термически однородной системы на подсистемы с заданными температурами*.

Структура оптимального решения и метод его расчета в обратной задаче ничем не отличаются от прямой. Однако, как и в обратной задаче для системы конечной емкости с резервуаром, рассмотренной ранее, здесь в отличие от прямой задачи фиксированы как начальные, так и конечные температуры источников, что сужает множество допустимых решений и увеличивает дополнительные затраты работы по сравнению с обратимым ее значением. Более того, можно показать [24], что когда конечное заданное значение температуры нагреваемого тела стремится к бесконечности, то при ограниченном τ температура охлаждаемого ограничена снизу. Другими словами, нагреть при затратах соответствующей мощности можно до сколь угодно большой температуры, а охладить лишь до некоторого предела, какую бы мощность мы не затратили.

5.7. Системы с нестационарными резервуарами

Система с одним источником. Рассмотрим систему, в которой температура источника изменяется во времени. Это может быть заданная функция времени $T_0(t)$ или случайный стационарный процесс. Применительно к рассматриваемой системе будем решать задачу о максимальной средней мощности \bar{p} , которой эквивалентна постановка (5.147) о максимальной средней интенсивности теплового потока при заданной средней интенсивности изменения энтропии рабочего тела. В частности, если среднее значение температуры источника постоянно, то изменение энтропии рабочего тела равна нулю. Оптимальное решение этой усредненной задачи удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \max_T \left[q(T_0, T) + \lambda \left(\frac{q(T_0, T)}{T} - \bar{\sigma} \right) \right] dt \rightarrow \min_{\lambda}. \quad (5.173)$$

Достигается ли максимум подынтегрального выражения в (5.173) в одном или двух базовых значениях, зависит от того, выпукла ли вверх зависимость $q(T_0, T)$ от $\sigma = \frac{q(T_0, T)}{T}$, полученная после исключения из этих выражений T . Нетрудно видеть, что как и в случае постоянной температуры источника для законов теплопередачи вида (5.151) неединственность базового значения возможна лишь при $0 < n < 1$. В остальных случаях оптимальное решение соответствует стационарности по T подынтегрального выражения в (5.173). Отсюда следует, что для любого момента времени t температуры $T^*(t)$ и $T_0(t)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{T^2} \frac{q(T_0, T)}{\frac{\partial q(T_0, T)}{\partial T}} - \frac{1}{T} = \text{const.} \quad (5.174)$$

Для законов теплопереноса вида (5.151) получим равенство

$$\frac{T_0^n}{T^{n+1}} + \frac{n-1}{T} = \text{const.}$$

В частности, для линейного закона ($n = 1$) искомая температура пропорциональна квадратному корню из T_0

$$T^*(T_0) = m\sqrt{T_0}. \quad (5.175)$$

В задаче с переменной температурой источника в постановке (5.173) целесообразно перейти от усреднения по времени к усреднению по множеству значений T_0 . Как регулярной, так и случайной функции $T_0(t)$ может быть сопоставлена вероятностная мера $f(T_0) \geq 0$, а задача (5.173) переписана в форме

$$\bar{q} = \int_0^\infty f(T_0) q(T_0, T) dT_0 \rightarrow \max \left/ \int_0^\infty f(T_0) \frac{q(T_0, T)}{T} dT_0 = \bar{\sigma}. \quad (5.176)$$

Функция $f(T_0)$ такова, что величина

$$\gamma = \int_{T_{01}}^{T_{02}} f(T_0) dT_0$$

равна доле времени, в течение которой температура источника удовлетворяет неравенству $T_{01} < T_0 \leq T_{02}$. Для случайной функции $T_0(t)$ это плотность распределения вероятности ее значений.

Величину коэффициента пропорциональности m находим после подстановки в условие задачи (5.176) зависимости $T_0^*(T, \text{const})$, найденной из (5.174). Для линейного закона, подставляя (5.175) в (5.176), получим

$$\int_0^{\infty} f(T_0) \sqrt{T_0} dT_0 = m.$$

Так что m представляет собой среднее значение квадратного корня температуры источника, а

$$T^*(t) = \sqrt{T_0} \sqrt{T_0(t)}. \quad (5.177)$$

Для закона (5.151) и $n = -1$ условия оптимальности приводят к выражениям

$$T^*(T_0) = 2\lambda \frac{T_0}{T_0 + \lambda},$$

где

$$\lambda = \sqrt{T_0^2}.$$

Как и ранее черта соответствует усреднению квадрата функции $T_0(t)$ по времени либо по множеству.

Пусть, например, $f(T_0)$ — равномерное распределение значений T_0 , определенное на (T_{01}, T_{02}) , что соответствует линейному изменению температуры источника вида

$$T_{01} = T_{01} + \frac{t}{\tau}(T_{02} - T_{01}).$$

Тогда для $n = 1$ по формуле (5.177) получим

$$T^*(T_0) = \frac{2(T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2})}{3(T_{02} - T_{01})} \sqrt{T_0}.$$

Для $n = -1$

$$T^*(T_0) = \frac{2T_0(T_{02}^3 - T_{01}^3)}{3T_0(T_{02} - T_{01}) + (T_{02}^3 - T_{01}^3)}.$$

При $\bar{\sigma} = 0$ предельная средняя мощность \bar{p} для $n = 1$

$$\bar{p}_{\max} = \alpha \left[\frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{4}{9} \left(\frac{T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}}{T_{02} - T_{01}} \right)^2 \right].$$

К системам с одним источником относятся тепловые машины, нагрев и охлаждение рабочего тела в которых осуществляется потоком жидкости или газа с переменной температурой, системы, в которых рабочее тело нагревается днем и охлаждается ночью в горных районах с интенсивной солнечной радиацией, и др.

Системы с несколькими источниками. Для сокращения записи введем обозначения: $T_0(t)$ — вектор температур источников; $q_\Sigma(T_0, T, u)$ — суммарный тепловой поток от источников к рабочему телу ($q_\Sigma = \sum_{i=1}^n u_i q_i(T_{i0}(t), T(t))$).

Вектор-функция $T_0(t)$ принимает значения из множества V ; она может быть регулярной либо случайной функцией времени. И в том, и в другом случае этой функции можно сопоставить распределение ее значений $f(T_0) \geq 0$, определенное на V и такое, что величина

$$\mu = \int_{\delta V} f(T_0) dT_0$$

представляет собой долю времени τ , в течение которой вектор $T_0 \in \delta V$. Используя эти обозначения, задачу о максимуме средней мощности при заданной средней скорости изменения энтропии рабочего тела можно записать в форме

$$\bar{p} = \int_V f(T_0) \sum_{V=1}^2 q_\Sigma(T_0, T, u) dT_0 \rightarrow \max_{T, u}$$

при условии

$$\int_V f(T_0) \sum_{V=1}^2 \frac{q_\Sigma(T_0, T, u)}{T} dT_0 = \bar{\sigma}. \quad (5.178)$$

Эту задачу, в свою очередь, решают в два этапа:

Первый — определение оптимальных значений вектора

$$\nu = (T, u)$$

для фиксированных значений вектора T_0 и величины $\bar{\sigma}(T_0)$.

Второй — определение такого вектора $\bar{\sigma}(T_0)$, для которого

$$\bar{p} = \int_V f(T_0) \xi(T_0, \sigma) dT_0 \rightarrow \max_{\sigma} \quad (5.179)$$

при условии, что среднее значение функции $\bar{\sigma}(T_0)$ задано

$$\bar{p} = \int_V f(T_0) \bar{\sigma}(T_0) dT_0 = \bar{\sigma}, \quad (5.180)$$

где через $\xi(T_0, \sigma)$ обозначено значение функции q_Σ , в которую подставлено оптимальное решение $\nu^*(\bar{\sigma}(T_0))$, полученное на первом этапе.

Задача первого этапа, когда вектор температур источников фиксирован, в точности совпадает с задачей (5.141), следовательно, для нее справедливо правило разбиения источников на «горячие» и «холодные», а также условия (5.145), (5.146) для оптимального выбора температуры рабочего тела.

Для задачи о максимуме средней мощности функцию Лагранжа запишем в виде

$$L_2 = \xi(T_0, \bar{\sigma}) - \lambda_2 \bar{\sigma}.$$

Условие оптимальности по σ приводит к равенству

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\sigma}} = \lambda_2, \quad (5.181)$$

которое совместно с условием (5.180) определяет величину $\bar{\sigma}^*(T_0)$, соответствующую оптимальному решению, и λ_2 .

В том случае, когда для каждого T_0 , значение $T^*(T_0)$ единственно

$$\xi(T_0) = q_\Sigma(T_0, T^*), \quad \bar{\sigma}^*(T_0) = \frac{1}{T^*} q_\Sigma(T_0, T^*)$$

условие (5.181) примет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial T^*} q_\Sigma(T_0, T^*) : \frac{\partial}{\partial T^*} \left[\frac{1}{T^*} q_\Sigma(T_0, T^*) \right] = \frac{T^* \left(\frac{\partial q_\Sigma}{\partial T^*} \right)}{\frac{\partial q_\Sigma}{\partial T^*} - \frac{q_\Sigma(T_0, T^*)}{T^*}} = \lambda_2. \quad (5.182)$$

Это соотношение связывает T^* с вектором T_0 и множителем λ_2 , значение которого определяется из условия (5.179) и зависит от величины $\bar{\sigma}$ и распределения $f(T_0)$ вектора температур источников. В том случае, когда $T_0(t)$ — стационарный случайный процесс, его распределение может быть известно априори, что позволяет найти оптимальную зависимость $T^*(T_0)$.

Утверждение: Если вектор-функция $T_0(t)$ на $[0, \tau]$ не содержит участков постоянства (соответственно $f(T_0)$ не содержит δ -составляющих), то решение $T^*(T_0)$, найденное по условиям (5.180), (5.182), оптимально. Если $f(T_0)$ содержит δ -составляющие, сосредоточенные в точках T_{0k} ($k = \overline{1, m}$), то найдется оптимальное решение, для которого $T^*(T_0)$ может принимать два базовых значения лишь для одной из температур T_{0k} .

Доказательство: Обозначим множество значений вектора T_0 , для которых $\min_{\lambda} \max_T L(T_0, T, \lambda)$ имеет два базовых решения, через V_0^* и назовем его множеством расщепления (здесь $L = q_{\Sigma}(T_0, T) + \lambda\sigma(T_0, T)$). Условия стационарности L по T позволяют выразить T^* через T_0, λ и перейти к функции $L^*(T_0, \lambda) = q_{\Sigma}^*(T_0, \lambda) + \lambda\sigma^*(T_0, \lambda)$. На множестве расщепления каждому из двух базовых значений T^* соответствует своя функция $L_1^*(T_0, \lambda)$ и $L_2^*(T_0, \lambda)$ соответственно. Причем

$$L_1^*(T_0, \lambda) = L_2^*(T_0, \lambda)$$

В силу непрерывности и гладкости функций q_{Σ} и σ и их монотонности по T_0 и T это уравнение имеет дискретные корни T_{0k} и, если $f(T_0)$ не содержит в этих точках δ -составляющих, то множество V_0^* имеет нулевую меру и расщепление никак не влияет на критерий оптимальности и значение $\bar{\sigma}$.

Если $f(T_0)$ содержит δ -составляющие в точках T_{0k} вида $\mu\delta(T_0 - T_{0k})$ и в этих точках температура T имеет два базовых решения $T_1(T_0, \lambda)$ и $T_2(T_0, \lambda)$, то конечная часть производства энтропии $\bar{\sigma}$ приходится на долю множества V_0^* . С учетом (5.178) получим

$$\sum_{k=1}^m \mu_k [\gamma_k \sigma_1(T_{0k}) + (1 - \gamma_k) \sigma_2(T_{0k})] = \bar{\sigma},$$

где $0 \leq \gamma_k \leq 1$.

Это равенство выделяет плоскость в m -мерном пространстве переменных γ_k . Наличие «расщепленного» решения говорит о том, что пересечение этой плоскости с единичным кубом со сторонами $[0, 1]$ не пусто. А значит найдется ее пересечение и с одним из ребер куба. В точке этого пересечения все множители γ , кроме одного, равны нулю или единице. Один же множитель γ_{ν} принадлежит интервалу $(0, 1)$. Это значит, что найдется такое оптимальное решение, для которого температура рабочего тела переключается между двумя базовыми значениями лишь на участке постоянства вектора $T_0 = T_{0\nu}$. Утверждение доказано.

5.8. Прямое и обратное преобразование тепловой энергии в работу в стационарной неоднородной системе

Рассмотрим общую задачу о предельных возможностях прямого и обратного преобразования тепловой энергии в механическую в стационарном режиме неоднородной термодинамической системы и получим условия, выделяющие реализуемые в такой системе поля температур, а также те из реализуемых полей, которые требуют для своего поддержания затрат энергии извне. В частном случае одного резервуара рассматриваемая задача переходит в задачу оптимального термостатирования, т.е. распределения потоков энергии для системы сообщающихся камер произвольной конфигурации. Покажем, что для ньютоновского теплообмена в режиме максимальной извлекаемой (минимальной затрачиваемой) мощности абсолютные температуры контакта рабочего тела с резервуарами пропорциональны корню квадратному из температур резервуаров независимо от структуры системы и необратимости процессов в преобразователе.

Введение и постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из термических резервуаров и подсистем конечной емкости с различающимися температурами, находящиеся в контакте с резервуарами и друг с другом. В такой системе при заданных законах и коэффициентах теплопереноса устанавливается стационарный режим, характеризующийся распределением температур между подсистемами — дискретным температурным полем.

Естественно поставить задачу о том, какую максимальную мощность можно извлечь в стационарной термодинамической системе с использованием тепловой машины, имеющей заданные коэффициенты теплообмена при контакте с каждым элементом системы. Будем называть эту задачу задачей о максимальной мощности. В такой постановке она обобщает задачу И.И. Новикова и, как будет показано ниже, позволяет оценить предельные возможности прямого и обратного преобразования энергии в дискретных температурных полях.

В зависимости от ограничений, наложенных на температуры подсистем, максимальная мощность N^* в такой задаче может оказаться как больше, так и меньше нуля. При отсутствии преобразователя в систе-

ме устанавливается некоторое, как правило, единственное распределение температур. Такое распределение будем называть самопроизвольной конфигурацией температурного поля Θ_0 . При наличии преобразователя в зависимости от выбранных температур его контакта с подсистемами и коэффициентов теплопереноса возможны различные конфигурации температурного поля. Для одних конфигураций максимальная мощность, извлекаемая преобразователем, положительная, для других — отрицательная. В последнем случае она по модулю равна минимальным затратам мощности в тепловом насосе, потребным для поддержания некоторого стационарного температурного поля, отличного от того, которое устанавливается в системе самопроизвольно.

В том частном случае, когда резервуар в системе один (окружающая среда), максимальная мощность преобразователя всегда отрицательная. Задача о максимальной мощности превращается в этом случае в задачу оптимального термостатирования [52], [155]: поддержания заданного поля температур с минимальными затратами энергии. Важность этой задачи вытекает из того факта, что около 40 % энергии человечество тратит на отопление и кондиционирование зданий, создание изоляции для криогенных и плазменных систем и пр. В работах В.С. Мартыновского [31], а позднее в [52], [155] показано, что для создания в одной камере температуры, сильно отличающейся от температуры окружающей среды (криогенные и высокотемпературные системы) целесообразно подавать (отбирать) тепло не только в эту камеру, но и в соседние с ней. Распределение потоков теплоты зависит от законов теплопереноса.

При заданных температурах резервуаров температуры подсистем не могут быть произвольными, какой бы поток мощности не подводился или не отбирался в преобразователе. Поэтому одной из задач о предельных возможностях преобразователя является задача об условиях реализуемости той или иной конфигурации температурного поля и о разбиении множества реализуемых конфигураций на два непересекающихся класса:

- температурные поля, позволяющие извлекать мощность из системы, — *генерирующие мощность*;
- температурные поля, требующие для своего поддержания затраты мощности, — *потребляющие мощность*.

Решение этих задач является прямым следствием задачи о максимальной мощности. Действительно, если найдена зависимость N^* от

формы Θ температурного поля, то условие $N(\Theta) = 0$ определяет границу разбиения.

В дальнейшем, когда не нужно акцентировать направление потока механической энергии, будем как тепловую машину, так и тепловой насос, называть преобразователем. Все упомянутые задачи могут быть обобщены на системы неоднородные не только по температуре, но и по давлению, составу или другим интенсивным переменным составляющих их подсистем. Здесь мы не делаем такого обобщения, из-за желания избежать громоздких выкладок и получить результаты в компактной форме.

Задача о максимальной мощности преобразователя

Рассмотрим стационарную термодинамическую систему, состоящую из $(n - m)$ резервуаров с постоянными температурами, m подсистем конечной емкости, температуры которых определяются запасом их внутренней энергии, и преобразователя. Потоки обмена теплотой подсистем друг с другом обозначим как q_{ij} . Эти потоки связаны с различием температур подсистем. Преобразователь контактирует с подсистемами, получая или отдавая им потоки теплоты, потребляя или вырабатывая мощность. Требуется найти такие температуры контакта u_i преобразователя с каждой из подсистем, при которых получаемая в единицу времени работа (мощность N) максимальна. Если максимальная мощность отрицательна, она соответствует минимуму затрат энергии, подводимой извне к преобразователю.

Постановка задачи и условия оптимальности. Обозначим через T_i температуру i -й подсистемы, $q_{ij}(T_i, T_j)$ — тепловой поток между i -й и j -й подсистемами, u_i — температура рабочего тела при контакте с i -й подсистемой, $q_i(T_i, u_i)$ — поток теплоты между i -й подсистемой и преобразователем, N — мощность преобразователя. Поток, поступающий в каждую из подсистем, будем считать положительным. С ростом T_i q_{ij} монотонно уменьшается, с ростом T_j — растет, при $T_i = T_j$ $q_{ij} = 0$. Если контакт между подсистемами отсутствует, то $q_{ij} = 0$ тождественно. Зависимости $q_{ij}(T_i, T_j)$ будем предполагать непрерывно-дифференцируемыми, а рабочее тело преобразователя внутренне обратимым, так что производство энтропии в нем равно нулю.

Формальная постановка задачи о максимальной мощности примет

вид

$$N = \sum_{i=1}^n q_i(T_i, u_i) \rightarrow \max_{u_i > 0} \quad (5.183)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i(T_i, u_i)}{u_i} = 0, \quad (5.184)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}(T_j, T_i) = q_i(T_i, u_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.185)$$

Критерий (5.183) следует из энергетического баланса рабочего тела преобразователя. Условие (5.184) вытекает из энтропийного баланса рабочего тела, а условие (5.185) — энергетический баланс для i -й подсистемы конечной емкости.

Разобьем m подсистем конечной емкости на две категории: подсистемы, температуры T_i которых фиксированы ($i = \overline{r+1, m}$), и подсистемы, температуры которых свободны и выбираются наряду с u_i по условиям максимума N ($i = \overline{1, r}$). Назовем их подсистемами с фиксированными и свободными температурами. Искомыми переменными в задаче (5.183)–(5.185) являются n температур u_i контакта рабочего тела и r свободных температур T_i подсистем ($i = \overline{1, r}$).

Запишем условия для оптимального выбора этих переменных через функцию Лагранжа задачи (5.183)–(5.185) в предположении невырожденности решения ($\lambda_0 = 1$)

$$L = \sum_{i=1}^m q_i + \sum_{i=m+1}^n q_i - \Lambda \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{u_i} - \Lambda \sum_{i=m+1}^n \frac{q_i}{u_i} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} - q_i \right). \quad (5.186)$$

Здесь отдельно выписаны слагаемые, характеризующие контакты с резервуарами, так как условия (5.185) наложены только на системы конечной емкости.

Условия стационарности L по u_i для $i > m$ приводят к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left[q_i(T_i, u_i) \left(1 - \frac{\Lambda}{u_i} \right) \right] = 0, \quad i = \overline{m+1, n}. \quad (5.187)$$

Откуда следует, что температуры контактов с резервуарами отвечают условию

$$\frac{u_i^2 \partial q_i / \partial u_i}{u_i \partial q_i / \partial u_i - q_i} = \Lambda, \quad i = \overline{m+1, n}. \quad (5.188)$$

Левую часть этого равенства (она имеет размерность температуры) назовем *приведенной температурой контакта*. Таким образом, справедливо

У т в е р ж д е н и е: *Для получения максимальной мощности приведенные температуры контакта преобразователя со всеми резервуарами должны быть одинаковы.*

Из условий $\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$ и $\frac{\partial L}{\partial T_i} = 0$ имеем для температур контакта преобразователя с подсистемами и свободных температур систем конечной емкости уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left[q_i \left(1 - \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) \right] = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.189)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \left[q_i \left(1 - \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) \right] + \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_i) \frac{\partial q_{ij}}{\partial T_i} = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (5.190)$$

Здесь учтено, что $q_{ij} = -q_{ji}$. Множители $\lambda_j = 0$ для $j > m$. Из условия (5.189) получим приведенную температуру контакта с подсистемой конечной емкости

$$\frac{u_i^2 \partial q_i / \partial u_i}{u_i \partial q_i / \partial u_i - q_i} = \frac{\Lambda}{(1 - \lambda_i)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.191)$$

Условие (5.191) связывает приведенную температуру контакта преобразователя с i -й подсистемой с приведенной температурой контакта с резервуарами Λ и множителями λ_i , определяющимися системой уравнений (5.185), (5.190).

Полученные условия для частных случаев поставленной задачи сильно облегчаются: так, если в системе одни резервуары, то оптимальные температуры контакта находят по формуле (5.188), а Λ из условия (5.184); если температуры всех подсистем конечной емкости фиксированы, то уравнения балансов (5.185) определяют все u_i для $i = 1, \dots, m$, а значит и все слагаемые в условии (5.184) и критерии (5.183), кроме тех, которые связаны с резервуарами. Задача, как показано ниже, сводится к максимизации мощности, извлекаемой из резервуаров, при заданном потоке энтропии от них к преобразователю.

Ньютоновские законы теплообмена

В предположении, что потоки q_i , q_{ij} линейно зависят от разности температур

$$q_i = \alpha_i(T_i - u_i), \quad q_{ij} = \alpha_{ij}(T_j - T_i), \quad (5.192)$$

где α_{ij} , α_i — коэффициенты теплопереноса, задача (5.183)–(5.185) примет вид

$$N = \sum_{i=1}^n \alpha_i(T_i - u_i) \rightarrow \max_{u_i > 0}, \quad (5.193)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i^u \frac{T_i}{u_i} = 1, \quad \text{где} \quad \bar{\alpha}_i^u = \frac{\alpha_i}{\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu}, \quad (5.194)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i) = \alpha_i(T_i - u_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.195)$$

Условия стационарности функции Лагранжа переписутся в виде

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow u_i^2(1 - \lambda_i) = \Lambda T_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.196)$$

где $\lambda_i = 0$ для $i > m$.

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} = 0 \Rightarrow \alpha_i \left(1 - \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i\right) + \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_i) \alpha_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (5.197)$$

Приведенные температуры рабочего тела при контакте с резервуарами получим после подстановки в (5.188) ньютоновского закона теплопередачи

$$\frac{u_i^2}{T_i} = \Lambda, \quad i = \overline{m+1, n}. \quad (5.198)$$

Таким образом, оптимальные температуры контакта с резервуарами пропорциональны квадратному корню из температуры резервуаров, откуда в случае двух резервуаров вытекают результаты [102], [131].

Для подсистем

$$\frac{u_i^2}{T_i} = \frac{\Lambda}{(1 - \lambda_i)}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.199)$$

Система, состоящая из резервуаров и преобразователя. Найдем максимальное значение мощности N_r^* для случая, когда система

состоит только из n резервуаров ($m = 0$) и преобразователя. Из уравнений (5.198) для ньютоновского теплообмена находим оптимальные температуры контакта с резервуарами. Они равны

$$u_i = \sqrt{\Lambda} \sqrt{T_i} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \sqrt{T_j}}{\alpha_\Sigma} \sqrt{T_i}, \quad \alpha_\Sigma = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad (5.200)$$

а мощность

$$N_r^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(T_i - \sqrt{T_i} \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \sqrt{T_j}}{\alpha_\Sigma} \right). \quad (5.201)$$

Пример. Рассмотрим систему, состоящую из четырех резервуаров и тепловой машины. Температуры резервуаров и коэффициенты теплопереноса заданы и равны

$$T_1 = 300\text{К}, \quad T_2 = 700\text{К}, \quad T_3 = 500\text{К}, \quad T_4 = 350\text{К},$$

$$\alpha_1 = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}, \quad \alpha_2 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}, \quad \alpha_3 = 250 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}, \quad \alpha_4 = 300 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}.$$

Найдем оптимальные температуры контакта по формуле (5.200). Получим следующие значения

$$u_1 = 352,78\text{К}, \quad u_2 = 538,88\text{К}, \quad u_3 = 455,43\text{К}, \quad u_4 = 381,04\text{К}.$$

Максимальная мощность, которую можно извлечь из данной системы, равна $N_r^* = 7,38\text{кВт}$, а приведенные температуры контакта одинаковы для всех резервуаров и по условию (5.198) равны $\Lambda = 414,84\text{К}$.

Максимальная мощность преобразователя и оптимальные температуры подсистем. Рассмотрим систему, в которой все температуры подсистем свободны ($r = m$). Очевидно, что при числе резервуаров, большем или равном двум, и различающихся температурах резервуаров максимальная мощность в этой задаче положительна, и не может быть меньше N_r^* , подсчитанной по формуле (5.201), так как температуры подсистем подлежат оптимальному выбору.

Разобьем задачу на три подзадачи:

1. Максимизировать извлекаемую мощность $N_r^*(\sigma_r)$ при контакте преобразователя с резервуарами, для заданного значения σ_r — потока энтропии от резервуаров к рабочему телу

$$N_r(\sigma_r) = \sum_{i=m+1}^n q_i \rightarrow \max_{q_i}, \quad (5.202)$$

при условии

$$\sum_{i=m+1}^n \frac{q_i}{u_i} = \sigma_r. \quad (5.203)$$

2. Максимизировать извлекаемую мощность $N_s^*(\sigma_s)$ при контакте преобразователя с подсистемами конечной емкости, для заданного значения σ_s потока энтропии от подсистем к рабочему телу

$$N_s(\sigma_s) = \sum_{i=1}^m q_i \rightarrow \max_{q_i}, \quad (5.204)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^m \frac{q_i}{u_i} = \sigma_s, \quad (5.205)$$

и балансовых соотношениях (5.195).

3. Найти максимальную суммарную мощность при условии баланса по энтропии для рабочего тела преобразователя

$$N(q_i) = N_s^*(\sigma_s) + N_r^*(\sigma_r) \rightarrow \max / \sigma_r + \sigma_s = 0, \quad (5.206)$$

Первая из этих задач рассмотрена выше при $\sigma_r = 0$. В нашем случае условия для выбора оптимальных температур контактов с резервуарами (5.188), (5.200) остаются в силе. После подстановки (5.188) в (5.203) найдем величину Λ

$$\Lambda = \frac{\sum_{i=m+1}^n u_\nu \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu}}{\sum_{i=m+1}^n \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu} - \sigma_r}. \quad (5.207)$$

Для ньютоновского теплообмена с учетом (5.198) получим

$$\sqrt{\Lambda} = \frac{\sum_{i=m+1}^n \alpha_i \sqrt{T_i}}{\sigma_r + \alpha_\Sigma^r}, \quad \alpha_\Sigma^r = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i. \quad (5.208)$$

Максимальная мощность, извлекаемая при контакте с резервуарами,

$$N_r^*(\sigma_r) = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \sqrt{T_i} \left(\sqrt{T_i} - \frac{\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \sqrt{T_j}}{\sigma_r + \alpha_\Sigma^r} \right). \quad (5.209)$$

С ростом σ_r эта мощность монотонно возрастает.

Во второй задаче требуется найти не только температуры контактов u_i , но и свободные температуры подсистем T_i для $i = \overline{1, m}$. Выразим u_i

через q_i и T_i , при условии, что потоки теплоты заданы в ньютоновской форме (5.192)

$$u_i = T_i - \frac{q_i}{\alpha_i} \quad (5.210)$$

и перепишем балансовые соотношения (5.195) как систему линейных уравнений относительно температур подсистем $T_i \quad i = \overline{1, m}$

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} T_j - T_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = q_i - \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} T_j, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.211)$$

Или в матричной форме

$$A(\alpha) \cdot T = C(q),$$

где

$$A(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \tilde{\alpha}_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \tilde{\alpha}_2 & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} - \tilde{\alpha}_m \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij},$$

$$C_i(q) = q_i - \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} T_j = q_i - \Theta_i.$$

Обозначим элементы матрицы $A(\alpha)$ через $a_{ij}(\alpha)$, а элементы обратной ей матрицы A^{-1} через $b_{ij}(\alpha)$ и выразим температуры подсистем через потоки q_i и заданные температуры резервуаров

$$T = A^{-1} \cdot C(q), \quad (5.212)$$

$$T_i(q) = b_{i,1}(q_1 - \Theta_1) + b_{i,2}(q_2 - \Theta_2) + \dots + b_{i,m}(q_m - \Theta_m).$$

При этом $\frac{\partial T_i}{\partial q_\nu} = b_{i,\nu}$, $i = 1, \dots, m$, $\nu = 1, \dots, m$.

Теперь можно перейти от задачи (5.204), (5.205), (5.195), относительно u_i , T_i , к оптимизационной задаче, относительно потоков теплоты q_i

$$N = \sum_{i=1}^m q_i \rightarrow \max_{q_i} \quad \text{при условии} \quad \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i q_i}{\alpha_i T_i(q) - q_i} = \sigma_s. \quad (5.213)$$

Выпишем функцию Лагранжа для задачи (5.213)

$$L = \sum_{i=1}^m q_i \left(1 - \frac{\Lambda_s \alpha_i}{\alpha_i T_i(q) - q_i} \right). \quad (5.214)$$

Условие ее стационарности по q_j примет форму

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^2 q_i \Lambda_s b_{i,j}}{(\alpha_i T_i(q) - q_i)^2} + 1 - \frac{\alpha_j^2 T_j(q) \Lambda_s^*}{(\alpha_j T_j(q) - q_j)^2} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.215)$$

Решив систему из $m + 1$ уравнений (5.215), (5.205) относительно q_i , находим оптимальные значения $q_i^*(\sigma_s)$ и $\Lambda(\sigma_s)$, а затем значения $T_i^*(\sigma_s)$, $u_i^*(\sigma_s)$ и $N_s^*(\sigma_s)$. При таком решении практически удобнее задавать не σ_s , а Λ_s^* , затем по формуле (5.205) рассчитывать соответствующее решению значение потока энтропии σ_s .

В третьей задаче требуется найти максимальную суммарную мощность, извлекаемую из резервуаров и подсистем. Выпишем функцию Лагранжа задачи (5.206)

$$L = N_s^*(\sigma_s) + N_r^*(\sigma_r) + \lambda(\sigma_r + \sigma_s). \quad (5.216)$$

Из условия стационарности функции Лагранжа по σ_r , σ_s получаем соотношение

$$\frac{\partial N_s^*}{\partial \sigma_s} = \frac{\partial N_r^*}{\partial \sigma_r}. \quad (5.217)$$

Так как производные $\frac{\partial N_s^*}{\partial \sigma_s}$ и $\frac{\partial N_r^*}{\partial \sigma_r}$ равны $\Lambda_s^*(\sigma_s)$ и $\Lambda_r^*(\sigma_r)$ соответственно (см. [53]), извлекаемая мощность $N(q_i)$ максимальна, когда

$$\Lambda_r^*(\sigma) = \Lambda_s^*(-\sigma), \quad \sigma = \sigma_r = -\sigma_s. \quad (5.218)$$

Пример. Рассмотрим систему, состоящую из двух резервуаров, четырех подсистем и преобразователя. Структура системы представлена на рис. 5.17.

Матрица коэффициентов теплопереноса имеет вид

$$\{\alpha_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 800 & 900 & 700 & 400 & 0 \\ 800 & 0 & 500 & 900 & 0 & 100 \\ 900 & 500 & 0 & 300 & 200 & 0 \\ 700 & 900 & 300 & 0 & 0 & 250 \\ 400 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значения α_{ij} при $i, j = 1, \dots, 4$ соответствуют коэффициентам взаимодействия подсистем между собой, значения при $i > 4$ или $j > 4$ — коэффициентам взаимодействия подсистем с резервуарами.

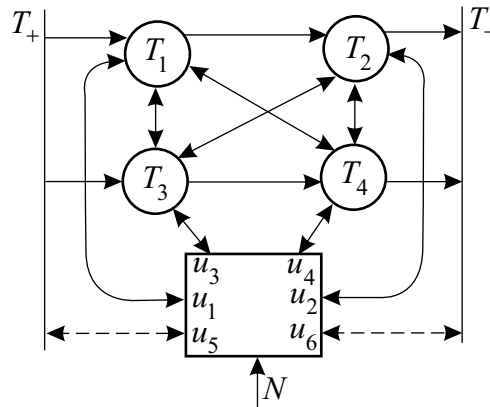


Рис. 5.17. Открытая термодинамическая система

Температуры резервуаров равны $T_+ = 700\text{K}$, $T_- = 300\text{K}$. Коэффициенты теплопереноса при взаимодействии преобразователя с подсистемами и резервуарами

$$\alpha_1 = 1000, \quad \alpha_2 = 1300, \quad \alpha_3 = 900, \quad \alpha_4 = 800, \quad \alpha_5 = 100, \quad \alpha_6 = 50.$$

Значения α_i при $i = 1, \dots, 4$ соответствуют коэффициентам взаимодействия с подсистемами, а при $i > 4$ — коэффициентам взаимодействия с резервуарами. Коэффициенты имеют размерность Вт/К.

Сначала были найдены значения $\Lambda_r(\sigma_r)$ по формуле (5.208) и $N_r^*(\sigma_r)$ по формуле (5.209) для значений σ_r , лежащих в интервале $[0, 0.5]$. Затем решалась система из m уравнений (5.215) для фиксированного значения Λ_s на отрезке $[400\text{ K}, 600\text{ K}]$ и по формуле (5.205) рассчитывалось соответствующее значение σ_s .

После этого находилось оптимальное σ и Λ по формуле (5.218), значения температур подсистем T_i по формуле (5.212) и температур контакта преобразователя u_i по формуле (5.210).

В результате были получены следующие значения оптимальных температур подсистем

$$T_1 = 564,8\text{K}, \quad T_2 = 540,2\text{K}, \quad T_3 = 563,7\text{K}, \quad T_4 = 527\text{K}$$

Оптимальные температуры контакта преобразователя

$$u_1 = 557,8\text{K}, \quad u_2 = 543,6\text{K}, \quad u_3 = 557,7\text{K},$$

$$u_4 = 536,3\text{К}, \quad u_5 = 620,2\text{К}, \quad u_6 = 406\text{К}.$$

Значение извлекаемой мощности

$$N^* = 3.22 \text{ кВт}.$$

Влияние внутренней необратимости преобразователя. До сих пор преобразователь предполагался внутренне обратимым. Однако для ньютоновского теплообмена некоторые полученные выше результаты сохраняются и тогда, когда преобразователь необратим. Эту необратимость можно охарактеризовать производством энтропии $\sigma_p > 0$ в преобразователе. Наличие внутренней необратимости приведет к тому, что в балансовом соотношении по энтропии рабочего тела (5.203) в левой части добавится неотрицательное слагаемое σ_p , а значит условия для приведенной температуры и максимальной мощности (5.208) и (5.209) сохранятся с той разницей, что вместо σ_r в этих равенствах будет фигурировать разность $\sigma_r - \sigma_p$. Мощность N^* с ростом внутренней необратимости преобразователя уменьшается, а приведенная температура контакта с резервуарами, значит и сами температуры контакта u_i растут, однако отношения этих температур остаются неизменными и равными корню квадратному из отношений температур соответствующих резервуаров.

Реализуемые поля температур и их разбиение

Пусть в рассматриваемой системе фиксированы не только температуры резервуаров, но и всех остальных подсистем. Таким образом имеем систему, состоящую из m подсистем конечной емкости и $(n - m)$ резервуаров. Найдем условие, выделяющее генерирующие температурные поля, для которых максимум извлекаемой мощности положителен.

Из энергетических балансов (5.185) выразим мощность, извлекаемую при контакте преобразователя с подсистемами конечной емкости. Она равна

$$N_s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}(T_j, T_i). \quad (5.219)$$

Поток энтропии от подсистем к преобразователю

$$\sigma_s = \sum_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^n q_{ij}(T_j, T_i)}{u_i}. \quad (5.220)$$

В свою очередь, температуры контакта u_i однозначно определены условиями теплового баланса

$$q_i(T_i, u_i) = \sum_{j=1}^n q_{ij}(T_j, T_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.221)$$

Условия неотрицательности температур u_i , $i = 1, \dots, m$ налагают через балансовые соотношения (5.221) ограничения на минимальные температуры подсистем, которые могут быть реализованы в системе с преобразователем. В дальнейшем будем предполагать, что эти ограничения выполнены.

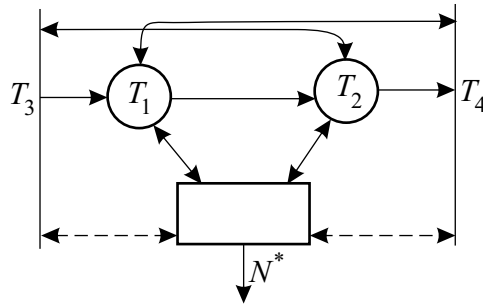


Рис. 5.18. Структура термодинамической системы

Таким образом, при фиксированной конфигурации температурного поля значения N_s и σ_s также фиксированы. Оптимальные температуры контактов с резервуарами и извлекаемая при этом мощность, находятся, как это было сделано в задаче (5.202), при $\sigma_r = -\sigma_s$. Оптимальная приведенная температура контакта Λ с каждым из резервуаров:

$$\Lambda = \frac{\sum_{\nu=m+1}^n \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu} u_\nu}{\sigma_s + \sum_{\nu=m+1}^n \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu}}. \quad (5.222)$$

Так как температуры резервуаров положительны, положительным должно быть и значение Λ . Числитель в (5.222) всегда меньше нуля, как и второе слагаемое знаменателя. Так что температуры контакта с резервуарами и приведенная температура больше нуля при выполнении неравенства

$$\sigma_s < \left| \sum_{\nu=m+1}^n \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu} \right|, \quad (5.223)$$

что дает дополнительное ограничение на реализуемые температуры подсистем.

Подставляя (5.222) в (5.188), получим систему уравнений

$$q_i(T_i, u_i) = u_i \frac{\partial q_i}{\partial u_i} \left[1 - u_i \left(\frac{\sigma_s + \sum_{\nu=m+1}^n \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu}}{\sum_{\nu=m+1}^n \frac{\partial q_\nu}{\partial u_\nu} u_\nu} \right) \right], \quad i = \overline{m+1, n}, \quad (5.224)$$

решая которую, найдем $(n-m)$ оптимальных температур $u_i^*(i = \overline{m+1, n})$ контакта преобразователя с резервуарами.

Максимальная суммарная мощность, которую можно извлечь из системы с заданными коэффициентами теплопереноса и заданными температурами подсистем, равна

$$N^* = N_s + \sum_{i=m+1}^n q_i(T_i, u_i^*). \quad (5.225)$$

Пусть зависимость теплового потока от температур контактирующих тел задана в форме (5.192). Температуры контакта рабочего тела с подсистемами однозначно определяются из уравнения (5.185) как

$$u_i = T_i - \frac{\sum_{j=1}^n q_{ij}}{\alpha_i} = T_i - \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i)}{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.226)$$

При этом мощность, извлекаемая при контакте с подсистемами, равна

$$N_s = \sum_{i=1}^m q_i(T_i, u_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i). \quad (5.227)$$

В этом выражении опущены тепловые потоки между подсистемами, так как каждый из них входит в двойную сумму дважды с разными знаками.

Производство энтропии при контакте рабочего тела с подсистемами

$$\sigma_s(\alpha, T) = \sum_{i=1}^m \frac{q_i(T_i, u_i)}{u_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i)}{\alpha_i T_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i)}.$$

Значения N_s , и σ_s определены по условиям задачи. Оптимальная приведенная температура контакта с резервуарами

$$\Lambda = \frac{\sum_{i=m+1}^n \alpha_i u_i}{\sum_{i=m+1}^n \alpha_i - \sigma_s}. \quad (5.228)$$

Таким образом, мы можем выразить максимальную мощность, извлекаемую из системы, через заданные температуры подсистем и коэффициенты теплопереноса и записать условие, которому отвечает множество генерирующих полей температур

$$N^*(T, \alpha) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} (T_j - T_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(T_i - \sqrt{T_i} \frac{\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \sqrt{T_j}}{\left(\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \right) - \sigma_s(\alpha, T)} \right) \geq 0. \quad (5.229)$$

Если неравенство (5.229) не выполнено, то для поддержания заданного распределения температур нужно затратить мощность не менее, чем $-N^*(T, \alpha)$.

Пример. Рассмотрим пример термодинамической системы, состоящей из 2-х подсистем с температурами T_1, T_2 , резервуаров с температурами $T_3 = 700, T_4 = 300$ и преобразователя. Преобразователь контактирует с подсистемами и резервуарами, коэффициенты теплопереноса заданы и равны

$$\alpha_1 = 100, \quad \alpha_2 = 200, \quad \alpha_3 = 50, \quad \alpha_4 = 20 \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 50,$$

$$\alpha_{13} = 300, \quad \alpha_{14} = 100, \quad \alpha_{23} = 400, \quad \alpha_{24} = 400.$$

Зависимость максимальной мощности от температур подсистем $N^*(T_1, T_2)$ для нашей системы определена выражением (5.229), а граница, разделяющая два подмножества дискретных температурных полей, удовлетворяет уравнению $N^*(T_1, T_2) = 0$.

На рис. 5.19 построена область реализуемых температур подсистем. Внутри этой области горизонтальной штриховкой отмечено подмножество генерирующих полей температур.

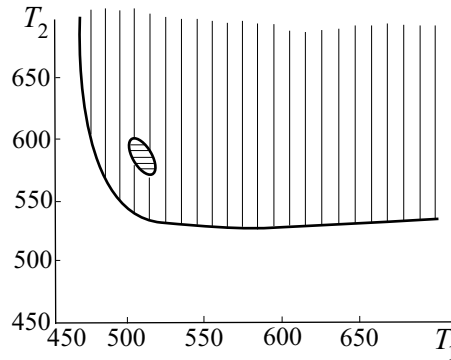


Рис. 5.19. Реализуемые температуры подсистем (вертикальная штриховка) и подмножество генерирующих температурных полей (горизонтальная штриховка)

Задача оптимального термостатирования

Задача термостатирования представляет собой частный случай задачи о максимальной мощности, когда система содержит один резервуар. Часть подсистем конечной емкости имеет фиксированные температуры T_i , ($i = \overline{r+1, n-1}$), а у оставшихся подсистем температуры T_i , ($i = \overline{1, r}$) свободны. Переменными в задаче являются температуры контактов преобразователя u_i , ($i = \overline{1, n}$) и свободные температуры подсистем.

Подобная задача возникает, например, при кондиционировании части помещений в здании, в котором температуры остальных помещений подлежат оптимальному выбору. Резервуаром является окружающая среда. Величина $-N^*$ является оценкой снизу для потребной мощности кондиционирования. Одной из постановок этой задачи, когда структура соединения подсистем последовательная, а фиксирована температура только в одной центральной «камере», является задача об активной изоляции криогенных систем [31], [164].

Покажем, что в задаче оптимального термостатирования, если хотя бы одна из фиксированных температур отлична от температуры резервуара, величина N^* отрицательна.

Структура системы, состоящей из резервуара с температурой T_- и подсистем конечной емкости с температурами T_i ($i = \overline{1, m}$) показана на рис. 5.20. Потoki, связывающие резервуар с i -й подсистемой, $q_{ri}(T_-, T_i)$. Система контактирует с преобразователем, потребляющим мощность N

и подающим (отбирающим у подсистем) тепловые потоки $q_i (i = \overline{1, m})$. Мощность преобразователя

$$N = \sum_{i=1}^m q_i, \quad (5.230)$$

и хотя бы для одного i $T_i \neq T_-$.

Составим термодинамические балансы системы, ограниченной пунктиром на рис. 5.20.

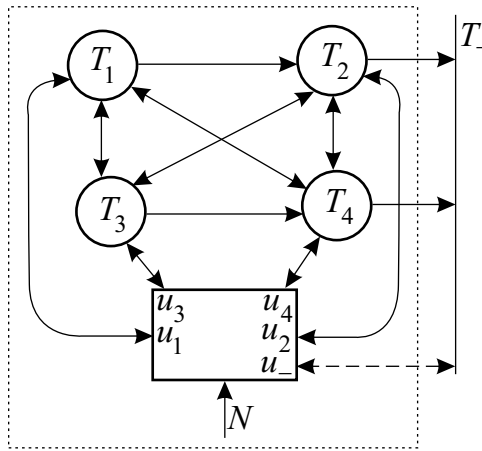


Рис. 5.20. Структура системы термостатирования

Энергетический баланс:

$$\sum_{i=1}^m (q_{ri}(T_-, T_i) + q_i) = 0. \quad (5.231)$$

Энтропийный баланс системы и рабочего тела преобразователя:

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{q_i + q_{ri}}{T_i} - \frac{q_i}{u_i} \right) + \sigma = 0, \quad (5.232)$$

где $\sigma > 0$ — производство энтропии в системе за счёт потоков обмена q_{ij} , возникающих из-за различий температур подсистем.

Из (5.230), (5.231) имеем

$$N = \sum_{i=1}^m q_i = \sum_{i=1}^m q_{ri}(T_-, T_i). \quad (5.233)$$

Из (5.232), обозначая

$$\sum_{i=1}^m q_i(u_i, T_i) \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{u_i} \right) = \sigma_r > 0, \quad (5.234)$$

получим

$$\sum_{i=1}^m \frac{q_{ri}(T_-, T_i)}{T_i} = -(\sigma_r + \sigma) < 0. \quad (5.235)$$

Потоки

$$q_{ri}(T_-, T_i) \begin{cases} > 0 & \text{при } T_i < T_-, \\ < 0 & \text{при } T_i > T_-. \end{cases} \quad (5.236)$$

Поэтому, если в знаменателе каждого слагаемого в (5.235) заменить T_i на T_- , то положительные слагаемые уменьшатся, а отрицательные увеличатся по модулю так, что

$$\sum_{i=1}^m \frac{q_{ri}}{T_-} < \sum_{i=1}^m \frac{q_{ri}}{T_i} < -(\sigma_r + \sigma).$$

Откуда следует, что в неоднородной системе с одним резервуаром мощность преобразователя, затрачиваемая на поддержание стационарного состояния,

$$N_s = -N > T_-(\sigma_r + \sigma) > 0. \quad (5.237)$$

В том и только том случае, когда все $T_i = T_-$, $\sigma_r = \sigma = 0$, затрачиваемая мощность равна нулю.

Чтобы получить условия оптимальности общей задачи термостатирования, выпишем выражение для минимальной затрачиваемой мощности в системе с одним резервуаром. Получим (см. (5.229))

$$N_s = -N^*(T, \alpha) = -\sum_{i=1}^m \alpha_{i-}(T_- - T_i) - \alpha_- T_- \left(1 - \frac{\alpha_-}{\alpha_- - \sigma_s(\alpha, T)} \right), \quad (5.238)$$

где

$$\sigma_s(\alpha, T) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i)}{\alpha_i T_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(T_j - T_i)}. \quad (5.239)$$

Здесь α_{i-} , α_- — коэффициенты теплообмена с окружающей средой подсистем и преобразователя.

Свободные температуры T_i для $i = \overline{1, r}$ нужно выбирать по условию минимума N_s

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial T_\nu} = 0 &\Rightarrow -\alpha_{\nu n} = \frac{\partial \sigma_s}{\partial T_\nu} \frac{\alpha_n^2 T_n}{(\alpha_n - \sigma_s)^2}, \quad \nu = \overline{1, r}, \\ \frac{\partial \sigma_s}{\partial T_\nu} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^m \frac{\alpha_i^2 \alpha_{i\nu} T_i}{(\alpha_i T_i - \bar{q}_i - q_{i-})^2} - \alpha_\nu^2 \frac{T_\nu \sum_{j=1}^n \alpha_{\nu j} + \bar{q}_\nu + q_{\nu-}}{(\alpha_\nu T_\nu \bar{q}_\nu - q_{\nu-})^2}, \end{aligned} \quad (5.240)$$

где $\bar{q}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} (T_j - T_i)$ — суммарный поток обмена i -й подсистемы с другими подсистемами, а $q_{i-} = \alpha_{i-} (T_- - T_i)$ — ее тепловые потери в окружающую среду. Таким образом, r уравнений (5.240), определяют оптимальные температуры свободных подсистем. Зная их, мы можем найти величины потоков q_i и температур контакта с тепловой машиной u_i .

Пример. Рассмотрим пример задачи термостатирования для термодинамической системы (рис. 5.20), состоящей из 4-х подсистем, одного резервуара с температурой $T_- = 300\text{К}$ и преобразователя. Температуры двух подсистем фиксированы

$$T_3 = 320 \text{ К}, \quad T_4 = 325 \text{ К}.$$

Значения термодинамических коэффициентов такие же, как в примере 2. Решив систему из двух уравнений (5.240), получим следующие значения оптимальных свободных температур подсистем

$$T_1 = 316,11 \text{ К}, \quad T_2 = 321,8 \text{ К}.$$

Соответствующие им температуры контакта преобразователя

$$u_1 = 308,26 \text{ К}, \quad u_2 = 323,82 \text{ К}, \quad u_3 = 325,65 \text{ К},$$

$$u_4 = 338,23 \text{ К}, \quad u_5 = 231,57 \text{ К}.$$

Минимальное значение мощности, затрачиваемой тепловым насосом

$$N_s = 3,6 \text{ кВт}.$$

5.9. Задача оптимального потенциалостатирования в сплошной среде

В этой задаче нужно оценить снизу затраты энергии на поддержание заданной конфигурации температурного поля. Остановимся на ней подробнее и получим для нее условия целесообразности использования активной изоляции.

Диссипация в слое и целесообразность активной изоляции. Запишем уравнения термодинамических балансов для неоднородной системы, контактирующей с резервуаром, и обменивающейся с окружением конвективными потоками энергии

$$h_i + P - h_0 = 0, \quad \frac{h_i}{T_0} - \frac{h_0}{T_0} + \sigma = 0. \quad (5.241)$$

Здесь σ — производство энтропии, внутри системы, а h_i и h_0 — суммарные энтальпии потоков, конвективно поступающих и покидающих систему. Предполагаем, что температура на ее границах близка к температуре резервуара и диффузионный обмен с ним отсутствует. Из условий (5.241) следует, что затрачиваемая на поддержание стационарного состояния системы мощность P пропорциональна производству энтропии $P = \sigma T_0$.

Пусть мы имеем слой изоляции, каждое сечение которого обозначим через x , считая, что эта переменная меняется от нуля до единицы. Обозначим интенсивную переменную, определяющую движущую силу потока, проникающего через изоляцию, через U . Это может быть температура, давление, концентрация и др. Поток g в сечении x можно задать в форме

$$g(x) = k_0 r(U) \frac{dU}{dx}. \quad (5.242)$$

Потенциал μ взаимодействия также зависит от U . Например, тепловой потенциал есть обратная величина температуры, химический потенциал пропорционален логарифму концентрации и пр. Суммарное по толщине слоя производство энтропии равно интегралу от произведения потока на движущую силу

$$F(x) = \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mu}{dU} \frac{dU}{dx},$$

$$\sigma = k_0 \int_0^1 r(U) \left(\frac{d\mu}{dU} \right) \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx. \quad (5.243)$$

Начальное и конечное значения интенсивной переменной U_0 и U_k фиксированы.

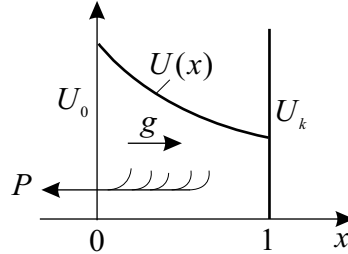


Рис. 5.21. Схема распределения интенсивной переменной в слое

Перейдем от переменной x к переменной U , введя обозначения для производных

$$U_x = \frac{dU}{dx}, \quad \mu_U = \frac{d\mu}{dU}.$$

Так как $dx = \frac{dU}{U_x}$, получим задачу о выборе оптимальной зависимости $U_x(U)$

$$\sigma = k_0 \int_{U_0}^{U_1} r(U) \mu_U(U) U_x dU \rightarrow \min \quad (5.244)$$

при условии

$$\int_0^1 dx = \int_{U_0}^{U_k} \frac{dU}{U_x} = 1. \quad (5.245)$$

Из условий стационарности функции Лагранжа для этой задачи по U_x

$$\frac{\partial}{\partial U_x} \left[r(U) \mu_U(U) U_x + \frac{\lambda}{U_x} \right] = 0$$

следует

$$U_x^*(U) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{r(U) \mu_U(U)}}. \quad (5.246)$$

С учетом (5.245)

$$\sqrt{\lambda} = \int_{U_0}^{U_k} \sqrt{r(U) \mu_U(U)} dU.$$

Подставляя эти результаты в (5.242), получим зависимость потока, минимизирующего диссипацию в слое, с учетом принятых обозначений в виде

$$g^*(U) = k_0 r(U) U_x^*(U) = k_0 \left(\int_{U_0}^{U_k} \sqrt{r(U) \left(\frac{d\mu}{\partial U} \right)} dU \right) \sqrt{\frac{r(U)}{d\mu/dU}}. \quad (5.247)$$

Пусть известно распределение интенсивной переменной U (температуры, концентрации, ...) по толщине слоя x , ее значения на границах U_0 и U_k , а также фактический поток $g(x)$. После исключения x получим $g(U)$.

Условие целесообразности активного потенциалостатирования: Если вычисленный по формуле (5.247) поток, минимизирующий диссипацию $g^*(U)$, отличается от фактически реализуемого потока $g(U)$, то активное потенциалостатирование позволяет уменьшить затраты мощности.

Фактически реализуемый поток для плоской изоляции постоянен в каждом сечении, для цилиндрической изоляции он уменьшается с ростом площади поверхности цилиндра и пр.

Активная термоизоляция. Задача использования активной изоляции возникает в криогенной технике, когда нужно обеспечить очень низкую температуру T_k в фиксированной камере, и при поддержании высокой температуры в плазменных системах. В первом случае теплоту отбирают из промежуточных камер, во втором подают в них, корректируя распределение температур в слое. Температуру окружения обозначим через T_0 .

Для случая тепловой изоляции, U соответствует температуре T . Пусть тепловой поток

$$q = -k_0 \frac{d}{dx}(T^n(x)), \quad \mu(T) = -1/T, \quad r(T) = T^{n-1}, \quad \mu_T = T^{-2}.$$

Распределение температур по толщине слоя, соответствующее минимуму диссипации, вытекает из условия

$$T_x^*(T) = \sqrt{\lambda} T^{\frac{3-n}{2}} = \frac{n-1}{2} \frac{T^{\frac{3-n}{2}}}{T_0^{\frac{n-1}{2}} - T_k^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (5.248)$$

Для определения $T^*(x)$ имеем уравнение

$$\frac{dT^*}{dx} = T_x^*(T), \quad T(0) = T_0.$$

Нетрудно видеть, что для ньютоновского закона теплопередачи ($n = 1$) получим

$$T^*(x) = T_0 e^{-rx}, \quad (5.249)$$

где $r = \ln(T_0/T_k)$, а оценка минимальной диссипации

$$\sigma^* = k_0 \left(\ln \frac{T_0}{T_k} \right)^2. \quad (5.250)$$

Соответствующая минимальной диссипации зависимость теплового потока q от температуры в сечении x с учетом (5.248) равна

$$q^*(T(x)) = k_0 |n| T^{n-1} T_x^*(T) = k_0 |n| \frac{n-1}{2} \frac{T(x)^{\frac{n+1}{2}}}{T_0^{\frac{n-1}{2}} - T_k^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (5.251)$$

При $n = 1$ после раскрытия неопределенности в (5.251) получим, что оптимальный тепловой поток должен быть пропорционален абсолютной температуре в каждом сечении. Добиться его постоянства можно, сделав коэффициент теплопроводности обратно пропорциональным температуре $k_0(T) = \beta/T$. Если T_0 и T_k близки, то отличие оптимальной формы теплового потока в слое от константы мало и эффект от коррекции формы теплового потока незначителен.

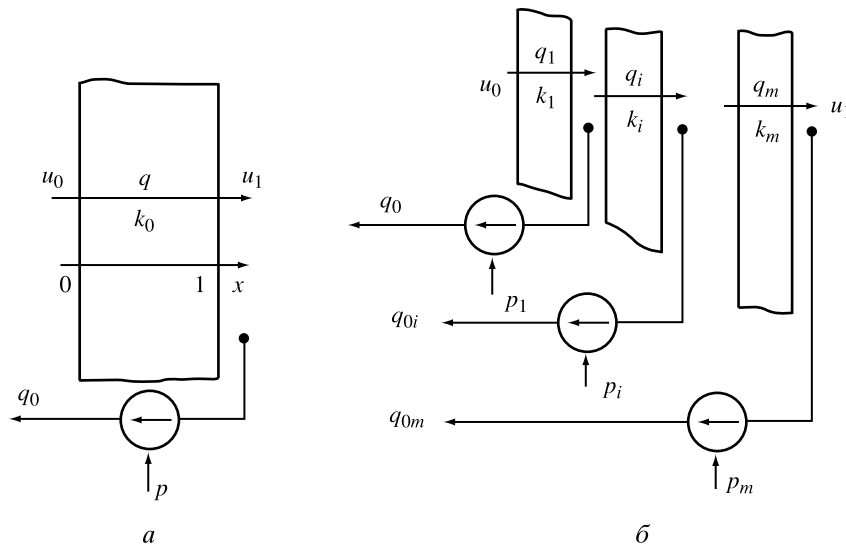


Рис. 5.22. Структуры систем с пассивной (а) и активной (б) изоляцией

В отличие от этого для закона теплопереноса Фурье ($n = -1$) оптимальный тепловой поток q^* не зависит от температуры. Он постоянен

для постоянного коэффициента теплопередачи k_0 . Это означает, что для закона теплопереноса, соответствующего $n = -1$ пассивная изоляция по схеме рис. 5.23, *a* термодинамически оптимальна.

При $n > -1$ производство энтропии может быть уменьшено, если перейти к активной изоляции, расположив промежуточные камеры и выбрав отбор теплоты из этих камер так, чтобы зависимость теплового потока от температуры соответствовала условию (5.251) (рис. 5.22).

Следуя [52], покажем, какого выигрыша можно ожидать от использования активной изоляции при $n = 1$ ($q = k_0(T_0 - T_k)$).

Диссипация в системе с пассивной изоляцией равна

$$\sigma_n = q \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{k_0(T_0 - T_k)^2}{T_0 T_k} = k_0 \left(\frac{T_0}{T_k} + \frac{T_k}{T_0} - 2 \right). \quad (5.252)$$

Отношение минимальной диссипации σ^* к σ_n в функции T_0/T_k показано на рис 5.23, *a*. Выигрыш тем больше, чем больше отношение температур.

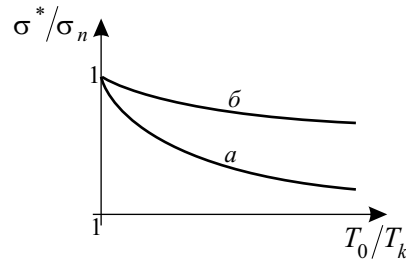


Рис. 5.23. Отношение σ^*/σ_n для схем с пассивной изоляцией (*a*) и активной с одной промежуточной камерой (*b*)

Значительный выигрыш дает введение уже одной промежуточной камеры в точке с некоторой температурой T_1 ($T_0 > T_1 > T_k$). Эту температуру несложно найти из решения следующей экстремальной задачи

$$\sigma = k_1 \frac{(T_0 - T_1)^2}{T_0 T_1} + k_2 \frac{(T_1 - T_k)^2}{T_1 T_k} \rightarrow \min_{T_1, k_1, k_2} \quad (5.253)$$

при условии

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_0}. \quad (5.254)$$

Ее решение очевидно уже в силу симметрии по искомым переменным

$$T_1^* = \sqrt{T_0 T_k}, \quad k_1^* = k_2^* = 2k_0. \quad (5.255)$$

Производство энтропии в системе с одной промежуточной камерой при таком выборе

$$\sigma_1^* = 4k_0 \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_k})^2}{\sqrt{T_0 T_k}}.$$

Отношение σ^*/σ_1^* показано на рис. 5.23,б. Видно, что активная изоляция с одной промежуточной камерой снижает избыток диссипации по сравнению с минимально возможным примерно втрое. При дальнейшем увеличении числа камер, каждый слой изоляции делится в соответствии с формулами (5.255).

Мощности холодильных машин для схемы с одной промежуточной камерой равны (см. выше)

$$p_1 = 2k_0 \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_k})^2 (T_0 - \sqrt{T_0 T_k})}{\sqrt{T_0 T_k}}, \quad p_2 = 2k_0 \frac{(T_0 - T_k)(\sqrt{T_0 T_k} - T_k)}{T_k}.$$

При этом T_1 выбрана в соответствии с выражением (5.255).

В приведенных выше результатах не учитывалась необратимость холодильных циклов. Эта необратимость, как показано ранее, уменьшается с уменьшением мощности, поэтому экономия от введения активной изоляции при учете необратимости только увеличивается. Отметим в заключение, что с ростом степени n в законе теплопереноса выигрыш от использования активной изоляции возрастает.

Глава 6

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАССООБМЕННЫХ СИСТЕМАХ

Задача об извлечении работы из неравновесной термодинамической системы и обратная ей задача о поддержании в системе неравновесного состояния — центральные в термодинамике. Для систем, неравновесных по температуре, первую из упомянутых задач (прямую) решают тепловые машины, а вторую (обратную) — тепловые насосы. Эти задачи рассмотрены в гл. 5. Для систем, неравновесных по составу, вторую задачу решают системы разделения, использующие энергию для поддержания неравновесного состава в открытой или изолированной системе, а задачу извлечения работы решают диффузионные машины. К системам, неравновесным по составу, относятся и химические реакторы, в которых энергия может как тратиться, так и выделяться.

Самым важным видом массообменных систем являются системы разделения, они очень разнообразны по своему конструктивному исполнению: мембранные, абсорбционно- и адсорбционно-десорбционные процессы, ректификация, центрифугирование, выпарка, сушка, вымораживание и пр. Оценку снизу минимальной энергии, потребной для разделения смеси того или иного состава, независимо от выбранного способа разделения дают методы термодинамики обратимых процессов, однако эти оценки очень грубы, поэтому важно приблизить их к реальности за счет учета конечной продолжительности или производительности процессов, влияния коэффициентов тепло- и массопереноса и связанных с их изменением затрат. Кроме того, учет необра-

тимости позволяет ставить задачи о предельной производительности процесса или о наилучшей последовательности разделения многокомпонентных смесей, которые применительно к обратимым процессам не имеют смысла.

Методы термодинамики при конечном времени позволяют разбить потери от необратимости на две категории: неизбежные и избыточные. Первые можно уменьшить, только увеличив коэффициенты переноса или уменьшив производительность, вторые же связаны с несовершенной термодинамической организацией процесса. Именно их следует избегать при проектировании установки.

Оценки затрат энергии на процессы разделения с учетом неизбежных необратимых потерь не только количественно отличаются от обратимых, но имеют и качественное отличие. Так, из практики известно, что разделение бинарных смесей, в которых концентрация одного из двух компонентов близка к нулю (иголка в стоге сена), требует значительных затрат энергии. Оценка же затрат энергии в обратимом процессе стремится для таких смесей к нулю. Оценки минимальных затрат энергии при заданной производительности процесса, как показано далее, стремятся для таких смесей к некоторому значению, зависящему от производительности и от коэффициентов массопереноса.

Если в систему разделения поступает поток смеси, а из нее выходят потоки, различающиеся своими значениями температур, химических потенциалов и пр., то можно говорить не о работе, а о мощности, затрачиваемой на разделение. Ниже показано, что в системах, использующих механическую или электрическую энергию, с ростом затрачиваемой мощности производительность системы монотонно возрастает, а в системах, использующих теплоту, с ростом потока теплоты производительность достигает некоторого максимума, а затем уменьшается из-за роста необратимых потерь.

6.1. Термодинамические балансы процессов разделения

Рассмотрим систему разделения потока смеси g_0 с составом x_0 , температурой T_0 и давлением P_0 на два потока с параметрами g_i, x_i, T_i, P_i ($i = 1, 2$), показанную на рис. 6.1. К установке подводится поток тепло-

ты q_+ при температуре T_+ , а отводится поток q_- при температуре T_- , а также затрачивается механическая работа с мощностью p .

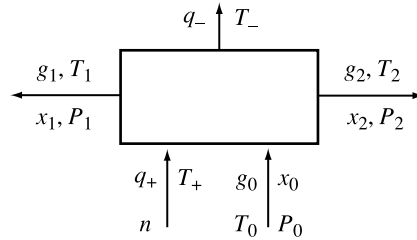


Рис. 6.1. Расчетная структура процесса разделения

В установках центрифугирования, мембранного разделения, в циклах адсорбции-десорбции, работающих за счет изменения давления, затрачивается только работа (механическое разделение), в абсорбционно-десорбционных процессах, основанных на изменении температуры рабочего тела, в процессах ректификации, выпарки, сушки и др. — только теплота (термическое разделение). В некоторых случаях число отводимых потоков может быть больше (равно m). Это не внесет никаких изменений в приведенные далее выражения за исключением того, что индекс i будет изменяться не до двух, а до m . Мы ограничились двумя потоками только для простоты рисунка и промежуточных выкладок.

Термическое разделение. Запишем уравнения термодинамических балансов для системы термического разделения ($p = 0$), считая, что вектора $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{ik})$, $i = 0, 1, 2$, состоят из k компонент, каждая из которых представляет собой молярную долю j -го вещества в i -м потоке. Термодинамические балансы системы примут вид:

— *материальный баланс*

$$g_0 x_{0j} - g_1 x_{1j} - g_2 x_{2j} = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^k x_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, 2; \quad (6.2)$$

— *энергетический баланс*

$$q_+ - q_- + g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0, \quad (6.3)$$

где h_i — молярная энтальпия i -го потока;

— энтропийный баланс

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0. \quad (6.4)$$

Из (6.1), (6.2) следует, что $g_0 = g_1 + g_2$. Исключив g_0 из равенств (6.3), (6.4), можно перейти к приращениям молярных энтальпии Δh и энтропии Δs :

$$q_+ - q_- + g_1 \Delta h_{01} + g_2 \Delta h_{02} = 0, \quad (6.5)$$

$$g_2 \Delta s_{02} + g_1 \Delta s_{01} + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0, \quad (6.6)$$

где $\Delta h_{0i} = h_0 - h_i$, $\Delta s_{0i} = s_0 - s_i$ ($i = 1, 2$).

Исключим из уравнения (6.5) q_- и подставим полученное выражение в (6.6). Получим

$$\sum_{i=1}^2 g_i \left(\Delta s_{0i} - \frac{\Delta h_{0i}}{T_-} \right) + q_+ \left(\frac{1}{T_+} - \frac{1}{T_-} \right) + \sigma = 0,$$

откуда поток затрачиваемой теплоты при термическом разделении

$$q_+ = \frac{T_+}{T_+ - T_-} \sum_{i=1}^2 g_i (\Delta s_{0i} T_- - \Delta h_{0i}) + \sigma \frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-}. \quad (6.7)$$

Первое из слагаемых в этом выражении зависит только от параметров входных и выходных потоков и представляет собой обратимые затраты теплоты в единицу времени. Его можно представить как результат деления обратимой мощности разделения на КПД обратимой тепловой машины. Второе слагаемое отражает кинетику процесса и связанную с ней диссипацию энергии.

Для смесей, близких к идеальным газам и идеальным растворам, молярные энтальпии и энтропии h_i и s_i , входящие в уравнения (6.3) и (6.4), могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} h_i(T_i, P_i, x_i) &= \sum_{j=1}^k x_{ij} h_j(T_i, P_i), \\ s_i(T_i, P_i, x_i) &= \sum_{j=1}^k x_{ij} \left[s_j^0(T_i, P_i) - R \ln x_{ij} \right], \quad i = 0, 2, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где R — универсальная газовая постоянная. В этом случае обратимые затраты теплоты равны

$$q_+^0 = \frac{1}{\eta_K} \sum_{i=1}^2 g_i \sum_{j=1}^k [x_{0j} s_j^0(T_0, P_0) - x_{ij} s_j^0(T_i, P_i) - R(x_{0j} \ln x_{0j} - x_{ij} \ln x_{ij})] T_- + x_{ij} h_j(T_i, P_i) - x_{0j} h_j(T_0, P_0). \quad (6.9)$$

Здесь использовано обозначение для КПД Карно обратимой тепловой машины

$$\eta_K = \frac{T_+ - T_-}{T_+}.$$

Условие (6.7) можно переписать как

$$q_+ = \frac{1}{\eta_K} (p^0 + \sigma T_-), \quad (6.10)$$

где p^0 — обратимая мощность разделения, равная q_+^0 ; σ — производство энтропии.

Для тех или иных допущений (постоянство теплоемкостей, бинарная смесь и др.) выражения (6.9), (6.10) и уравнение (6.7) могут быть конкретизированы, как это сделано далее для механического разделения и бинарной ректификации. Если в состав системы разделения включены все устройства, изменяющие температуры и давления потоков по отношению к температуре T_- и давлению P окружающей среды, за исключением источников тепла, то в приведенных выше соотношениях для любого i можно принять $T_i = T_-$, $P_i = P$. Тогда

$$p^0 = -RT_- \sum_{i=1}^2 g_i x_{ij} \ln x_{ij},$$

$$q^+ = \frac{1}{\eta_K} [p^0(g, x) + T \sigma(g, x, \alpha)]. \quad (6.11)$$

В последнем равенстве через g, x, α обозначены вектора потоков, составов и коэффициентов тепло- и массопереноса соответственно.

Термическая система разделения представляет собой преобразователь тепловой энергии в работу разделения, во многих отношениях подобный преобразователю тепловой энергии в механическую работу. В отличие от тепловой машины необратимость в этом преобразователе

связана не только с процессами теплообмена, но и с необратимостью массопереноса. В составе производства энтропии можно выделить слагаемые, связанные с теплообменом и с массопереносом, σ_T и σ_M и рассматривать термическое разделение как необратимую тепловую машину с коэффициентами теплообмена α_T , вырабатывающую мощность

$$p_M = p^0(g, x) + T_- \sigma_M(g, x, \alpha_M).$$

Поток теплоты, потребляемой от горячего источника,

$$q^+ = \frac{1}{\eta_K} [p_M + T_- \sigma_T(g, x, \alpha_M)]. \quad (6.12)$$

Механическое разделение. Рассмотрим систему разделения, использующую работу с мощностью p без подвода и отвода тепла ($q_+ = q_- = 0$), при этом входные и выходные потоки имеют одинаковые температуры T и давления. Умножим уравнение (6.6) на T и вычтем полученное выражение из уравнения энергетического баланса (6.5), в котором вместо разности $q_+ - q_-$ фигурирует подводимая мощность p . Получим

$$p = T\sigma + g_0 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i (T \Delta s_{0i} - \Delta h_{0i}), \quad (6.13)$$

где $\varepsilon_i = g_i/g_0$ — доля i -го потока.

С учетом (6.9) и того факта, что при механическом разделении изменения энтальпии Δh_{0i} равны нулю, получим

$$p = g_0 RT \left[\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \sum_{j=1}^k x_{ij} \ln x_{ij} - \sum_{j=1}^k x_{0j} \ln x_{0j} \right] + T\sigma = p^0 + T\sigma. \quad (6.14)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет обратимую мощность разделения ($\sigma=0$). Эта мощность p^0 равна разности обратимой мощности полного разделения исходного потока $p_0^0 = -g_0 RT \sum_j x_{0j} \ln x_{0j}$ и суммы обратимых мощностей разделения выходных потоков p_i^0 , равных

$$p_i^0(x_i) = -RT \varepsilon_i \sum_{j=1}^k x_{ij} \ln x_{ij}, \quad i = 1, 2. \quad (6.15)$$

Для каждого из компонентов справедливы уравнения баланса

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_i x_{ij} = x_{0j}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (6.16)$$

6.2. Необратимая работа разделения

Проследим, как влияет на минимальную работу разделения смеси необратимость, связанная с заданной производительностью процесса и ограниченными коэффициентами массопереноса.

Система, состоящая из резервуара и подсистем конечной емкости. Рассмотрим систему, состоящую из резервуара с температурой T_0 , химическим потенциалом μ_0 , концентрацией x_0 , подсистемы конечной емкости с температурой T , химическими потенциалами $\mu(t)$ и рабочего тела с распределенными параметрами. Начальное значение $\mu(0) = \mu_0$. Конечные значения химического потенциала $\mu(\tau)$ и количества молей $N(\tau)$ заданы. Оценим минимальную работу, требующуюся для перевода системы из однородного начального состояния в заданное конечное в изотермическом процессе разделения. В том случае, когда смесь бинарная, ее состав определяется химическим потенциалом, зависящим от молярной доли x одного (ключевого) компонента $\mu_1 = \mu_1(x)$, химический потенциал второго $\mu_2 = \mu_2(1 - x)$.

Первоначально будем считать продолжительность процесса неограниченной. В этом случае минимальной затраченной работе A_r соответствует обратимый процесс. Величину обратимой работы разделения A_r^0 смеси на исходные компоненты можно подсчитать через прирост свободной энергии системы. Для химических потенциалов, вида $\mu_i(T, P, x) = \mu_i(T, P) + RT \ln x_i$, получим

$$A_r^0(x_0, x) = -NRT[(x_0 \ln x_0 + (1 - x_0) \ln(1 - x_0))]. \quad (6.17)$$

Зависимость работы разделения от концентрации исходной смеси показана на рис. 6.2.

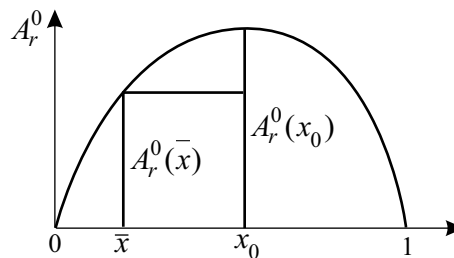


Рис. 6.2. Зависимость обратимой работы разделения от концентрации исходной смеси

Для случая, когда смесь не бинарная, а многокомпонентная, совершенно аналогично получим

$$A_r^0 = -NRT \sum_i (x_{0i} \ln x_{0i} - \bar{x}_i \ln \bar{x}_i). \quad (6.18)$$

Чтобы найти оценку снизу работы разделения при конечном времени, воспользуемся тем, что потоки и химические потенциалы рабочего тела при контакте с резервуаром и с источником конечной емкости должны удовлетворять условиям минимальной диссипации (см. гл. 2).

Если разности химических потенциалов могут быть выражены через потоки $\Delta\mu_i = \varphi(g_i)$ ($i \in \{1, 2\}$), то дополнительные затраты энергии, связанные с необратимостью, имеют вид

$$\Delta A = \int_0^\tau \sum_i g_i \varphi_i(g_i) dt \rightarrow \min. \quad (6.19)$$

Этот критерий можно минимизировать по $g_1 \geq 0$ и $g_2 \geq 0$ с учетом заданной производительности

$$\int_0^\tau g_i dt = N_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.20)$$

Найденное решение позволяет получить оценку ΔA снизу.

Структура задачи (6.19), (6.20) такова, что она распадается на подзадачи вида

$$\int_0^\tau g_i \varphi_i(g_i) dt \rightarrow \min_{g_i} / \int_0^\tau g_i dt = \hat{N}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.21)$$

где $\hat{N}_1 = N(0)x_1(0)$, $\hat{N}_2 = N(0)(1 - x_1(0))$. Эти задачи являются усредненными задачами нелинейного программирования ($\overline{\text{НП}}$). Их решения $g_i^*(t)$ — кусочно-постоянные функции времени, принимающие не более двух базовых значений. При этом вектор $g^* = (g_1^*, g_2^*, \dots)$ решений исходной задачи (6.19), (6.20), число условий в которой равно m , может принимать не более $(m + 1)$ -го базового значения.

Для того, чтобы оптимальное значение расхода g_i было единственно, достаточно, чтобы функция Лагранжа

$$L_i = g_i \varphi_i(g_i) - \lambda_i g_i$$

была строго выпукла вниз. Если эта функция дважды дифференцируема, то условие постоянства оптимального потока имеет вид

$$\frac{d^2 L_i}{dg_i^2} = 2 \frac{d\varphi_i}{dg_i} + \frac{d^2 \varphi_i}{dg_i^2} g_i > 0. \quad (6.22)$$

Отметим, что первое из слагаемых в левой части этого неравенства для реальных зависимостей потока от разности химических потенциалов положительно.

Рассмотрим решение поставленной задачи для некоторых частных случаев. Пусть процесс недалек от равновесия и подчиняется условиям Онзагера ($g_i = \alpha_i \Delta \mu_i$). Тогда

$$\Delta \mu_i = \frac{g_i}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (6.23)$$

Функция Лагранжа задачи (6.19), (6.20) примет вид

$$L = \sum_{i=1}^m g_i \left(\frac{g_i}{\alpha_i} + \lambda_i \right).$$

Она выпукла вниз по g_i , а следовательно, оптимальные значения расходов соответствуют стационарности L по g_i . Они постоянны и равны

$$g_i^* = N \frac{x_i(0)}{\tau},$$

а минимальная необратимая работа разделения

$$A_{\min} = A^0 + \Delta A_{\min} = A^0 + \frac{N^2}{\tau} \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2(0)}{\alpha_i}, \quad (6.24)$$

где обратимая работа разделения A^0 соответствует выражению (6.18).

В свою очередь, химические потенциалы рабочего тела при контакте с резервуаром и с источником конечной емкости равны

$$\mu_{i0}^p = \mu_{i0}(x_0) - \Delta \mu_{i0}, \quad \mu_{i1}^p = \mu_i(x_i) + \Delta \mu_{i1}. \quad (6.25)$$

Перепишем (6.24) с учетом (6.18), (6.25) и разделим обе части этого выражения на τ , получим

$$p = \sum_i \left[g_i (\mu_i(x_i) - \mu_{i0}(x_0)) + g_i^2 \left(\frac{1}{\alpha_{i0}} + \frac{1}{\alpha_{i1}} \right) \right].$$

С учетом того, что температуры и давления в системе одинаковы, разности химических потенциалов равны

$$\mu_i(x_i) - \mu_{i0}(x_0) = RT \ln \frac{x_i}{x_{i0}}. \quad (6.26)$$

Найдем оптимальный закон изменения вектора концентраций $x(t)$ в молярных долях из условий

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Nx_i) &= \frac{dN}{dt}x_i + N\frac{dx_i}{dt} = g_i = \frac{\bar{x}_i\bar{N}}{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{dN}{dt} &= \sum_i g_i = \frac{\bar{N}}{\tau} \rightarrow N(t) = \frac{\bar{N}t}{\tau}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Так как поток каждого из компонентов пропорционален заданной конечной концентрации, то в любой момент времени состав смеси в подсистеме конечной емкости неизменен и равен конечному составу. Минимальная затрачиваемая мощность постоянна и равна

$$p = \frac{RT\bar{N}}{\tau} \sum_i \bar{x}_i \ln \frac{\bar{x}_i}{x_{0i}} + \frac{\bar{N}^2}{\tau^2} \sum_i \frac{\bar{x}_i^2}{\bar{\alpha}_i}, \quad (6.28)$$

где $\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_{i0}\alpha_{i1}}{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}}$ — эквивалентный коэффициент массопереноса для i -го компонента.

Минимальная работа разделения в необратимом процессе заданной продолжительности τ

$$A_r^{\min} = p\tau = RT\bar{N} \sum_i \bar{x}_i \ln \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_{0i}} + \frac{\bar{N}^2}{\tau} \sum_i \bar{x}_i^2/\alpha_i. \quad (6.29)$$

В том случае, когда подсистем с конечной емкостью несколько и для каждой ν -й из них задан вектор конечных концентраций \bar{x}_ν с составляющими $\bar{x}_{\nu i}$ и количество молей \bar{N}_ν , работа разделения равна сумме $A_{r\nu}$ по ν :

$$A_r^{\min} = RT \sum_\nu \bar{N}_\nu \sum_i \bar{x}_{\nu i} \ln \frac{\bar{x}_{\nu i}}{\bar{x}_{0i}} + \sum_\nu \frac{\bar{N}_\nu^2}{\tau_\nu} \sum_i \frac{\bar{x}_{\nu i}^2}{\alpha_{\nu i}}. \quad (6.30)$$

Разделение системы с конечной емкостью на m подсистем. Рассмотрим систему, показанную на рис. 6.3. Ее начальное состояние характеризуется вектором концентраций x_0 , числом молей смеси N_0 , а состояние в конце процесса числом молей \bar{N}_j ($j = 1, \dots, m$) в каждой из

подсистем и векторами молярных концентраций \bar{x}_j . При этом должны быть выполнены условия материального баланса

$$\sum_{j=1}^m \bar{N}_j = N_0, \quad (6.31)$$

$$\sum_{j=1}^m \bar{N}_j \bar{x}_{ji} = N_0 x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

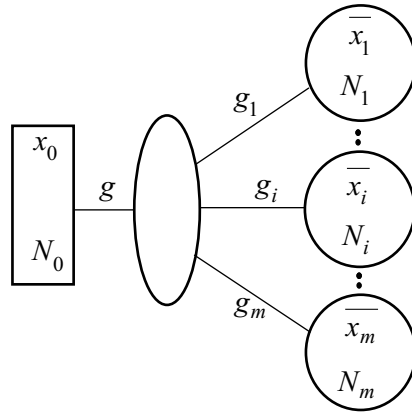


Рис. 6.3. Структура системы разделения подсистемы конечной емкости на m подсистем

Как и выше, первоначально найдем работу разделения в обратимом процессе A_r^0 через изменение свободной энергии системы:

$$\begin{aligned} A_r^0(x_0, \bar{x}) &= RT \left[\sum_{j=1}^m N_j \sum_i \bar{x}_{ji} \ln \bar{x}_{ji} - N_0 \sum_i x_{0i} \ln x_{0i} \right] = \\ &= A_{r0}^0(x_0, N_0) - \sum_{j=1}^m A_{rj}^0(\bar{x}_j, N_j). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Таким образом, обратимая работа разделения равна разности обратимой работы разделения исходной смеси и смеси в каждой из подсистем на чистые компоненты (рис. 6.4.)

Для оценки снизу той же работы в необратимом случае, как и ранее, предположим, что потоки g_j с составляющими g_{ij} пропорциональными разности химических потенциалов подсистемы и рабочего тела с коэффициентом α_{ij} .

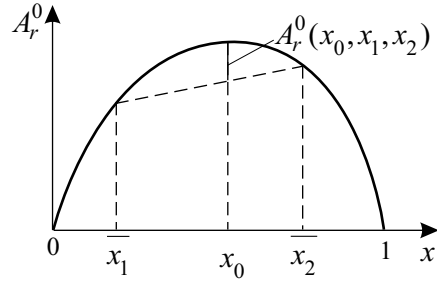


Рис. 6.4. Обратимая работа разделения системы с концентрацией x_0 на две подсистемы

В этом случае по условию минимальной диссипации минимуму работы разделения соответствует постоянство потоков, так что

$$g_{ij} = \frac{\bar{N}_j \bar{x}_{ij}}{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6.33)$$

$$\Delta\mu_{ij} = \frac{g_{ij}}{\alpha_{ij}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (6.34)$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано ранее для системы, состоящей из резервуара и одной подсистемы конечной емкости, можно показать, что для потоков в форме (6.33) векторы молярных концентраций в разделяемой подсистеме и в каждой из подсистем, на которые происходит разделение, неизменны во времени и равны x_0, \bar{x}_j соответственно, а количество молей $N_j(t)$ каждого из компонентов изменяется линейно. При этом мощность p постоянна и равна

$$p = \frac{RT}{\tau} \sum_{j=1}^m \bar{N}_j \sum_i \bar{x}_{ij} \ln \frac{\bar{x}_{ij}}{x_{i0}} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{j=1}^m N_j^2 \sum_i \bar{x}_{ij}^2 / \bar{\alpha}_{ij}. \quad (6.35)$$

Минимальная работа разделения смеси с концентрацией x_0 на две подсистемы с заданными концентрациями \bar{x}_i за время τ равна

$$A_r = RTN_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_i \bar{x}_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} + \frac{N_0^2}{\tau} \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \sum_i \bar{x}_{ij}^2 / \bar{\alpha}_{ij}, \quad (6.36)$$

где $\gamma_j = \bar{N}_j / N_0$, $\bar{\alpha}_{ij} = \frac{\alpha_{ij} \alpha_{i0}}{\alpha_{i0} + \alpha_{ij}}$.

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с обратимой работой разделения A_r^0 смеси N молей с концентрацией x_0 на подсистемы,

каждая из которых характеризуется количеством молей N_j и вектором концентраций x_j (сравн. с (6.32)). Второе слагаемое учитывает необратимость процесса. С ростом продолжительности процесса τ и коэффициентов массопереноса $\bar{\alpha}_{ij}$ величина A_r монотонно уменьшается, стремясь к A_r^0 .

Даже в тех случаях, когда трудно найти значения $\bar{\alpha}_{ij}$, выражение (6.36) позволяет оценить характер влияния на необратимую работу разделения таких факторов, как конечный состав \bar{x} , коэффициенты массопереноса, продолжительность τ .

Выбор величины отборов. Пусть размерность вектора концентраций $n < m$. Обозначим через

$$\beta_j = \sum_i \frac{\bar{x}_{ij}^2}{\bar{\alpha}_{ij}}, \quad \mu_j = \sum_i \bar{x}_{ij} \ln \frac{\bar{x}_{ij}}{x_{i0}},$$

будем предполагать заданными концентрации \bar{x}_j после разделения, а значит, β_j и μ_j . Найдем, каким условиям должны удовлетворять доли γ_j от общего числа молей, чтобы работа A_r была минимальна. Мы приходим к экстремальной задаче

$$A_r = RTN_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \mu_j + \frac{N_0^2}{\tau} \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \beta_j \rightarrow \min_{\gamma_j} \quad (6.37)$$

при условиях, вытекающих из (6.31)

$$\sum_j \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0, \quad (6.38)$$

$$\sum_j \gamma_j \frac{\bar{x}_{ji}}{x_{0i}} = 1, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6.39)$$

Условие (6.39) для n -й составляющей вектора концентраций всегда выполнено.

Если количество отборов m больше размерности вектора концентраций n , то существует свобода выбора γ .

Решение этой задачи с использованием функции Лагранжа

$$L = A_r(\gamma) + \lambda_0 \sum_j \gamma_j + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \sum_j \gamma_j \frac{\bar{x}_{ji}}{x_{0i}}$$

приводит к уравнениям для выбора оптимальных значений γ_j

$$\gamma_j = \frac{\left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\bar{x}_{ij}}{x_{0i}} - RTN_0 \mu_j \right) \tau}{2N_0^2 \beta_j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6.40)$$

Для расчета множителей Лагранжа $\lambda_i (i = 0, \dots, n-1)$ имеем систему n линейных уравнений, получаемых после подстановки γ_j в условия

$$(6.38) \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_{\nu} \varphi_{i\nu} = \frac{2N^2}{\tau} = RTN_0 \Phi_{\nu}, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (6.41)$$

Здесь

$$\varphi_{i\nu} = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{x}_{ji} \bar{x}_{j\nu}}{x_{0i} x_{0\nu} \beta_j}, \quad \Phi_{\nu} = \sum_{j=1}^m \frac{\mu_j \bar{x}_{j\nu}}{\beta_j x_{0\nu}},$$

причем для $\nu = 0$ в этих выражениях $\bar{x}_{j\nu} = x_{0\nu}$.

Рассмотрим частный случай разделения бинарной смеси на чистые компоненты за время τ . В этом случае $N_1 = x_0 N_0$, $N_2 = (1-x_0) N_0$, где x_0 — молярная доля ключевого компонента, $\bar{x}_{22} = 1$. Получим по формуле (6.37)

$$A_r = -RTN_0(x_0 \ln x_0 + (1-x_0) \ln(1-x_0)) + \frac{N_0^2}{\tau} \left(\frac{x_0^2}{\bar{\alpha}_{11}} + \frac{(1-x_0)^2}{\bar{\alpha}_{22}} \right). \quad (6.42)$$

Выражение (6.42) представляет собой оценку необратимой работы разделения многокомпонентной смеси на m частей с заданными составами, удовлетворяющими условиям материального баланса (6.31). Первое слагаемое в этом выражении представляет собой обратимую работу разделения смеси, характеризующейся вектором концентраций x_0 , на смеси с концентрациями \bar{x}_j . Второе слагаемое связано с необратимостью процесса разделения. Оно учитывает длительность процесса и коэффициенты массообмена.

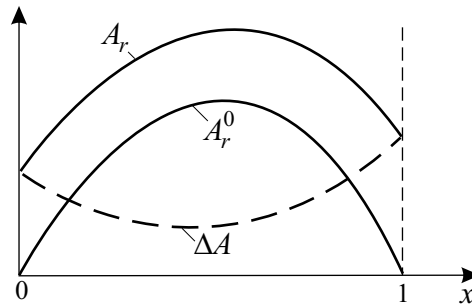


Рис. 6.5. Зависимость минимальной работы разделения от концентрации исходной смеси при ограниченной продолжительности процесса

Наличие второго слагаемого особенно существенно при разделении смесей, у которых концентрация одного из компонентов очень мала

(бедных смесей). Для бинарных смесей обратимая работа разделения стремится к нулю, когда концентрация ключевого компонента близка к нулю или единице. В реальных же процессах работа разделения бедных смесей может быть очень велика. Примером могут служить процессы разделения изотопов, когда реальная работа разделения превосходит обратимую в сотни тысяч раз [78]. Второе слагаемое в (6.41) не стремится к нулю, когда концентрация одного из компонентов очень мала. На рис. 6.5. пунктиром показано, как зависит слагаемое ΔA от концентрации ключевого компонента в исходной смеси.

Оценка (6.42) позволяет ставить и решать задачи, которые нельзя решить с использованием оценки A_r^0 этой работы в классе обратимых процессов. К ним относится задача о выборе оптимальной последовательности разделения многокомпонентной смеси при ее многократном делении на два потока. Здесь важна именно необратимая составляющая затрат, так как обратимая работа не зависит от того, в какой последовательности мы разделяем смесь, она зависит только от исходного и конечного составов. Эта задача рассмотрена в следующем параграфе.

Разделение потоков. Процессы разделения в большинстве случаев непрерывны. На вход технологического аппарата поступает поток исходной смеси g_0 с составом x_0 , на выходе имеем потоки g_j с составами x_j ($j = 1, \dots, m$). Условия материального баланса (6.31) примут форму

$$\sum_i x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^m g_j = g_0, \quad \sum_{j=1}^m g_j x_{ij} = g_0 x_{i0}, \quad (6.43)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Выразим мощность p в непрерывном процессе разделения через потоки, учтя, что

$$g_0 = N_0/\tau, \quad g_j = N_j/\tau.$$

Получим для m выходных потоков

$$p = RTg_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} + g_0^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}} = p^0 + \Delta p, \quad (6.44)$$

где α_{ij} — коэффициент массопереноса при извлечении из исходной смеси i -го компонента в j -й поток; x_j — вектор концентраций j -го потока; $\gamma_j = g_j/g_0$ — доля j -го потока.

Последовательное разделение многокомпонентных смесей

На практике разделение многокомпонентных смесей часто реализуется как многократное разделение смесей на два потока. Так, при полном разделении смесь из трех компонентов разделяется сначала на два потока, второй из которых не содержит одного из компонентов, а затем второй поток вновь делится на два компонента. Как уже упоминалось, обратимая работа (соответствующая мощность p_0) не зависит от того, в каком порядке организуется разделение, так как p_0 определяется только расходами и составами потоков на входе и выходе схемы в целом. Необратимая же мощность Δp в (6.44) зависит от того в каком порядке происходит выделение компонентов и позволяет выбрать этот порядок.

Рассмотрим смесь из трех компонентов с концентрацией $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ и расходом g_0 , который можно принять за единицу. Упорядочим входящие в смесь вещества по физическому свойству, используемому для разделения (проводимость мембраны, температура кипения и пр.). Тогда возможны два варианта разделения смеси: а) сначала отделяют первый компонент, затем разделяют второй и третий; б) первым выделяют третий компонент, затем делят первый и второй.

Коэффициенты массопереноса зависят от степени различия между первым и вторым и вторым и третьим компонентами и от конструкции аппаратов. Обозначим их как α_{12} и α_{23} . Найдем необратимые затраты мощности для двух вариантов, предполагая разделение на каждой стадии полным.

На первой стадии при $g_0 = 1$ и полном разделении в варианте а) второй и третий компонент считаем одним веществом с расходом на выходе $x_{02} + x_{03} = 1 - x_{01}$. Необратимые затраты в соответствии с (6.44)

$$\Delta p_{a1} = \frac{x_{01}^2}{\alpha_{12}} + \frac{(1 - x_{01})^2}{\alpha_{12}} = \frac{2x_{01}^2 + 1 - 2x_{01}}{\alpha_{12}}. \quad (6.45)$$

При полном разделении второго потока на два потока, их расходы равны

$$g_{22} = x_{02}, \quad g_{23} = x_{03},$$

а необратимые затраты мощности

$$\Delta p_{a2} = \frac{1}{\alpha_{23}}(x_{02}^2 + x_{03}^2).$$

Суммарные необратимые затраты мощности

$$\Delta p_a = \frac{2x_{01}^2 - 2x_{01} + 1}{\alpha_{12}} + \frac{x_{02}^2 + x_{03}^2}{\alpha_{23}}.$$

В варианте б) совершенно аналогично получим

$$\Delta p_b = \frac{2x_{03}^2 - 2x_{03} + 1}{\alpha_{23}} + \frac{x_{01}^2 + x_{02}^2}{\alpha_{12}}.$$

Найдем разность этих затрат

$$\Delta p_{ab} = \Delta p_a - \Delta p_b. \quad (6.46)$$

Если $\Delta p_{ab} > 0$, то вариант разделения б) предпочтительнее.

Расчеты показывают, что при близких друг к другу коэффициентах массообмена α_{12} и α_{23} отделять в первую очередь нужно тот компонент, концентрация которого в исходной смеси больше, а при близких начальных концентрациях первого и третьего компонентов отделять в первую очередь тот, для которого больше коэффициент массопереноса. Аналогичные расчеты можно провести и в том, случае, когда коэффициенты массопереноса на первой и второй ступени зависят от состава смеси. В этом случае в выражении для Δp_a будут фигурировать вместо двух четыре коэффициента массопереноса.

Предельная производительность термических систем разделения

Значительная часть процессов разделения использует для создания разности химических потенциалов между рабочим телом и источниками (движущей силы массопереноса) тепловую энергию. При этом рабочее тело нагревается при контакте с одним источником и охлаждается при контакте с другим. В разделе 6.1 показано, что из уравнений термодинамических балансов вытекает, что систему термического разделения можно представить как соединение преобразователя теплоты в работу, вырабатывающего мощность p , потребляющего от горячего резервуара тепловой поток g_+ и отдающего поток g_- холодному резервуару, и систему механического разделения, потребляющую эту мощность. При этом в отличие от тепловой машины необратимость процесса нужно учитывать не только на стадиях теплообмена преобразователя с источниками, но и в процессе массопереноса, когда мощность p тратится на разделение с заданной интенсивностью.

Как показано в гл. 5, возможности преобразования теплоты в работу ограничены и вырабатываемая мощность имеет максимальное значение, равное

$$p_{\max} = \bar{\alpha}(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2, \quad (6.47)$$

где $\bar{\alpha}$ — эквивалентный коэффициент теплопередачи, равный

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{(\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-})^2} \quad (6.48)$$

при постоянном и при поочередном контакте рабочего тела с источниками соответственно.

Зависимость затрачиваемой мощности от производительности необратимых процессов разделения монотонна (см. выражение (6.44)). Откуда следует, что предельной производительности термических процессов разделения соответствует максимально возможная мощность преобразователя теплоты в работу. Дальнейшее увеличение расхода теплоты g_+ только уменьшает производительность процесса.

Для преобразователя теплота — работа и ньютоновского закона теплопередачи имеем (см. гл.5) зависимость минимально-потребляемой теплоты от мощности

$$q^+(p) = \frac{p}{\eta(p)} = \frac{2p}{\left(\frac{p}{\bar{\alpha}T_+} + \eta_k\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{\bar{\alpha}T_+} + \eta_k\right)^2 - \frac{4p}{\bar{\alpha}T_+}}}. \quad (6.49)$$

Здесь $\eta_k = \frac{T_+ - T_-}{T_+}$ — КПД Карно, T_+ и T_- — температуры горячего и холодного источников, $\bar{\alpha}$ — эквивалентный коэффициент теплопередачи.

Оценку минимального расхода теплоты q_+ в зависимости от производительности g_0 для системы термического разделения можно получить, подставив в выражение (6.49) вместо p правую часть равенства (6.44). Полученная зависимость справедлива для $0 \leq p \leq p_{\max}$, а следовательно, для $0 \leq g_0 \leq g_{0\max}$. При этом производительность не должна превышать максимально возможной.

Чтобы найти максимально возможную производительность системы термического разделения, подставим в формулу (6.44) вместо p правую часть выражения (6.47), где $\bar{\alpha}$ зависит от типа преобразователя, и обозначим

$$B = RT \sum_j \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}}, \quad D = \sum_j \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}}. \quad (6.50)$$

Получим

$$p_{\max} = \bar{\alpha} \left(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-} \right)^2 = Bg_{0\max} + Dg_{0\max}^2,$$

откуда для предельной производительности имеем

$$g_{0\max} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\bar{\alpha}D(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-})^2}}{2D} \quad (6.51)$$

Формулы (6.50), (6.51) позволяют оценить предельную производительность системы термического разделения в случае, когда законы теплообмена между рабочим телом и источниками подачи и отбора теплоты ньютоновские, потоки массопереноса пропорциональны разности химических потенциалов, а исходная смесь и продукты разделения имеют одинаковую температуру T .

Пример. Найдем минимальные затраты теплоты для процесса термического разделения газов, например, моноэтаноламиновой очистки, в которой один из компонентов газовой смеси поглощается холодным раствором, а затем при нагревании раствора выделяется. Смесь поступает с температурой $\bar{T} = 350$ К, концентрацией ключевого компонента $x = 0,5$ моль/(моль смеси), расход смеси $g_0 = 5$ моль/с. Температуры подвода теплоты при нагреве и охлаждении раствора равны соответственно $T_h = 400$ К, $T_c = 300$ К, а коэффициенты теплопередачи $\alpha_+ = 2$ ккал/(с·К) и $\alpha_- = 4$ ккал/(с·К). Концентрации ключевого компонента в выходных потоках, один из которых соответствует газу, прошедшему через холодный раствор, а второй — газу, вышедшему после нагрева: $x_1=0,9$; $x_2=0,1$; коэффициенты массопереноса по каждому из компонент для всей поверхности контакта с холодным и горячим раствором $\alpha_1 = 0,07$ моль²/(кгм·с), $\alpha_2 = 0,03$ моль²/(кгм·с), температуры выходных потоков близки к \bar{T} .

Так как раствор циркулирует, поочередно охлаждаясь и нагреваясь, то преобразователь теплоты в работу разделения является преобразователем с сосредоточенными параметрами и его предельная мощность определяется выражением (6.48)

$$p_{\max} = \frac{2 \times 4}{(\sqrt{2} + 2)^2} \left(\sqrt{400} - \sqrt{300} \right)^2 = 4,95 \frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Требуемую мощность найдем по формуле (6.44), рассчитав предварительно отдельные слагаемые этого выражения:

$$p^0 = RTg_0 \sum_{j=1}^m \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} = 549 \frac{\text{кгм}}{\text{с}} = \frac{549}{427} = 1,29 \frac{\text{ккал}}{\text{с}},$$

где 427 кгм/ккал — механический эквивалент теплоты. Минимальные необратимые затраты работы для системы, подчиняющейся уравнениям Онзагера, определяются выражением (6.44):

$$\Delta p = g_0^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}} = p^0 + \Delta p = \frac{244}{427} = 0,57 \frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Таким образом, $p = p^0 + \Delta p = 1,86 \text{ ккал/с} < p_{\text{max}}$. Затраты работы на разделение не превышают максимально возможных при данных коэффициентах массопереноса. Найдем оценку для потока теплоты, подводимого к установке. По формуле (6.49), получим $q_+ = 7,75 \text{ ккал/с}$.

Учет специфики организации процессов позволяет уточнить оценки их предельных возможностей, как это сделано ниже для процесса ректификации.

6.3. Идеальная рабочая линия и область реализуемости бинарной ректификации

Процессы ректификации — наиболее распространенные процессы разделения жидких смесей. В частности, они используются для получения нефтепродуктов из сырой нефти. Так как затрачиваемая на проведение этих процессов энергия очень велика, исследование предельных возможностей таких процессов, выяснение способов их оптимальной организации весьма важно.

В этом разделе методология термодинамики при конечном времени использована для исследования влияния факторов необратимости на эффективность процесса бинарной ректификации. Первоначально мы найдем связь между потоками, поступающими и выходящими из колонны, и производством энтропии. После этого выясним, при каком режиме в колонне заданной производительности и размеров производство энтропии минимально. При этом мы не ограничиваемся колоннами с традиционной схемой подачи теплоты в куб и отвода из дефлегматора,

найдя «идеальную» форму рабочей линии, не реализуемую при такой схеме. Тем самым полученная оценка оказывается справедливой и для колонн с разного рода усовершенствованиями, целью которых является получение рабочей линии, не состоящей из двух линейных участков, как при традиционной схеме подачи и отбора теплоты.

Термодинамические балансы колонны бинарной ректификации

В процессе ректификации (рис. 6.6) поток исходной смеси с расходом g_F и вектором концентраций x_F поступает в колонну. К кубу колонны подводится тепловой поток q_+ , благодаря чему в кубе происходит испарение, и поток пара V поднимается вверх по колонне, контактируя с опускающимся вниз потоком жидкости (флегмы) L . При этом легколетучие компоненты переходят из жидкости в пар, а высококипящие — из пара в жидкость. Оставшаяся часть кубовой жидкости отбирается с потоком g_B .

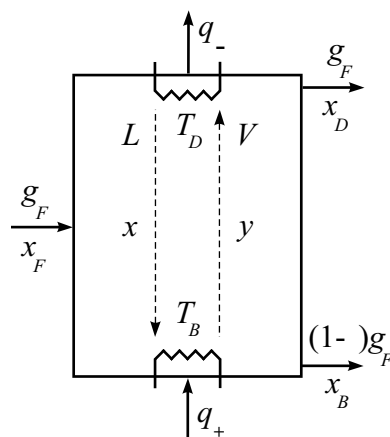


Рис. 6.6. Структура потоков процесса разделения жидкости в колонне ректификации

В дефлегматоре поступает пар, насыщенный легколетучими компонентами. Там он конденсируется, отдавая охлаждающей жидкости теплоту q_- . Часть конденсата $g_D = \varepsilon g_F$ отбирается, а оставшаяся часть $L = V - g_D$ в форме флегмы возвращается в колонну. Величина ε (доля отбора) для бинарной смеси полностью определяется составами входного и выходных потоков. Если же только один из выходных потоков является целевым и задана только его концентрация, то долю отбора,

или, что то же самое, состав нецелевого потока, выбирают по условию минимума затрат энергии на разделение.

Процесс ректификации основан на условиях равновесия между кипящей жидкостью и образующимся паром. Если предположить, что жидкая фаза близка по своим свойствам к идеальным растворам, а паровая — к идеальным газам, то парциальное давление i -го компонента в паре равно произведению молярной доли этого компонента в паре на общее давление (закон Рауля):

$$P_i = Py_i = y_i \sum_{\nu} P_{\nu}. \quad (6.52)$$

Парциальное давление пара i -го компонента над раствором в условиях равновесия равно давлению насыщенного пара над чистым компонентом P_i^0 , умноженному на молярную долю этого компонента в растворе:

$$P_i = P_i^0 x_i, \quad (6.53)$$

где давление P_i^0 зависит от температуры. Для низкокипящих (легколетучих) компонентов при одной и той же температуре оно выше, чем для высококипящих.

Уравнения (6.52) и (6.53) при известных зависимостях $P_i^0(T)$ позволяют найти $y_i^0(x_i)$ — кривую равновесия. Для бинарной смеси давление паров в соответствии с (6.52) равно

$$P = P_1 + P_2 = P_1^0 x + P_2^0 (1 - x),$$

откуда в условиях равновесия концентрации компонентов в паре и в жидкости связаны друг с другом соотношением

$$y^0(x) = \frac{P_1}{P} = \frac{P_1^0 x}{P_2^0 + (P_1^0 - P_2^0)x}.$$

Введя коэффициент относительной летучести

$$\alpha(T) = \frac{P_1^0(T)}{P_2^0(T)},$$

получим кривую равновесия в форме

$$y^0(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}. \quad (6.54)$$

Коэффициент $\alpha > 1$, так как через y обозначена концентрация низкокипящего (легколетучего) компонента в потоке пара. Характер кривой равновесия показан на рис. 6.7.

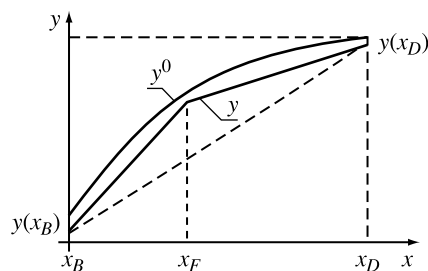


Рис. 6.7. Связь между концентрацией легколетучего компонента в жидкости x , равновесной концентрацией в паре y^0 и рабочей концентрацией y

Сделаем следующие допущения о рассматриваемом процессе:

1. Высота колонны H , составы входного и выходных потоков и зависящие от них температуры в кубе T_B , в дефлегматоре T_D и в точке ввода питания T_F заданы. Температура потока разделяемой смеси равна температуре флегмы в точке ввода питания T_F , так что не происходит смешения потоков с разными температурами.

2. Разделяемые смеси близки к идеальным растворам, и теплотой смешения можно пренебречь, как и потерями теплоты в окружающую среду.

3. Процесс изменения параметров смеси по высоте колонны будем считать непрерывным, что допустимо для пленочных, насадочных колонн, колонн с большим числом тарелок и малым расстоянием между ними.

4. Составы x_F , x_B и x_D входного потока, потоков из куба и дефлегматора фиксированы.

5. Температуры пара и жидкости изменяются по высоте колонны, но в каждом сечении одинаковы, а давление мало меняется по высоте колонны.

6. Массообмен эквимольный, что вытекает из допущения 5 и того, что разделяемая смесь подчиняется правилу Трутона: отношения мольных теплот парообразования к абсолютным температурам одинаковы для смеси и ее компонентов.

Подобные допущения обычно принимают при расчете бинарной ректификации. Допущения о непрерывном изменении по высоте колонны концентраций и температур, а также о постоянстве температуры в каждом сечении снижают необратимые потери от перемешивания и теплообмена, загроуляя полученные ниже оценки, но делая их независимыми

от неоднородности концентраций и температур в каждом сечении.

В стационарном режиме колонны уравнения термодинамических балансов по веществу, энергии и энтропии имеют вид

$$g_F x_F - g_D x_D - g_B x_B = 0, \quad g_F - g_D - g_B = 0, \quad (6.55)$$

$$q_+ - q_- + g_F h_F - g_D h_D - g_B h_B = 0, \quad (6.56)$$

$$g_F s_F - g_D s_D - g_B s_B + \frac{q_+}{T_B} - \frac{q_-}{T_D} + \sigma = 0, \quad (6.57)$$

где x_F, x_D, x_B — молярные доли легколетучего компонента в исходной смеси, потоках из дефлегматора и куба; h_F, h_D, h_B и s_F, s_D, s_B — молярные энтальпии и энтропии в соответствующих потоках; q_+ и q_- — потоки теплоты, подаваемой в куб и отбираемой из дефлегматора; σ — производство энтропии в колонне.

Вводя обозначение ε для доли отбора, имеем

$$g_D = \varepsilon g_F, \quad g_B = (1 - \varepsilon) g_F.$$

С учетом введенного обозначения, исключив q_- из (6.55)–(6.57), получим из этих условий связь затрат теплоты с производством энтропии в форме

$$q_+ = \frac{g_F T_B}{T_B - T_D} \left[(s_F T_D - h_F) - \varepsilon (s_D T_D - h_D) - (1 - \varepsilon) (s_B T_D - h_B) \right] + \sigma \frac{T_B T_D}{T_B - T_D} = q_+^0 + \sigma \frac{T_B T_D}{T_B - T_D}. \quad (6.58)$$

Первое слагаемое q_+^0 представляет собой затраты теплоты при условии, что процесс массообмена в колонне протекает обратимо (коэффициент массопереноса сколь угодно велик)

$$q_+^0 = \frac{g_F T_B}{T_B - T_D} \left[T_D (s_F - \varepsilon s_D - (1 - \varepsilon) s_B) - h_F + \varepsilon h_D + (1 - \varepsilon) h_B \right]. \quad (6.59)$$

Оно зависит только от параметров входных и выходных потоков. Подчеркнем, что молярные энтальпии и энтропии зависят от температур и составов в кубе, дефлегматоре, в точке ввода питания и от давления, которое принято одинаковым. Второе слагаемое в (6.58) соответствует диссипативным потерям от необратимости процесса ректификации.

Важным источником необратимости является процесс теплопередачи при подводе и отводе теплоты. Чтобы его учесть, нужно модифицировать уравнение энтропийного баланса.

Перенос точки ввода теплового потока. При записи термодинамических балансов по веществу, энергии и энтропии (6.55)–(6.57) в первых двух из них фигурируют только величины входных и выходных потоков и их составы, значение интенсивной переменной в точке ввода роли не играет. В балансе по энтропии это не так: поток энтропии, связанный с тепловым потоком, зависит от температуры в точках его ввода и вывода. Однако в ряде случаев эта температура не задана, а сама определяется температурой во внутренней точке системы и потоком теплоты. Например, в колонне ректификации заданный состав кубового продукта определяет температуру в кубе, а тепловой поток подводится в куб через теплообменник, для которого известен коэффициент теплопроводности.

Обозначим фиксированную температуру внутри системы через T_i , величину потока теплоты через q , температуру в точке ввода через T_e . Будем предполагать, что зависимость $q(T_i, T_e)$ известна. Производство энтропии на участке от T_e до T_i равно

$$\sigma(T_i, T_e) = q(T_i, T_e) \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_e} \right).$$

Таким образом, мы можем перенести точку ввода теплового потока в T_i , добавив в энтропийный баланс слагаемое $\sigma(T_i, T_e)$. При этом внешнюю температуру можно выразить через q и T_i из условия $q(T_i, T_e) = q$, так что производство энтропии, добавленное к энтропийному балансу при «изменении» точки ввода, будет функцией от q и T_i .

Так как производство энтропии за счет теплопереноса монотонно зависит от теплового потока, то ниже мы первоначально найдем условия для массопереноса в колонне, которые минимизируют потоки теплоты, и уже для этих минимальных потоков оценим снизу производство энтропии при подводе теплоты в куб и выводе ее из дефлегматора.

При допущении о близости растворов к идеальным молярные энтальпия и энтропия примут форму

$$h(T, P, x) = \sum_{j=1}^2 x_j h_j(T, P), \quad (6.60)$$

$$s(T, P, x) = \sum_{j=1}^2 x_j (S_j^0(T, P) - R \ln x_j), \quad (6.61)$$

для определенности $j = 1$ соответствует легколетучему, а $j = 2$ — высококипящему компонентам. Приросты этих величин с изменением тем-

пературы определяются через теплоемкости веществ C_{pj} как

$$\Delta h_j = h_j(T_2, P) - h_j(T_1, P) = \int_{T_1}^{T_2} C_{pj}(T) dT, \quad (6.62)$$

$$\Delta s_j^0 = s_j^0(T_2, P) - s_j^0(T_1, P) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_{pj}(T)}{T} dT. \quad (6.63)$$

В дальнейшем, для простоты будем использовать эффективные теплоемкости, предполагая их не зависящими от T . При этом C_{pj}^+ и C_{pj}^- — эффективные теплоемкости в интервалах температур (T_F, T_B) и (T_D, T_F) для укрепляющей и исчерпывающей секций колонны. В этом случае Δh_j пропорциональна разности температур, а Δs_j^0 — логарифму их отношения.

С учетом (6.60), (6.61) и с введением C_p^+ и C_p^- выражение (6.58) для затрат теплоты может быть переписано (выкладки опускаем) в форме

$$q_+ = \frac{p_r T_B}{T_B - T_D}, \quad (6.64)$$

где p_r — мощность, затрачиваемая на разделение, (поток работы разделения), которая складывается из трех составляющих ($p_r = p^0 + \Delta p^0 + p_\sigma$):

— обратимой мощности разделения в изотермическом процессе при $T = T_D$

$$p^0 = g_F R T_D \sum_{j=1}^2 \left[\varepsilon x_{jD} \ln x_{jD} + (1 - \varepsilon) x_{jB} \ln x_{jB} - x_{jF} \ln x_{jF} \right]; \quad (6.65)$$

— слагаемого, учитывающего изменение температуры по высоте колонны,

$$\Delta p^0 = g_F \sum_{j=1}^2 \left[(1 - \varepsilon) x_{jB} C_{pj}^+ \left(T_B - T_F - T_D \ln \frac{T_B}{T_F} \right) - \varepsilon x_{jD} C_{pj}^- \left(T_F - T_D - T_D \ln \frac{T_F}{T_D} \right) \right]; \quad (6.66)$$

— слагаемого, учитывающего необратимость процесса массопереноса,

$$p_\sigma = \sigma (g_F) T_D. \quad (6.67)$$

p^0 и Δp^0 зависят только от свойств, составов и зависящих от них температур потоков на входе и выходе и пропорциональны g_F , а p_σ — от организации процесса в колонне, коэффициентов и интенсивности процессов массообмена. Оно, как правило, пропорционально квадрату потока сырья g_F .

Обратимый КПД бинарной ректификации, понимаемый как отношение производительности колонны g_F к затратам теплоты q_+ , может быть легко найден из соотношений (6.64)–(6.66), в которых p_σ приравнивают к нулю. Он зависит только от параметров внешних потоков и не изменяется с производительностью. Доля отбора ε зависит от составов:

$$\varepsilon = \frac{x_F - x_B}{x_D - x_B}. \quad (6.68)$$

Максимальная мощность разделения и минимальное производство энтропии в колонне ректификации

Рассмотрим связь мощности разделения с нагрузкой колонны и составами внешних потоков. Для двух составляющих p_r , а именно для p^0 и Δp^0 , такая связь определена равенствами (6.65), (6.66). Необратимые затраты мощности p_σ зависят от производства энтропии, чем оно меньше при заданной производительности g_F по сырью, тем меньше потребляемая мощность, а значит, и монотонно с ней связанные на рабочем участке затраты теплоты q_+ . Поэтому найдем такое распределение потока массопереноса по высоте колонны, для которого при заданной производительности и составах потоков производство энтропии σ оказалось бы минимальным.

Так как интенсивность массопереноса в каждом сечении зависит от рабочей и равновесной концентрации, то в качестве искомой будем определять распределение концентраций по высоте колонны, которое в свою очередь зависит от формы рабочей линии $y(x)$.

Будем использовать для концентрации легколетучего в жидкостном и паровом потоках традиционные обозначения x и y (молярные доли), тогда концентрации высококипящего компонента равны $(1-x)$ и $(1-y)$ соответственно. Движущая сила массопереноса определяется разницей рабочей концентрации y и равновесной $y^0(x)$. Последняя имеет вид

$$y^0(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}, \quad (6.69)$$

где $\alpha > 1$ — коэффициент относительной летучести.

Даже в том случае, когда теплоту подводят и отводят по высоте колонны, расход пара V_B из куба равен расходу пара V_D , конденсирующегося в дефлегматоре. Связано это с тем, что в силу эквимольности массопереноса в каждой части колонны разность между расходами пара и жидкости постоянна и равна в верхней части g_D , а в нижней g_B . Так что

$$V_B = V_D - g_D + g_F - g_B.$$

Сумма последних трех слагаемых в правой части этого равенства в силу (6.55) равна нулю, и $V_B = V_D = V$. Введя молярную теплоту парообразования в кубе β_B , можно записать расход пара как $V = q_+/\beta_B$.

Концентрации исходной смеси и продуктов разделения заданы, значит определена и средняя интенсивность массопереноса как функция g_F . Действительно, общий поток легколетучего компонента \bar{g} , перешедшего из жидкости в пар по всей высоте колонны, равен разности между потоком легколетучего компонента в паре, испаренном в кубе, Vx_B , и потоком легколетучего в паре, конденсирующемся в дефлегматоре, Vx_D . Так что

$$\bar{g} = \int_0^H g(y, y^0) dl = V(x_D - x_B) = \frac{q_+}{\beta_B}(x_D - x_B). \quad (6.70)$$

Поток массопереноса g в каждом сечении колонны может быть выражен двояко, так как движущую силу можно выразить через различие между рабочей концентрацией x легколетучего компонента в жидкой фазе и его концентрацией $x^0(y)$, равновесной пару состава y , или через различие между концентрацией легколетучего y в паровой фазе и концентрацией $y^0(x)$ равновесной жидкости состава x . И тот и другой способ эквивалентны ввиду однозначной зависимости между рабочими и равновесными концентрациями. Ниже мы пользуемся вторым подходом.

Найдем такую форму рабочей линии $y(x)$, для которой производство энтропии σ минимально при условии (6.70). В каждом сечении производство энтропии равно отношению произведения потока массопереноса на движущую силу к температуре в данном сечении. Движущей силой массопереноса является разность химических потенциалов для рабочей и равновесной концентрации в паровой фазе. Задача примет форму

$$\sigma = \int_0^H \frac{1}{T(l)} \{g_1(y, y^0)[\mu_1(T, y^0) - \mu_1(T, y)] + \\ + g_2(1 - y, 1 - y^0)[\mu_2(T, 1 - y) - \mu_2(T, 1 - y^0)]\} dl, \quad (6.71)$$

где g_i и μ_i — потоки массообмена и химические потенциалы компонентов. Каждый из химических потенциалов равен

$$\mu_i(T, p, x_i) = \mu_{i0}(p, T) + RT \ln x_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.72)$$

где R — универсальная газовая постоянная. Разности химических потенциалов имеют вид

$$\mu_1(T, y^0) - \mu_1(T, y) = RT \ln \frac{y^0}{y},$$

$$\mu_2(T, 1 - y) - \mu_2(T, 1 - y^0) = RT \ln \frac{1 - y}{1 - y^0}$$

и выражение (6.71) перепишем как

$$\sigma = R \int_0^H g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1 - y)}{y(1 - y^0)} dl. \quad (6.73)$$

Здесь учтено условие эквимольности массообмена

$$g(y, y^0) = -g(1 - y, 1 - y^0).$$

Поток разделяемой смеси g_F подается при температуре кипения в то сечение колонны, состав флегмы в котором одинаков с составом этого потока, поэтому производство энтропии за счет смешения в сечении l_F равно нулю. Таким образом, производство энтропии определяется формой равновесной и рабочей линий и не зависит от температуры $T(l)$.

Концентрация x легколетучего компонента в паре монотонно растет по высоте колонны, а $y^0(x)$, в свою очередь, монотонно зависит от x . Поэтому можно провести замену переменной, приняв в качестве независимой переменной y^0 . Приходим к задаче

$$\sigma = R \int_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1 - y)}{y(1 - y^0)} dy^0 \rightarrow \min_{y(y^0)} \quad (6.74)$$

при условии

$$\bar{g} = \int_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y, y^0) dy^0 = \frac{q_+(x_D - x_B)}{\beta_B}. \quad (6.75)$$

Для большинства реальных законов массопереноса задача (6.74), (6.75) выпукла вниз по y , и ее решение соответствует условию стационарности функции Лагранжа

$$L = g(y, y^0) \left(\ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} - \gamma^* \right),$$

где $\gamma^* = const$ — множитель Лагранжа, который входит в оптимальную зависимость $y(y^0, \gamma^*)$ — идеальную рабочую линию, и определяется нагрузкой колонны g_F .

Запишем условие минимальной диссипации массопереноса в колонне бинарной ректификации (условие стационарности по y функции L)

$$\ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} - \frac{g(y, y^0)}{\partial g / \partial y(1-y)y} = \gamma^*. \quad (6.76)$$

Таким образом, в термодинамически совершенной колонне заданной производительности для каждого сечения должно быть постоянно выражение, стоящее в левой части равенства (6.76). По своему физическому смыслу это выражение представляет собой производство энтропии, отнесенное к потоку массопереноса в том или ином сечении колонны (удельное производство энтропии).

В частности, для линейного закона массопереноса

$$g(y, y^0) = k(y^0 - y) \quad (6.77)$$

условие (6.76) примет форму равенства

$$\ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} + \frac{y^0 - y}{y(1-y)} = \gamma^*. \quad (6.78)$$

Для реальной колонны с равновесной и рабочей линиями $y^0(x)$ и $y(x)$ и известной кинетикой массопереноса, построив левую часть выражений (6.76), (6.78), можно судить о близости режима к термодинамически оптимальному по близости полученной зависимости к константе.

Условие (6.76) нетрудно разрешить относительно y в том случае, когда режим недалек от равновесного и эквивалентный поток пропорционален движущей силе, т.е. разности химических потенциалов, соответствующих рабочей и равновесной концентрациям.

$$g(y, y^0) = k \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)}. \quad (6.79)$$

Подстановка этой зависимости в (6.76) приводит к условию

$$\frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} = \text{const} = \exp\left(\frac{\gamma^*}{2}\right) = \gamma, \quad g(y, y^0) = k \ln \gamma, \quad (6.80)$$

откуда

$$y(y^0) = \frac{y^0}{\gamma - (\gamma - 1)y^0}. \quad (6.81)$$

Для зависимости $y^0(x)$ в форме (6.69) получим с точностью до константы γ уравнение идеальной рабочей линии в колонне бинарной ректификации

$$y(x) = \frac{\alpha x}{\gamma + (\alpha - \gamma)x}. \quad (6.82)$$

Так как $y(x) > x$, то для параметра γ справедливо неравенство

$$1 < \gamma < \alpha. \quad (6.83)$$

Подчеркнем, что для идеальной рабочей линии (6.82) поток массопереноса одинаков в каждом сечении колонны в отличие от кусочно-линейной рабочей линии, соответствующей колонне с традиционной схемой подачи и отбора теплоты, где могут возникнуть зоны, в которых массопереноса практически не происходит.

Величину γ , в свою очередь, определяют после подстановки $y(y^0, \gamma)$ в условие (6.75). Она зависит от потока q_+ . Так, для зависимости (6.81) имеем

$$\bar{g} = \int_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y(y^0), y^0) dy^0 = k[y^0(H) - y^0(0)] \ln \gamma. \quad (6.84)$$

На рис. 6.8 показано изменение удельного производства энтропии (6.78) для реальной колонны с кусочно-линейной формой рабочей линии и для колонны с идеальной рабочей линией.

Введем эффективный коэффициент K массопереноса, отнесенный к единице высоты колонны, такой что $k[y^0(H) - y^0(0)] = KH$. Получим для определения γ условие

$$KH \ln \gamma = \frac{q_+(x_D - x_B)}{\beta_B}. \quad (6.85)$$

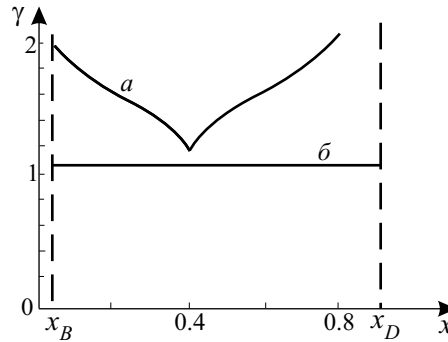


Рис. 6.8. Зависимость удельного производства энтропии от состава легколетучего компонента в жидкой фазе для реальной (а) и для идеальной (б) рабочих линий

Минимальное производство энтропии (6.74) с учетом (6.85)

$$\sigma_{\min}^g = RKH(y^0(H) - y^0(0))(\ln \gamma)^2 = R \frac{q_+^2 (x_D - x_B)^2}{\beta_B^2 KH}. \quad (6.86)$$

Диссипативные потери мощности разделения, соответствующие минимальной диссипации

$$p_\sigma^* = T_D \sigma_{\min}^g. \quad (6.87)$$

Таким образом, для определения связи производительности колонны с минимальными затратами теплоты получаем уравнение

$$p_r(q_+, g_F) = p^0(g_F) + \Delta p^0(g_F) + p_\sigma^*(q_+) = q_+ \frac{T_B - T_D}{T_B}. \quad (6.88)$$

В этом уравнении $p^0(q_+, g_F)$, $\Delta p^0(q_+, g_F)$ и $p_\sigma^*(q_+)$ определены равенствами (6.65), (6.66) и (6.87), в которых ε имеет вид (9.106). Полученная зависимость учитывает необратимость процесса массопереноса, в предположении, что последний организован наилучшим образом с точки зрения минимизации необратимых потерь.

Одним из способов получения нужной формы рабочей линии $y(x)$ является распределение потоков теплоты по высоте колонны. Форма идеальной рабочей линии косвенно указывает на то, к какой организации процесса следует стремиться, подводя и отводя теплоту из промежуточных сечений колонны, а оценка для $q_+^*(g_F)$, вытекающая из (6.88), показывает, каковы предельные возможности использования теплоты и как они зависят от нагрузки, составов и пр.

Зависимость $q_+^*(g_F)$ может быть записана в форме

$$-Aq_+^2 + Bq_+ = Cg_F^*, \quad (6.89)$$

где

$$A = T_D R \frac{(x_D - x_B)^2}{\beta_B^2 K H}, \quad B = \frac{T_B - T_D}{T_B}, \quad (6.90)$$

$$C = \sum_{j=1}^2 \left\{ \varepsilon x_{jD} \left[RT_D \ln x_{jD} - C_{pj}^-(T_F - T_D - T_D \ln \frac{T_F}{T_D}) \right] + \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon) x_{jB} \left[RT_D \ln x_{jB} - C_{pj}^+(T_B - T_F - T_D \ln \frac{T_B}{T_F}) \right] - x_{jF} \ln x_{jF} \right\}. \quad (6.91)$$

Здесь ε определяется равенством (9.106), а температуры T_F , T_D , T_B зависят от составов исходной смеси, в дефлегматоре и в кубе.

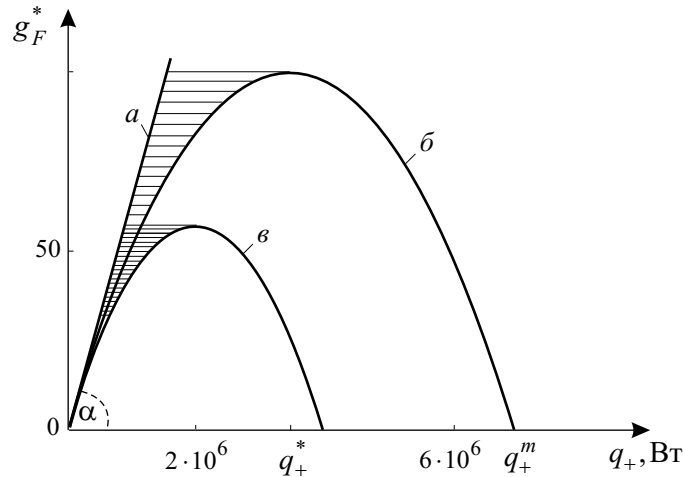


Рис. 6.9. Область реализуемости обратимой колонны (*а*), при учете необратимости массопереноса (*б*), при учете необратимости тепло- и массопереноса (*в*)

Условие (6.89) показывает, что производительность достигает максимума, при (предельно-целесообразном) потоке теплоты, равном

$$q_+^* = \frac{B}{2A}, \quad (6.92)$$

при этом оценка для максимальной производительности колонны бинарной ректификации равна

$$g_F^{\max} = \frac{B^2}{4AC}. \quad (6.93)$$

Зависимость $g_F^* = F(q_+)$ определяет область реализуемости бинарной ректификации, которая находится ниже этой линии. Вид этой области показан на рис. 6.9. Там нанесена прямая, соответствующая зависимости между производительностью и затратами теплоты в колонне со сколь угодно большим коэффициентом массопереноса («обратимой» колонне). Тангенс угла α представляет собой термический КПД такой колонны. Горизонтальной штриховкой выделены добавочные затраты теплоты, связанные с необратимостью массообмена. Учет необратимости и тепло- и массообмена сужает границы области реализуемости (соответствующая кривая показана на рис. 6.9 пунктиром).

Рабочий участок кривой $g_F^*(q_+)$ лежит левее ее максимума. Увеличение подвода теплоты (больше чем q_+^*) приводит к уменьшению производительности колонны вследствие роста необратимых потерь.

Используя оценку для максимальной производительности колонны бинарной ректификации (6.93), можно построить зависимость максимальной производительности колонны $g_F^{\max}(x_F)$ от состава исходной смеси, при потоке теплоты, соответствующем этой максимальной производительности. Характер зависимости $g_F^{\max}(x_F)$ показан на рис. 6.10.

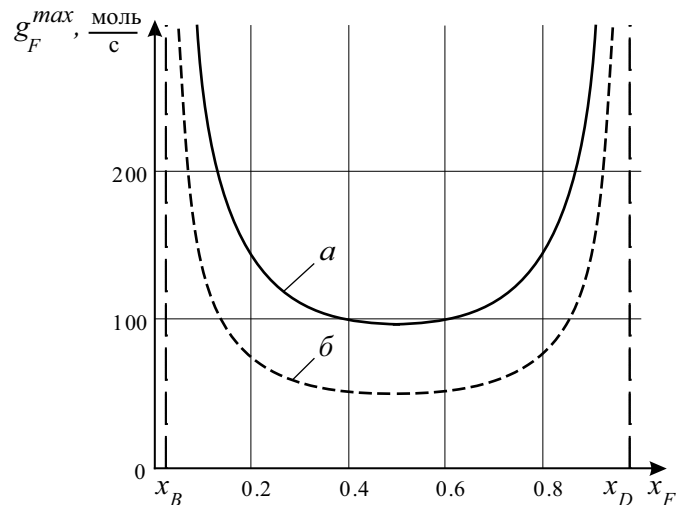


Рис. 6.10 Характер зависимости максимальной производительности колонны от состава исходной смеси при необратимом массопереносе (а), при необратимом тепло и массопереносе (б)

Отметим, что в отличие от максимальной производительности соответствующий ей поток теплоты (6.92) не зависит от состава исходной

смеси, так как x_F не входит в A и B .

Учет необратимости процесса теплопереноса

Остановимся подробнее на учете необратимости процесса теплопереноса. Подвод потока теплоты q_+ и отвод потока q_- сопровождается производством энтропии, обозначим его через σ^q и оценим эту величину снизу при условии, что заданы q_+ и $q_- = q_+ - g_F(h_F - h_D\varepsilon - h_B(1 - \varepsilon))$, а также T_B, T_D, T_F . Подвод теплоты к смеси реализуется в диапазоне изменения ее температур $T_B \geq T_{CM} > T_F$, а отвод теплоты в диапазоне $T_F \geq T_{CM} \geq T_D$.

Найдем зависимость производства энтропии от потока теплоты q , подводимой (или отводимой) к смеси с температурой T_{CM} , при условии, что температура источника T_i , поток q и температура смеси T_{CM} связаны как

$$q^i = \alpha_i(T_i - T_{CM}). \quad (6.94)$$

при подводе теплоты и

$$q^e = \alpha_e(T_{CM} - T_i) \quad (6.95)$$

при отводе теплоты.

При подводе

$$\sigma^{qi} = q^i \left(\frac{1}{T_{CM}} - \frac{1}{T_i} \right). \quad (6.96)$$

Выразив T_i через q^i и T_{CM} , получим

$$\sigma^{qi} = \frac{q_i^2}{\alpha_i T_{CM}^2 + q_i T_{CM}}. \quad (6.97)$$

Аналогично при отводе теплоты, учитывая выражение (6.95) и то, что

$$\sigma^{qe} = q^e \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{CM}} \right), \quad (6.98)$$

получим

$$\sigma^{qe} = \frac{q_e^2}{\alpha_e T_{CM}^2 - q_e T_{CM}}. \quad (6.99)$$

При фиксированном потоке теплоты производство энтропии, как при ее подводе, так и при отводе монотонно уменьшается с ростом температуры T_{CM} . В связи с тем, что нужно дать оценку $\sigma^q = \sigma^{qe} + \sigma^{qi}$

снизу, отнесем потоки подводимой и отводимой теплоты к самым высоким температурам — T_B и T_F соответственно. Получим из (6.97) и (6.99)

$$\sigma_{\min}^{qi} = \frac{q_+^2}{\alpha_+ T_B^2 + q_+ T_B}, \quad (6.100)$$

$$\sigma_{\min}^{qe} = \frac{q_-^2}{\alpha_- T_F^2 - q_- T_F}. \quad (6.101)$$

При найденном минимальном производстве энтропии для заданной производительности g_F и составах потоков (а значит, температурах T_D , T_B , T_F) необратимость теплообмена не может быть меньше, чем

$$\sigma_{\min}^q = \sigma_{\min}^{qi} + \sigma_{\min}^{qe}.$$

Добавив σ_{\min}^q к минимальному производству энтропии за счет массопереноса σ_{\min}^g , можно сузить область реализуемых режимов колонны. Уравнение (6.88) нужно дополнить слагаемым, которое учитывает производство энтропии при подводе и отводе теплоты. Получим

$$-Aq_+^2 - T_D \sigma_{\min}^q(q_+) + Bq_+ = Cg_F^*. \quad (6.102)$$

Разрешив это уравнение относительно g_F^* , построим зависимость $g_F^*(q_+)$, учитывающую необратимость массопереноса и теплопереноса (рис. 6.9).

Зависимость максимальной производительности колонны от состава исходной смеси при потоке теплоты, соответствующем g_F^{\max} , с учетом необратимости массо- и теплопереноса показана на рис. 6.10 пунктиром.

Количественная оценка необратимых факторов для реальной колонны

Рассмотрим ректификационную колонну для разделения смеси метиловый спирт — вода. Для этого воспользуемся следующими исходными данными. Высота колонны $H = 8,6$ м. Молярные составы потоков дистиллята и кубового остатка фиксированы и равны соответственно $x_D = 0,975$ и $x_B = 0,02$. Этим составам соответствуют следующие рабочие температуры в кубе и дефлегматоре: $T_B = 372,43$ К, $T_D = 338,05$ К. Молярная теплота парообразования в кубе $\beta_B = 4,065 \cdot 10^4$ Дж/моль. Коэффициент относительной летучести $\alpha = 3$.

Для исследования влияния необратимых факторов на оценку затрат теплоты будем варьировать состав исходной смеси x_F , учитывая, что концентрация легколетучего компонента (метанола) в исходной смеси меньше, чем в потоке дистиллята и больше, чем в кубовом остатке, т. е. $0,02 < x_F < 0,975$.

По методике, описанной в работе [19], найдем эффективный коэффициент массопередачи K для расхода исходной смеси метанол-вода $g_F = 1500$ кг/ч, с молярной долей легкокипящего компонента $x_F = 0,4$. Флегмовое число $r = 1,48$. Содержание спирта в паре, поступающем в верхнюю часть колонны, $y_F = 0,63$.

Воспользуемся следующим соотношением для K [19]:

$$HK = \frac{V(y_D - y_F)}{\int_{x_F}^{x_D} y^0(x) dx - \frac{V(y_D^2 - y_F^2)}{2(V - g_D)}}, \quad (6.103)$$

где V — расход пара, конденсирующегося в дефлегматоре, определяемый по формуле $V = g_D(r+1)$; y_D — содержание спирта в паре, который конденсируется в дефлегматоре, оно равно x_D ; y_F — содержание спирта в паре, поступающем в верхнюю часть колонны; $g_D = 25,4$ кмоль/ч — расход дистиллята, определяемый из материального баланса колонны; $y^0(x)$ — уравнение равновесной линии (6.69). Из расчетов получим $HK = 117,6$ моль/с.

Оценка для предельной производительности колонны и соответствующие ей затраты теплоты, рассчитанные по выражениям (6.88)–(6.93), показаны на рис. 6.9. Для $x_F = 0,4$ максимальная производительность $g_F^{\max} = 99,4$ моль/с достигается при затратах теплоты равных $q_+^* = 3,5 \cdot 10^6$ Вт.

На том же рисунке нанесена кривая предельной производительности с учетом необратимости теплопереноса для коэффициентов теплопередачи в кубе и дефлегматоре $\alpha_+ = 3,5 \cdot 10^5$ Вт/К, $\alpha_- = 7 \cdot 10^5$ Вт/К. Максимальная производительность $g_F^{\max} = 55$ моль/с достигается при затратах теплоты, равных $q_+^* = 2 \cdot 10^6$ Вт.

Для реальной колонны, при составе исходной смеси $x_F = 0,4$ с расходом $g_F = 18$ моль/с затраты теплоты составляют $q_+ = 1,3 \cdot 10^6$ Вт.

Полученная зависимость $g_F^*(q_+)$ представляет собой верхнюю оценку для производительности колонны бинарной ректификации при фиксированном расходе теплоты. Область, лежащая между этой кривой и

осью абсцисс на рис. 6.9, представляет собой область возможных режимов для колонны бинарной ректификации произвольной конструкции с фиксированным эффективным коэффициентом массопереноса K и высотой H .

Оценка $g_F^*(q_+)$ не может быть реализована при подводе и отводе теплоты только в кубе и дефлегматоре. Тем не менее, она учитывает необратимость процесса, показывает, что из-за необратимых факторов производительность колонны ограничена. Положение точки, соответствующей режиму реальной колонны, относительно графика $g_F^*(q_+)$, показывает, насколько потенциально могут быть уменьшены энергозатраты при данной производительности или увеличена производительность за счет перераспределения потоков в колонне. Условие минимального производства энтропии при заданной средней интенсивности массопереноса показывает, как желательно распределить потоки массопереноса по высоте колонны.

Учет необратимости процесса теплообмена в кубе и дефлегматоре, которая зависит от температуры теплоносителей и коэффициентов теплообмена, учет неоднородности температурного поля в каждом сечении и перемешивания на тарелках снижает границу области реализуемости. Полученные оценки позволяют решать задачу об оптимальной последовательности разделения многокомпонентных смесей по условию минимума затрат энергии в системе, состоящей из нескольких колонн, в каждой из которых происходит разделение на два потока. При стремлении получить в такой системе максимальную производительность важно выбрать последовательность соединения и размеры колонн так, чтобы избежать «узкого места».

6.4. Термический абсорбционно-десорбционный цикл

Процессы разделения, в которых рабочее тело (раствор, пористая структура, ...) поглощает те или иные компоненты смеси при одних условиях, а затем выделяет их при других имеют самое разнообразное конструктивное оформление. Ниже рассмотрен цикл, в которых изменяющимся внешним параметром является температура.

Оценка КПД термодиффузионного цикла. Рассмотрим систему, состоящую из двух источников теплоты, двух источников вещества

бесконечной емкости и рабочего тела (рис. 6.11).

Введем следующие обозначения: T_+ — температура горячего источника теплоты; T_- — температура холодного источника теплоты; μ_+ — химический потенциал источника, принимающего вещество; μ_- — химический потенциал источника, отдающего вещество; \tilde{T}_+ — температура источника вещества с химическим потенциалом μ_+ ; \tilde{T}_- — температура источника вещества с химическим потенциалом μ_- .

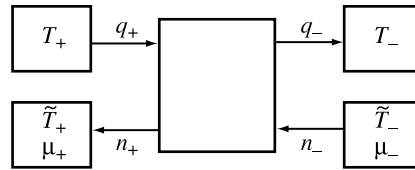


Рис. 6.11. Схема термодиффузионного цикла разделения газов

Считаем, что

$$T_+ > T_-, \quad \tilde{T}_+ > \tilde{T}_-, \quad \mu_+ > \mu_-.$$

Ввиду того, что источники теплоты и вещества обладают бесконечной емкостью, параметры T , μ , характеризующие их состояние, во времени не изменяются. Рабочее тело циклически изменяет свое состояние, поочередно контактируя с каждым из источников, получая при этом от горячего источника некоторое количество теплоты q_+ , от источника вещества с химическим потенциалом μ_- — некоторое количество вещества n_- и отдавая холодному источнику количество теплоты q_- , а источнику вещества с химическим потенциалом μ_+ — количество вещества n_+ .

Запишем термодинамические балансы системы:

для энергии

$$q_+ - q_- = 0 \Rightarrow q_+ = q_- = q; \quad (6.104)$$

для вещества

$$n_+ - n_- = 0 \Rightarrow n_+ = n_- = n; \quad (6.105)$$

для энтропии

$$\left(\frac{1}{\tilde{T}_+} - \frac{1}{T_-} \right) q - \left(\frac{\mu_-}{\tilde{T}_-} - \frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} \right) n + \sigma = 0, \quad (6.106)$$

где σ — производство энтропии в системе.

Примем в качестве КПД термодиффузионного цикла отношение потока вещества, отдаваемого рабочим телом, к потоку теплоты, отобранной у горячего источника:

$$\eta = \frac{n}{q}.$$

Из уравнения баланса энтропии найдем

$$\eta = \frac{n}{q} = \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right) / \left(\frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \frac{\mu_-}{\tilde{T}_+} \right) - \sigma / q \left(\frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \frac{\mu_-}{\tilde{T}_-} \right). \quad (6.107)$$

Обратимая оценка КПД термодиффузионного цикла ($\sigma \rightarrow 0$) примет форму

$$\eta_0 = \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right) / \left(\frac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \frac{\mu_-}{\tilde{T}_-} \right). \quad (6.108)$$

Предельные возможности абсорбционно-десорбционного цикла. Расчетная схема процесса однокомпонентной абсорбции-десорбции приведена на рис. 6.12.

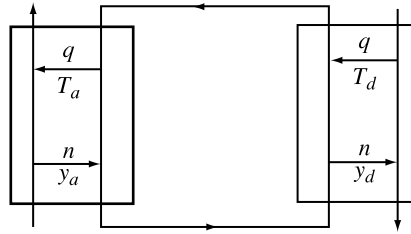


Рис. 6.12. Схема абсорбционно-десорбционного цикла с циркулирующей абсорбента

Раствор абсорбента циркулирует по замкнутому контуру, контактируя с очищаемым газом, насыщаясь при этом абсорбтивом и регенерируя в десорбере, отдавая поглощенный газ в парогазовую смесь (ПГС). Далее ПГС подается в конденсатор, где пары воды конденсируются, и в газовой фазе остается почти чистый распределяемый компонент. Теплота подводится в десорбере с парогазовой смесью и передается раствору в основном путем конденсации части пара. В общем случае в десорбере происходит как выделение из раствора поглощаемого компонента, так и поглощение раствором паров воды. Будем считать, что теплота, вносимая при конденсации, является частью общего теплового потока от ПГС к раствору. Очищаемый газ в абсорбере и ПГС в десорбере будем называть *источниками*.

Состояние раствора при однокомпонентной абсорбции можно охарактеризовать следующими переменными: энтропией S , внутренней энергией E и концентрацией распределяемого компонента x . Скорости изменения этих переменных связаны с потоком теплоты q , потоком вещества

n , температурой T , химическим потенциалом μ раствора следующими соотношениями:

$$\dot{S} = \frac{q}{T} - \frac{\mu n}{T}, \quad (6.109)$$

$$\dot{E} = q, \quad (6.110)$$

$$\dot{x} = \beta n. \quad (6.111)$$

Здесь производная берется по времени пребывания элемента раствора в схеме; β — коэффициент пропорциональности. При записи уравнения (6.111) предполагается, что масса распределяемого компонента значительно меньше массы раствора, и изменением последней можно пренебречь.

Для смесей, близких к идеальным растворам, химический потенциал имеет вид

$$\mu = \mu_0(T, P) + RT \ln x, \quad (6.112)$$

где $\mu_0(T, P)$ — стандартный химический потенциал чистого компонента; P — давление насыщенного пара компонента.

Потоки теплоты q и вещества n , которыми обмениваются очищаемый газ и ПГС с раствором в абсорбере и десорбере, в общем случае изменяются как во времени, так и при переходе раствора из абсорбера в десорбер и обратно. Вблизи равновесия законы, определяющие потоки теплоты и вещества, соответствуют соотношениям Онзагера

$$q = \lambda_n \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) + \alpha_n \left(\frac{\mu_n}{T_n} - \frac{\mu}{T} \right), \quad (6.113)$$

$$n = \alpha_n \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) + k_n \left(\frac{\mu_n}{T_n} - \frac{\mu}{T} \right), \quad (6.114)$$

где T_n, μ_n — температура и химический потенциал распределяемого компонента в источнике; T, μ — температура и химический потенциал распределяемого компонента в растворе; k_n — коэффициент массопередачи; λ_n — коэффициент теплопередачи; α_n — коэффициент термодиффузии. Ниже всюду индексом a будем отмечать переменные, относящиеся к абсорберу, а индексом d — к десорберу. Для абсорбера $T_n = T_a$, $\mu_n = \mu_a$; для десорбера $T_n = T_d$, $\mu_n = \mu_d$; феноменологические коэффициенты k_n, α_n, λ_n для абсорбера и десорбера различны.

Ввиду того, что параметры состояния раствора S, E и x периодически изменяются, для них справедливы условия цикличности

$$S(0) = S(\tau), \quad E(0) = E(\tau), \quad x(0) = x(\tau),$$

где τ — время цикла. С учетом зависимостей (6.109)–(6.111) условия цикличности можно представить в следующем виде:

$$\int_0^\tau \left(\frac{q}{T} - \frac{\mu n}{T} \right) dt = 0, \quad \int_0^\tau q dt = 0, \quad \int_0^\tau n dt = 0.$$

Обозначая чертой операцию усреднения на интервале $(0, \tau)$, эти условия можно записать как

$$\overline{\left(\frac{q}{T} \right)} - \overline{\left(\frac{\mu n}{T} \right)} = 0, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{n} = 0.$$

Абсорбционно-десорбционный цикл (АДЦ) в такой постановке представляет собой частный случай термодиффузионного, при этом $T_+ \sim T_d$, $T_- \sim T_a$, $\mu_+ \sim \mu_a$, $\mu_- \sim \mu_d$. Поэтому из формулы (6.108) следует оценка для КПД АДЦ в классе обратимых процессов

$$\eta_0 = \frac{\overline{|n|}}{\overline{|q|}} = \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_d} \right) / \left(\frac{\mu_d}{T_d} - \frac{\mu_a}{T_a} \right) = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}. \quad (6.115)$$

В необратимых процессах $\eta = \frac{\overline{|n|}}{\overline{|q|}} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} - \frac{\sigma}{q \Delta u_2}$, (6.116)

где введены обозначения для движущих сил

$$\Delta u_1 = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_d}, \quad \Delta u_2 = \frac{\mu_d}{T_d} - \frac{\mu_a}{T_a}.$$

Величину Δu_1 называют *тепловым*, а Δu_2 — *концентрационным напором*.

Из выражения (6.115) следует, что минимальное количество теплоты, необходимое для выделения из газа одного моля вещества при заданных параметрах источников, определяется выражением

$$Q_0 = \frac{T_a \mu_a - T_d \mu_d}{T_d - T_a}, \quad (6.117)$$

где Q_0 — затраты теплоты в обратимом процессе.

Эффективность использования теплоты в АДЦ можно охарактеризовать термическим КПД — отношением работы, потребной для обратимого разделения моля двухкомпонентной смеси, к количеству теплоты, затрачиваемой для такого же разделения в АДЦ. Если учесть, что обратимая работа разделения моля газа, поступающего в абсорбер,

$$A_0 = -T_a R [y_a \ln y_a + (1 - y_a) \ln(1 - y_a)],$$

то термический КПД

$$\eta = \frac{A_0}{Q_0} = R \left(1 - \frac{T_a}{T_d} \right) \frac{y_a \ln y_a + (1 - y_a) \ln(1 - y_a)}{\mu_a/T_a - \mu_d/T_d}, \quad (6.118)$$

где y_a — концентрация отделяемого компонента в очищаемом газе (в абсорбере). Для десорбера концентрацию отделяемого компонента в газе обозначим как y_d .

Предельная производительность АДЦ. Под производительностью АДЦ будем понимать количество компонента, отобранного из раствора за время его пребывания в десорбере. Задача сводится к усредненной задаче условной оптимизации вида

$$\overline{|n|} \rightarrow \max \quad (6.119)$$

при условиях $\overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0, \quad \overline{\left(\frac{q}{T}\right)} - \overline{\left(\frac{n\mu}{T}\right)} = 0.$ (6.120)

Задача о предельной производительности (6.119), (6.120) имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Изобразим в одной координатной системе σ, n, q , скорость изменения энтропии раствора $\sigma(n, q)$ и $|n|$. Для этого выразим σ через потоки n, q и параметры источников T_n и μ_n , которые не изменяются в ходе процесса. С учетом (6.113) и (6.114) выражение (6.109) можно переписать в виде

$$\dot{S} = \frac{q^2}{\tilde{\lambda}_n} - \frac{n^2}{\tilde{k}_n} - nq\tilde{\alpha}_n + qu_{1n} - nu_{2n}, \quad (6.121)$$

где

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n - \frac{\alpha_n^2}{k_n}, \quad \tilde{k}_n = k_n - \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n},$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{2\alpha_n}{k_n\lambda_n - \alpha_n^2}, \quad u_{1n} = \frac{1}{T_n}, \quad u_{2n} = \frac{\mu_n}{T_n}.$$

На рис. 6.13 изображена зависимость $\dot{S} = \sigma(q, n)$, причем $q \leq 0$ и $n \geq 0$ соответствуют процессу абсорбции с параметрами $\tilde{\lambda}_a, \tilde{k}_a, \tilde{\alpha}_a, u_{1a}, u_{2a}$, а $q > 0$ и $n < 0$ соответствуют процессу десорбции с параметрами $\tilde{\lambda}_d, \tilde{k}_d, \tilde{\alpha}_d, u_{1d}, u_{2d}$.

В общем случае усредненная задача нелинейного программирования (6.119), (6.120) с тремя условиями (см. приложение П.3) имеет четыре базовые точки. Нетрудно показать, что изменение параметров источников в сторону увеличения T_d, y_a и в сторону уменьшения T_a, y_d ведет

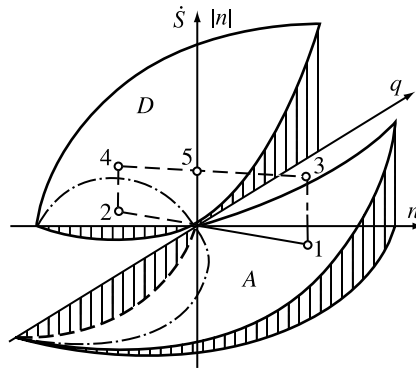


Рис. 6.13. Геометрическая иллюстрация задачи о максимуме производительности абсорбционно-десорбционного цикла

к росту предельной величины отбираемого потока n . Поэтому решение задачи не изменится, если условия в форме равенств

$$T_d = T_d^{\max}, \quad y_a = y_a^{\max}, \quad T_a = T_a^{\min}, \quad y_d = y_d^{\min},$$

заменить неравенствами

$$T_d \leq T_d^{\max}, \quad y_a \leq y_a^{\max}, \quad T_a \geq T_a^{\min}, \quad y_d \geq y_d^{\min}, \quad (6.122)$$

считая параметры источников T_d, y_a, T_a, y_d переменными, ограниченными значениями $T_d^{\max}, y_a^{\max}, T_a^{\min}, y_d^{\min}$. Неравенства (6.122) выделяют в пространстве координат σ, n, q области \tilde{A} и \tilde{D} , ограниченные вертикальными плоскостями (σ, q) , (σ, n) и поверхностями A и D , определяемыми уравнением (6.121). Области \tilde{A} и \tilde{D} выпуклы, а целевая функция $|n|$ линейна на каждой из них, следовательно, число базовых точек сводится к двум. Таким образом, задача состоит в том, чтобы так выбрать точку 1, принадлежащую поверхности A , и точку 2, принадлежащую поверхности D , чтобы соединяющая их линия проходила через начало координат, а линия, соединяющая точки 3 и 4 с координатами n и $-n$ соответственно, как можно выше пересекала ось $|n|$.

Для двух базовых точек задача (6.119), (6.120) с учетом зависимости (6.121) может быть записана в виде

$$\gamma_a |n_a| + \gamma_d |n_d| \rightarrow \max_{n_a, n_d, q_a, q_d, \gamma_a, \gamma_d} \quad (6.123)$$

при условиях

$$\sum_{\nu \in \{a, d\}} \gamma_\nu \left(\frac{q_\nu^2}{\lambda_\nu} + \frac{n_\nu^2}{k_\nu} - n_\nu q_\nu \tilde{\alpha}_\nu + q_\nu u_{1\nu} - n_\nu u_{2\nu} \right) = 0,$$

$$\gamma_a n_a + \gamma_d n_d = 0, \quad \gamma_a q_a + \gamma_d q_d = 0,$$

$$\gamma_a + \gamma_d = 1, \quad n_a \geq 0, \quad n_d \leq 0, \quad q_a \leq 0, \quad q_d \geq 0, \quad \gamma_a \geq 0, \quad \gamma_d \geq 0, \quad (6.124)$$

где весовые коэффициенты γ_a и γ_d соответствуют доле общего времени цикла, в течение которой раствор вступает в контакт с источником в абсорбере и десорбере соответственно. Задача (6.123), (6.124) путем преобразований сводится к поиску экстремума функции двух переменных — n_d и q_d :

$$I = \frac{n_d \left(\frac{q_d^2}{\tilde{\lambda}_d} + \frac{n_d^2}{\tilde{k}_d} - n_d q_d \tilde{\alpha}_d - q_d \Delta u_1 - n_d \Delta u_2 \right)}{\frac{\tilde{\lambda}_d - \tilde{\lambda}_a}{\tilde{\lambda}_d \tilde{\lambda}_a} q_d^2 + \frac{\tilde{k}_d - \tilde{k}_a}{\tilde{k}_d \tilde{k}_a} n_d^2 - n_d q_d (\tilde{\alpha}_d - \tilde{\alpha}_a) q_d \Delta u_1 + n_d \Delta u_2} \rightarrow \max. \quad (6.125)$$

В общем случае задача (6.125) может быть решена численно. Оставшиеся неизвестные исходной задачи (6.123), (6.124) последовательно определяются через оптимальные значения n_d^* и q_d^* по следующим зависимостям:

$$\gamma_d^* = -\frac{I(n_d^*, q_d^*)}{n_d^*}, \quad n_a^* = \frac{I(n_d^*, q_d^*)}{\gamma_a^*}, \quad \gamma_a^* = 1 - \gamma_d^*, \quad q_a^* = -\frac{\gamma_d^* q_d^*}{\gamma_a^*}.$$

Соответствующий предельной производительности коэффициент эффективности АДЦ определится как

$$\eta_n^* = -\frac{n_d^*}{q_d^*}. \quad (6.126)$$

Для случая равенства в абсорбере и десорбере соответствующих коэффициентов в уравнениях тепло- массообмена, т.е. $\lambda_a = \lambda_d = \tilde{\lambda}$, $k_a = k_d = \tilde{k}$, $\alpha_a = \alpha_d = \tilde{\alpha}$, задача (6.125) примет вид

$$I = \frac{\tilde{k} q_d^2 n_d + \tilde{\lambda} n_d^3 - \tilde{\lambda} \tilde{k} \tilde{\alpha} n_d^2 q_d}{\tilde{\lambda} \tilde{k} (q_d \Delta u_1 + n_d \Delta u_2)} - n_d \rightarrow \max$$

и имеет аналитическое решение

$$n_d^* = -\frac{\tilde{k} \tilde{\lambda} \Delta u_1^2}{4(\tilde{\alpha} \tilde{\lambda} \tilde{k} \Delta u_1 / 2 + \tilde{k} \Delta u_2 + \sqrt{B})}, \quad (6.127)$$

$$q_d^* = \frac{\tilde{\lambda}}{4} \Delta u_1 \frac{\tilde{k} \Delta u_2 + \sqrt{B}}{\tilde{\alpha} \tilde{\lambda} \tilde{k} \Delta u_1 / 2 + \tilde{k} \Delta u_2 + \sqrt{B}}, \quad (6.128)$$

где

$$B = \tilde{k}_2 \Delta u_2^2 + \tilde{\lambda} \tilde{k} \Delta u_1^2 + \tilde{\lambda} \tilde{k}^2 \tilde{\alpha} \Delta u_1 \Delta u_2.$$

Используя соотношения (6.127), (6.128), можно определить оставшиеся параметры в оптимальном режиме: доли длительности цикла контакта раствора в абсорбере и десорбере $\gamma_a^* = \gamma_d^* = 0,5$; поток перераспределяемого вещества из источника в абсорбер $n_a^* = -n_d^*$; тепловой поток в абсорбере $q_a^* = -q_d^*$; максимальную производительность $n_{\max} = |n_d^*|/2$.

Коэффициент эффективности, соответствующий предельной производительности, $\eta_{n \max}$ можно выразить через коэффициент эффективности обратимого АДЦ η_0 (см. (6.115)):

$$\eta_{n \max} = \frac{\eta_0}{1 + \sqrt{1 + (\tilde{\lambda}/k)\eta_0^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\eta_0}}. \quad (6.129)$$

Зависимость $\eta_{n \max}$ и предельной производительности от коэффициента теплообмена λ имеют характер, показанный на рис. 6.14. Отношение $\eta_0/\eta_{n \max}$ показывает, во сколько раз меньше теплоты нужно затратить в обратимом процессе по сравнению с циклом, имеющим предельную производительность. Отметим, что подобное отношение $\eta_0/\eta_{n \max}$ для тепловой машины (см. гл. 5) варьируется в зависимости от отношения температур источников от 1 (при $T_-/T_+ \rightarrow 0$) до 0,5 (при $T_-/T_+ \rightarrow 1$) и меньше 0,5 быть не может. Здесь это не так.

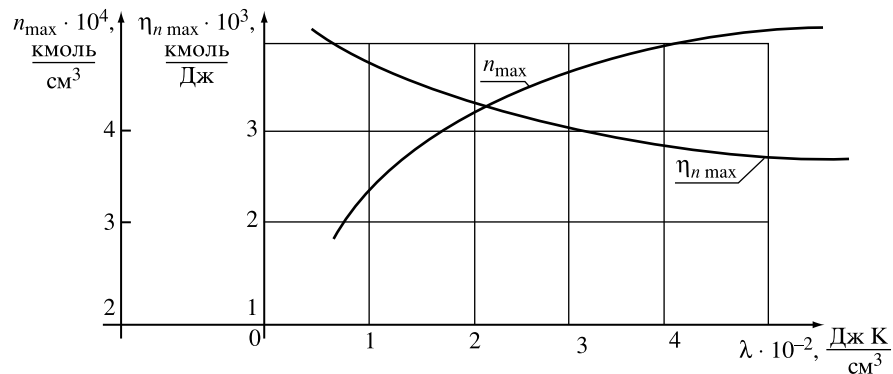


Рис. 6.14. Зависимость максимальной производительности абсорбционно-десорбционного цикла n_{\max} и коэффициента эффективности $\eta_{n \max}$ от коэффициента теплообмена λ

Предельная эффективность АДЦ с заданной производительностью. Критерий оптимальности в этой задаче имеет вид (6.117)

$$\eta = \frac{\overline{n}}{\overline{q}} \rightarrow \max$$

при условии заданной производительности

$$\overline{n} = n_0.$$

Величина n_0 подчиняется неравенству

$$n_0 < n_{\max},$$

где n_{\max} — решение задачи о максимальной производительности.

Запишем задачу о предельном коэффициенте эффективности АДЦ при заданной производительности как усредненную задачу нелинейного программирования:

$$\overline{q} \rightarrow \min_{\mu, T} \quad (6.130)$$

при условиях

$$\left(\frac{q}{T}\right) - \left(\frac{\mu n}{T}\right) = 0, \quad \overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0, \quad \overline{n} = n_0. \quad (6.131)$$

Для ее решения перейдем от переменных μ и T к новым варьируемым переменным q и n . При этом скорость изменения энтропии будет определяться выражением (6.121), и условие цикличности изменения энтропии раствора запишется в виде

$$\left(\frac{q^2}{\tilde{\lambda}_n}\right) + \left(\frac{n^2}{\tilde{k}_n}\right) - \overline{(nq\tilde{\alpha}_n)} + \overline{(u_1q)} - \overline{(u_2n)} = 0.$$

В общем случае задача (6.130), (6.131) может иметь пять базовых точек, однако аналогично рассуждениям, приведенным ранее для задачи о максимальной производительности, можно показать, что достаточно рассмотреть две базовые точки. В этом случае задача преобразуется к виду

$$\gamma_a |q_a| + \gamma_d |q_d| \rightarrow \min_{n_a, n_d, q_a, q_d, \gamma_a, \gamma_d}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \gamma_a \left(\frac{q_a^2}{\tilde{\lambda}_a} + \frac{n_a^2}{\tilde{k}_a} - n_a q_a \tilde{\alpha}_a + u_{1a} q_a - u_{2a} n_a \right) + \\ + \gamma_d \left(\frac{q_d^2}{\tilde{\lambda}_d} + \frac{n_d^2}{\tilde{k}_d} - n_d q_d \tilde{\alpha}_d + u_{1d} q_d - u_{2d} n_d \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_a q_a + \gamma_d q_d = 0, \quad \gamma_a n_a + \gamma_d n_d = 0, \quad \gamma_a |n_a| + \gamma_d |n_d| = n_0, \\ \gamma_a + \gamma_d = 1, \quad \gamma_a \geq 0, \quad \gamma_d \geq 0, \quad n_a \geq 0, \quad n_d \leq 0, \quad q_a \leq 0, \quad q_d \geq 0. \end{aligned} \quad (6.132)$$

Решение поставленной задачи сводится после последовательного исключения переменных из условий (6.132) к поиску минимума функции одной переменной

$$\begin{aligned} F(\gamma_d) = \frac{\hat{\lambda}(\gamma_d)}{2} \left\{ \Lambda(\gamma_d) \Delta u_1 - \frac{\hat{\alpha}(\gamma_d) n_0}{2} - \right. \\ \left. - \left[\left(\Lambda(\gamma_d) \Delta u_1 - \frac{\hat{\alpha}(\gamma_d) n_0}{2} \right) - \frac{n_0}{\hat{\lambda}(\gamma_d)} \left(\frac{n_0}{\hat{k}(\gamma_d)} + 2\Lambda(\gamma_d) \Delta u_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (6.133)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\gamma_d) = \frac{\tilde{\lambda}_a \tilde{\lambda}_d}{\tilde{\lambda}_a (1 - \gamma_d) + \tilde{\lambda}_d \gamma_d}, \quad \hat{k}(\gamma_d) = \frac{\tilde{k}_a \tilde{k}_d}{\tilde{k}_a (1 - \gamma_d) + \tilde{k}_d \gamma_d}, \\ \hat{\alpha}(\gamma_d) = \tilde{\alpha}_a (1 - \gamma_d) + \tilde{\alpha}_d \gamma_d, \quad \Lambda(\gamma_d) = (1 - \gamma_d) \gamma_d, \quad 0 \leq \gamma_d \leq 1. \end{aligned}$$

В общем случае при известных параметрах источников μ_a, μ_d, T_a, T_d , коэффициентах $\lambda_a, \lambda_d, k_a, k_d, \alpha_a, \alpha_d$ и n_a задача решается численно. Через полученное решение $F^* = F(\gamma_d^*)$ и γ_d^* определяются оставшиеся параметры оптимального цикла:

$$\gamma_a^* = 1 - \gamma_d^*, \quad q_a = -\frac{F^*}{1 - \gamma_d^*}, \quad q_d = \frac{F^*}{\gamma_d^*}, \quad n_a = -\frac{n_0}{2(1 - \gamma_d^*)}.$$

В случае равенства феноменологических коэффициентов λ, k, α в абсорбере и десорбере задача имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned} -q_a = q_d = \frac{\tilde{\lambda}}{4} \left[(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha} n_0) - \sqrt{(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha} n_0)^2 - \frac{8n_0}{\tilde{k}\tilde{\lambda}} (2n_0 + \tilde{k}\Delta u_2)} \right], \\ n_a = -n_d = n_0, \quad \gamma_a = \gamma_d = 0,5. \end{aligned}$$

Предельный коэффициент эффективности АДЦ в этом случае

$$\eta_n^* = \frac{4n_0}{\tilde{\lambda}} \left[\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha} n_0 \sqrt{(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha} n_0)^2 - \frac{8n_0}{\tilde{k}\tilde{\lambda}} (2n_0 + \tilde{k}\Delta u_2)} \right]^{-1}. \quad (6.134)$$

6.5. Извлечение работы в массообменных системах. Диффузионные машины

Самопроизвольное выравнивание параметров термодинамических систем, вызывает рост их энтропии и потерю потенциальной работы, которую можно было бы извлечь из этих систем. Такие потери возникают не только при выравнивании температур, но и при выравнивании концентраций газов и жидкостей. В качестве примера можно привести потери свободной энергии, связанные со смешением вод пресных рек с солеными водами мирового океана. Ниже рассмотрены некоторые задачи извлечения работы в системах, неоднородных по составу.

Решение этих задач зависит от того, работает ли устройство со смесью газов или жидкостей, так как это обстоятельство определяет вид химических потенциалов компонентов, а значит, движущие силы процесса. Для газов, близких по своим свойствам к идеальным, химический потенциал i -го компонента [44] равен

$$\mu_i(T, P_i) = \mu_{i0}(T) + RT \ln P_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

где P_i — парциальное давление i -го компонента. Предполагая, что отношение парциального давления к общему равно молярной доле x_i компонента в смеси,

$$P_i = P x_i = P \frac{N_i}{N}, \quad i = 1, \dots, k,$$

перепишем выражение для химического потенциала в форме

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_{i1}(T, P) + RT \ln x_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (6.135)$$

где $\mu_{i1}(T, P) = \mu_{i0}(T) + RT \ln P$.

Для жидкостей химический потенциал принимают в форме (6.135), однако зависимость $\mu_{i1}(T, P)$ имеет иной вид. Это связано с тем, что химический потенциал $\mu_i(T, P, x_i)$, представляет собой [44] молярную энергию Гиббса i -го компонента, а его производная по давлению — молярный объем этого компонента v_i . В отличие от газа молярный объем жидкости практически не зависит от давления и очень мало изменяется с температурой. Так как

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial P} = \frac{\partial \mu_{i1}}{\partial P} = v_i,$$

то

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_{i1}(T) + v_i P + RT \ln x_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.136)$$

Далее принято, что процессы изотермические и температуры всех подсистем одинаковы. Перечисленные выше задачи рассмотрены для газовых смесей, а затем для растворов. В последнем случае для конкретности исследованы возможности «солевых машин», использующих растворы поваренной соли в воде.

Пределные возможности мембранных систем для газообразных смесей

Оценка для максимальной работы в резервуарном процессе. Пусть система состоит из резервуара (источника бесконечной емкости) с температурой T , давлением P^0 и химическим потенциалом μ^0 и рабочего тела с той же температурой, объемом $V > 0$ и химическим потенциалом μ .

Задано начальное состояние рабочего тела (внутренняя энергия, энтропия, состав и объем) $E(0), S(0), N(0), V(0)$. Перечисленные переменные связаны друг с другом уравнением состояния

$$E(0) = E(S(0), N(0), V(0)).$$

Задана продолжительность процесса τ и энтропия $S(\tau)$. Суммарный объем источника и рабочего тела неизменен.

В задаче о максимальной работе требуется достичь минимума внутренней энергии системы в момент τ , что соответствует максимуму извлеченной энергии:

$$A = \Delta E = [E(0) - E(\tau) + E^0(0) - E^0(\tau)] \rightarrow \max. \quad (6.137)$$

Так как прирост энтропии рабочего тела и температура заданы, то прирост его внутренней энергии $\Delta E = T\Delta S$ фиксирован и задача сводится к максимизации

$$\Delta E^0 = E^0(0) - E^0(\tau) = - \int_0^\tau \mu^0 g(\mu^0, \mu) dt \rightarrow \max_{\mu(t)}, \quad (6.138)$$

при условии

$$\int_0^\tau \mu(t) g(\mu^0, \mu) dt = T\Delta S. \quad (6.139)$$

Эта задача представляет собой усредненную задачу нелинейного программирования (см. приложение П.3). Оптимальное решение ее $\mu^*(t)$ или постоянно во времени или кусочно-постоянно, принимая несколько базовых значений, количество которых не превышает количества условий вида (6.139) более, чем на единицу. В нашем случае таких значений не более двух и они определены требованием, наложенным на функцию Лагранжа задачи (6.138), (6.139)

$$L = \left\{ g(\mu^0, \mu)(\mu^0 - \lambda\mu) + \lambda \frac{T\Delta S}{\tau} \right\} \rightarrow \min_{\mu} \max_{\lambda}. \quad (6.140)$$

Если функция Лагранжа L выпукла вниз по μ , т. е. если

$$\frac{d^2g}{d\mu^2} > 2\lambda \frac{dg}{d\mu},$$

то базовое значение единственно.

Найдя из (6.140) одно или два базовых значения μ^* , нужно найти $N^*(t)$ из уравнения

$$\frac{dN}{dt} = g(\mu^0, \mu), \quad N(0) = \text{fix.}$$

Эти функции либо линейны либо кусочно-линейны. В первом случае их наклон равен $g(\mu^0, \mu^*)$, во втором — равен $g(\mu^0, \mu_1^*)$ на отрезке $[0, \gamma\tau]$ и $g(\mu^0, \mu_2^*)$ на оставшемся отрезке. Значение γ находят из условия

$$\gamma\mu_1^*g(\mu^0, \mu_1^*) + (1 - \gamma)\mu_2^*g(\mu^0, \mu_2^*) = T\Delta S/\tau.$$

Можно показать, что по смыслу задачи $\lambda > 0$, а $dg/d\mu < 0$, так что для большинства реальных зависимостей $g(\mu)$ условие выпуклости L выполнено, μ^* постоянно и может быть найдено из условия

$$\mu g(\mu^0, \mu) = \frac{T\Delta S}{\tau}, \quad (6.141)$$

$$N^*(\tau) = N_0 + g(\mu^0, \mu^*)\tau, \quad \Delta E^0 = \mu^0 g(\mu^0, \mu^*)\tau.$$

После подстановки этих выражений в (6.137) получим искомое значение A^* .

Пусть $g(\mu^0, \mu) = \alpha(\mu^0)(\mu^0 - \mu)$, функция Лагранжа примет вид

$$L = \alpha(\mu^0)(\mu^0 - \mu)(\mu^0 - \lambda\mu) + \lambda \frac{T\Delta S}{\tau}.$$

Она выпукла вниз по μ и достигает минимума в единственной точке $\mu^* = \mu^0/2\lambda$. По условию (6.141) имеем

$$\alpha(\mu^0)(\mu^0 - \mu^*)\mu^* = \frac{T\Delta S}{\tau},$$

откуда

$$\mu^* = \mu^0/2 + \sqrt{\mu^{02}/4 - \frac{T\Delta S}{\tau\alpha(\mu^0)}}, \quad g^* = \alpha(\mu^0)(\mu^0/2 - \sqrt{\mu^{02}/4 - \frac{T\Delta S}{\tau\alpha(\mu^0)}}). \quad (6.142)$$

Диффузионно–механический цикл максимальной мощности. Рассмотрим цикл извлечения работы в системе, состоящей из рабочего тела и двух резервуаров с разными химическими потенциалами, в одном из которых химический потенциал ключевого компонента равен μ_+ , а в другом μ_- (для определенности $\mu_+ > \mu_-$). Процесс циклический, так что приросты энтропии, внутренней энергии и массы ключевого компонента рабочего тела за цикл равны нулю. Температуры всех подсистем одинаковы.

Поочередный контакт с источниками. Рассмотрим случай, когда рабочее тело поочередно контактирует с первым и вторым резервуарами, циклически изменяя свои параметра во времени. Обозначим τ продолжительность цикла, $\mu_0(t)$ — химический потенциал источника, принимающий значения μ_+ и μ_- . Постановка задачи о получении максимальной работы A за заданное время τ примет вид

$$A = E_0(0) - E_0(\tau) = \int_0^\tau \mu g(\mu_0, \mu) dt \rightarrow \max_{\mu_0, \mu} \quad (6.143)$$

при условиях неизменности количества вещества рабочего тела (условиях цикличности)

$$\Delta N = \int_0^\tau g(\mu_0, \mu) dt = 0. \quad (6.144)$$

Для расчета базовых значений μ и μ_0 в задаче (6.143), (6.144) запишем функцию Лагранжа и потребуем ее максимума по μ_0 , μ и минимума по λ :

$$L = \{g(\mu_0, \mu)(\mu - \lambda)\} \rightarrow \max_{\mu_0, \mu} \min_{\lambda}.$$

Количество базовых значений μ_0 равно двум, одно из них соответствует $\mu_0 = \mu_+$, другое $\mu_0 = \mu_-$. Для строго выпуклой по μ функции Лагранжа

L базовые значения μ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \mu}(\mu - \lambda) + g(\mu_0, \mu) = 0$$

или

$$\frac{g(\mu_0, \mu)}{\mu - \lambda} = -\frac{\partial g(\mu_0, \mu)}{\partial \mu}.$$

Корень этого уравнения для $\mu_0 = \mu_-$ обозначим μ_1 , а для $\mu_0 = \mu_+$ через μ_2 . Так как в базовых точках L максимальна, то

$$L(\mu_+, \mu_1, \lambda) = L(\mu_-, \mu_2, \lambda), \quad (6.145)$$

что и определяет величину λ .

Конкретизируем полученные зависимости для

$$g(\mu_0, \mu) = \alpha(\mu_0)(\mu_0 - \mu).$$

Из условия (6.145) имеем

$$\mu_1 = \frac{\mu_+ + \lambda}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\mu_- + \lambda}{2}. \quad (6.146)$$

Подставляя μ_1 и μ_2 в функцию L , найдем ее зависимость от λ для каждого из базовых решений

$$L_+ = L(\mu_+, \mu_1, \lambda) = \frac{\alpha_+}{4}(\mu_+ - \lambda)^2, \quad L_- = L(\mu_-, \mu_2, \lambda) = \frac{\alpha_-}{4}(\mu_- - \lambda)^2.$$

Минимум по λ из максимума L по μ_0, μ достигается, когда

$$L_+ = L_- \Rightarrow \lambda^* = \frac{\sqrt{\alpha_+}\mu_+ + \sqrt{\alpha_-}\mu_-}{\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-}}. \quad (6.147)$$

Доли времени контакта рабочего тела с резервуарами определяются требованием (6.144) и равны

$$\gamma_+ = \frac{\alpha_- \sqrt{\alpha_+}}{\alpha_- \sqrt{\alpha_+} + \alpha_+ \sqrt{\alpha_-}}, \quad \gamma_- = \frac{\alpha_+ \sqrt{\alpha_-}}{\alpha_- \sqrt{\alpha_+} + \alpha_+ \sqrt{\alpha_-}}.$$

Максимальная работа за время τ

$$A^*(\tau) = \tau[\gamma_+ \mu_1 \alpha_+ (\mu_+ - \mu_1) + \gamma_- \mu_2 \alpha_- (\mu_2 - \mu_-)],$$

где μ_1 и μ_2 находят из (6.146) после подстановки в это выражение значения λ из (6.147). Максимальная мощность равна

$$\frac{A^*(\tau)}{\tau} = [\gamma_+ \mu_1 \alpha_+ (\mu_+ - \mu_1) + \gamma_- \mu_2 \alpha_- (\mu_2 - \mu_-)].$$

Непрерывный контакт с источниками. В тепловых машинах возможен как поочередный так и постоянный контакт рабочего тела с источниками (турбина). В последнем случае параметры рабочего тела распределены, процесс в нем можно считать близким к обратимому, если распределенность параметров осуществляется за счет конвективного потока. Аналогично в диффузионных машинах, возможен непрерывный контакт с источниками.

Задача о максимальной мощности в этом случае примет форму задачи нелинейного программирования

$$p = [g_1(\mu_+, \mu_1)\mu_1 - g_2(\mu_2, \mu_-)\mu_2] \rightarrow \max_{\mu_1, \mu_2}$$

при условии

$$g_1(\mu_+, \mu_1) - g_2(\mu_2, \mu_-) = 0. \quad (6.148)$$

Условие оптимальности этой задачи приводит к соотношению

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{g_2(\mu_2, \mu_-)}{\partial g_2 / \partial \mu_2} - \frac{g_1(\mu_+, \mu_1)}{\partial g_1 / \partial \mu_1}, \quad (6.149)$$

которое вместе с равенством (6.148) определяет искомые переменные.

Пусть g_1 и g_2 пропорциональны разности химических потенциалов

$$g_1 = \alpha_1(\mu_+ - \mu_1), \quad g_2 = \alpha_2(\mu_2 - \mu_-).$$

Равенство (6.149) перепишем в форме

$$\mu_1 - \mu_2 = (\mu_2 - \mu_-) + (\mu_+ - \mu_1)$$

или

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{\mu_+ - \mu_-}{2}. \quad (6.150)$$

Из условия $g_1 = g_2$ имеем

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 = \alpha_1 \mu_+ + \alpha_2 \mu_-. \quad (6.151)$$

Решение уравнений (6.150), (6.151) имеет вид

$$\mu_2^* = \frac{1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} [\mu_+ \alpha_1 + \mu_- (\alpha_1 + 2\alpha_2)],$$

$$\mu_1^* = \frac{1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} [\mu_+ (\alpha_2 + 2\alpha_1) + \mu_- \alpha_2].$$

Соответствующее такому выбору значение максимальной мощности

$$p_{\max} = \frac{\bar{\alpha}}{4} (\mu_+ - \mu_-)^2,$$

где эквивалентный коэффициент массопереноса

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Мембранные системы для жидких смесей

Рассмотрим систему (рис. 6.15) из двух жидкостей одинаковой температуры, разделенных полупроводящей мембраной. Одна из жидкостей представляет собой чистый растворитель, а во второй растворено некоторое вещество с молярной концентрацией C . Мембрана пропускает только растворитель. Равновесие наступает тогда, когда химические потенциалы, вычисленные по формуле (6.136), одинаковы, т.е. когда

$$v_0 P_0 - v_r P_r = -RT \ln x_0.$$

Здесь индекс 0 относится к чистому растворителю, индекс r — к раствору, x_0 — молярная доля растворителя в растворе. Обозначим разность давлений по обе стороны мембраны через π и учтем, что при сравнительно малых концентрациях молярные объемы v_0 и v_r равны друг другу. Кроме того, обозначим x_1 молярную долю растворенного вещества. Если эта величина мала, то $\ln x_0 = \ln(1 - x_1) \approx -x_1$. Тогда

$$\pi = RT \frac{x_1}{v_0} = RTC, \quad (6.152)$$

где π — осмотическое давление; C — концентрация растворенного вещества, $\left[\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{СМ}^3} \right]$; T — температура; R — универсальная газовая постоянная.

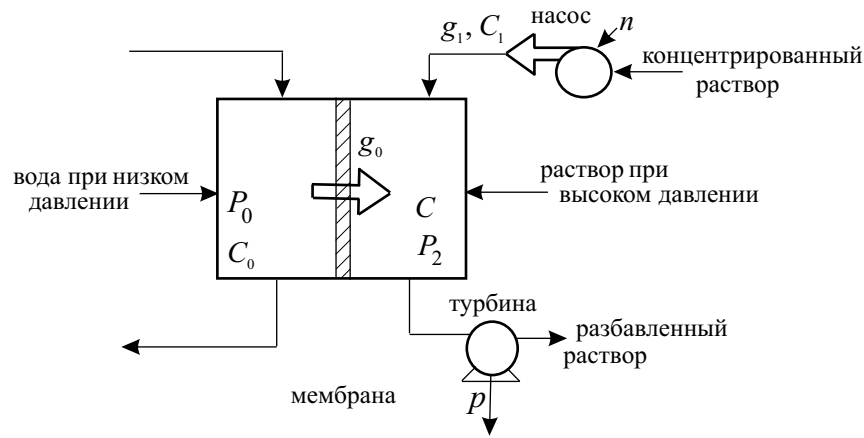


Рис. 6.15. Структура мембранной системы

Уравнение (6.152) называют уравнением Вант-Гоффа для осмотического давления.

В камере, расположенной по левую сторону мембраны, находится чистый растворитель с давлением окружающей среды, равным P_0 . По правую сторону мембраны в камере объемом V имеется обновляемый раствор, концентрация растворенного вещества в котором — C . Давление в этой камере обозначим через P_2 . Раствор будем считать идеальным. В состоянии равновесия, когда поток через правую камеру равен нулю, в ней устанавливается давление, превосходящее P_0 на величину осмотического давления π . Величина осмотического давления связана с концентрацией в камере и температурой уравнением Вант-Гоффа. В условиях, когда раствор в камере обновляется, давление $P_2 < P_0 + \pi$, что вызывает поток растворителя g_0 через полупроводящую мембрану. Обычно принимают диффузионный поток пропорциональным разности фактического и равновесного давления

$$g_0 = \alpha(P_0 + \pi - P_2) = \alpha(\pi - \Delta P), \quad (6.153)$$

где $\Delta P = P_2 - P_0$.

Пусть n — мощность насоса, подающего концентрированный раствор; g_1 — расход этого раствора, а C_1 — его концентрация в молях на единицу объема. Пренебрегая КПД насоса, получим

$$n = \Delta P g_1,$$

За счет подпитки через мембрану объем раствора увеличивается и, пройдя через турбину, он отдает мощность N , равную

$$N = (g_1 + g_0)\Delta P.$$

Таким образом, мощность и КПД солевой диффузионной машины

$$N_0 = N - n = g_0 \Delta P = \alpha(\pi - \Delta P) \Delta P, \quad \eta = \frac{N_0}{g_1} = \frac{\alpha(\pi - \Delta P) \Delta P}{g_1}.$$

Здесь в качестве КПД принята отдача работы на 1 см³ концентрированного раствора — «топлива» диффузионной машины. Если не учитывать связь между π и ΔP , то мощность достигает максимума при $\Delta P = \pi/2$, и ее верхний предел равен

$$\overline{N}_0 = \alpha \frac{\pi^2}{4} = \frac{\alpha}{4} (CRT)^2.$$

Так как $C < C_1$, величина мощности заведомо меньше, чем

$$\overline{N}_0^* = \frac{\alpha}{4} (C_1 RT)^2, \quad (6.154)$$

что дает оценку сверху для максимальной мощности.

Оценку (6.154) можно уточнить, если учесть, что g_0 , ΔP и C связаны друг с другом условием (6.153) и уравнением материального баланса по растворенному компоненту

$$(g_1 + g_0)C = g_1 C_1. \quad (6.155)$$

Выразим C и ΔP через g_0 из условий (6.153), (6.155) и подставим в выражения для N_0 и η

$$C = \frac{g_1 C_1}{g_1 + g_0}, \quad \Delta P = CRT - \frac{g_0}{\alpha}, \quad (6.156)$$

$$N_0 = g_0 \Delta P = \frac{RTC_1 g_1 g_0}{g_1 + g_0} - \frac{g_0^2}{\alpha}. \quad (6.157)$$

$$\eta = \frac{\alpha(\pi - \Delta P) \Delta P}{g_1} = \frac{RTC_1 g_0}{g_1 + g_0} - \frac{g_0^2}{\alpha g_1} \quad (6.158)$$

Точки максимума по g_0 для выпуклых вверх функций (6.157) и (6.158) совпадают, поэтому для нахождения оптимального значения g_0^* воспользуемся одной из функций, а именно выражением для N_0 . Условие максимума по g_0 приводит к равенству

$$\varphi(g_0) = g_0(g_1 + g_0)^2 = \frac{\alpha RT g_1^2 C_1}{2}. \quad (6.159)$$

Перепишем уравнение (6.159) в форме

$$\frac{g_0^3}{g_1^2} + 2\frac{g_0^2}{g_1} + g_0 = \frac{\alpha R T C_1}{2} \quad (6.160)$$

и обозначим для краткости правую часть этого уравнения M , а его решение g_0^* . Очевидно, что оно удовлетворяет неравенствам $0 < g_0 < M$. Первое приближение к решению может быть найдено методом хорд [22]:

$$\tilde{g}_0 = \frac{M}{M^2/g_1^2 + 2M^1/g_1 + 1}. \quad (6.161)$$

В силу выпуклости вниз левой части равенства (6.160) $\tilde{g}_0 < g_0^*$.

Если различие между M и \tilde{g}_0 велико, то решение можно уточнить по формуле касательных

$$g_0^1 = \tilde{g}_0 + \left(M - \frac{\tilde{g}_0^3}{g_1^2} - 2\frac{\tilde{g}_0^2}{g_1} - \tilde{g}_0 \right) \left(\frac{3\tilde{g}_0^2}{g_1^2} + \frac{4\tilde{g}_0}{g_1} + 1 \right). \quad (6.162)$$

Поправка всегда положительна, а $g_0^1 > g_0^*$. Подстановка решения в условие (6.159) позволяет оценить точность приближения. Условие (6.159) таким образом определяет для выбранных значений g_1 и C_1 , g_0^* , а условия (6.156) C^* и ΔP^* .

Отметим, что предположение об идеальности раствора вводит ограничение на значение концентрации рабочего раствора

$$C = C_1 \frac{g_1}{g_1 + g_0}.$$

Она не должна быть слишком большой, иначе молекулы растворенного вещества взаимодействуют друг с другом и зависимость (6.152) нарушается.

Солевая диффузионная машина с поочередным контактом рабочего тела с источниками

В рассмотренной в предыдущем разделе схеме диффузионной машины рабочее тело представляло собой открытую систему, работающую в стационарном режиме с постоянным контактом с двумя источниками. От одного из них поступал концентрированный раствор, от другого разворитель.

На рис. 6.16 изображена структура диффузионной машины, в которой рабочее тело поочередно контактирует с каждым из источников,

получая растворитель через одну мембрану и отдавая его концентрированному раствору через другую. При этом давление и расход рабочего тела периодически изменяются, давление повышается при меньшем расходе (тратится мощность n) и снижается при большем (вырабатывается мощность N).

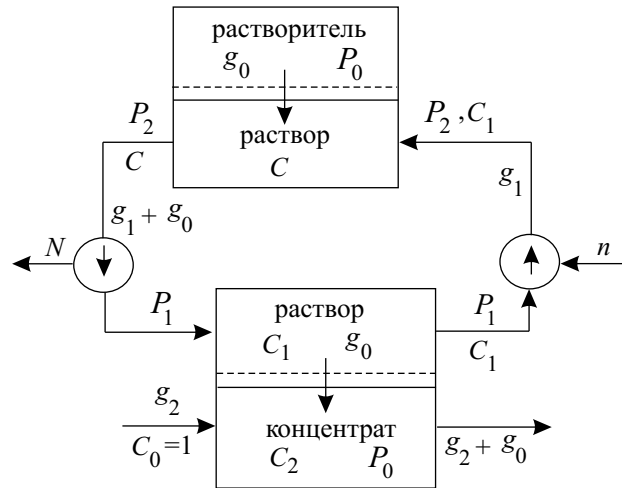


Рис. 6.16. Структура диффузионной машины с поочередным контактом рабочего тела с источниками

Запишем балансовые соотношения для этой схемы и исследуем ее предельные возможности. При этом мы пренебрегаем затратами энергии на создание потока концентрата через нижнюю камеру и считаем концентрацию растворенного вещества в потоке g_2 равной единице, а давление окружающей среды равным P_0 .

Мощность машины

$$N_0 = N - n = (g_1 + g_0)\Delta P_{21} - g_1\Delta P_{21} = g_0\Delta P_{21},$$

где $\Delta P_{21} = P_2 - P_1$.

В качестве показателя эффективности примем отношение мощности N_0 к расходу g_2 растворяемого вещества

$$\eta = \frac{N_0}{g_2} = \frac{g_0}{g_2}\Delta P_{21}.$$

Кинетика массопереноса определяется соотношениями

$$\begin{aligned} g_0 &= \alpha_1(P_0 + \pi - P_2) = \alpha_1(\pi - \Delta P_{20}) = \\ &= \alpha_2[(P_1 + \pi_2) - (P_0 + \pi_1)] = \alpha_2(\Delta\pi_{21} + \Delta P_{10}). \end{aligned} \quad (6.163)$$

Здесь $\Delta P_{20} = P_2 - P_0$, $\Delta \pi_{21} = \pi_2 - \pi_1$, $\Delta P_{10} = P_1 - P_0$. Равенство (6.163) соответствует условию постоянства массы рабочего тела в стационарном режиме.

На рис. 6.17 показан цикл рабочего тела диффузионной машины. Мощность n равна площади прямоугольника P_2dCP_1 , мощность N площади P_2abP_1 . Мощность машины N_0 равна площади заштрихованного прямоугольника $abcd$.

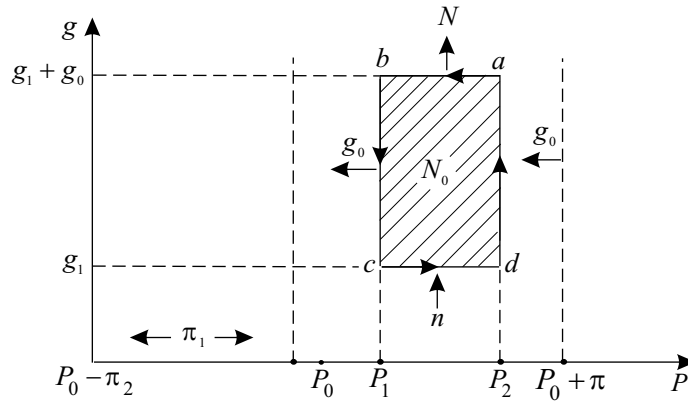


Рис. 6.17. Цикл изменения параметров рабочего тела диффузионной машины

Найдем предельную мощность диффузионной машины без учета связи между осмотическими давлениями в камерах и расходами. Для этого решим задачу условной оптимизации

$$N_0 = (P_2 - P_1)g_0 \rightarrow \max_{P_1, P_2}$$

при условиях

$$\alpha_1(P_0 + \pi - P_2) = \alpha_2(P_1 - P_0 + \pi_2 - \pi_1) = g_0. \quad (6.164)$$

Из (6.164)

$$P_1 = \frac{g_0}{\alpha_2} + P_0 + \pi_1 - \pi_2, \quad P_2 = P_0 + \pi - \frac{g_0}{\alpha_1}.$$

Введем эквивалентный коэффициент проводимости мембран

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

и запишем

$$P_2 - P_1 = \pi - \pi_1 + \pi_2 - \frac{g_0}{\bar{\alpha}}.$$

Тогда

$$N_0 = g_0 \left(\pi - \pi_1 + \pi_2 - \frac{g_0}{\bar{\alpha}} \right) = g_0 \left(\pi + \Delta \pi_{21} - \frac{g_0}{\bar{\alpha}} \right) \rightarrow \max_{g_0}. \quad (6.165)$$

Максимум этого выражения, равный

$$N_0^* = \frac{\bar{\alpha}(\pi - \pi_1 + \pi_2)^2}{4} = \frac{\alpha(\pi + \Delta\pi_{21})^2}{4},$$

достигается при

$$g_0^* = \frac{\bar{\alpha}(\pi - \pi_1 + \pi_2)}{2} = \frac{\bar{\alpha}(\pi + \Delta\pi_{21})}{2}.$$

Учтем, что осмотические давления в камерах связаны с концентрациями законом Вант-Гоффа (6.152), а последние, в свою очередь, связаны с расходами g_1, g_2 и g_0 , так что

$$\pi = CRT = C_1 \frac{g_1 RT}{g_1 + g_0},$$

$$\Delta\pi_{21} = (C_2 - C_1)RT = \left(\frac{g_2 C_{20} + g_0 C_1}{g_2 + g_0} - C_1 \right) RT.$$

С учетом этих соотношений выражение (6.165) для мощности машины примет форму

$$\begin{aligned} N_0 &= g_0 \left[RT \left(\frac{C_1 g_1}{g_1 + g_0} + \frac{g_2 C_{20} + g_0 C_1}{g_2 + g_0} - C_1 \right) - \frac{g_0}{\bar{\alpha}} \right] = \\ &= g_0 \left[RT \left(\frac{g_2 C_{20} + g_0 C_1}{g_2 + g_0} - \frac{C_1 g_0}{g_1 + g_0} \right) - \frac{g_0}{\bar{\alpha}} \right] \rightarrow \max_{g_0}, \end{aligned} \quad (6.166)$$

а выражение для η

$$\eta = \frac{g_0}{g_2} \left[RT \left(\frac{g_2 C_{20} + g_0 C_1}{g_2 + g_0} - \frac{C_1 g_0}{g_1 + g_0} \right) - \frac{g_0}{\bar{\alpha}} \right] \rightarrow \max_{g_0}. \quad (6.167)$$

Точки максимума по g_0 для двух критериев ((6.166) и (6.167)) совпадают. Поэтому для нахождения оптимального значения g_0^* воспользуемся одной из двух функций. Условия стационарности N_0 по g_0 приводят к соотношению для оптимального потока

$$g_0^* = \frac{\bar{\alpha} RT}{2} \left[\left(\frac{g_2^2 C_{20} + 2g_0 g_2 C_1 + g_0^2 C_1}{(g_2 + g_0)^2} \right) - C_1 \frac{g_0(g_0 + 2g_1)}{(g_1 + g_0)^2} \right]. \quad (6.168)$$

Решение $g_0^*(g_1, g_2, C_1)$ уравнения (6.168) после подстановки в N_0 и η определяет максимальные мощность $N_0^*(g_1, g_2, C_1)$ и КПД $\eta^*(g_1, g_2, C_1)$. Условие неотрицательности N_0^* и η^* накладывает ограничения на возможные значения g_1, g_2, C_1 . Так, увеличение g_1, g_2 и снижение C_1 увеличивает N_0^* .

Показатели диффузионных машин растут пропорционально коэффициенту проводимости мембраны, поэтому можно ожидать увеличения их возможностей при усовершенствовании мембран. Однако нужно учесть и то, что свойства мембран нестационарны, они ухудшаются за счет неоднородности концентраций в растворе, эффекта поляризации и пр.

6.6. Области реализуемости химических реакторов

Достижимая в химическом реакторе степень превращения зависит от продолжительности и кинетики процесса, условий его проведения и возможностей управления. Методы термодинамики при конечном времени (ТКВ) позволяют выяснить влияние каждого из этих факторов и построить область реализуемости химического реактора, обусловленную термодинамическими факторами.

Первоначально рассмотрим систему, содержащую реактор смешения, затем — трубчатый реактор вытеснения. При этом предположим, что скорость реакции подчиняется закону действующих масс, а смеси реагирующих веществ близки к идеальным растворам, так что химический потенциал i -го компонента имеет форму [44]

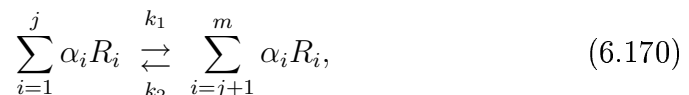
$$\mu_i = \mu_{i0}(T, P) + RT \ln x_i, \quad (6.169)$$

где x_i — молярная доля i -го компонента смеси, R — универсальная газовая постоянная, T, P — абсолютная температура и давление смеси.

Область реализуемости для периодического реактора смешения

Термодинамические балансы. Рассмотрим периодический процесс в химическом реакторе смешения, протекающий при постоянной температуре без теплообмена с окружающей средой. Смесь представляет собой однофазный раствор, близкий к совершенно идеальному. Последнее означает, что химические потенциалы могут быть найдены по формуле (6.169).

Стехиометрическое уравнение реакции имеет вид



где коэффициенты $\alpha_i < 0$ для $i \leq j$ и $\alpha_i > 0$ для $i > j$; k_1 и k_2 — константы скоростей прямой и обратной реакций. Скорость реакции W определяется законом действующих масс

$$W(x, T) = k_1(T) \prod_{i=1}^j x_i^{-\alpha_i} - k_2(T) \prod_{i=j+1}^m x_i^{\alpha_i} = W_1(x, T) - W_2(x, T). \quad (6.171)$$

Запишем уравнения термодинамических балансов этой системы: Материальные балансы по i -му компоненту и по общему количеству молей

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{d(Nx_i)}{dt} = \alpha_i W(x, T), \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.172)$$

$$\frac{dN}{dt} = W(x, T) \sum_{i=1}^n \alpha_i = W(x, T) \alpha_\Sigma, \quad N(0) = N_0, \quad N_i(0) = N_{i0}. \quad (6.173)$$

Энергетический баланс

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m N_i h_i = 0. \quad (6.174)$$

Энтропийный баланс

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m N_i s_i - \sigma = 0, \quad (6.175)$$

где h_i и s_i — молярные энтальпия и энтропия i -го компонента, а σ — производство энтропии в ходе реакции.

Воспользуемся тем обстоятельством, что химический потенциал (молярная энергия Гиббса) равен разности энтальпии h и произведения Ts

$$\mu = h - Ts. \quad (6.176)$$

Умножим уравнение энтропийного баланса (6.175) на T и вычтем из уравнения энергетического баланса (6.174). Получим с учетом (6.176)

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m N_i \mu_i + T\sigma = 0. \quad (6.177)$$

С введением степени превращения ζ

$$x_i(\zeta) = \frac{N_i}{N} = \frac{N_{i0} + \alpha_i \zeta}{N_0 + \alpha_\Sigma \zeta}. \quad (6.178)$$

Подставив в (6.177) $\mu_i(x_i)$ в форме (6.169), после дифференцирования в (6.177) получим

$$\sigma = \frac{W(x, T, P) A(x, T, P)}{T}, \quad (6.179)$$

где $A(x, T) = - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i(T, P, x_i)$ — химическое сродство реакции.

Для скорости реакции в форме (6.171) и химических потенциалов в форме (6.169)

$$A = RT \ln \frac{W_1(x, T, P)}{W_2(x, T, P)} = RT \ln \frac{W + W_2}{W_2}. \quad (6.180)$$

В свою очередь, степень превращения связана со скоростью реакции уравнением

$$\frac{d\zeta}{dt} = W(x, P, T), \quad \zeta(0) = 0. \quad (6.181)$$

Задача о минимальной диссипации

Потребуем минимума прироста энтропии системы, который с учетом (6.179) и (6.180) равен

$$\Delta S = \int_0^\tau \sigma(t) dt = R \int_0^\tau W \ln \frac{W + W_2(x, T, P)}{W_2(x, T, P)} dt \rightarrow \min, \quad (6.182)$$

при заданной степени превращения $\zeta_\tau = \bar{\zeta}$

$$\int_0^\tau W dt = \bar{\zeta}, \quad (6.183)$$

а также при условиях (6.178), определяющих вектор $x(\zeta)$, и условиях (6.181). В качестве управления может выбрана скорость реакции $W(t)$. Это существенно упрощает задачу, так как остаются вне пределов постановки способы, с помощью которых можно изменять W (изменяя начальный состав, вводя конвективную подпитку тем или иным компонентом сырья ($i < j$), изменяя давление и пр.). Так как цель состоит в получении оценки предельных возможностей реактора, то мы пренебрегаем тем, что тот или иной способ управления, например, подпитка реагентами, изменит уравнения балансов. Отметим, что концентрации $x(\zeta)$ входят в задачу через функцию W_2 , которая зависит от x_i для $i > j$.

Упростить решение задачи можно, воспользовавшись тем, что степень превращения в оптимальном процессе монотонна по t , что позволяет вместо t использовать ζ в качестве независимой переменной.

Сделав замену

$$dt = \frac{d\zeta}{W} \quad (6.184)$$

и выразив из равенства (6.178) x через ζ , получим

$$\Delta S = R \int_0^{\bar{\zeta}} \ln \frac{W + W_2(\zeta, T, P)}{W_2(\zeta, T, P)} d\zeta \rightarrow \min \quad (6.185)$$

при условии

$$\int_0^{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{W} = \tau. \quad (6.186)$$

Функция Лагранжа этой задачи с учетом того, что универсальная газовая постоянная R не влияет на условия оптимальности, имеет вид

$$L = \ln \frac{W + W_2(\zeta, T, P)}{W_2(\zeta, T, P)} + \frac{\lambda}{W}.$$

Требование ее стационарности по W приводит к условию

$$\frac{\partial L}{\partial W} = 0 \rightarrow \frac{W^2}{W + W_2(\zeta, T, P)} = \frac{W^2}{W_1(\zeta, T, P)} = \lambda = \text{const} \quad \forall \zeta, \quad (6.187)$$

Условие минимальной диссипации при заданной степени превращения $\bar{\zeta}$ и фиксированной продолжительности τ изотермического процесса в периодическом реакторе идеального перемешивания состоит в том, чтобы для любого момента времени поддерживать постоянным отношение квадрата общей скорости реакции к скорости прямой реакции.

Из (6.187) получим оптимальную скорость реакции

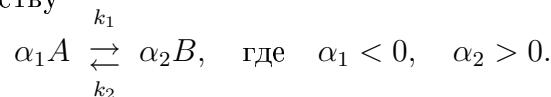
$$W^*(\zeta, T, P) = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda W_2(\zeta, T, P)}. \quad (6.188)$$

По физическому смыслу процесса $W^* > 0$, и в (6.188) можно оставить перед корнем только знак плюс.

Величину λ находят по условию (6.186):

$$\int_0^{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda W_2(\zeta, T, P)}} = \tau. \quad (6.189)$$

Пример. Рассмотрим реакцию, в которой расходуется и образуется по одному веществу



Скорость реакции

$$W = W_1 - W_2 = k_1 x_1^{-\alpha_1} - k_2 x_2^{\alpha_2}, \quad (6.190)$$

так что

$$N_1(t) = N_{10} - \alpha_1 \zeta(t), \quad N_2(t) = N_{20} + \alpha_2 \zeta(t). \quad (6.191)$$

Скорость обратной реакции с учетом (7.65)

$$W_2(\zeta) = k_2 \left(\frac{N_{20} + \alpha_2 \zeta}{N_{10} + N_{20} + (\alpha_2 - \alpha_1) \zeta} \right). \quad (6.192)$$

Прирост энтропии в соответствии с (6.185)

$$\Delta S = R \int_0^{\bar{\zeta}} \ln \left(\frac{W}{W_2} + 1 \right) d\zeta \rightarrow \min_W. \quad (6.193)$$

Оптимальная скорость реакции с точностью до константы λ равна

$$W^* = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda W_2}. \quad (6.194)$$

Значение λ определяет требование заданной продолжительности процесса

$$\int_0^{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\frac{1}{2}\lambda + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \lambda W_2}} = \tau. \quad (6.195)$$

Выберем

$$N_{10} = N_{20} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1, \quad k_2 = 1, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{2}, \quad \tau = 1$$

и перепишем (6.195) в форме

$$\int_0^{0.5} \frac{d\zeta}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda \left(\frac{0.5 + \zeta}{1 - \zeta} \right)}} = 0.5. \quad (6.196)$$

После замены переменного

$$t = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda \left(\frac{0.5 + \zeta}{1 - \zeta} \right)}$$

получим

$$\int_{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}}^{\sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}} \frac{\lambda t dt}{(t + \lambda)(t^2 - \lambda^2 + 4\lambda)^2} = \frac{1}{24}. \quad (6.197)$$

Найдя интеграл (6.197) по формуле Остроградского, вычислим

$$\lambda^* = 0,23.$$

После подстановки λ^* в (6.194), подинтегральное выражение в (6.193) будет зависеть только от ζ . Вычисляя этот интеграл, получим

$$\Delta S_{\min}^* = 0.24.$$

Проделав аналогичные вычисления для других τ , получим зависимость $\Delta S^*(\tau)$, показанную на рис. 6.18, выше которой лежит область реализуемости реактора. Границе этой области соответствует максимально достижимая степень превращения при заданной продолжительности процесса. Чтобы найти эту степень превращения, нужно скорость реакции, найденную по условию (6.188), подставить в уравнение (6.181).

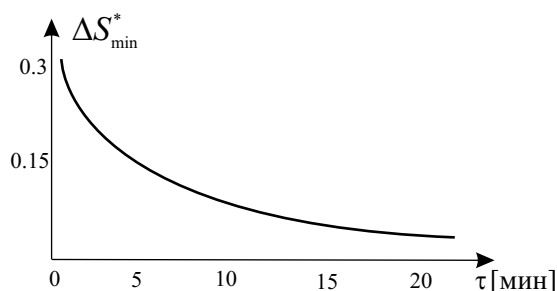


Рис. 6.18. Зависимость минимального прироста энтропии в химическом реакторе от продолжительности процесса

Производительность процесса при заданной степени превращения обратно пропорциональна τ . Если прирост энтропии в реальном реакторе, найденный по количеству и составу продуктов в моменты $t = 0$ и $t = \tau$, лежит существенно выше границы, это говорит о возможности увеличения производительности за счет приближения к условиям минимальной диссипации (6.187). Отклонение левой части равенства (6.187) от константы показывает, для каких моментов времени режим реактора далек от термодинамически оптимального.

Трубчатый реактор вытеснения

Рассмотрим процесс в трубчатом реакторе, смесь в котором однородна в каждом сечении, но изменяет свой состав и температуру от сечения к сечению. Скорость реакции W удовлетворяет равенству (6.171), а стехиометрическое соотношение компонентов — условию (6.170). Константы скоростей прямой и обратной реакций зависят от температуры:

$$k_i = k_{i0} e^{-\frac{E_i}{RT}}, \quad i = 1, 2. \quad (6.198)$$

где E_i — энергия активации i -й реакции.

Из уравнений термодинамических балансов для элементарного объема смеси в сечении l получим:

материальный баланс

$$\frac{d(Nx_i)}{dl} = \alpha_i W(x, P, T), \quad \frac{dN}{dl} = \alpha_\Sigma W(x, P, T), \quad (6.199)$$

$$N(0), N_i(0) - \text{fix}, \quad i = 1, \dots, n;$$

энергетический баланс

$$\frac{d(Nh)}{dl} = q(T, T_0), \quad h(0) = h_0; \quad (6.200)$$

энтропийный баланс

$$\frac{d(Ns)}{dl} = \frac{q(T, T_0)}{T_0} + \sigma, \quad s(0) = s_0, \quad (6.201)$$

где σ — производство энтропии за счет химической реакции и теплопереноса.

Выразим из соотношения (6.176) молярную энтропию s через h и химические потенциалы и после подстановки в (6.200), (6.201) получим производство энтропии в форме

$$\sigma = W(x, P, T) \frac{A(x, P, T)}{T} + q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (6.202)$$

где q — поток подводимой теплоты от источника с температурой T_0 ; A — химическое сродство реакции.

Производство энтропии в реакторе находим интегрированием σ по длине реактора, при этом интеграл от производства энтропии за счет теплопереноса определяется главным образом средним значением температуры и мало зависит от ее профиля, поэтому будем искать условия, при которых минимально производство энтропии $\bar{\sigma}$ за счет химической реакции, необратимость же теплообмена можно подсчитать для найденного решения:

$$\bar{\sigma} = \int_0^L W(x, P, T) \frac{A(x, P, T)}{T} dl \rightarrow \min. \quad (6.203)$$

В любом сечении l концентрация i -го компонента связана со степенью превращения как

$$x_i(\zeta) = \frac{N(0)x_{i0} + \alpha_i \zeta}{N(0) + \alpha_\Sigma \zeta}, \quad (6.204)$$

где $N(0)$ — общее количество молей, поступающих в реактор, $\zeta(l)$ — зависимость степени превращения от длины реактора, подчиняющаяся уравнению

$$\frac{d\zeta}{dl} = \frac{W(x, T, P)}{v}, \quad \zeta(0) = 0, \quad (6.205)$$

где v — скорость движения смеси.

Выразим, как и выше, химическое сродство реакции через скорости прямой и обратной реакции:

$$A(x, T, P) = RT \ln \frac{W_1(x, T, P)}{W_2(x, T, P)}. \quad (6.206)$$

Давление P , длину аппарата L и скорость движения реакционной смеси v будем считать заданными.

Задача о предельных возможностях реактора в этом случае сводится к определению такого закона изменения температуры $T(l)$ реакционной смеси, для которого $\bar{\sigma}$ достигает минимума при заданной степени превращения $\zeta(L) = \bar{\zeta}$.

Запишем эту задачу, перейдя от аргумента l к ζ :

$$dl = d\zeta \frac{v}{W(\zeta, T, P)} = d\zeta \frac{v}{W_1(\zeta, T, P) - W_2(\zeta, T, P)}.$$

Получим

$$\bar{\sigma} = v \int_0^{\bar{\zeta}} R \ln \frac{W_1(\zeta, T, P)}{W_2(\zeta, T, P)} d\zeta \rightarrow \min_{T(\zeta)} \quad (6.207)$$

при условии

$$v \int_0^{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{W_1(\zeta, T, P) - W_2(\zeta, T, P)} = L. \quad (6.208)$$

Здесь в функциях $W_\nu(x, T, P)$ ($\nu = 1, 2$) переменные x_i выражены через ζ по формуле (6.204).

Запишем условие оптимальности задачи (6.207), (6.208) как условие стационарности по T ее функции Лагранжа F , обозначая частную производную W_ν по T как $W_{\nu T}$, ($\nu = 1, 2$)

$$F = R \ln \frac{W_1}{W_2} + \frac{\lambda}{W_1 - W_2},$$

$$\frac{dF}{dT} = 0 \Rightarrow R \left(\frac{W_{1T}}{W_1} - \frac{W_{2T}}{W_2} \right) \frac{(W_1 - W_2)^2}{W_{1T} - W_{2T}} = \text{const} \quad (6.209)$$

либо в другой форме:

$$(W_1 - W_2) \frac{\frac{\partial}{\partial T} (\ln W_1 - \ln W_2)}{\frac{\partial}{\partial T} \ln(W_1 - W_2)} = \text{const.} \quad (6.210)$$

Таким образом, условием минимальной диссипации процесса химического превращения в трубчатом реакторе является такой выбор профиля температуры по длине реактора, для которого выражение, стоящее в левой части равенства (6.210), постоянно.

Например, для одностадийной реакции, в которой скорости W_1, W_2 прямой и обратной реакций имеют вид

$$W_1 = K_1(T)x_1^{-\alpha_1}, \quad W_2 = K_2(T)x_2^{\alpha_2},$$

где

$$K_i(T) = K_{i0} \exp(-E_i/RT), \quad i = 1, 2,$$

условие (6.210) примет форму

$$\frac{[ay^\gamma x_1^{-\alpha_1}(\zeta) - yx_2^{\alpha_2}(\zeta)]^2}{\gamma ay^\gamma x_1^{-\alpha_1}(\zeta) - yx_2^{\alpha_2}(\zeta)} = \text{const} = \lambda, \quad (6.211)$$

где $x_1(\zeta)$ и $x_2(\zeta)$ определяются равенствами (6.196), $y(T)$ — функция температуры вида

$$y(T) = K_{20} e^{-E_2/RT}, \quad \gamma = \frac{E_1}{E_2}, \quad a = \frac{K_{10}}{K_{20}}.$$

Найдя точно или приближенно по условию (6.211) $y(\zeta, \lambda)$, можно вычислить соответствующий минимуму диссипации закон изменения температуры

$$T^*(\zeta, \lambda) = \frac{E_2}{R(\ln K_{20} - \ln y(\zeta, \lambda))}.$$

Величина λ зависит от $\bar{\zeta}$ и L и находится после подстановки $T^*(\zeta, \lambda)$ в условие (6.208).

Важно, что в действующем реакторе, для которого все функции, входящие в равенство (6.210), известны, отклонение левой части этого равенства от константы косвенно характеризует отклонение от режима минимальной диссипации.

Глава 7

МАКРОСИСТЕМНЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Микроэкономика изучает взаимодействие экономических агентов (ЭА). Каждый из них представляет собой совокупность индивидуумов, усредненное поведение которых определяет характеристики ЭА. По аналогии с термодинамикой можно рассматривать экономические системы (ЭС), в которых каждый из ЭА оказывается подсистемой. Перечислим некоторые наблюдаемые факты, которым должна соответствовать математическая модель ЭА:

В результате взаимодействия друг с другом ЭА обмениваются ресурсами, потребляют и производят их, при этом каждый из ЭА стремится максимизировать свою осознанную или неосознанную «полезность», выбирая, какой ресурс, в каком количестве и на что обменивать.

Поток обмена между двумя ЭА, изолированными от окружения, при отсутствии производства и потребления не меняет своего направления. Ресурс переходит в процессе обмена к тому ЭА, для которого он полезнее, а значит ЭА готов за этот ресурс заплатить большую цену. Поток ресурса стремится со временем к нулю, а цены, которые ЭА готовы заплатить за этот ресурс, выравниваются.

ЭА, обмениваясь ресурсами со стабильным окружением таким образом, чтобы в результате цикла обмена запасы ресурсов ЭА в начале и в конце цикла оказались одинаковы, не может увеличить запас своего капитала. Если бы это было не так, он мог бы повторять этот цикл непрерывно, «высасывая» капитал из окружения.

Если некоторый вид ресурса «полезен» для ЭА, он не отдает его бесплатно, а продает, получая взамен другие ресурсы или деньги (ба-

зисный ресурс). Это не относится к ресурсам, имеющим отрицательную полезность, таким как отходы, которые ЭА не может эффективно перерабатывать. Никто извне не может в условиях постоянной стоимости базисного ресурса организовать такой цикл обмена с ЭА, при котором запасы ресурсов у последнего в начале и в конце цикла оказались одинаковыми, а объем базисного ресурса уменьшился.

При увеличении закупочной цены увеличивается поток продаж, а при некоторой равновесной цене этот поток становится равным нулю, при дальнейшем падении цены ЭА выгодно покупать ресурс. Равновесная цена равна, таким образом, минимальной цене, по которой ЭА готов продавать и максимальной цене, по которой он готов покупать продукт.

Перечисленные свойства требуют адекватного математического описания. Они во многом аналогичны свойствам термодинамических систем, так как и термодинамические и микроэкономические системы являются макросистемами. Но есть и отличия, важнейшее из которых в том, что обмен одним ресурсом сопровождается встречным потоком другого.

Экономические системы могут быть *изолированными* от окружения, в этом случае обмен происходит лишь внутри системы, или *открытыми* по всем или по некоторым видам ресурсов. Как в любой макросистеме процессы стохастического взаимодействия в экономике необратимы. В экономике может быть введен некоторый показатель необратимости, принимающий подобно энтропии максимальное значение в равновесии для изолированной системы, а также неотрицательная функция, аналогичная производству энтропии, и записаны экономические балансы, включающие эту функцию.

Далее приведено феноменологическое описание микроэкономических систем и рассмотрены задачи, которые могут быть решены в рамках подобной модели. При этом подчеркнуты близость и различие тех или иных свойств экономических и термодинамических макросистем.

7.1. Модели экономических агентов и второй закон микроэкономики

Состояние ЭА характеризуется вектором N запасов ресурсов и количеством базисного ресурса M . При этом мы будем предполагать, что

базисный ресурс измеряется в одних и тех же единицах для всех экономических агентов (золото, международная валюта). Переменные N и M — экстенсивные, т. е. при объединении (разделении) однородных ЭА они изменяются в одинаковой пропорции и при обмене для них справедливы законы сохранения. Кроме того, состояние ЭА характеризуется вектором интенсивных переменных — оценок $p = (p_1, \dots, p_k)$ материальных ресурсов в единицах базисного ресурса. При обмене изолированных от окружения ЭА эти переменные выравниваются.

Оценка ресурса p_i — (равновесная цена) равна той минимальной цене, по которой ЭА готов продать i -й ресурс, и той максимальной цене, по которой он готов его купить. Оценки ресурса зависят от состояния ЭА.

В процессах обмена ЭА выступает как получатель и как продавец, он характеризуется функцией спроса и предложения. Функция спроса показывает, сколько i -го ресурса ЭА готов приобрести по цене c_i . Чем выше эта цена, тем, как правило, меньше спрос. Наконец, при некоторой цене $c_i = p_i$ ЭА прекращает закупки, а при $c_i > p_i$ он готов продавать i -й ресурс, причем в тем большем количестве, чем больше c_i .

Во многих случаях функции спроса и предложения связывают с ценой не количество, а поток ресурса $n_i(p_i, c_i)$. Функция $n_i(p_i, c_i)$ определяет кинетику ресурсообмена. Если положительным считать поток, направленный в сторону ЭА, то кинетические функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{sign } n_i(c_i, p_i) &= \text{sign } (p_i - c_i), \\ n_i(c_i, p_i) &= 0 \quad \text{при} \quad c_i = p_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial c_i} < 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Размерность вектора цен c , как и вектора оценок p — единицы базисного ресурса, отнесенные к единице ресурса.

Деньги, которые использует ЭА, также являются одним из видов ресурсов и могут обмениваться на базисные ресурсы по тому или иному курсу, поток обмена зависит от внешнего обменного курса и равновесного курса обмена (оценки денег) так же, как поток ресурса от различия цены и оценки.

Выделим три типа ЭА:

1. ЭА, у которых оценка ресурса p зависит от состояния ЭА, в частности, от запасов ресурсов и капитала. Обычно, но не всегда, с ростом запаса некоторого ресурса его оценка падает, а с ростом запаса капи-

тала растет. ЭА может обмениваться с окружением не только материальным, но и базисным ресурсом M . Минимальная цена продажи (максимальная цена покупки) представляет собой оценку базисного ресурса для ЭА. Обозначим ее $p_0(N, M)$. Эта оценка положительна для всех ЭА. Вообще говоря, любой ресурс, оценка которого обладает этим свойством, может быть принят за базисный.

ЭА такого типа будем по аналогии с термодинамическими системами называть *экономическими системами с конечной емкостью*;

2. ЭА, у которых оценки p_i не зависят от запаса ресурсов. При обмене с таким ЭА количество покупаемого или продаваемого ему ресурса столь мало по сравнению с наличным запасом, что практически не влияет на его оценку. ЭА такого типа аналогичны термодинамическим системам бесконечной емкости (резервуарам). Поэтому их естественно назвать *экономическими резервуарами*. К ним относятся рынки, цены на которых не зависят от интенсивности закупок, а меняются во времени под влиянием внешних по отношению к системе факторов.

Функция спроса и предложения рынка $n(c, p)$ в общем случае зависит от цены покупки (продажи) и оценки и удовлетворяет условиям (7.1) для кинетики ресурсообмена. Такой рынок называют *монопольным*. В пределе, когда для любого потока n разница между ценой и оценкой сколь угодно мала (цены для любой интенсивности потока n сколь угодно близки оценкам рынка), рынок называют *рынком совершенной конкуренции*.

3. *Активные ЭА — посреднические фирмы*, которые назначают цену или интенсивность продажи (покупки) ресурсов независимо от их запаса и стремятся сделать это таким образом, чтобы извлечь максимум или затратить минимум базисного ресурса при тех или иных ограничениях. Фирмы аналогичны рабочему телу тепловой машины в термодинамике. Они могут контактировать одновременно с несколькими ЭА, назначая для каждого из них свои цены или потоки. Цены посредника и функции прерывания контакта с ЭА являются управляющими переменными.

Фирма может быть и производственной, в этом случае она закупает ресурсы (сырье, рабочую силу, производственные фонды) и продает продукцию, выпуск которой определяется производственной функцией того или иного типа [40] и ценой, которую фирма устанавливает. Цену, устанавливаемую фирмой на i -й вид ресурса, обозначим c_i .

Существование функции благосостояния и ее свойства. Вопрос о том, как количественно охарактеризовать полезность для ЭА

того или иного ресурса, существует ли функция полезности, которую ЭА стремится максимизировать при тех или иных ограничениях, зависит ли эта функция от количества ресурсов или потоков их потребления и пр., обсуждался в экономике давно. Многие задачи можно решать, не делая допущения о существовании функции полезности, а используя лишь кривые безразличия, которые выделяют наборы ресурсов, имеющие одинаковую ценность для ЭА.

Подход к ЭА как к макросистеме позволяет ввести и доказать существование такой функции. Следуя [122], будем называть ее *функцией благосостояния*, хотя в более ранних работах [46], [118] она названа иначе.

В процессах обмена ЭА закупает и продает ресурсы, изменяя одновременно запасы материальных ресурсов N и базисного M . Общий объем базисного ресурса с учетом возможности обмена материальных ресурсов на базисный по равновесным ценам характеризует *капитализацию* или *полный капитал* ЭА U . Изменение капитализации связано с изменением запасов базисного ресурса и материальных ресурсов балансовым соотношением

$$dU = dM + \sum_i p_i dN_i. \quad (7.2)$$

Функцию $F = \sum_i p_i N_i$ называют *связанным капиталом*, это объем базисного ресурса, который может получить ЭА, при продаже ресурсов N_i по равновесным ценам. Вектор оценок p зависит от запасов ресурсов N и курса обмена базисного ресурса r . При равновесном обмене $dM = -\sum_i p_i dN_i$, и капитализация ЭА остается неизменной.

Пусть некоторая фирма осуществляет равновесный обмен с ЭА, меняя посредством закупок и продаж одни виды ресурсов на другие в том числе на базисный. Обмен происходит обратимо и таким образом, что начальное и конечное состояния ЭА в пространстве с координатами N_i совпадают. Таким образом, фирма не извлекла при такой торговле материальных ресурсов. Если потребовать, чтобы показатель r ценности базисного ресурса оставался во время цикла неизменным, то фирма не может извлечь и базисного ресурса, иначе это означало бы, что возможности извлечения базисного ресурса не ограничены. Ведь его можно получать лишь от одного ЭА, не вызывая ни в его состоянии, ни в состоянии окружения никаких изменений. Из невозможности такого

экономического «вечного двигателя» следует, что при $r = \text{const}$

$$\oint \sum_i p_i(N, r) dN_i = 0.$$

А из этого, в свою очередь, вытекает, что существует такая функция $Q(N, r)$, частные производные которой по N_i равны p_i . Ее дифференциал имеет вид

$$dQ = \sum_i p_i dN_i + \frac{\partial Q}{\partial r} dr.$$

Этот дифференциал является полным дифференциалом лишь при $r = \text{const}$.

Выражение (7.2) можно переписать как

$$dU = dM + dQ - \frac{\partial Q}{\partial r} dr = d(M + Q) - \frac{\partial Q}{\partial r} dr.$$

Обозначая $M + Q = Y$, а $-\frac{\partial Q}{\partial r} = \gamma$, получим, что

$$dU = dY + \gamma dr. \quad (7.3)$$

Выражение (7.3) зависит от трех переменных: Y , γ и r . Эти переменные связаны друг с другом. Если бы это было не так, то на плоскости с координатами Y, r можно было бы при неизменной капитализации перейти из заданного начального состояния в любое другое за счет выбора γ . Между тем возможности такого перехода ограничены. Действительно, пусть на плоскости Y, r начальному состоянию соответствует точка 1, а конечному точка 2, такая, что при обмене с окружением, приводящим из точки 1 в точку 2, при постоянном значении r капитализация ЭА уменьшается ($dU < 0$). Если бы можно было попасть в ту же точку при $dU = 0$, то ЭА мог бы организовать циклический процесс, при котором его состояние менялось бы от точки 1 к точке 2 вдоль траектории с $dU = 0$, а возвращалось бы из точки 2 в точку 1 с постоянным значением r и приростом капитализации ($dU > 0$). Повторяя такой цикл, он мог бы в обратимом обмене повысить свою капитализацию на любую величину, что невозможно. Так что эти три переменные зависимы и γ — функция Y и r . Таким образом, прирост dU полного капитала является пфаффовою формой двух переменных, которая всегда имеет интегрирующий множитель.

Напомним, что *пфаффовою формой* называют дифференциальную форму первого порядка, т. е. сумму произведений функций нескольких

переменных на дифференциалы этих переменных,

$$K = \sum_{i=1}^n F_i(x) dx_i.$$

Если $n = 2$ и функции F_i дифференцируемые, то всегда найдется, такой интегрирующий множитель $f(x)$, что $dS = f(x)K$ является полным дифференциалом, т. е. S зависит от x , а $\oint dS = 0$. Множитель $f(x)$ обычно не единственный.

Прежде чем найти интегрирующий множитель p_0 , уточним зависимость γ от Y и r . Для этого рассмотрим систему, состоящую из двух ЭА, у которых ($r_1 = r_2 = r$). Капитализация U , переменная Y и запасы базисного ресурса для системы аддитивны, так что $U = U_1 + U_2$, $Y = Y_1 + Y_2$. Так что и $Q = Q_1 + Q_2$. Соответственно $\gamma(Y_1 + Y_2, r) = \frac{\partial Q}{\partial r} = \gamma_1(Y_1, r) + \gamma_2(Y_2, r)$. Из этого равенства следует, что частные производные $\gamma_1(Y_1, r)$ по Y_1 и $\gamma_2(Y_2, r)$ по Y_2 равны друг другу и равны производной γ по Y , т. е. эти производные могут зависеть только от r , но не от Y . Это означает, что функция γ является афинной функцией Y и имеет вид

$$\gamma(Y, r) = G(r)Y + l(r). \quad (7.4)$$

Для прироста капитализации получим выражение

$$dU = dY + (G(r)Y + l(r)) dr.$$

Интегрирующим множителем может быть любая функция p_0 , такая, что $dS = p_0 dU = p_0 dY + p_0(G(r)Y + l(r))dr$ — полный дифференциал. Так как в этом случае смешанная производная функции S не зависит от порядка дифференцирования, то функция p_0 должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial [p_0(G(r)Y + l(r))]}{\partial Y}. \quad (7.5)$$

Будем искать p_0 как функцию r , тогда условие (7.5) приводит к уравнению

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = p_0 G(r), \quad (7.6)$$

определяющему зависимость $p_0(r)$, которая наряду с r может служить оценкой базисного ресурса и так же как и r зависит от M и N .

Таким образом, *существует некоторая функция экстенсивных переменных $S(N, M)$, такая, что ее дифференциал имеет вид*

$$dS = p_0(N, M)dU = p_0(N, M) \left[dM + \sum_i p_i(N, M)dN_i \right]. \quad (7.7)$$

В обратимом, т. е. осуществляемом по ценам, совпадающим с оценками ресурсов, цикле обмена в пространстве N, M , функция S не изменяется, так как

$$\oint dS = 0. \quad (7.8)$$

Оценки ресурсов могут быть выражены через функцию S :

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial N_i} / \frac{\partial S}{\partial M}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

При этом оценка базисного ресурса p_0 , положительна для всех экономических агентов, а p_i могут быть и отрицательными, если i -й ресурс требует, например, утилизации или затрат на хранение. Таким образом, через функцию благосостояния интенсивные и экстенсивные переменные в равновесии связаны друг с другом, поэтому ее иногда называют *структурной*.

Наличные деньги представляют собой один из ресурсов с запасом N_j , оценка которого $p_j = 1/p_0$. В изолированной системе из нескольких ЭА, которые используют один и тот же денежный ресурс и могут покупать и продавать друг другу за деньги базисный ресурс (существует валютный обмен), устанавливается равновесие, в котором оценки базисного ресурса одинаковы. Если равновесие по деньгам устанавливается гораздо быстрее, чем равновесие по другим видам ресурсов, то в такой системе (*равновесной по базисному ресурсу*) оценку p_0 можно считать одинаковой для всех, контактирующих друг с другом ЭА, использующих одни и те же деньги.

Приведенное выше доказательство существования функции благосостояния $S(N, M)$, как следствие невозможности извлечения прибыли от торговли с одним ЭА, повторяет общую логику доказательства существования энтропии в термодинамике. Применительно к микроэкономике для случая скалярного ресурса оно дано Л.И. Розоноэром в приложении к обзору [3].

В микроэкономике часто характеризуют предпочтения экономического агента кривыми (поверхностями) безразличия. Каждая из них выделяет множество одинаково предпочтительных запасов ресурсов. Получение ЭА-ом некоторого количества базисного или иного ресурса без изменения запасов остальных переводит его состояние на более высокую кривую безразличия, оно становится предпочтительнее. В работе [110] существование S было доказано, исходя из аксиомы Вилла

[167], использующей понятие предпочтения экономического агента: в пространстве состояний $X = (N, M)$ ЭА не существует такой последовательности состояний X_1, X_2, \dots, X_m , что X_i предпочтительнее, чем X_{i-1} для $i = 2, \dots, m$, а конечное и начальное состояния совпадают, $X_1 = X_m$.

При обмене ресурсами между ЭА должны соблюдаться условия добровольности, заключающиеся в том, что ни одна из функций благосостояния S_ν не уменьшается (исключение — ассоциированный обмен, благотворительность). Условия добровольности делают невозможным прямой обмен одним видом ресурса, если его оценки у контактирующих друг с другом ЭА одного знака. Такой обмен становится возможным лишь при наличии посредника, обладающего тем или иным видом ресурса.

Если функция благосостояния измеряется в национальной валюте, то величина p_0 характеризует ценность для ЭА базисного ресурса и имеет размерность [единицы национальной валюты/единицы базисного ресурса]. Оценка p_0 базисного ресурса в процессах обмена экономическим агентом денег на валютном рынке играет ту же роль, что и оценка p_i при обмене ресурсом N_i .

Описание экономических систем становится формально близким к соотношениям термодинамики, если ввести «экономическую температуру»

$$T = 1/p_0.$$

Такое обозначение было введено в [46], истолкованию этой величины, названной «ликвидностью», и ее свойствам значительное внимание уделено в [123].

При объединении двух ЭА с одинаковыми функциями благосостояния естественно предположить, что оценки ресурсов не изменятся, а функция благосостояния возрастет во столько же раз, во сколько вырастут запасы ресурсов, т.е. она, как N и M , является экстенсивной переменной. В этом случае функция S — однородная первого порядка, а ее производные по N и M (оценки) — однородные функции нулевого порядка. По теореме Эйлера однородная функция первого порядка может быть записана в форме

$$S(N, M) = p_0(M, N) \left(\sum_i p_i(M, N) N_i + M \right). \quad (7.10)$$

Зависимость $p(N, M)$ может быть найдена по формулам (7.9) и экспериментально по поведению ЭА в процессах обмена.

Для экономического резервуара оценки ресурсов p_i и p_0 постоянны, а функция благосостояния линейная по M и N .

В литературе часто постулируют существование функции благосостояния S , а оценки определяют через экстремальную задачу, в которую они входят, как параметры:

$$S(N, M) \rightarrow \max \left/ \left(\sum_i p_i N_i + M \right) = U, \quad (7.11) \right.$$

где величина U фиксирована.

Функция Лагранжа задачи (7.11)

$$L = S(N, M) - p_0 \left(\sum_i p_i N_i + M \right),$$

где p_0 — неопределенный множитель Лагранжа. Условия стационарности L по M и N приводят к соотношениям, которые совпадают с выражениями (7.9).

Функцию S в задаче (7.11) предполагают дважды непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей по каждому из аргументов, строго выпуклой вверх и равной нулю в начале координат. Ее частные производные стремятся к бесконечности, когда соответствующая переменная стремится к нулю. Как следствие этих предположений решение задачи (7.11) единственно и положительно, а p_i падает с ростом N_i . При таком описании ЭА подобен термодинамической подсистеме конечной емкости.

Отметим, что в общем случае, когда система не равновесна по базисному ресурсу, функция благосостояния системы не равна сумме функций благосостояния составляющих ее подсистем. Более того, для каждой подсистемы функция благосостояния может иметь свою размерность. В отличие от S капитализация каждой из подсистем, объемы базисного ресурса и связанного капитала имеют одинаковую размерность, и их сумма имеет смысл для системы в целом в условиях внутреннего равновесия каждого из входящих в нее ЭА.

Дифференциальные соотношения между оценками, аналог уравнения Гиббса–Дюгема. Запишем дифференциал функции S

$$dS = p_0 \left(dM + \sum_{i=1}^n p_i dN_i \right) = p_0 dU. \quad (7.12)$$

Разрешив (7.12) относительно dM , получим

$$dM = \frac{dS}{p_0} - \sum_{i=1}^n p_i dN_i. \quad (7.13)$$

Из равенства (7.10) следует, что

$$M = \frac{S}{p_0} - \sum_{i=1}^n p_i N_i, \quad (7.14)$$

$$dM = \frac{dS}{p_0} + Sd\left(\frac{1}{p_0}\right) - \sum_{i=1}^n (p_i dN_i + N_i dp_i). \quad (7.15)$$

Сравнивая равенства (7.15) и (7.13), найдем соотношение, связывающее оценки ресурсов и капитала

$$Sd\left(\frac{1}{p_0}\right) - \sum_{i=1}^n N_i dp_i = 0. \quad (7.16)$$

Аналогично, сравнивая дифференциал S , найденный из равенства (7.10), с выражением (7.12), получим

$$M dp_0 + \sum_{i=1}^n N_i d(p_0 p_i) = 0. \quad (7.17)$$

Условия (7.16), (7.17) вытекают из существования функции S и ее однородности. Они являются экономическими аналогами уравнений Гиббса-Дюгема. Из них, например, следует, что если состояние системы изменяется так, что оценки ресурсов постоянны, то неизменна и оценка капитала p_0 .

В силу симметрии матрицы вторых производных для дважды дифференцируемой функции, чувствительности оценок к изменениям запасов ресурсов и капитала связаны равенствами

$$\frac{\partial(p_0 p_i)}{\partial N_j} = \frac{\partial(p_0 p_j)}{\partial N_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial N_i \partial N_j}, \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial N_j} = \frac{\partial(p_0 p_j)}{\partial M} = \frac{\partial^2 S}{\partial M \partial N_j}. \quad (7.19)$$

Из условий (7.18), (9.101), как нетрудно показать, следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial N_j} + p_i \frac{\partial p_j}{\partial M} = \frac{\partial p_j}{\partial N_i} + p_j \frac{\partial p_i}{\partial M}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7.20)$$

Равенства (7.18) и (9.101) — экономический аналог соотношений Максвелла.

Диссипация капитала. Вернемся к циклическому процессу взаимодействия фирмы с одним ЭА и потребуем, чтобы средняя интенсивность процессов обмена была фиксирована. Тогда фирма при закупке ресурса вынуждена будет повышать цены по сравнению с оценками p_i , а продавать по ценам, которые ниже, чем эти оценки. Капитализация ЭА при этом возрастет, так как

$$\Delta U = \oint \sum (p_i(N, M) - c_i) dN_i \geq 0, \quad (7.21)$$

а фирма понесет убытки в количестве ΔU по сравнению с обратимым процессом.

Интенсивность потерь фирмы за счет необратимости

$$\sigma(t) = \sum_i n_i(p_i, c_i)(p_i - c_i) \geq 0 \quad (7.22)$$

назовем *диссипацией капитала*, связанной с необратимостью процесса ресурсообмена. Она в данном случае имеет смысл торговых издержек.

Условие (7.21) неубывания капитализации (значит и благосостояния) при экономическом обмене являются аналогом интеграла Клаузиуса, а закон, согласно которому при контакте двух ЭА ресурс переходит от ЭА, для которого его оценка меньше, к ЭА, у которого его оценка больше, и при этом суммарная величина связанного капитала не убывает ($\Delta(F_1 + F_2) \geq 0$), является аналогом второго начала термодинамики и позволяет построить необратимую микроэкономику, во многом аналогичную необратимой термодинамике.

Второй закон микроэкономики. Аналогом законов сохранения материи и энергии в микроэкономике являются законы сохранения ресурсов. Здесь мы остановимся на экономической аналогии второго закона термодинамики.

Для второго закона термодинамики имеется несколько формулировок, каждая из которых может считаться следствием других. Обсудим аналоги некоторых из этих формулировок в микроэкономике.

Среди многочисленных формулировок второго начала выделим две: формулировку Клаузиуса с уточнением Планка: «Теплота сама собой не может переходить от тела холодного к телу более горячему без того, чтобы не осталось других изменений», а также формулировку Леонтовича: «Невозможно построить устройство, в результате действия которого производилась бы положительная работа только за счет охлаждения одного тела без каких либо других изменений».

Т а б л и ц а 7.1.

Аналогии между термодинамическими и микроэкономическими системами и характеризующими их переменными

Термодинамическая система		Микроэкономическая система	
Название	Обозначение	Название	Обозначение
Резервуар (обратимый теплообмен)	T_-	Экономический резервуар	p_-
Резервуар (необратимый теплообмен)	$q = \alpha(T - T_-)$	Монопольный рынок	$n = \alpha(c - p_-)$
Количество вещества	N	Запас ресурса	N
Химический потенциал	$\mu(N)$	ЭА, оценка ресурса	$p(N)$
Тепловая машина, температура	$T(t)$	Фирма-посредник, цена	$c(t)$
Свободная энергия, работа	A	Базисный ресурс	M
Работоспособность системы	E	Прибыльность системы	E
Энтропия системы	S	Связанный капитал	F
Производство энтропии	σ	Диссипация капитала	σ
Внутренняя энергия	U	Полный капитал	$U = M + F$

Обозначения, принятые в таблице: T_- и T — температуры резервуара и контактирующей с ним системы, p_- — оценка ресурса на рынке, c — цена ресурса, назначаемая фирмой, N — запас ресурса, U — внутренняя энергия системы и полный капитал, q и n — потоки теплоты и ресурса, M и F — базисный ресурс и связанный капитал.

М. Планк сформулировал как следствие из второго закона термодинамики следующее утверждение: *В необратимом процессе в замкнутой термодинамической системе энтропия может только возрастать, а эксергия системы уменьшаться. Состоянию равновесия такой системы соответствует максимум энтропии и минимум работоспособности при условиях, отвечающих наложенным ограничениям.*

В микроэкономике приведенным формулировкам соответствуют следующие утверждения.

1. Поток скалярного ресурса не может переходить от ЭА, у которого его оценка выше, к ЭА с более низкой оценкой без того, чтобы не осталось других изменений.

2. Невозможно извлечь капитал за счет обмена ресурсами с одним ЭА без каких-либо других изменений.

3. Процессы ресурсообмена в изолированных микроэкономических системах протекают в таком направлении, что суммарный связанный капитал экономических агентов увеличивается и достигает максимума, а потенциальная возможность извлечения базисного ресурса (прибыльность) уменьшается и достигает минимума, которые совместимы с наложенными на систему ограничениями, в число последних входят и условия добровольности.

В табл. 7.1 сведены аналогии между экономическими и термодинамическими системами и характеризующими их переменными [68].

7.2. Микроэкономические балансы

Открытая система. Запишем уравнения балансов для неоднородной экономической системы, обменивающейся с окружением потоками ресурсов и капитала. При этом индекс i припишем i -му виду ресурса, а индекс j — j -й подсистеме. Каждая из подсистем обменивается потоками ресурсов с внешними продавцами и покупателями и с другими подсистемами, входящими в рассматриваемую систему. Потоки ресурсов и капитала (базисного ресурса), поступающие в подсистему, будем считать положительными, а покидающие ее — отрицательными.

Внешние потоки подразделяют на две категории: а) принудительно поступающие в систему и меняющие свою интенсивность во времени под влиянием внешних факторов, и б) зависящие от цен, назначаемых внешними продавцами и покупателями, и от оценок ресурса в рассматриваемой подсистеме. Первые из них по аналогии с термодинамикой будем называть *конвективными* и отмечать индексом k , а вторые — *диффузионными* (индекс d).

Внутренние потоки между двумя подсистемами j -й и ν -й зависят от функций спроса и предложения этих подсистем $\tilde{n}_{\nu ji}(p_j, c_{j\nu})$ и $\tilde{n}_{j\nu i}(c_{j\nu}, p_\nu)$. В этих выражениях $c_{j\nu}$ — вектор промежуточных цен с составляющими

$c_{j\nu i}$, который находят из условия непрерывности потоков

$$\tilde{n}_{\nu j i}(p_j, c_{j\nu}) = -\tilde{n}_{j\nu i}(c_{j\nu}, p_\nu) = n_{\nu j i}(p_j, p_\nu), \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.23)$$

Выражение для потока ресурсообмена между подсистемами $n_{\nu j i}(p_j, p_\nu)$ зависит только от оценок контактирующих подсистем, так как вектор $c_{j\nu}(p_j, p_\nu)$ из условий (7.23) выражен через оценки.

Пример. Пусть при обмене i -м ресурсом

$$\tilde{n}_{\nu j i} = \alpha_1(p_{j i} - c_{j\nu i}), \quad \tilde{n}_{j\nu i} = \alpha_2(p_{\nu i} - c_{j\nu i}).$$

По условию (7.23) получим для промежуточных цен

$$c_{j\nu i} = \frac{\alpha_1 p_{j i} + \alpha_2 p_{\nu i}}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Поток ресурсообмена между подсистемами

$$n_{\nu j i}(p_j, p_\nu) = \bar{\alpha}(p_{j i} - p_{\nu i}), \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Кроме обмена потоками, подсистема может преобразовывать одни виды ресурсов в другие.

Уравнение баланса по i -му ресурсу:

$$\dot{N}_i = \sum_j \left(n_{i j}^k(t) + n_{i j}^d(p_j, c_j) + W_j(p_j) \alpha_{i j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7.24)$$

где суммирование ведется по всем подсистемам; $W_j(p_j)$ — интенсивность процесса преобразования ресурсов в j -й подсистеме; коэффициенты $\alpha_{i j} > 0$, если i -й ресурс возникает в j -й подсистеме и $\alpha_{i j} < 0$, если этот ресурс расходуется. Они определяют, сколько i -го ресурса возникает (расходуется) в единицу времени; c_j — вектор цен при обмене j -й подсистемы с окружением.

Уравнение баланса по базисному ресурсу:

$$\dot{M} = \sum_j \left(m_j^k(t) - \sum_i c_{i j} n_{i j}^d(p_j, c_j) \right) + \sum_j \sum_\nu n_{j\nu} c_{j\nu}(p_j, p_\nu). \quad (7.25)$$

Уравнение баланса по связанному капиталу:

$$\dot{F} = \sum_{i,j} p_{i j} (N_j, M_j) (n_{i j}^k(t) + n_{i j}^d(p_j, c_j)) + \sigma, \quad (7.26)$$

где диссипация капитала σ равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_j \sum_\nu n_{j\nu}(p_j, p_\nu)(p_j - p_\nu) + \sum_j W_j(p_j) A_j; \quad (7.27)$$

p_j и p_ν — векторы оценок ресурсов j -й и ν -й подсистем с составляющими p_{ij} и $p_{i\nu}$; $A_j = \sum_i \alpha_{ij} p_{ij}$; $n_{j\nu} = -n_{\nu j}$ — вектор-функция потока ресурсов.

Первое слагаемое в (7.27) — изменение связанного капитала за счет ресурсообмена, а второе — за счет преобразования ресурсов. p_j и p_ν — векторы оценок ресурсов для контактирующих подсистем с составляющими p_{ji} и $p_{\nu i}$, а $n_{j\nu} = -n_{\nu j}$ — вектор-функция потока ресурсообмена между подсистемами.

Величина $\sigma(p) \geq 0$, так что в неоднородной открытой системе в отсутствие конвективных потоков связанный капитал в выходящих потоках не меньше, чем в потоках, поступающих в систему. Знак равенства соответствует однородной системе.

Как и в термодинамике, условие $\sigma(p_1, p_2) \geq 0$ вместе с балансовыми соотношениями (7.24)–(7.26) выделяет границу области реализуемости экономической системы в классе обратимых процессов. Наложение на интенсивность того или иного потока условия, позволяют определить величину $\sigma_{\min} > 0$, достижимую при этих условиях. При этом область реализуемости сужается, так как вместо неравенства $\sigma \geq 0$ справедливо неравенство $\sigma \geq \sigma_{\min}$. Если $\Delta p_{j\nu} = p_j - p_\nu$ мало, а кинетическая функция $n_{i\nu}$ дифференцируема по совокупности аргументов, то σ представляет собой положительно-определенную квадратичную форму переменных $\Delta p_{j\nu}$.

В отличие от термодинамических систем, где в стационарных внешних условиях устанавливается режим, в котором интенсивные переменные и потоки обмена постоянны, в экономике при стационарных внешних условиях происходит накопление базисного ресурса каждой из подсистем.

Условие добровольности обмена накладывает ограничения на множество возможных состояний открытой системы. Чтобы найти эти ограничения, запишем балансовые соотношения по ресурсу и капиталу для j -й подсистемы:

$$\dot{N}_{ij} = n_{ij}^k(t) + n_{ij}^d(p_j, p_\nu) + \sum_\nu n_{ij\nu}(p_j, c_{j\nu}) + W_j(p_j) \alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7.28)$$

$$\dot{M}_j = m_j^k(t) - \sum_i [c_{ij} n_{ij}^d(p_j, c_j) + \sum_\nu c_{ij\nu}(p_j, p_\nu) n_{ij\nu}(p_j, p_\nu)]. \quad (7.29)$$

Для любой подсистемы в силу условий добровольности

$$\dot{U}_j = \dot{S}_j / p_{0j} = \sum_i (p_{ij} \dot{N}_{ij} + \dot{M}_j) \geq 0,$$

что с учетом (7.28), (7.29) приводит к ограничениям на оценки и потоки в системе

$$\sum_i \left[p_{ij} [n_{ij}^k(t) + W_j(p_j) \alpha_{ij}] + \sum_\nu [n_{ij\nu}(p_j, p_\nu)(p_{ij} - c_{ij\nu}(p_j, p_\nu))] + n_{ij}^d(p_j, c_j)(p_{ij} - c_{ij}) \right] + m_j^k(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (7.30)$$

Изолированная система. Для изолированной системы внешние потоки отсутствуют и балансовые соотношения (7.24)–(7.26) примут форму

$$\dot{N}_i = \sum_j W_j(p_j) \alpha_{ij}, \quad N_i(0) = \sum_j N_{ij}(0), \quad (7.31)$$

$$\dot{M} = \sum_j \dot{M}_j = 0, \quad (7.32)$$

$$\dot{F} = \sum_j \dot{F}_j = \sigma \geq 0. \quad (7.33)$$

В состоянии равновесия связанный капитал максимален, потоки n_{ij} и скорости превращения ресурсов $W_j(p_j)$ равны нулю. При этом равновесное распределение базисного ресурса \bar{M} зависит от кинетики ресурсообмена между подсистемами.

В термодинамике условия равновесия можно получить из задачи о максимуме суммарной энтропии системы при заданном суммарном значении той или иной экстенсивной переменной. Например, если задан суммарный объем подсистем, а остальные экстенсивные переменные неизменны, то максимуму суммарной энтропии соответствует такое распределение объемов, при котором производные энтропии каждой системы по ее объему одинаковы, а это приводит к равенству давлений. Аналогично распределение общего количества тепловой энергии в равновесии приводит к равенству температур и т.д.

В микроэкономике условия равновесного распределения ресурсов также можно получить из требования максимума суммарного связанного капитала системы, при заданном суммарном запасе ресурсов. Оно приводит к распределению, при котором производные связанного капитала каждой подсистемы по запасам распределяемого ресурса (оценки ресурса) одинаковы.

Для каждой j -й из подсистем изолированной системы

$$\dot{N}_{ji} = \sum_\nu n_{\nu ji}(p_j, p_\nu) + W_j(p_j) \alpha_{ij}, \quad (7.34)$$

$$\dot{M}_j = - \sum_{\nu, i} \tilde{n}_{\nu ji}(p_j, c_{j\nu}) c_{j\nu i} \quad \nu, j = 1, \dots, n, \quad (7.35)$$

где $c_{j\nu}$ — промежуточные цены, определяемые условиями (7.23). Таким образом, вектор цен, а значит, и правая часть уравнений (7.35) зависит от функции $\tilde{n}_{\nu j}$ спроса и предложения ресурсов.

После определения из (7.23) промежуточной цены $c_{j\nu}(p_j, p_\nu)$ и подстановки ее в $\tilde{n}_{j\nu}$ и $\tilde{n}_{\nu j}$ эти функции оказываются одинаковыми и равными кинетической функции с составляющими $n_{j\nu}(p_j, p_\nu)$, фигурирующей в выражениях (7.27) и (7.34).

В качестве примера подсчитаем диссипацию капитала σ в рассмотренном ранее примере, когда кинетика обмена двух ЭА линейна относительно разности между ценой и оценкой

$$n_1(p_1, c) = \alpha_1(p_1 - c), \quad (7.36)$$

$$n_2(p_2, c) = \alpha_2(p_2 - c). \quad (7.37)$$

После исключения промежуточной цены по условию $-n_1 = n_2 = n$ диссипация ресурсообмена

$$\sigma(p_1, p_2) = (p_2 - p_1)\bar{\alpha}(p_2 - p_1) = \bar{\alpha}(p_2 - p_1)^2 = \frac{n^2(p_1, p_2)}{\bar{\alpha}}. \quad (7.38)$$

Возможные распределения базисного ресурса. Равновесное распределение базисного ресурса \bar{M} определяется кинетикой обмена, а от \bar{M} зависят и равновесные запасы ресурсов \bar{N} , так как они удовлетворяют равенству

$$p_j(\bar{M}_j, \bar{N}_j) = p_\nu(\bar{M}_j, \bar{N}_j) = \lambda, \quad \forall j, \nu. \quad (7.39)$$

В ряде случаев представляет интерес множество Q значений вектора \bar{M} , которые могут быть достигнуты из заданного начального состояния системы для различных функций $\tilde{n}(p, c)$ спроса и предложения. Для каждой j -й подсистемы минимальный прирост капитала $\Delta M_j = \bar{M}_j - M_{j0}$ достигается в том случае, когда обмен с другими подсистемами ведется при ценах $c_{j\nu}$, сколь угодно близких к p_j , т. е. обратимо, так что величину \bar{M}_j^{\min} можно найти по условию обратимости $S_j(\bar{N}_j, \bar{M}_j) = S_j(N_{j0}, M_{j0})$. Максимальному же значению \bar{M}_j^{\max} соответствует такой обмен, при котором $c_{j\nu}$ сколь угодно близки к p_ν . Таким образом, в пространстве с координатами M_j можно построить параллелепипед с границами $\bar{M}_j^{\min} \leq M_j \leq \bar{M}_j^{\max}$. Сечение этого параллелепипеда плоскостью

$$\sum_j \bar{M}_j = \sum_j M_{j0} \quad (7.40)$$

выделяет множество Q всех возможных равновесных распределений базисного ресурса между подсистемами для различных кинетических функций.

Учет роста капитала и деградации ресурсов. Экономическая система реально очень редко бывает изолированной. В частности, ЭА, имеющий базисный ресурс M , может вложить его в ценные бумаги или положить в банк. Для простоты будем считать эти вложения безрисковыми и приносящими в единицу времени доход $\alpha^0 M$. Чтобы учесть этот фактор, в правую часть уравнений баланса по базисному ресурсу (7.35), (7.25), как для каждого ЭА, так и для системы в целом нужно добавить слагаемое $\alpha^0 M_j$ либо $\alpha^0 M$.

Аналогично обстоит дело с теми видами ресурсов, которые изменяют свои свойства во времени (физическое или моральное старение), либо при потреблении не увеличивают, а уменьшают свою оценку. Такой процесс называют деградацией ресурсов. Его можно учесть, введя функцию $W_j^d(p_j)$, такую, для которой суммарный связанный капитал производимых ресурсов был бы меньше, чем ресурсов, используемых в производстве ($A_j < 0$). Если же ресурс изменяет свои свойства во времени, например, портится при длительном хранении, то это можно учесть, введя нестационарные оценки или подобно базисному ресурсу добавить в правую часть уравнения (7.24) слагаемое вида $-\beta_i^0 N_i$, в котором коэффициент β_i^0 оценивает скорость потери i -го ресурса.

7.3. Ресурсообмен в изолированных системах

Остановимся подробнее на обмене ресурсами в изолированных системах. В таких системах суммарный объем базисного ресурса не изменяется $\left(\sum_j dM_j = 0\right)$, между тем в любых процессах обмена функция благосостояния и капитализация каждой подсистемы возрастают. Это происходит за счет роста связанного капитала F , дифференциал которого равен

$$dF = \sum_j \sum_i p_{ji}(N_j, M_j) dN_{ji}. \quad (7.41)$$

Ресурсообмен в изолированной системе может протекать как с участием базисного ресурса (продажа), так и посредством обмена одного ресурса на другой (бартер) при неизменных запасах базисного ресурса

у ЭА. И в том, и в другом случаях даже при неограниченной продолжительности процесса при прямом обмене величина связанного ресурса возрастает: $dF > 0$. Другими словами, такой обмен всегда необратим подобно процессам прямого теплообмена и диффузии в термодинамике.

В термодинамике равновесное состояние изолированной системы, не содержащей активных подсистем, однозначно определяется параметрами подсистем (уравнениями состояния) и начальными условиями. От кинетики взаимодействия подсистем оно не зависит. В экономических системах равновесное состояние при обмене ресурсами может принадлежать некоторому множеству в зависимости от параметров кинетических функций.

Условие добровольности обуславливает тот факт, что обмен в ЭС одним видом ресурса возможен лишь тогда, когда оценки этого ресурса у контактирующих подсистем имеют разный знак. Например, отходы производства для одной подсистемы имеют отрицательную, а для другой, умеющей их перерабатывать, положительную оценку. Если же оценки одного знака, то обмен может быть произведен не менее, чем двумя видами ресурсов, со встречным потоком базисного ресурса (закупка) или ресурса другого типа (бартер). При этом любое состояние, при котором вектора оценок p ресурсов для всех подсистем одинаковы и нельзя предложить обмена, увеличивающего функцию благосостояния ν -й подсистемы

$$S_\nu = p_{0\nu} \left(M_\nu + \sum_{i=1}^n p_i N_{i\nu} \right) = p_{0\nu} U_\nu, \quad (7.42)$$

без того, чтобы не уменьшить хотя бы одну из функций благосостояния других контактирующих подсистем, оказывается состоянием равновесия. Так что в отличие от термодинамики все Парето-оптимальные состояния в экономике являются равновесными. Одно из таких равновесных состояний соответствует обмену через аукцион. Цены при этом определяются условиями ненакопления ресурса при перепродаже. По окончании ресурсообмена капитализация U_ν каждой подсистемы по равновесным оценкам равна начальной, что определяет равновесное распределение базисного ресурса. Суммарная величина связанного ресурса возрастает, так что при прямом обмене или продаже через «бесприбыльный» аукцион процесс необратим.

Если функции S_ν имеют одинаковую размерность (это не обязательно), то можно на множестве Парето выделить состояние, при котором сумма функций полезности максимальна. Это значит, что ни одна под-

система не может выиграть от перехода в новое равновесие столько, чтобы компенсировать потери другим подсистемам. Как будет показано, этому состоянию соответствует равенство оценок базисного ресурса.

$$p_{0\nu} = p_0, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (7.43)$$

которое вместе с условиями равновесия и ненакопления определяет распределение всех ресурсов. Ранее подобные системы названы равновесными по базисному ресурсу.

Рассмотрим обмен ресурсами и капиталом в изолированных экономических системах различной конфигурации, не содержащих активных подсистем.

Продажа. Пусть система состоит из двух ЭА (рис. 7.1). Первый ЭА в момент $t = 0$ обладает капиталом M_0 , а второй ресурсом N_0 . При $t = 0$ оценка $p_1 > p_2$, в противном случае принцип добровольности блокирует продажу.

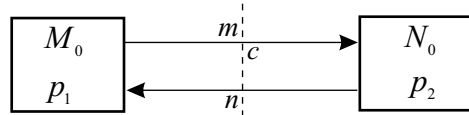


Рис. 7. 1. Структура системы продаж ресурса

В состоянии равновесия справедливы соотношения балансов

$$\overline{M}_1 + \overline{M}_2 = M_0, \quad (7.44)$$

$$\overline{N}_1 + \overline{N}_2 = N_0 \quad (7.45)$$

и условие равенства оценок (условие равновесия)

$$p_1(\overline{N}_1, \overline{M}_1) = p_2(\overline{N}_2, \overline{M}_2) = \overline{p}. \quad (7.46)$$

Прирост капитализации каждого из ЭА зависит от того, по какой цене ведется обмен. Промежуточная цена c должна удовлетворять неравенству

$$p_1 \geq c \geq p_2, \quad (7.47)$$

в противном случае будет нарушен принцип добровольности (цена меньше оценки, когда ресурс продают ЭА, и больше, когда у него ресурс покупают).

Очевидно, что

$$\frac{dM_1}{dN_1} = \frac{dM_2}{dN_2} = -c, \quad dN_2 = -dN_1, \quad (7.48)$$

$$N_1(0) = 0, \quad M_1(0) = M_0, \quad N_2(0) = N_0, \quad M_2(0) = 0.$$

Условия (7.48) при заданной цене $c(N_1)$ позволяют выразить M_1, M_2, N_2 через N_1 . Изменение капитализации ЭА можно найти как

$$\Delta U_1 = \int_{\frac{0}{N_1}}^{\frac{\bar{N}_1}{N_1}} (p_1(N) - c(N)) dN, \quad (7.49)$$

$$\Delta U_2 = \int_0^{\frac{0}{N_1}} (c(N) - p_2(N)) dN. \quad (7.50)$$

Для системы

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \Delta F = \int_0^{\bar{N}_1} (p_1(N) - p_2(N)) dN. \quad (7.51)$$

В равенствах (7.49)–(7.51) p_1, p_2 зависят только от N_1 , так как M_1, M_2 и N_2 выражены через N_1 и $c(N_1)$ с использованием уравнений (7.48). В изолированной системе базисный ресурс неизменен, поэтому ΔU равно приросту связанного капитала.

Условия (7.44)–(7.46) не определяют однозначно состояние равновесия. Этих условий три, а переменных четыре $(\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{N}_1, \bar{N}_2)$. При $N_1 \rightarrow \bar{N}_1$ цена c стремится к \bar{p} . Если $c = p_2$, то $\Delta U_2 = 0$, а прирост капитализации системы $\Delta U = \Delta U_1$ и может быть найден согласно выражению (7.51); если $c = p_1$, то $\Delta U = \Delta U_2$. Равновесные состояния в первом и во втором случае отличаются друг от друга.

Особый случай, когда цена постоянна ($c = \text{const}$) и равна равновесной оценке \bar{p} , фигурирующей в равенстве (7.46). Это — *аукционная продажа*. В этом случае условия (7.44)–(7.46) нужно дополнить соотношением

$$\bar{M}_2 = (N_0 - \bar{N}_2)\bar{p}, \quad (7.52)$$

что определит конечное состояние.

Перейти из любого состояния равновесия, достигнутого при выборе той или иной цены c , удовлетворяющей неравенствам (7.47), в другое равновесное состояние нельзя, не уменьшив капитализацию и функцию благосостояния у одного из ЭА. Таким образом, множество равновесных состояний является Парето-оптимальным (множеством компромиссов).

Пусть функции благосостояния имеют одинаковую размерность. Найдем состояние, для которого сумма $S_1(\bar{N}_1, \bar{M}_1) + S_2(\bar{N}_2, \bar{M}_2)$ достигает максимума при условиях (7.44), (7.45). Условия стационарности по переменным состояниям функции Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^2 S_i(\bar{N}_i, \bar{M}_i) + \lambda_1(\bar{N}_1 + \bar{N}_2) + \lambda_2(\bar{M}_1 + \bar{M}_2)$$

приводят к равенствам

$$\frac{\partial S_i}{\partial \bar{N}_i} = \lambda_1, \quad \frac{\partial S_i}{\partial \bar{M}_i} = \lambda_2, \quad i = 1, 2. \quad (7.53)$$

Так как

$$\frac{\partial S_i}{\partial \bar{M}_i} = p_{i0}(\bar{N}_i, \bar{M}_i),$$

а

$$\frac{\partial S_i}{\partial \bar{N}_i} = p_{i0}(\bar{N}_i, \bar{M}_i)p_i(\bar{N}_i, \bar{M}_i),$$

то в состоянии, соответствующем максимуму суммы функций благосостояния, равны как оценки ресурса p_i (см. (7.46)), так и оценки капитала p_{i0} . Последнее условие доопределяет систему (7.44)–(7.46) и выделяет равновесие, соответствующее максимуму суммы функций благосостояния.

Если оценки ресурса не зависят от запаса капитала M , то (см. раздел 7.1) капитализация U зависит от M и N , а dU является полным дифференциалом. В этом случае на плоскости с координатами M_1, N_1 и началом координат в точке O_1 можно нанести линии уровня функции $U_1(N, M)$. Вдоль этих линий $dU_1 = 0$, а $\frac{dM_1}{dN_1} = -p_1(N_1)$. Поскольку с уменьшением N_1 оценка растет, наклон линий уровня уменьшается и они выпуклы вниз. Капитал $M_1 \leq M^0$.

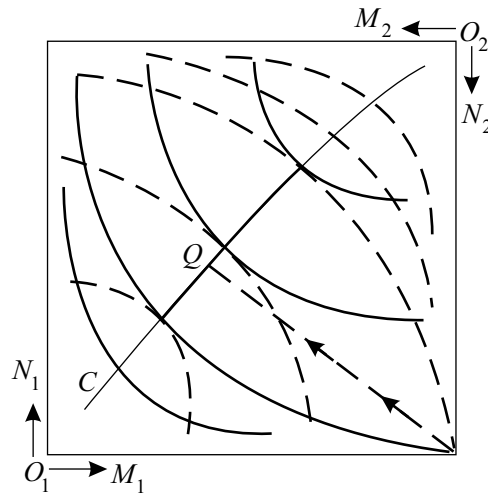


Рис. 7.2. Диаграмма Эджуорта для продажи ресурса при $p_i = p_i(N_i)$

Аналогично для второго ЭА отложим его капитал M_2 и ресурс N_2 от точки O_2 , причем запас ресурса N_2 откладывают вниз, а капитал

влево и нанесем линии постоянных значений капитализации. Подобный рисунок носит название диаграммы (ящика) Эджуорта (рис. 7.2.). Множества постоянства U_1 и U_2 нанесены на этом рисунке пунктиром и сплошной линией соответственно. Точки, в которых эти линии касаются друг друга, удовлетворяют условиям равновесия (7.46). Множество таких точек образует множество равновесия. Начальному состоянию системы соответствует правый нижний угол диаграммы Эджуорта, а любая ее точка удовлетворяет балансовым соотношениям (7.44), (7.45).

Из заданного начального состояния не в каждую точку кривой равновесия можно попасть без нарушения условий добровольности. Достижимые точки выделяют неравенства (7.47). Они гарантируют, что ни для одного из ЭА капитализация не уменьшится. Достижимый участок кривой равновесия Q показан на рис. 7.2 жирной линией, это — множество компромиссов. Точка на нем, которая достигается при аукционной торговле, соответствует пересечению с прямой, проведенной из начального состояния системы и нормальной к линии компромиссов в точке их пересечения.

Рассмотрим обмен через аукцион для n ЭА и m ресурсов. Условия равновесия запишем в форме

$$p_j^i(\bar{N}_j) = \lambda_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.54)$$

Обозначим

$$\Delta N_{ij} = \bar{N}_{ij} - N_{ij}(0), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Условие равновесия (7.54) нужно дополнить балансовыми соотношениями по ресурсам

$$\sum_{j=1}^n \Delta N_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (7.55)$$

и капиталу

$$\Delta M_j = - \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta N_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.56)$$

Условия (7.54)–(7.56) позволяют найти состояние каждого из взаимодействующих ЭА.

Для функции благосостояния в форме Кобба-Дугласа

$$S = M^{\gamma_0} \prod_{i=1}^m N_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^m \gamma_i = 1, \quad (7.57)$$

$$p_i = \frac{\partial S / \partial N_i}{\partial S / \partial M} = \frac{\gamma_i M}{\gamma_0 N_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

записанные выше соотношения примут форму

$$\begin{aligned}\bar{N}_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{\lambda_i} \frac{\bar{M}_j}{\gamma_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \\ \bar{M}_j &= U_{0j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \Delta N_{ij}, \\ \lambda_i &= \left(\sum_{j=1}^n \bar{M}_j \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{0j}} \right) / \left(\sum_{j=1}^n N_{ij}(0) \right),\end{aligned}\quad (7.58)$$

где $U_{0j} = M_j(0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i N_{ij}(0)$ — капитализация j -го ЭА в начальный момент времени по равновесным ценам.

Обмен с резервуаром. Оценки резервуара p^0 постоянны, так что линии $U = \text{const}$ на рис. 7.2 имеют вид прямых. Максимальному приросту ΔU для ЭА соответствует обмен по ценам, равным p^0 . В этом случае в состоянии равновесия капитал \bar{M} и запасы ресурса \bar{N} подчиняются условиям

$$p_i(\bar{M}, \bar{N}) = p_i^0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7.59)$$

$$\bar{M} - M_0 = \sum_{i=1}^m p_i^0 (N_{i0} - \bar{N}_i), \quad (7.60)$$

$$\bar{M} \geq 0, \quad \bar{N}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7.61)$$

где M_0 и N_0 — начальные значения M и N . Условия (7.59), (7.60) определяют состояние равновесия системы, если выполнены ограничения (7.61). Если же они не выполнены, то часть переменных приравнивают к нулю, уменьшая число условий (7.59), (7.60) для расчета оставшихся переменных.

Подсчитаем прирост капитализации ЭА при $m = 1$:

$$\Delta U = \int_{N_0}^{\bar{N}} \frac{dU}{dN} dN = \int_{N_0}^{\bar{N}} \left(\frac{\partial U}{\partial M} \frac{dM}{dN} + \frac{\partial U}{\partial N} \right) dN.$$

Так как

$$\frac{dM}{dN} = -p^0, \quad \frac{\partial U}{\partial N} = p(M, N), \quad M = M_0 - p^0(N - N_0),$$

то

$$\Delta U = \int_{N_0}^{\bar{N}} [p(M_0 - p^0(N - N_0), N) - p^0] dN. \quad (7.62)$$

Если $p \geq p^0$, то $dN \geq 0$, а если меньше, то $dN \leq 0$, так что прирост ΔU неотрицателен.

Покажем, что при обмене по рыночным ценам прирост функции благосостояния ЭА максимален. Действительно

$$S(\bar{N}, \bar{M}) = S\left(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m, M(0) - \sum_{i=1}^m p_i^0(\bar{N}_i - N_i(0))\right) \rightarrow \max_{\bar{N}}.$$

Условия максимума $S(\bar{N})$

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{N}_i} = \frac{\partial S}{\partial \bar{M}} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{N}_i} + \frac{\partial S}{\partial N_i} = p_0(p_i - p_i^0) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (7.63)$$

совпадают с условиями равновесия (7.59). Таким образом, в равновесии с экономическим резервуаром достигается максимум функции благосостояния.

Конкретизируем записанные выше соотношения для случая, когда функция благосостояния ЭА имеет форму Кобба-Дугласа (7.57). Условия равновесия (7.59) приводят к системе линейных уравнений

$$\bar{N}_i c_i \left(1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_i}\right) + \sum_{\nu=1, \nu \neq i}^m c_\nu \bar{N}_\nu = U_0 = M(0) + \sum_{\nu=1}^m c_\nu N_\nu(0), \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.64)$$

Здесь U_0 — капитализация ЭА в начальном состоянии по ценам рынка. Решение уравнений (7.64) имеет вид

$$\bar{M} = U_0 \gamma_0, \quad \bar{N}_i = U_0 \frac{\gamma_i}{c_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.65)$$

Значение функции благосостояния в равновесии с рынком

$$\bar{S} = S(\bar{N}) = U_0 \gamma_0 \prod_{i=1}^m \left(\frac{\gamma_i}{c_i}\right)^{\gamma_i}. \quad (7.66)$$

Пример. Пусть

$$S = (M, N_1, N_2) = M^{1/3} N_1^{1/2} N_2^{1/6}.$$

Начальные запасы ресурсов и цены

$$M(0) = 1, \quad N_1(0) = 2, \quad N_2(0) = 3, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 20.$$

Условия равновесия и баланса по капиталу примут вид

$$\frac{\bar{M}}{\bar{N}_1} = \frac{20}{3}, \quad \frac{\bar{M}}{\bar{N}_2} = 40, \quad \bar{M} = 1 - 10(\bar{N}_1 - 2) - 20(\bar{N}_2 - 3).$$

По условиям (7.65), (7.66) находим

$$U_0 = 81, \quad \bar{N}_1 = 81/20 = 4,05, \quad \bar{N}_2 = 81/120 = 0,675, \quad \bar{M} = 27,$$

$$\bar{S} = \bar{M}^{1/3} \bar{N}_1^{-1/2} \bar{N}_2^{-1/6} = 5,65, \quad S(0) = 1,69.$$

Прирост функции благосостояния ЭА $\Delta S = S(\bar{N}) - S(0) = 3,96$.

Для $m > 1$

$$\Delta U = \sum_{\nu=1}^m \int_{N_{0\nu}}^{\bar{N}_\nu} [p_\nu(M(N), N) - p_\nu^0] dN_\nu, \quad (7.67)$$

где

$$M(N) = M_0 + \sum_{\nu=1}^m p_\nu^0 (N_{0\nu} - N_\nu).$$

Бартер. Рассмотрим систему из двух ЭА, каждый из которых обладает двумя видами ресурсов и не обладает базисным ресурсом или не использует его при обмене. В начальном состоянии запасы ресурсов и их оценки заданы и равны

$$N_1^0 = (N_{11}^0, N_{12}^0), \quad N_2^0 = (N_{21}^0, N_{22}^0), \quad p_{1\nu}^0(N_\nu^0), \quad p_{2\nu}^0(N_2^0), \quad \nu = 1, 2,$$

причем распределение базисного ресурса \bar{M} фиксировано.

Если начальные запасы таковы, что решение условий равновесия

$$p_{11}(\bar{N}_1) = p_{21}(\bar{N}_2), \quad (7.68)$$

$$p_{12}(\bar{N}_1) = p_{22}(\bar{N}_2), \quad (7.69)$$

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_{21} = N_{11}^0 + N_{21}^0, \quad \bar{N}_{12} + \bar{N}_{22} = N_{12}^0 + N_{22}^0, \quad (7.70)$$

неотрицательно, то эти условия полностью определяют состояние системы. Таким образом, равновесное состояние при бартере не зависит от кинетических функций.

В более общем случае бартера, в котором участвует n ЭА, каждый из которых обладает m видами ресурсов, условия равновесия имеют вид

$$\sum_{j=1}^n \bar{N}_{ij} = \sum_{i=1}^n N_{ij}^0 = N_i^0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7.71)$$

$$\bar{N}_{ij} \geq 0, \quad p_{ij}(\bar{N}_j, \bar{M}_j) \geq \lambda_i, \quad \sum_{i\nu} \bar{N}_{i\nu} (p_{i\nu}(\bar{N}_\nu, \bar{M}_\nu) - \lambda_i) = 0, \quad (7.72)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

В неособом случае функции $p_{ij}(\bar{N})$ выпуклые вниз по \bar{N}_j и условия (7.71), (7.72) определяют равновесное распределение ресурсов при фиксированных запасах базисного ресурса \bar{M}_j .

Для изолированных экономических систем справедливо следующее
У т в е р ж д е н и е: При каждом распределении наличного капитала \bar{M} между подсистемами ресурсы распределяются таким образом, что суммарная величина связанного капитала достигает максимума, совместимого с наложенными на систему ограничениями:

$$F(\bar{M}) = \sum_i \sum_j p_{ij}(N_j, \bar{M}_j) N_j \rightarrow \max_{N_j}, \quad (7.73)$$

при условиях (7.71). Если запасы каждой подсистемы по каждому виду ресурсов положительны, то этот максимум равен

$$F^*(\bar{M}) = \sum_i \lambda_i(\bar{M}) N_i^0. \quad (7.74)$$

В свою очередь распределение капитала \bar{M} между подсистемами удовлетворяет условиям баланса по капиталу, неравенствам, вытекающим из принципа добровольности обмена, и зависит от вида кинетических функций.

7.4. Ресурсообмен вблизи состояния равновесия

Условия взаимности для потоков, линейно зависящих от разности цен. Причиной, вызывающей потоки обмена ресурсами, является различие между оценками ресурса обменивающихся подсистем или между ценой и оценкой (для определенности будем рассматривать последний случай) $\Delta = p - c$. При малом отклонении от равновесия это различие мало и потоки можно принять линейно зависящими от разности цены и оценки. Примем за положительное направление поток, направленный в сторону ЭА, тогда

$$g_i = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu i} \Delta_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu i} (p_{\nu} - c_{\nu}), \quad i = 1, \dots, n \quad (7.75)$$

Матрицу A с элементами $a_{i\nu}$ будем называть матрицей кинетических коэффициентов ЭА, она определяет кинетику обмена ЭА с окружением.

Поток ресурсообмена вызывает встречный поток базисного ресурса, такой что

$$\frac{dM}{dt} = - \sum_{i=1}^n c_i g_i. \quad (7.76)$$

Изменение функции благосостояния ЭА при этом

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial M} \frac{dM}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial N_i} g_i = -p_0 \sum_{i=1}^n c_i g_i + \\ &+ p_0 \sum_{i=1}^n p_i g_i = p_0 \sum_{i=1}^n (p_i - c_i) g_i = p_0 \Delta^T A \Delta, \end{aligned} \quad (7.77)$$

где Δ — вектор движущих сил. Так как оценка базисного ресурса $p_0 > 0$ и в силу добровольности ресурсообмена функция благосостояния не уменьшается, матрица A положительно определенная. Покажем, что она еще и симметрическая.

Действительно, если разрешить систему уравнений (7.75) относительно Δ , выразив движущие силы через потоки, то для каждого сколь угодно малого интервала времени выражение (7.77) примет вид

$$\frac{dS}{p_0} = dN^T B dN, \quad (7.78)$$

где dN — вектор-столбец прироста ресурсов за время dt , а $B = A^{-1}$. Элементы $b_{i\nu}$ этой матрицы равны

$$b_{i\nu} = \frac{\partial^2 (S/p_0)}{\partial N_i \partial N_\nu} = b_{\nu i}, \quad i, \nu = 1, \dots, n. \quad (7.79)$$

Таким образом, матрица B положительно определенная и симметрическая, а значит, при малом отклонении от равновесия симметрической является и обратная B матрица кинетических коэффициентов A . Справедливы

У с л о в и я в з а и м н о с т и: влияние разности между ценой и оценкой ν -го ресурса на поток i -го таково же, как влияние разности между ценой и оценкой i -го ресурса на поток ν -го.

Принцип минимальной диссипации капитала. Будем рассматривать режим открытой микроэкономической системы, в котором соблюдаются условия постоянства запасов ресурсов. Для каждого ν -го ЭА условия баланса по ресурсам в векторной форме примут вид

$$\sum_j n_{\nu j} + n_\nu^e + W_\nu \alpha_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (7.80)$$

где j — индекс j -й подсистемы. Здесь $n_\nu^e(p_\nu, c_\nu)$ соответствуют обмену ν -го ЭА с посредником, устанавливающим цены c_ν .

Если режим близок к равновесию, то потоки ресурсообмена линейно зависят от разности оценок двух контактирующих подсистем или от разности цены и оценки при ресурсообмене с внешней подсистемой, а

интенсивности преобразования ресурсов $W_{\nu j}$ постоянны. В этом случае диссипация капитала запишется в форме

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\nu, j, i} \bar{\alpha}_{\nu j i} (p_{\nu i} - p_{j i})^2 + \sum_{i, \nu} p_{\nu i} W_{\nu i} \alpha_{\nu i} + \sum_{\nu} a_{\nu i} (p_{\nu i} - c_{\nu i})^2, \quad (7.81)$$

где ν, j — индексы подсистем, i — индекс ресурса, первое слагаемое соответствует обмену между подсистемами, второе — производству ресурса в подсистемах, третье — обмену с окружением.

Условия минимума σ (см. (7.81)) по оценкам $p_{\nu i}$, ($\nu = 1, \dots, k$) каждого из ЭА с учетом симметричности матрицы A кинетических коэффициентов приводят к равенствам

$$\sum_j a_{\nu j i} (p_{\nu i} - p_{j i}) + W_{\nu i} \alpha_{\nu i} + a_{\nu i} (p_{\nu i} - c_{\nu i}) = 0 \quad \forall i, \nu,$$

что для линейных потоков совпадает с условиями баланса каждой из подсистем по ресурсам (7.80). В силу выпуклости вниз выражения для σ в точке стационарности диссипация капитала достигает минимума. Таким образом, справедливо

У т в е р ж д е н и е: *В открытой микроэкономической системе для законов ресурсообмена, близких к линейным, в состоянии равновесия запасы ресурса и капитала между экономическими подсистемами распределяются таким образом, что диссипация капитала σ минимальна.* Это утверждение является аналогом теоремы Пригожина в термодинамике необратимых процессов [130].

7.5. Заключение

Модели, рассмотренные в этой главе, позволяют найти состояние равновесия в экономических системах, количественно оценить необратимость протекающих процессов, выявить сходство и различия в поведении термодинамических и экономических систем. Они же позволяют формулировать и решать целый класс экстремальных задач, возникающих в том случае, когда экономическая система содержит активную подсистему. Это задачи о максимальном извлечении базисного ресурса в изолированной системе при тех или иных условиях, задачи о максимальной интенсивности потока извлечения базисного ресурса в стационарном режиме открытой системы, о поддержании неравновесного состояния такой системы с минимальной затратой базисного ресурса. Некоторые из этих задач будут рассмотрены в следующей главе.

Глава 8

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Модели экономических макросистем, рассмотренные в предыдущей главе, позволяют ставить и решать задачи об извлечении базисного ресурса в неравновесных экономических системах. Подобно термодинамическим системам, решение этих задач предполагает наличие в системе активной подсистемы — посредника, которая может изменять свои интенсивные переменные (цены покупок и продаж) при контакте с каждым из экономических агентов (ЭА). Если при прямом контакте ЭА-в процесс ресурсообмена всегда необратим, то при контакте с посредником это не так. Процесс обратим, если в любой момент времени цена посредника сколь угодно близка к оценке ресурса ЭА. Правда интенсивность потока ресурса при этом может быть сколь угодно мала. Если же продолжительность процесса ограничена, то возникает задача о таком изменении цен закупки и продажи ресурса, при котором за заданное время посредник извлечет максимальный объем базисного ресурса.

При контакте экономических агентов через посредника уменьшается необратимость процессов ресурсообмена, а устанавливаемые посредником цены ресурсов при обмене с ЭА являются управляющими воздействиями в оптимизационных задачах микроэкономики. Задачу о максимальном извлечении базисного ресурса (максимальной прибыли) решают торговые, финансовые посредники (банки, конторы обмена валюты), производственные фирмы (посредники между производителями сырья, рынками рабочей силы и оборудования и потребителями продукции). Ниже для краткости базисный ресурс M будем называть свободным капиталом. В отличие от связанного капитала F он не за-

висит от запасов ресурсов.

8.1. Прибыльность и условия минимальной диссипации ресурсообмена

Прибыльностью экономической системы назовем максимальное количество базисного ресурса, которое может быть извлечено из системы, при тех или иных ограничениях. При этом под системой понимается один или несколько экономических агентов и их окружение (экономический резервуар). При таком определении прибыльности существенную роль играют ограничения, наложенные на процесс извлечения базисного ресурса. Приведем некоторые из подобных ограничений.

1. Кроме начального состояния, могут быть заданы конечные состояния всех или некоторых ЭА.

2. Могут быть зафиксированы условия равенства тех или иных интенсивных переменных системы (p_i, p_0) с соответствующими переменными внешней среды.

3. Задана продолжительность процесса.

4. Наложены условия неотрицательности переменных.

Эти и иные ограничения уменьшают величину прибыльности. Для некоторых систем задача расчета прибыльности при отсутствии ограничений не имеет решения. К таким системам относятся системы с более чем одним экономическим резервуаром, так как в них посредник может извлечь сколь угодно большое количество базисного ресурса. Отметим, что прибыльность в системе с одним резервуаром при заданном начальном состоянии ЭА и отсутствии ограничений на продолжительность процесса является аналогом эксергии, широко используемой при анализе термодинамических систем.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из k ЭА, каждый из которых располагает некоторым запасом ресурса N_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и базисного ресурса M_i . Оценка ресурса p_i зависит от N_i и M_i . Одной из подсистем может быть экономический резервуар, для которого оценка ресурса p_- постоянна. Предположим, что система замкнута по ресурсам. При контакте i -й и j -й подсистем возникают потоки ресурса n_{ij} и капитала m_{ij} . При этом поток ресурса направлен от подсистемы с меньшей оценкой к подсистеме с большей оценкой, а поток капитала направлен навстречу потоку ресурса. В системе имеется фирма

(посредник), ее целью является такая организация ресурсообмена, при которой фирма извлекает из системы некоторое количество капитала M . В дальнейшем мы будем предполагать, что непосредственный обмен ресурсами между ЭА невозможен, фирма назначает цены покупки и продажи ресурса, стремясь при этом добиться максимума M , а потоки закупок и продаж зависят от цены c_ν , предложенной фирмой ν -й подсистеме, и оценки $p_{i\nu}$ подсистемой i -го ресурса, т.е.

$$n_{i\nu} = n_{i\nu}(p_i, c_i), \quad n_{i\nu} = 0 \quad \text{при} \quad p_\nu = c_\nu, \quad \text{sign}(n_{i\nu}) = \text{sign}(c_{i\nu} - p_{i\nu}).$$

Знак потока в этой задаче будем считать положительным, если он направлен в сторону фирмы, так что он монотонно растет с ростом c_i . Посредник не производит, а только перепродает ресурсы.

Очевидно, что поток капитала

$$m_\nu(p_\nu, c_\nu) = - \sum_i c_{i\nu} n_{i\nu}(p_i, c_i).$$

Запасы ресурса и капитала в ν -й подсистеме изменяются как

$$\begin{aligned} \dot{N}_{i\nu} &= -n_{i\nu}(p_\nu, c_\nu), \quad N_{i\nu}(0) = N_{i\nu 0}, \\ \dot{M}_\nu &= \sum_i c_{i\nu} n_{i\nu}(p_\nu, c_\nu), \quad M_\nu(0) = M_{\nu 0}. \end{aligned}$$

Как правило, оценки $p_{i\nu}(N_\nu, M_\nu)$ монотонно уменьшаются с ростом N_i при фиксированном M_ν и не убывают с ростом M_ν при фиксированном N_ν . Найдем, какой объем базисного ресурса может извлечь фирма за сколь угодно большое и за конечное время для случаев, когда в системе имеется резервуар и когда он отсутствует.

Продолжительность процесса не ограничена

Система содержит экономический резервуар. Извлечение базисного ресурса возможно только в том случае, когда начальное состояние системы неравновесно, т. е. векторы оценок $p_\nu(0)$ у подсистем различны. Процесс заканчивается в состоянии равновесия, когда оценки всех подсистем равны оценкам экономического резервуара

$$p_{i\nu}(\bar{M}_\nu, \bar{N}_\nu) = p_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (8.1)$$

Максимуму извлеченного базисного ресурса соответствует минимум суммарного капитала ЭА и резервуара:

$$\sum_{\nu=0}^m \bar{M}_\nu \rightarrow \min. \quad (8.2)$$

Для достижения этой цели посредник закупает ресурсы по самым низким ценам (оценкам) у тех ЭА, у которых оценки i -го ресурса ниже p_i^0 , а продает по самым высоким ценам (оценкам) тем ЭА, у которых они выше p_i^0 . И при закупке и при продаже процесс обратим и прирост функции благосостояния равен нулю. Начальные запасы капитала ЭА заданы, а изменение запаса капитала экономического резервуара

$$\Delta M^0 = \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^k (\bar{N}_{i\nu} - N_{i\nu}(0)) p_i^0.$$

Для определения состояния равновесия имеем $m \times n$ условий (8.1), и m условий обратимости

$$S_\nu(\bar{M}_\nu, \bar{N}_\nu) = S_\nu(M_\nu(0), N_\nu(0)) = S_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (8.3)$$

Равенства (8.1), (8.3) определяют равновесные запасы ресурсов и капитала ЭА. Извлеченный капитал равен разности между суммарным начальным и конечным капиталом ЭА за вычетом приращения капитала резервуара:

$$E_\infty = \sum_{\nu=1}^m (M_\nu(0) - \bar{M}_\nu) - \Delta M^0. \quad (8.4)$$

Система не содержит экономического резервуара. В этом случае условия равновесия (8.1) остаются в силе с той разницей, что вектор равновесных оценок p^0 неизвестен. Для его определения имеем условия ненакопления ресурсов посредником

$$\sum_{\nu=1}^m (\bar{N}_{i\nu} - N_{i\nu}(0)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.5)$$

Система (8.1), (8.3), (8.5) определяет $(m+1)n$ переменных состояния подсистем в равновесии. Естественно, что равновесие в системе с посредником \bar{M}, \bar{N} отлично от равновесия при прямом обмене. Максимум извлеченного базисного ресурса равен

$$E_\infty = \sum_{\nu=1}^m (M_\nu(0) - \bar{M}_\nu). \quad (8.6)$$

Пример. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из экономического резервуара, подсистемы конечной емкости (ЭА) и посредника. Пусть функция благосостояния для подсистемы следующая

$$S = M^{1/3} N_1^{1/2} N_2^{1/6}.$$

Заданы начальные запасы ресурсов и капитала $M(0) = 150$, $N_1(0) = 20$, $N_2(0) = 30$ и равновесные цены экономического резервуара $p_1^0 = 5$, $p_2^0 = 2$. Из уравнений (8.1), (8.3) определяем равновесное состояние подсистемы и равновесные оценки; из уравнения (8.4) — максимум извлеченного базисного ресурса. Он равен $M = 20,95$. Введем коэффициент k , изменения цен резервуара (рынка совершенной конкуренции) и построим зависимость $E_\infty(k)$ извлеченного капитала от масштаба цен (рис. 8.1).

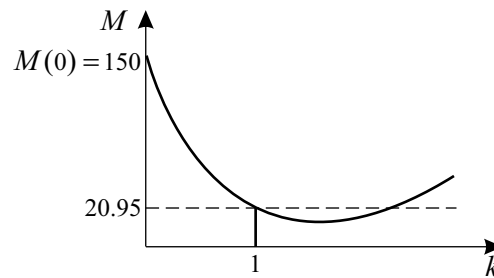


Рис. 8.1. Зависимость извлеченного капитала от масштаба цен экономического резервуара

Подчеркнем, что в отличие от прямого контакта ЭА-в (см. гл. 7) при обратимом обмене через посредника равновесное состояние не зависит от кинетики обмена.

Продолжительность ресурсообмена ограничена

Пусть продолжительность ресурсообмена задана и равна τ . В этом случае посредник вынужден повышать цены закупки ресурса и снижать цены продажи по сравнению с равновесными оценками p_i . Это приведет к необратимым потерям и уменьшит величину извлеченного капитала. Его максимально возможное значение E_τ окажется меньше, чем E_∞ . Их разность $\Delta E = (E_\infty - E_\tau) > 0$ характеризует необратимость процесса ресурсообмена.

Потери извлеченного капитала (уменьшение прибыльности) по сравнению с равновесным процессом оценивает диссипация капитала:

$$\sigma = n(p, c)(p - c). \quad (8.7)$$

Величина диссипативных потерь определяется в случае скалярного ресурса как

$$\Delta S(\tau) = \int_0^{\tau} \sigma(t) dt = \int_0^{\tau} n(p, c)(p - c) dt. \quad (8.8)$$

Условие оптимальности закупок (продаж). Рассмотрим обмен между посредником и ЭА и выясним, как изменять цену продажи ресурса c , чтобы за фиксированное время τ продать заданное количество ресурса ΔN с максимальной выручкой. Ясно, что тем же условиям будет отвечать и цена покупки ресурса у ЭА, если фирма стремится затратить как можно меньше капитала. И в том, и в другом случае объем капитала ЭА в конце процесса $M(\tau)$ должен быть минимален.

Задача формулируется как

$$\bar{M} = M(\tau) \rightarrow \min_{c(t)} \quad (8.9)$$

при условиях

$$\bar{N} = N(\tau) = N_0 - \Delta N, \quad (8.10)$$

$$\frac{dM}{dN} = -c, \quad (8.11)$$

$$\int_0^{\tau} dt = \int_{\bar{N}}^{N_0} \frac{dN}{n(p(N, M), c)} = \tau. \quad (8.12)$$

Здесь для перехода от dt к dN использована кинетическая зависимость

$$\frac{dN}{dt} = -n(p, c),$$

в которой поток n на интервале $(0, \tau)$ не обращается в нуль.

В задаче (8.9)–(8.12) требуется найти такую функцию $c^*(N)$, для которой прирост капитала ЭА окажется минимальным.

Запишем условия оптимальности для этой задачи в форме принципа максимума в предположении невырожденности решения ($\psi_0 = 1$): функция Гамильтона

$$H = -\psi c + \lambda \frac{1}{n(c, p(N, M))};$$

уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\psi}{dN} = -\frac{\partial H}{\partial M} = -\lambda \frac{\partial n / \partial p (\partial p / \partial M)}{n^2(c, p(N, M))}, \quad \psi(\bar{N}) = 0; \quad (8.13)$$

условие максимума по c для выпуклой вверх и дифференцируемой функции H

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\psi + \lambda \frac{\partial n / \partial c}{n^2(c, p(N, M))} = 0.$$

Исключая ψ с учетом (8.13) и сокращая λ , получим условие оптимальности закупок (продаж) — *условие минимальной диссипации процесса ресурсообмена*

$$\frac{d}{dN} \left[\frac{\partial n / \partial c}{n^2(p, c)} \right] = \frac{\partial n / \partial p \cdot (\partial p / \partial M)}{n^2(p, c)}, \quad (8.14)$$

которое определяет $c(N, M)$ с точностью до константы, вычисляемой из равенства (8.12).

В том случае, когда оценка ресурса p зависит только от его запаса N ($\partial p / \partial M = 0$), условие (8.14) упрощается и примет форму

$$\frac{\partial n / \partial c}{n^2(p, c)} = \text{const.} \quad (8.15)$$

Так, для

$$n(p, c) = \alpha(c - p), \quad (8.16)$$

из условия (8.15) при продаже ресурса получим оптимальную цену для ограниченной продолжительности τ

$$c_\tau^*(N, \bar{N}) = p(N) - \frac{\bar{N} - N_0}{\alpha\tau}, \quad (8.17)$$

а вырученный при продаже капитал равен

$$E_\tau(\bar{N}) = E_\infty(\bar{N}) - \frac{(\bar{N} - N_0)^2}{\alpha\tau}, \quad (8.18)$$

где E_∞ — капитал, который фирма могла бы получить при $\tau \rightarrow \infty$, продавая ресурс по равновесным ценам $c(N) = p(N)$. Функция $E(\tau)$ показана на рис. 8.2.

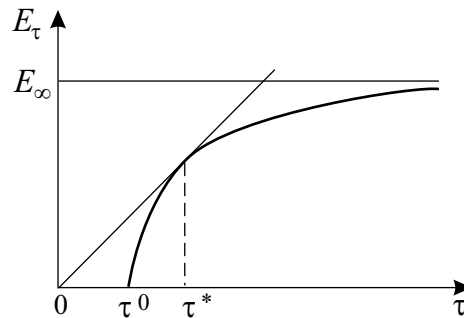


Рис. 8.2. Зависимость прибыльности от продолжительности процесса

При $\tau < \tau^0 = \frac{\Delta N^2}{\alpha E_\infty}$ фирма вынуждена доплачивать покупателю. При $\tau^* = 2\tau^0$ средняя интенсивность прибыли $e(\tau) = \frac{E(\tau)}{\tau}$ максимальна и равна

$$e^* = \frac{\alpha}{4} \left[\frac{E_\infty(\bar{N} - N_0)}{\bar{N} - N_0} \right]^2. \quad (8.19)$$

Каждому значению τ соответствует интенсивность потока продаж. В частности, поток, соответствующий $\tau = \tau^0$, возникает при бесприбыльной продаже ресурса. Интенсивность продаж, соответствующая максимуму потока прибыли, в два раза ниже, чем интенсивность бесприбыльной продажи при линейной зависимости потока от разности цены и оценки.

Для рассмотренного примера необратимые потери равны

$$\Delta E(\tau, \bar{N}) = \int_0^\tau \alpha(p(N) - c(N))^2 dt = \frac{(\bar{N} - N_0)^2}{\alpha\tau},$$

так что

$$E(\tau) = E_\infty(\bar{N}) - \Delta E(\tau, \bar{N}) = E_\infty(\bar{N}) - \int_0^\tau n(p, c)(p - c) dt. \quad (8.20)$$

Здесь под интегралом стоит диссипация капитала.

Выражение (8.20) справедливо для произвольной зависимости $n(p, c)$. Действительно, при переходе от dt к dN интеграл в (8.8) примет форму

$$\Delta E(\bar{N}) = E(\bar{N}) - E(N_0) = \int_{N_0}^{\bar{N}} (p(N) - c_\tau(N, \bar{N})) dN.$$

В свою очередь извлеченный капитал равен

$$E(\tau, \bar{N}) = \int_{N_0}^{\bar{N}} c_\tau(N, \bar{N}) dN, \quad E_\infty(\bar{N}) = \int_{N_0}^{\bar{N}} p(N) dN. \quad (8.21)$$

Из сравнения этих равенств следует выражение (8.20). Таким образом, оптимальные процессы закупок (продаж) являются процессами минимальной диссипации, а условие (8.14) является условием минимальной диссипации капитала.

Извлечение максимальной прибыли в системе ЭА. Пусть посредник функционирует в системе m ЭА-в, замкнутой по ресурсу, осуществляя товарообмен между ЭА и стремясь извлечь максимум базисного ресурса. В этом случае задача сводится к закупке (продаже)

ресурса у каждого из экономических агентов. Процесс закупки (продажи) должен протекать оптимально с точки зрения извлечения (затрат) базисного ресурса, так что цена c и оценка ресурса p должны в любой момент времени удовлетворять условиям минимальной диссипации (8.14), (8.15). Объемы закупок ΔN_i у каждого из m ЭА должны выбираться оптимально и удовлетворять балансовому соотношению

$$\sum_{i=1}^m \bar{N}_i = \sum_{i=1}^m N_{i0}. \quad (8.22)$$

Резервуар можно считать одной из подсистем, у которой оценка p_- не зависит от запасов ресурса и капитала, а значит, для любых зависимостей $n(c, p_-)$ оптимальная цена c при закупке и продаже на таком рынке должна быть неизменна во времени.

Задача об извлечении максимума базисного ресурса за ограниченное время в замкнутой микроэкономической системе сводится, таким образом, на первом этапе к решению m задач (8.9)–(8.12) об оптимальных закупках (продажах) для каждой из подсистем при фиксированных начальных и конечных запасах ресурса (N_{i0} и \bar{N}_i). Максимальное количество извлеченного капитала (минимальное количество затраченного) $E_i(\tau)$ зависит от \bar{N}_i . На втором этапе необходимо найти оптимальные значения \bar{N}_i из условия

$$\sum_{i=1}^m E_i(\tau, \bar{N}_i) \rightarrow \max_{\bar{N}_i} \quad (8.23)$$

при условии (8.22). Условия оптимальности задачи (8.22), (8.23) имеют вид

$$\frac{\partial E_i(\tau, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} = \Lambda, \quad i = 1, \dots, m.$$

Значение Λ находят из (8.22).

С учетом выражения (8.21) получим

$$\frac{\partial E_i(\tau, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} = c_{i\tau}(\bar{N}_i, \bar{N}_i) + \int_{N_{i0}}^{\bar{N}_i} \frac{\partial c_{i\tau}(N_i, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} dN_i = \bar{c}_{i\tau}(\bar{N}_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.24)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой оптимальную цену в момент τ , второе слагаемое корректирует эту цену. Оно определяется усредненным значением чувствительности оптимальной цены к количеству реализованного ресурса. Выражение (8.24) назовем скорректированной ценой. *Условие оптимального выбора объемов закупок*

(продаж) заключается в требовании равенства скорректированных цен для всех подсистем:

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N}_i) = \Lambda, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.25)$$

Пример. Проиллюстрируем последовательность решения задачи на примере, когда для каждой из подсистем

$$p_i = \frac{h_i}{N_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.26)$$

$$n_i(c, p) = \alpha_i(c_i - p_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.27)$$

Найдем капитал, который можно извлечь из i -й подсистемы за сколь угодно большое время. Из выражения (8.21) с учетом (8.26) имеем

$$E_{i\infty}(\overline{N}_i) = h_i \int_{N_{i0}}^{\overline{N}_i} \frac{dN_i}{N_i} = h_i \ln \frac{\overline{N}_i}{N_{i0}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Для ограниченной продолжительности после взятия интеграла (8.21) получим

$$E_i(\tau, \overline{N}_i) = h_i \ln \frac{\overline{N}_i}{N_{i0}} - \frac{(\overline{N}_i - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}. \quad (8.28)$$

Условие (8.25) оптимального выбора \overline{N}_i примет форму

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N}_i) = p_i(\overline{N}_i) - 2 \frac{\overline{N}_i - N_{i0}}{\alpha_i \tau} = \Lambda. \quad (8.29)$$

Задача сильно упрощается, когда все подсистемы имеют постоянные оценки $p = \text{const}$ (являются экономическими резервуарами). Тогда условие оптимальности (8.29) приводит к равенствам

$$p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau} (\overline{N}_i - N_{i0}) = \Lambda \rightarrow \Delta N_i = \frac{\alpha_i \tau}{2} (p_i - \Lambda). \quad (8.30)$$

Из условия (8.22) значение Λ равно средневзвешенной оценке ресурса

$$\Lambda = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \right) / \sum_{i=1}^m \alpha_i,$$

а

$$\overline{N}_i^* = \frac{\tau \alpha_i}{2} \left(p_i - \frac{\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu} \right) + N_{i0}. \quad (8.31)$$

После подстановки в (8.28) \overline{N}_i^* получим значение максимально возможного капитала $E_i(\tau, \overline{N}_i^*)$, который может быть извлечен из подсистемы за время τ . Прибыльность системы равна сумме найденных значений

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^m \left[p_i(\overline{N}_i^* - N_{i0}) - \frac{(\overline{N}_i^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau} \right].$$

С учетом (8.31) для оценок, не зависящих от запасов ресурса, она равна

$$E_\tau^* = \frac{\tau}{4}(p_i^2 - \Lambda^2).$$

В большинстве случаев оценки с ростом запаса ресурса уменьшаются, и прибыльность представляет собой монотонную выпуклую вверх функцию продолжительности закупок.

8.2. Классификация законов ресурсообмена по типу процессов минимальной диссипации

Для экономических систем функция $n(c, p)$ характеризует закон ресурсообмена, а условия (8.14), (8.15) — условия минимальной диссипации капитала. Аналогично тому, как это было сделано для термодинамических систем в гл. 4, покажем, как можно выделить кинетические зависимости интенсивности потоков обмена от цены и оценки ресурса, для которых условия минимальной диссипации приводят к однотипным решениям.

Условия постоянства оптимальной надбавки. Формальная постановка задачи об оптимальной закупке ресурса имеет вид

$$I = \int_0^\tau n(c, p) c dt \rightarrow \min_c$$

при условиях

$$\int_0^\tau n(c, p) dt = \Delta N, \quad n > 0, \quad \dot{N} = -n(c, p), \quad N(0) = N_0,$$

где оценка $p(N)$ — заданная функция. Условия оптимальности этой задачи получены выше.

Найдем, каковы законы ресурсообмена $n(p, c)$, для которых оптимальная цена закупки ресурса c для любого момента времени t отличается от оценки этого ресурса p на постоянную величину (надбавка

$\varphi(c, p) = c - p = \text{const}$). Как следует из условия оптимальности закупки, в случае необратимого ресурсообмена

$$F = \frac{1}{n^2(p, c)} \frac{\partial n}{\partial c} = \text{const}, \quad n(c, p) = 0 \quad \text{при} \quad c = p. \quad (8.32)$$

Чтобы на оптимальном решении было выполнено условие постоянства надбавки, необходимо и достаточно, как показано в гл. 4, выполнение равенства

$$\frac{F_c}{F_p} = \frac{nn_c c - 2n_c^2}{nn_c p - 2n_p n_c} = \frac{\varphi_c}{\varphi_p}, \quad (8.33)$$

определяющего кинетику ресурсообмена для каждого вида зависимости φ оптимальной цены от оценки ресурса. Индексами c и p обозначены частные производные функций F , φ и n по соответствующим переменным.

Из условия (8.33) получим, что постоянству оптимальной надбавки соответствуют такие зависимости $n(p, c)$, что

$$n(c, p) = \frac{\mu(c - p)}{1 + R(p)\mu(c - p)}, \quad (8.34)$$

Здесь $\mu(c - p)$ и $R(p)$ произвольные функции $c - p$ и p , причем $\mu(0) = 0$. Мы не приводим здесь подробного вывода, так как он совершенно аналогичен выводу соответствующих условий в гл. 4.

Чтобы выяснить, как зависит величина этой надбавки от продолжительности закупки и объема закупаемого ресурса, обозначим величину надбавки $c - p = \delta$. Выражение (8.34) примет вид

$$n(c, p) = \frac{\mu(\delta)}{1 + R(p)\mu(\delta)}.$$

Так как

$$\int_0^\tau n(c, p) dt = \Delta N,$$

то

$$\mu(\delta) = \frac{\Delta N}{\int_0^\tau \frac{dt}{1 + R(p(t))\mu(\delta)}}. \quad (8.35)$$

Это условие определяет надбавку δ .

Необратимость процесса характеризуется при постоянной надбавке интегралом

$$\Delta E = \int_0^{\tau} \delta n(c, p) dt = \delta \Delta N.$$

Средняя величина диссипации (торговых издержек)

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta E}{\tau} = \frac{\delta \Delta N}{\tau}. \quad (8.36)$$

Равенства (8.35), (8.36) определяют необратимость процесса для любой функции $n(c, p)$ вида (8.34).

Условия постоянства оптимального потока ресурса. Условие оптимальности закупок (8.32) приводит к условию постоянства потока ресурса $n(p, c)$ на оптимальном решении $c^*(p)$ тогда, когда левая часть равенства (8.32) зависит только от n :

$$F(p, c) = \varphi(n(p, c)),$$

где φ — произвольная функция, или, что то же самое, когда $\frac{\partial n}{\partial c}$ представляет собой некоторую функцию от n :

$$\frac{\partial n}{\partial c} = n_c(p, c^*) = \zeta(n(p, c^*)) \quad \forall p. \quad (8.37)$$

Справедливо Утверждение: *Минимальной стоимости закупок соответствует постоянный во времени поток ресурса в том и только в том случае, когда закон ресурсообмена может быть представлен в форме*

$$n(c, p) = (c - p)\mu(c - p), \quad (8.38)$$

где μ — произвольная неотрицательная функция разности цен.

Оптимальная зависимость $c^*(p)$ определяется условием

$$(c^* - p)\mu(c^* - p) = n^* = \frac{\Delta N}{\tau}. \quad (8.39)$$

Доказательство: Из требования (8.37) получаем в соответствии с общей методикой решения задачи классификации по типу оптимального решения, изложенной в гл. 4,

$$\frac{n_{cc}}{n_{cp}} = \frac{n_c}{n_p} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c} \ln \left| \frac{n_c}{n_p} \right| = 0 \Rightarrow \frac{n_c}{n_p} = r(p),$$

где r — произвольная функция. Получим уравнение, определяющее вид функции n :

$$n_c - r(p)n_p = 0, \quad n(p, c) = 0 \quad \text{при} \quad p = c. \quad (8.40)$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\dot{c} = 1, \quad \dot{p} = -r(p),$$

откуда

$$c(t) = c_0 + t, \quad l(p) = t - t_0, \quad (8.41)$$

где $l(p)$ — произвольная дифференцируемая функция, такая, что

$$\frac{dl}{dp} = -\frac{1}{r(p)}.$$

Исключая t из (8.41), получим первый интеграл уравнения (8.40)

$$l(p) - c = t_0 - c_0 = \text{const},$$

так что общее решение

$$n(c, p) = \mu[l(p) - c].$$

С учетом требования $n(p, c) = 0$ при $c = p$ получим класс законов ресурсообмена (8.38), для которых на оптимальном решении поток ресурса постоянен.

Пример. Зададим зависимость $n(c, p)$ следующим образом

$$n(c, p) = \alpha \cdot \text{arctg}(c - p), \quad \text{при } c > p.$$

Так как это выражение удовлетворяет условию (8.38), получим закон изменения оптимальной цены во времени $c^*(t)$

$$c^*(t) = p(N^*) + \text{tg} \frac{\Delta N}{\tau \alpha},$$

при этом

$$N^*(t) = N_0 - \frac{\Delta N}{\tau} t.$$

Оптимальный поток ресурса будет постоянным и равным $\frac{\Delta N}{\tau}$.

8.3. Извлечение базисного ресурса при отсутствии дискриминации цен

Ранее была рассмотрена задача извлечения максимальной прибыли, по условиям которой посредник мог при контакте с каждым ЭА-м устанавливать различные цены покупок и продаж, зависящие от функций спроса каждого ЭА. Такой индивидуальный выбор (дискриминация) цен расширяет возможности посредника и позволяет увеличить его

прибыль. С дискриминацией цен мы сталкиваемся, наблюдая различие цен на одни и те же товары в магазинах, расположенных в центре и на окраинах города, при продаже авиабилетов по льготным ценам и пр. Однако в некоторых случаях, например, по требованию изготовителя, посредник должен устанавливать одну и ту же цену покупки или продажи для всех ЭА-в, с которыми он контактирует. Рассмотрим задачу о максимальном извлечении прибыли в этих условиях.

Требуется найти изменение во времени цен закупки и продажи общих для всех ЭА-в, у которых фирма приобретает или продает ресурс, а также состав подсистем, продающих и закупающих ресурс. Обозначим через $c_1(t)$ и $c_2(t)$ цены закупки и продажи. Законы изменения цен определяют и состав подсистем, участвующих в процессе. Все подсистемы в каждый момент $t \in [0, \tau]$ могут быть разбиты на три категории: подсистемы, у которых посредник закупает ресурс ($p_i(t) < c_1(t)$); подсистемы, которым он ресурс продает ($p_i(t) > c_2(t)$); и подсистемы, с которыми посреднику нецелесообразно контактировать ($c_1(t) \leq p_i(t) \leq c_2(t)$). Назовем первую категорию систем «продавцы», вторую — «покупатели», а третью — «нейтральные подсистемы».

В общем случае определение оптимальных цен с одновременным изменением состава подсистем достаточно сложно. Задача существенно упрощается, когда фирма осуществляет ресурсообмен с несколькими экономическими резервуарами. В этом случае c_1 , c_2 и p_i постоянны, и задача сводится к такому их выбору, чтобы получить максимальную прибыль.

Зависимость потока закупаемого ресурса от c_1 может быть записана в форме

$$n_+(c_1, p_i) = \sum_{\nu=1}^j n_\nu(c_1, p_\nu), \quad (8.42)$$

где суммирование ведется по всем резервуарам, оценки которых ниже, чем c_1 .

Аналогично для потока продаж имеем c_2

$$n_-(c_2, p_i) = \sum_{\nu=i}^n n_\nu(p_\nu, c_2), \quad (8.43)$$

где p_i — минимальная оценка, большая, чем c_2 .

Интенсивность получения прибыли должна быть максимальна:

$$s = [c_2 n_-(c_2, p) - c_1 n_+(c_1, p)] \rightarrow \max_{c_1, c_2}. \quad (8.44)$$

при условии ненакопления ресурса посредником

$$n_+(c_1, p) = n_-(c_2, p) = n. \quad (8.45)$$

Условие (8.45) позволяет выразить c_1 и c_2 через n . Подставляя эти зависимости в (8.44), получим задачу безусловной оптимизации по n . Найдя ее решение n^* , вычислим c_1^* , c_2^* ; они определяют разбиение подсистем на «продавцов» и «покупателей».

Конкретизируем зависимости n_ν в форме

$$n_\nu = \alpha_\nu(c - p_\nu), \quad \nu = 1, \dots, n$$

и перепишем (8.45) в форме двух равенств

$$n_+ = \sum_{\nu=1}^j \alpha_\nu(c_1 - p_\nu) = n, \quad n_- = \sum_{\nu=i}^n \alpha_\nu(p_\nu - c_2) = n,$$

откуда, введя обозначения

$$M_1(j) = \sum_{\nu=1}^j \alpha_\nu p_\nu, \quad M_2(i) = \sum_{\nu=i}^n \alpha_\nu p_\nu, \quad A_1(j) = \sum_{\nu=1}^j \alpha_\nu, \quad A_2(i) = \sum_{\nu=i}^n \alpha_\nu,$$

получим

$$c_1(n, j) = \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)}, \quad c_2(n, i) = \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)}. \quad (8.46)$$

Критерий оптимальности (8.44) как функция n примет вид

$$s = n [c_2(n, i) - c_1(n, j)] \rightarrow \max. \quad (8.47)$$

При фиксированном n значения i и j нужно выбирать по условию максимума c_2 и минимума c_1 соответственно.

Условие минимума c_1 по j приводит к неравенствам

$$p_{j+1} > \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)} > p_j. \quad (8.48)$$

Аналогично из условий максимума c_2 по i следует, что

$$p_i > \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)} > p_{i-1}. \quad (8.49)$$

Максимум (8.47) по n с учетом (8.46), (8.48), (8.49) определяет максимальную интенсивность извлечения базисного ресурса в системе с общими ценами. Для выпуклой вверх функции s получим

$$c_2(n^*, i) - c_1(n^*, j) = n^* \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} - \frac{\partial c_2}{\partial n} \right)_{n=n^*}. \quad (8.50)$$

Для двух ЭА ($j = 1, i = 2$) задача предельно упрощается. Оптимальные цены закупки и продажи для любого момента t удовлетворяют равенствам

$$c_1 = \frac{2\alpha_1 p_1 + \alpha_2(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad c_2 = \frac{2\alpha_2 p_2 + \alpha_1(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

а предельная интенсивность извлечения прибыли равна

$$s^*(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (p_2 - p_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

В том случае, когда оценки p_ν ресурсов для каждого из ЭА зависят от времени, оптимальное решение $c_1^*(t), c_2^*(t)$ определяется этими же соотношениями для каждого момента t .

Закупка ресурса в условиях конкуренции. Найдем условия оптимального выбора цен при закупке (продаже) ресурса у ЭА несколькими фирмами за ограниченное время (рис. 8.3).

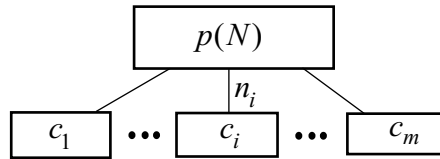


Рис. 8.3. Структура системы обмена ресурсами ЭА конечной емкости с несколькими фирмами

При этом предположим, что оценка ресурса p зависит только от его запаса N и не зависит от запаса базисного ресурса. Функцию $p(N)$ предполагаем известной.

Затраты

$$\Delta S = \sum_{i=1}^m \int_0^{\tau} n_i(c_i, p)(c_i - p) dt \rightarrow \min_{c_i} \quad (8.51)$$

при заданных объемах закупок

$$\int_0^{\tau} n_i(c_i, p) dt = \Delta N_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.52)$$

Запас ресурса изменяется как

$$\frac{dN}{dt} = - \sum_{i=1}^m n_i(c_i, p), \quad N(0) = a. \quad (8.53)$$

Обозначим $a - \sum_{i=1}^m \Delta N_i = b > 0$ и трансформируем задачу, приняв ресурс N в качестве независимой переменной.

Получим

$$\int_b^a \frac{\sum_{i=1}^m (c_i - p)n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} dN \rightarrow \min_{c_i}, \quad (8.54)$$

$$\int_b^a \frac{n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} dN = \Delta N_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.55)$$

$$\int_b^a \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} dN = \tau. \quad (8.56)$$

Функция Лагранжа задачи (8.54)–(8.56)

$$L = \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} \left[\sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i)n_i - \zeta \right]. \quad (8.57)$$

Необходимые условия оптимальности принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow & -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)^2} \frac{\partial n_i}{\partial c_i} \left[\sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i)n_i - \zeta \right] + \\ & + \frac{1}{\sum_{i=1}^m n_i} \left[n_i + (c_i - p + \lambda_i) \frac{\partial n_i}{\partial c_i} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Так что для всех i должны быть выполнены условия

$$\frac{n_i(c_i, p)}{\frac{\partial n_i}{\partial c_i}} + c_i + \lambda_i = p + \frac{\sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i) - \zeta}{\sum_{i=1}^m n_i(c_i, p)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.58)$$

которые совместно с (8.55), (8.56) определяют искомое решение $c^*(N)$ через известную зависимость $p(N)$.

8.4. Посредник между двумя подсистемами

В предыдущих разделах речь шла о процессах, соответствующих максимальному извлечению базисного ресурса посредником, в экономических системах, замкнутых по ресурсам. Здесь мы рассмотрим системы, в которых задачей активной подсистемы является достижение максимального потока извлекаемого базисного ресурса при тех или иных условиях в стационарном или циклическом режиме.

Экономические резервуары

Рассмотрим осуществляемый через посредника процесс обмена ресурсами между двумя резервуарами — рынками с неизменными оценками ресурсов. Требуется определить интенсивность такого обмена, а также цены, которые назначает посредник при покупке ресурса у одной и при продаже другой подсистеме в тех или иных условиях. При этом возможны два случая. В первом посредник поочередно взаимодействует с каждой из подсистем. Здесь он может назначать не только цены, но и продолжительность взаимодействия с каждой из них. Во втором случае закупка и продажа ресурса происходят непрерывно, и посредник-монополист распоряжается лишь ценами. Цены первого и второго рынков обозначим через \bar{p}_1 и \bar{p}_2 , причем $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$. Кинетика обмена характеризуется зависимостью

$$g(\bar{p}, p) = \alpha(\bar{p}, p)(\bar{p} - p). \quad (8.59)$$

При этом оценка \bar{p} принимает значения \bar{p}_1 и \bar{p}_2 , а цены p , назначаемые посредником при покупке и продаже ресурса, являются искомыми переменными.

Максимальная интенсивность прибыли. Целью деятельности посредника является достижение максимума средней за цикл интенсивности извлечения базисного ресурса.

Поочередная покупка и продажа ресурса. Рассмотрим первоначально случай поочередного взаимодействия посредника с каждым из рынков. Интенсивность получения дохода m равна среднему за цикл значению произведения потока ресурса на цену посредника:

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T pg(\bar{p}, p) dt = \overline{pg(\bar{p}, p)} \rightarrow \max. \quad (8.60)$$

При этом посредник продает на втором рынке все, что покупает на первом, так что

$$\frac{1}{T} \int_0^T g(\bar{p}, p) dt = \overline{g(\bar{p}, p)} = 0. \quad (8.61)$$

Мы пришли к усредненной задаче нелинейного программирования с одним условием (8.61). Для ее решения необходимо составить функцию Лагранжа исходной неусредненной задачи

$$L = pg(\bar{p}, p) - \lambda g(\bar{p}, p). \quad (8.62)$$

Обозначим функцию L через L_ν при $\bar{p} = \bar{p}_\nu$ и потребуем максимума каждой из функций L_ν по p . Получим

$$\frac{dg(p_\nu, p)}{dp}(p - \lambda) + g(p_\nu, p) = 0, \quad \nu = 1, 2. \quad (8.63)$$

Эти уравнения позволяют найти оптимальные (базовые) значения $p_{\Pi\nu}^*(\bar{p}_\nu, \lambda)$. После их подстановки в L_ν получим $L_1^*(\bar{p}_1, \lambda)$ и $L_2^*(\bar{p}_2, \lambda)$. Оптимальное значение λ^* соответствует условию (см. приложение П.3)

$$\max_\nu L_\nu^*(\bar{p}_\nu, \lambda) \rightarrow \min_\lambda. \quad (8.64)$$

Откуда находят оптимальные значения цен покупки и продажи

$$p_1 = p_{\Pi}^*(\lambda^*, \bar{p}_1), \quad p_2 = p_{\Pi}^*(\lambda^*, \bar{p}_2),$$

причем

$$p_1 > \bar{p}_1, \quad p_2 < \bar{p}_2.$$

Проведем решение для случая, когда коэффициент α в (8.59) зависит только от оценки резервуара, т. е. при $\bar{p} = \bar{p}_1$ коэффициент $\alpha = \alpha_1$, а при $\bar{p} = \bar{p}_2$ коэффициент $\alpha = \alpha_2$. Функция L примет вид

$$L = \alpha(\bar{p})(\bar{p} - p)(p - \lambda).$$

Условия (8.63) запишем как

$$-\alpha_\nu(p - \lambda) + \alpha_\nu(\bar{p}_\nu - p) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

откуда

$$p_{\Pi\nu}^* = \frac{\bar{p}_\nu + \lambda}{2}, \quad \nu = 1, 2. \quad (8.65)$$

Подставляя в L эти значения p , получим

$$L_1 = \alpha_1 \left(\bar{p}_1 - \frac{\bar{p}_1 + \lambda}{2} \right) \left(\frac{\bar{p}_1 + \lambda}{2} - \lambda \right) = \alpha_1 \left(\frac{\bar{p}_1 - \lambda}{2} \right)^2, \quad L_2 = \alpha_2 \left(\frac{\bar{p}_2 - \lambda}{2} \right)^2. \quad (8.66)$$

Так как $p_{\text{П1}}^* > \bar{p}_1$, а $p_{\text{П2}}^* < \bar{p}_2$, функция L_2^* уменьшается с ростом λ , а L_1^* увеличивается. Минимум по λ от максимума из двух этих функций достигается в точке равенства L_1^* и L_2^* :

$$L_1^*(\lambda) = L_2^*(\lambda) \Rightarrow \sqrt{\alpha_1}(\bar{p}_1 - \lambda) = -\sqrt{\alpha_2}(\bar{p}_2 - \lambda).$$

Функции L_1^* и L_2^* показаны на рис. 8.4. Их максимум выделен жирной линией. Минимум по λ от $\max_i L_i^*(\lambda)$ достигается в точке λ^* равенства

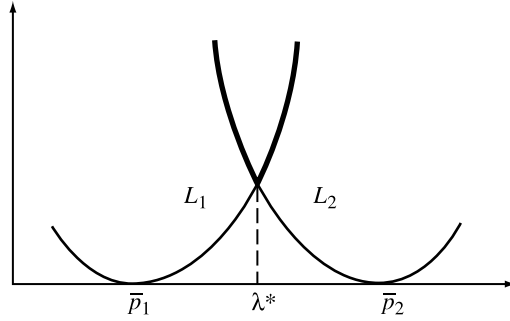


Рис. 8.4. Характер изменения максимального по \bar{p}_1, \bar{p}_2 значения функции Лагранжа

этих функций. Отсюда

$$\lambda^* = \frac{\bar{p}_1 \sqrt{\alpha_1} + \bar{p}_2 \sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \quad (8.67)$$

Чтобы найти доли от общего времени цикла, в течение которых следует производить закупки и продажи, нужно выражения (8.65) и (8.67) подставить в (8.61). Получим

$$\begin{aligned} \gamma_1 \alpha_1 (\bar{p}_1 - p_{\text{П1}}^*) + \gamma_2 \alpha_2 (\bar{p}_2 - p_{\text{П2}}^*) &= \frac{\gamma_1 \alpha_1}{2} \frac{\sqrt{\alpha_2}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \\ &+ \frac{\gamma_2 \alpha_2}{2} \frac{\sqrt{\alpha_1}(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} = 0. \end{aligned}$$

Так что

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad (8.68)$$

при $\alpha_1 = \alpha_2$ $\lambda^* = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2}$.

Оптимальные цены закупок и продаж определяются после подстановки λ^* в выражение (8.65). Так, для случая $\alpha_1 = \alpha_2$

$$p_{\Pi 1}^* = \frac{3\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{4}, \quad p_{\Pi 2}^* = \frac{3\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{4}.$$

Норма прибыли при этом

$$\eta = \frac{p_{\Pi 2}^*}{p_{\Pi 1}^*} - 1 = \frac{3\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{3\bar{p}_1 + \bar{p}_2} - 1,$$

что, естественно, меньше, чем найденное выше значение $\eta_0 = \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_1} - 1$ при обратимой закупке и продаже по оценкам резервуаров.

Предельная интенсивность извлечения базисного ресурса

$$m^* = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})} \left[\sqrt{\alpha_2}(\bar{p}_2^2 - \lambda^{*2}) + \sqrt{\alpha_1}(\bar{p}_1^2 - \lambda^{*2}) \right], \quad (8.69)$$

где константа λ^* определена равенством (8.67).

При реализации экономического цикла ограничением может быть средний поток капитала, затрачиваемого посредником на приобретение ресурса. Этот поток равен

$$U = p_1 g(\bar{p}_1, p_1) \gamma_1. \quad (8.70)$$

Для кинетики обмена вида (8.59) в оптимальном цикле

$$U^* = \alpha_1 \frac{\lambda^{*2} - \bar{p}_1^2}{4} \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \quad (8.71)$$

Если на поток затрачиваемого посредником капитала есть ограничение типа $U \leq U^{\max}$ и величина U^{\max} меньше, чем U^* , то равенство (8.70) нужно ввести в задачу в форме добавочного ограничения. Полученная в результате решения такой задачи интенсивность дохода m , естественно, окажется меньше, чем m^* . Если же $U^{\max} \geq U^*$, то посреднику нет смысла тратить весь капитал, в данном цикле он использует только часть его, равную U^* . В этом случае максимуму m соответствует максимальная норма прибыли на вложенный капитал. Задача в такой постановке рассмотрена ниже.

Одновременная закупка и продажа ресурса. При непрерывной закупке и продаже ресурса посреднической фирмой ей нужно выбрать такие цены p_1 и p_2 , чтобы интенсивность получения прибыли

$$\bar{m} = p_2 g_2(\bar{p}_2, p_2) + p_1 g_1(\bar{p}_1, p_1) \quad (8.72)$$

была максимальна при условии полной продажи всего закупленного, а именно

$$g_1(\bar{p}_1, p_1) + g_2(\bar{p}_2, p_2) = 0. \quad (8.73)$$

Решение этой задачи нелинейного программирования приводит к соотношению, которому должны удовлетворять оптимальные цены:

$$\left(g_1(\bar{p}_1, p_1) \left/ \frac{\partial g_1}{\partial p_1} \right. \right) + p_1 = \left(g_2(\bar{p}_2, p_2) \left/ \frac{\partial g_2}{\partial p_2} \right. \right) + p_2. \quad (8.74)$$

В том случае, когда $g_\nu = \alpha_\nu(\bar{p}_\nu - p_{\Pi\nu})$ ($\nu = 1, 2$), условие (8.74) примет вид

$$2p_1 - \bar{p}_1 = 2p_2 - \bar{p}_2,$$

что вместе с условием (8.73)

$$\alpha_1(\bar{p}_1 - p_1) = -\alpha_2(\bar{p}_2 - p_2)$$

позволяет найти цены закупок и продаж:

$$p_{\Pi 1}^* = \frac{\alpha_1 \bar{p}_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{2}, \quad (8.75)$$

$$p_{\Pi 2}^* = \frac{\alpha_2 \bar{p}_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\bar{p}_2 + \bar{p}_1}{2}. \quad (8.76)$$

Интенсивность получения прибыли

$$\bar{m}^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (8.77)$$

Нетрудно видеть, что при одинаковых α_ν значение \bar{m}^* вдвое больше, чем m^* , найденное выше (см. (8.69)), что естественно, так как потоки ресурсов одинаковы, а продолжительность продаж составляет половину времени цикла. Для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ отношение $\bar{m}^*/m^* < 2$ за счет оптимального выбора продолжительности ресурсообмена с каждым из экономических резервуаров.

Векторный ресурс. При поочередном взаимодействии посредника с экономическими резервуарами и при отсутствии ограничений на интенсивность затрат капитала задача (8.60), (8.61) примет форму

$$m = \sum_{i=1}^n \overline{p_i g_i(\bar{p}, p_i)} \rightarrow \max_{\bar{p}, p} \overline{g_i(\bar{p}, p)} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это усредненная задача с n условиями. Число базовых решений у нее не превосходит $n + 1$. Для ее решения первоначально нужно решить вспомогательную задачу

$$L = \sum_{i=1}^n [g_i(\bar{p}, p)(p_i - \lambda_i)] \rightarrow \max_{\bar{p}} \min_{\lambda} \bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2).$$

Решение этой задачи сильно упрощается, если для каждого из резервуаров (их оценок \bar{p}_1 и \bar{p}_2) функция L оказывается строго выпуклой вверх по p , что позволяет найти цены посредника для каждого из них, решая уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial p_\nu} (p_i - \lambda_i) + g_\nu(\bar{p}_j, p) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Если $g_i = g_i(\bar{p}_i, p_i)$, то задача с векторным ресурсом может быть разбита на n независимых задач, подобных (8.60), (8.61), и все полученные результаты остаются справедливыми. При этом равенство (8.67) справедливо для каждого λ_i , а в выражении (8.69) для m^* стоит сумма по i , каждое из слагаемых в которой положительно. Норму прибыли можно найти по формуле

$$\eta = \frac{m^*}{\gamma_1 \sum_{i=1}^n g_i(\bar{p}_{i1}, p_i) p_i}.$$

То же относится и к задаче с одновременным взаимодействием посредника с экономическими резервуарами.

Особенности векторного случая становятся существенными, когда интенсивность затрат капитала ограничена значением, меньшим того, которое соответствует максимальной интенсивности получения прибыли m^* .

Посредник между двумя ЭА. Если посредник взаимодействует не с резервуарами, а с ЭА, оценки которых зависят от запаса ресурсов, то цены закупок и продаж должны оптимально изменяться во времени. Задача извлечения максимальной прибыли (объема базисного ресурса) за ограниченное время распадается на три подзадачи: оптимальное взаимодействие посредника с первым и вторым ЭА, а также согласование этих двух процессов за счет оптимального подбора общих для них параметров; важно при этом, что каждый из двух процессов взаимодействия (покупка и продажа) должен удовлетворять условиям минимума диссипации капитала, полученным выше.

Рассмотрим сначала цикл с поочередной покупкой и продажей ресурса, введя следующие обозначения: C_1, C_2 — «емкости» первого и второго ЭА, определяющие связь между изменением запаса и изменением его оценки; $p_i(t)$ ($i = 1, 2$) — их оценки $\left(\frac{dp_i}{dt} C_i = -\frac{dN_i}{dt}\right)$; $p(t)$ — цена посредника; τ_i ($i = 1, 2$) — продолжительность взаимодействия с i -м ЭА.

В результате решения требуется оптимально выбрать τ_1 и τ_2 так, чтобы общая продолжительность цикла была равна заданному значению τ , а также оптимально найти объем закупаемого ресурса ΔN . Критерием оптимальности является прибыль, полученная за цикл:

$$I = \int_0^{\tau_2} p(t)g(p_2, p)dt - \int_0^{\tau_1} p(t)g_1(p, p_1)dt \rightarrow \max \quad (8.78)$$

при условиях

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau, \quad (8.79)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{g_1(p, p_1)}{C_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{g_2(p_2, p)}{C_2}, \quad p_i(0) = \bar{p}_i, \quad (8.80)$$

$$\int_0^{\tau_1} g_1(p, p_1)dt = \int_0^{\tau_2} g_2(p_2, p)dt = \Delta N. \quad (8.81)$$

Продемонстрируем последовательность решения для линейной кинетики ресурсообмена, когда

$$g_2(p_2, p) = \alpha_2(p_2 - p), \quad g_1(p, p_1) = \alpha_1(p - p_1). \quad (8.82)$$

Из условий минимальной диссипации следует, что для каждого из полуциклов в оптимальном процессе поток ресурса должен быть постоянным, и, как следствие, равновесные цены покупок и продаж линейно изменяются во времени:

$$p_1^*(t) = \bar{p}_1 + \frac{\Delta N}{\tau_1 C_1} t, \quad t \in [0, \tau_1], \quad (8.83)$$

$$p_2^*(t) = \bar{p}_2 - \frac{\Delta N}{\tau_2 C_2} t, \quad t \in [0, \tau_2]. \quad (8.84)$$

Закупочная цена выше $p_1^*(t)$ на величину $\delta_1 = \Delta N/\tau_1\alpha_1$ и ниже $p_2^*(t)$ на $\delta_2 = \Delta N/\tau_2\alpha_2$, так что при закупке и продаже цены посредника

$$p^*(t) = \bar{p}_1 + \frac{\Delta N}{\tau_1} \left(\frac{t}{C_1} - \frac{1}{\alpha_1} \right), \quad p^*(t) = \bar{p}_2 - \frac{\Delta N}{\tau_2} \left(\frac{t}{C_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right). \quad (8.85)$$

Эти зависимости после их подстановки в критерий (8.78) позволяют вычислить величину прибыли как функцию от τ_1, τ_2 и ΔN и максимизировать ее по этим переменным при условии (8.79). Получим

$$I = \Delta N(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) - \Delta N^2 \left(\frac{1}{\tau_1\alpha_1} + \frac{1}{\tau_2\alpha_2} + \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2} \right). \quad (8.86)$$

Первое из слагаемых в этом выражении соответствует равновесной прибыли при обмене между двумя экономическими резервуарами, второе же характеризует потери за счет конечной продолжительности и конечных емкостей экономических систем.

Чтобы найти продолжительности обмена τ_1 и τ_2 , нужно решить задачу

$$\left(\frac{1}{\tau_1 \alpha_1} + \frac{1}{\tau_2 \alpha_2} \right) \rightarrow \min / \tau_1 + \tau_2 = \tau. \quad (8.87)$$

Ее решение, как легко видеть, приводит к соотношениям

$$\tau_1^* = \tau \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \tau_2^* = \tau \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}},$$

так что

$$\frac{1}{\alpha_1 \tau_1^*} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2^*} = \frac{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}} \right). \quad (8.88)$$

Оптимальный объем закупок ΔN с учетом (8.88) после максимизации I по ΔN равен

$$\Delta N^* = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \tau}{\tau \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + 2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}) \left(\frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}} \right)}, \quad (8.89)$$

а максимальная прибыль

$$I^* = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^2 \tau}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}) \left(\frac{1}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{\alpha_1}} \right) + 2 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \tau}. \quad (8.90)$$

Чем больше продолжительность цикла, тем меньше интенсивность получения дохода $m^* = I^*/\tau$.

При одновременной покупке и продаже ресурса посреднической формой продолжительности процессов покупки и продажи τ_1 и τ_2 должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\theta g_1(p_1, p_1) dt \geq \int_0^\theta g_2(p_2, p_2) dt \quad (8.91)$$

для любого $\theta \in [0, \tau]$. Так как с ростом продолжительности τ_1 и τ_2 поток ресурса в оптимальном процессе уменьшается, а общая величина передаваемого ресурса ΔN одна и та же при продаже и покупке, то, как

правило, $\tau_1 \leq \tau_2$. В частности, для линейной кинетики товарообмена соотношение (8.91) выполнено как равенство, при этом $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Цены покупок и продаж изменяются в соответствии с равенствами (8.85), а величина прибыли соответствует выражению (8.86) после подстановки в (8.85), (8.86) вместо τ_1 и τ_2 продолжительности процесса τ .

Оптимальному решению соответствуют значения

$$\Delta N^* = \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\frac{2}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}, \quad (8.92)$$

$$I^* = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1)^2}{\frac{4}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) + 2 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}. \quad (8.93)$$

Предельная норма прибыли. Если требуемая прибыль $M = m\tau$ меньше I^* , то можно сформулировать задачу выбора цен, которые обеспечивают прибыль M при минимуме затрат капитала:

$$I_1 = \int_0^{\tau_1} pg(p_1, p) dt \rightarrow \min, \quad (8.94)$$

$$\int_0^{\tau_1} p_2 g(p_2, p) dt - \int_{\tau_2}^0 pg(p_1^p) dt = M.$$

Эта задача во многом похожа на предыдущую. Для полуциклов покупки и продажи должны выполняться те же условия минимума диссипации капитала. Различия возникают на стадии соединения частей цикла. Задача стыковки полуциклов примет вид

$$I_1^*(\tau_1, \Delta N) \rightarrow \min_{\Delta N, \tau_1, \tau_2}, \quad I_2^*(\tau_1, \Delta N) - I_1^*(\tau_2, \Delta N) = M. \quad (8.95)$$

Это дает такие же выражения для τ_1^* , τ_2^* , как и в задаче (8.87). Оптимальный объем закупок

$$\Delta N^*(\lambda) = \frac{\lambda(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \bar{p}_1}{\lambda \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{2}{\alpha_1 \tau_1^*} + \frac{2}{\alpha_2 \tau_2^*} \right) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{\alpha_2 \tau_2^*} \right)}.$$

Подстановка $\Delta N^*(\lambda)$ в (8.95) приводит к уравнению для нахождения λ^* , а значит, и оптимального объема закупок, зависящих от M .

Учет ограничения на интенсивность затрат. В том случае, когда предельные возможности посредника по закупке ресурса ограничены,

его оптимальному поведению соответствует получение максимальной прибыли N при фиксированном значении затрат на закупку ресурса. Так как норма прибыли $\eta = \frac{N}{U}$, то задача эквивалентна максимизации η при некотором значении U или N .

Рассмотрим первоначально цикл с поочередным контактом посредника–монополиста с двумя рынками. Кинетику обмена ресурсами примем в форме (8.82) и запишем формальную постановку задачи как

$$N = [\alpha_2 \gamma_2 (\bar{p}_2 - p_2) p_2 - \alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \bar{p}_1) p_1] \rightarrow \max \quad (8.96)$$

при ограниченных затратах, т. е.

$$U = \alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \bar{p}_1) p_1 \leq U^{\max} \quad (8.97)$$

и ненакоплении ресурса посредником

$$\alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \bar{p}_1) = \alpha_2 \gamma_2 (\bar{p}_2 - p_2), \quad (8.98)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Условие (8.97) можно считать равенством, если U^{\max} не превышает затрат U^* , значение которых найдено выше (см. (8.71)).

После стандартных выкладок условие, которому должны удовлетворять цены закупок p_1 и продаж p_2 , примет форму

$$\alpha_1 (p_1 - \bar{p}_1)^2 (2p_2 - \bar{p}_2) = \alpha_2 (\bar{p}_2 - p_2)^2 (2p_1 - \bar{p}_1). \quad (8.99)$$

Оно вместе с ограничениями (8.97), (8.98) определяет $p_1, p_2, \gamma_1, \gamma_2$.

При совмещении процессов покупки и продажи ресурса ограничение на затраты однозначно определяет p_1, p_2 , а значит, и прибыль N . Для кинетики обмена ресурсами в форме (8.82) имеем

$$p_1 = 0,5\bar{p}_1 + \sqrt{0,25\bar{p}_1^2 + \frac{U^{\max}}{\alpha_1}}, \quad (8.100)$$

$$p_2 = \bar{p}_2 - \frac{U^{\max}}{p_1 \alpha_2},$$

$$N = U^{\max} \frac{p_2}{p_1} = U^{\max} \left(\frac{\bar{p}_2}{p_1} - \frac{U^{\max}}{p_1^2 \alpha_2} \right). \quad (8.101)$$

Оптимальный выбор ассортимента и цен. Для векторного ресурса, когда ограничен общий поток затрат, возникает задача о выборе оптимального ассортимента и цен на каждый i -й вид ресурса:

$$N = \sum_{i=1}^n N_i(U_i) \rightarrow \max \left/ \sum_i U_i = U^{\max}, \quad U_i \geq 0. \quad (8.102) \right.$$

Здесь U_i — затраты, выделяемые на закупку i -го ресурса, а зависимость N_i от U_i определяется равенствами (8.100), (8.101) при подстановке в них вместо U^{\max} значения U_i . Если функции $N_i(U_i)$ строго выпуклы вверх, а их производные в нуле сколь угодно велики, то оптимальные значения U_i положительны и удовлетворяют условиям

$$\frac{dN_i}{dU_i} = \lambda, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые с учетом (8.100), (8.101) примут форму

$$\frac{\bar{p}_{2i}}{p_{\Pi i}} - \frac{2U_i}{p_{\Pi i}^2 \alpha_{2i}} + \frac{U_i}{2\alpha_{1i}} \left(\frac{2U_i}{\alpha_{2i} p_{\Pi i}^3} - \frac{\bar{p}_{2i}}{p_{\Pi i}^2} \right) \frac{1}{\sqrt{0,25\bar{p}_{1i}^2 + U_i/\alpha_{1i}}} = \lambda,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad p_{\Pi i} = 0,5\bar{p}_{1i} + \sqrt{0,25\bar{p}_{1i}^2 + U_i/\alpha_{1i}}, \quad (8.103)$$

$$\sum_{i=1}^n U_i = U^{\max}.$$

Решение системы (8.103) позволяет найти оптимальный ассортимент закупаемых ресурсов, распределение средств на их закупку и цены.

8.5. Обмен с нестационарными рынками

Покупка и продажа на одном рынке. Посредник может получать прибыль, не только осуществляя цикл между экономическими резервуарами с различными ценами, но и контактируя с одним из них в том случае, когда оценки ресурса у резервуара меняются во времени под влиянием внешних факторов. Характерным примером является рынок сельскохозяйственной продукции, стоимость которой зависит от сезона и от урожайности в текущем году. Для такого обмена посредник должен иметь запас базисного ресурса и склад для хранения продукта, которым он обменивается с рынком.

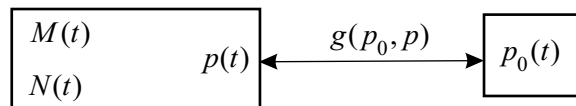


Рис. 8.5. Структура системы извлечения прибыли посредником за счет нестационарности рынка

Другим характерным примером является покупка и продажа валюты и ценных бумаг, курс которых изменяется под действием множества порой случайных факторов. Структура системы показана на рис 8.5, где $p_0(t)$ — равновесная цена рынка, $p(t)$ — цена посредника, $N(t)$ и $M(t)$ — соответственно запасы ресурса и капитала (базисного ресурса); $g(p_0, p)$ — поток ресурса.

Требуется найти такой закон изменения во времени цены посредника $p(t)$, чтобы прирост его капитала за период τ был максимален. Прирост базисного ресурса посредника за время τ

$$I(\tau) = \int_0^{\tau} -g(p_0(t), p(t))p(t)dt \rightarrow \max_{p(t) \geq 0}. \quad (8.104)$$

Скорость его изменения

$$\dot{M}(t) = -g(p_0(t), p(t))p(t), \quad M(0) = M_0. \quad (8.105)$$

Изменение объема ресурса

$$\dot{N}(t) = g(p_0(t), p(t)), \quad N(0) = N_0. \quad (8.106)$$

Объемы ресурса и капитала неотрицательны, в качестве положительного направления потока принята закупка ресурса.

Будем предполагать, что посредник не накапливает ресурса, т. е. $N(\tau) = N(0)$, или

$$\int_0^{\tau} -g(p_0(t), p(t)) dt = 0. \quad (8.107)$$

При отсутствии капитала он не покупает ресурс, а при отсутствии ресурса он не продает его, так что

$$g(p_0(t), p(t)) \leq 0 \quad \text{при} \quad M = 0, \quad g(p_0(t), p(t)) \geq 0 \quad \text{при} \quad N = 0. \quad (8.108)$$

Таким образом, задача сводится к максимизации прироста капитала при ограничениях (8.105)–(8.108), управлением является цена посредника $p(t)$, а переменными состояниями — объемы запасов ресурса и капитала.

Оценка предельной прибыли. Наибольшую сложность при решении задачи (8.105)–(8.108) представляют ограничения (8.108), так как именно наличие этих условий приводит к необходимости учитывать дифференциальные уравнения (8.105), (8.106). Чтобы обойти эти трудности, первоначально ослабим ограничения задачи, предположив, что

начальные запасы M_0 и N_0 столь велики, что условия (8.108) несущественны, или, что то же самое, посредник может в случае необходимости получить неограниченный беспроцентный заем.

Так как уравнения (8.105), (8.106) являются ляпуновскими (т. е. N и M не входят в правые части этих уравнений), то без ограничений (8.108) их можно не учитывать, а, найдя оптимальный закон изменения цен $p^*(t)$, из уравнений (8.105), (8.106) получить оптимальные $N^*(t)$ и $M^*(t)$. Полученное при этом значение максимального прироста базисного ресурса $I^*(\tau)$ будет оценкой сверху для прироста, найденного с учетом всех ограничений.

Функцию Лагранжа задачи (8.104), (8.107) запишем в форме

$$L(p_0, p) = -g(p_0, p)p + \lambda g(p_0, p) = g(p_0, p)(\lambda - p).$$

Условие ее стационарности по p приводит к уравнению

$$\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}(\lambda - p) - g(p_0, p) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{g(p_0, p)}{\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}} + p = \lambda. \quad (8.109)$$

С помощью условия (8.107) исключим константу λ из соотношения (8.109). Для этого преобразуем (8.107) как

$$\int_0^\tau g(p_0(t), p(t)) dt = \int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}(\lambda - p) dt = \lambda \int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p} dt - \int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p} p dt = 0,$$

откуда

$$\lambda = \left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p} p dt \right) : \left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p} dt \right). \quad (8.110)$$

Подставляя (8.110) в (8.109), получаем уравнение, связывающее оптимальную цену $p^*(t)$ с $p_0(t)$:

$$g(p_0, p^*) = \frac{\partial g}{\partial p} \left(\left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p} p^* dt \right) : \left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p} dt \right) - p^* \right). \quad (8.111)$$

Выпишем явные выражения для $p^*(p_0)$ и $I^*(\tau)$ в случае, когда поток ресурса линеен относительно разности цен:

$$g(p_0, p) = \alpha(p - p_0), \quad (8.112)$$

где α — некоторая положительная константа. Условие (8.111) примет вид

$$g^*(t) = \frac{\alpha}{\tau} \int_0^{\tau} p \, dt - p(t).$$

Обозначая среднюю цену ресурса за время τ как $\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p \, dt = \bar{p}$ и учитывая, что в силу (8.107) $\bar{p} = \bar{p}_0$, получим на оптимальном решении

$$g^*(t) = \alpha(p(t) - p_0(t)) = \alpha(\bar{p}_0 - p(t)),$$

откуда

$$p^*(t) = \frac{1}{2}(\bar{p}_0 + p_0(t)). \quad (8.113)$$

Оптимальный поток ресурса равен

$$g^*(p_0, p^*) = \alpha(p^*(t) - p_0(t)) = \frac{\alpha}{2}(\bar{p}_0 - p_0(t)). \quad (8.114)$$

Максимальная средняя интенсивность извлечения базисного ресурса при обмене с нестационарным экономическим резервуаром пропорциональна при стремлении τ к бесконечности дисперсии изменения стоимости ресурсов:

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{I^*(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} -g^*(p_0(t), p^*(t)) p^*(t) \, dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{\alpha}{2} (p_0 - \bar{p}_0) \frac{1}{2} (p_0 + \bar{p}_0) \, dt = \frac{\alpha}{4\tau} \int_0^{\tau} (p_0^2 - \bar{p}_0^2) \, dt = \\ &= \frac{\alpha}{4\tau} \int_0^{\tau} (p_0 - \bar{p}_0)^2 \, dt = \frac{\alpha}{4} D_{p_0}. \end{aligned} \quad (8.115)$$

Полученные соотношения имеют смысл и в том случае, когда $p_0(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с математическим ожиданием \bar{p}_0 , дисперсией D_{p_0} и плотностью распределения $\mu(p_0)$ на множестве V возможных значений p_0 . Формула (8.111) для оптимального потока ресурса после перехода от усреднения по времени к усреднению по множеству примет вид

$$g(p_0, p^*) = \left(\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p} \right)_{p^*} \left(\frac{E \left[\frac{\partial g}{\partial p} p \right]}{E \left[\frac{\partial g}{\partial p} \right]} - p^* \right). \quad (8.116)$$

Здесь через $E[\cdot]$ обозначено математическое ожидание по p_0 выражения, стоящего в скобках. Так,

$$E \left[\frac{\partial g}{\partial p} p \right] = \int_V \mu(p_0) \frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p} p dp_0.$$

Таким образом, (8.116) представляет собой интегральное уравнение, связывающее p^* и p_0 для любого t . Эта связь зависит от плотности распределения p_0 . Для линейной кинетики ресурсообмена (8.112) уравнение (8.116) кардинально упрощается. Оптимальная цена $p^*(t)$ зависит в этом случае не от плотности распределения p_0 , а лишь от ее среднего и текущего значений.

Перепродажа ресурсов. Рассмотрим экономическую систему, в которой происходит одновременная покупка и продажа ресурса по разным ценам. Имеется множество ЭА (клиентов), оценивающих один и тот же ресурс по-разному и по тем или иным причинам не имеющим возможности вступать в прямой контакт ресурсообмена. Подобную ситуацию мы наблюдаем, например, при покупке и продаже жилья. Посредник извлекает прибыль из-за различия оценок ресурса на множестве клиентов.

Пусть \hat{p} и \check{p} — предельные цены (верхняя и нижняя соответственно) клиентов, $p_+(t)$ — цена покупки, $p_-(t)$ — цена продажи. Поскольку посредник не может продавать ресурс по цене выше, чем максимальная цена клиентов, и покупать ресурс по цене ниже, чем минимальная цена клиентов, то должны выполняться неравенства

$$p_-(t) \leq \hat{p}_0, \quad p_+(t) \leq \check{p}_0.$$

Задача максимизации интенсивности получения прибыли может быть формализована как

$$J = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+] dt \rightarrow \max_{p_+, p_-}, \quad (8.117)$$

где $g_-(\hat{p}_0, p_-)$ и $g_+(\check{p}_0, p_+)$ — потоки ресурса при продаже и покупке.

Как и в предыдущей модели, мы считаем, что посредник не накапливает ресурс. Условие ненакопления ресурса запишем как

$$\Delta N = \int_0^{\tau} [g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)] dt = 0. \quad (8.118)$$

При истощении капитала или ресурса потоки покупок и продаж связаны неравенствами

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0, p_+)p_+ &\leq g_-(\hat{p}_0, p_-)p_-, & M &= 0, \\ g_+(\check{p}_0, p_+) &\geq g_-(\hat{p}_0, p_-), & N &= 0. \end{aligned} \quad (8.119)$$

Изменения запасов ресурса и капитала определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-), & N(0) &= N_0, \\ \dot{M}(t) &= g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+, & M(0) &= M_0. \end{aligned} \quad (8.120)$$

В том случае, когда N_0 и M_0 велики, вероятность истощения запасов капитала и ресурса пренебрежимо мала, поэтому неравенства (8.119) можно отбросить. Уравнения (8.120) не содержат в правых частях N и M , и в этом случае их можно не учитывать при выборе оптимальных цен p_+^* и p_-^* .

Решим задачу (8.117), (8.118). Функцию Лагранжа запишем как

$$L = g_-(\hat{p}_0, p_-)(p_- - \lambda) - g_+(\check{p}_0, p_+)(p_+ - \lambda).$$

Условия ее стационарности по p_+ и p_- приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} [p_+(t) - \lambda] + g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= 0, \\ \frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} [p_-(t) - \lambda] + g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (8.121)$$

Если решение этих двух уравнений единственно и соответствует максимуму L , то из уравнений (8.121) получаем

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= -\frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} (p_+(t) - \lambda), \\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= -\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} (p_-(t) - \lambda). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (8.118):

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_0^{\tau} [g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)] dt = \\ &= \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} p_+(t) \right] dt + \\ &+ \lambda \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} \right] dt = 0, \end{aligned}$$

откуда выразим λ :

$$\lambda = \frac{\int_0^{\tau} \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} p_+(t) \right] dt}{\int_0^{\tau} \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+} \right] dt}. \quad (8.122)$$

Подставляя λ из уравнения (8.122) в (8.121), получим систему уравнений для нахождения оптимальных $p_+^*(t)$ и $p_-^*(t)$.

Для линейной зависимости потока ресурса от разности цен

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= \alpha_+(p_+(t) - \check{p}_0(t)), \\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= \alpha_-(p_-(t) - \hat{p}_0(t)), \end{aligned} \quad (8.123)$$

где α_+ , α_- — некоторые положительные константы, уравнения (8.121) примут вид

$$\alpha_+(p_+ - \lambda) + \alpha_+(p_+ - \check{p}_0) = 0, \quad \alpha_-(p_- - \lambda) + \alpha_-(p_- - \hat{p}_0) = 0.$$

Подставив в эти уравнения значение λ , получим оптимальное решение

$$\begin{aligned} p_+^*(t) &= \frac{1}{2}(\lambda + \check{p}_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_+ \bar{p}_+ + \alpha_- \bar{p}_-}{\alpha_+ + \alpha_-} + \check{p}_0(t) \right], \\ p_-^*(t) &= \frac{1}{2}(\lambda + \hat{p}_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_+ \bar{p}_+ + \alpha_- \bar{p}_-}{\alpha_+ + \alpha_-} + \hat{p}_0(t) \right]. \end{aligned}$$

В выражениях для p_+^* и p_-^* содержатся их средние значения \bar{p}_+ и \bar{p}_- на интервале $[0, \tau]$. Мы можем избавиться от \bar{p}_+ и \bar{p}_- , усреднив левые и правые части в этих равенствах. В результате получим систему уравнений с двумя неизвестными \bar{p}_+ и \bar{p}_- :

$$\bar{p}_+ = \frac{(2\alpha_+ + \alpha_-)\bar{p}_0 + \alpha_- \bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad \bar{p}_- = \frac{\alpha_+ \bar{p}_0 + (\alpha_+ + 2\alpha_-)\bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}.$$

Таким образом, зная \bar{p}_+ и \bar{p}_- , можем выразить оптимальные значения p_+^* и p_-^* только через $\check{p}_0(t)$ и $\hat{p}_0(t)$ и их средние значения:

$$p_+^*(t) = \frac{1}{2} \check{p}_0(t) + \frac{\alpha_+ \bar{p}_0 + \alpha_- \bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad p_-^*(t) = \frac{1}{2} \hat{p}_0(t) + \frac{\alpha_+ \bar{p}_0 + \alpha_- \bar{p}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}. \quad (8.124)$$

Максимальная интенсивность получения прибыли:

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+] dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau [-\alpha_- (p_-^*(t) - \hat{p}_0(t))p_-^*(t) - \alpha_+ (p_+^*(t) - \check{p}_0(t))p_+^*(t)] dt. \end{aligned} \quad (8.125)$$

В том случае, когда цены \hat{p}_0 и \check{p}_0 представляют собой стационарные случайные процессы, полученные соотношения справедливы и могут быть обобщены, как это сделано выше для обмена с одним рынком. Для кинетики в форме (8.123) выражения (8.124) остаются в силе, если под \bar{p}_0 и \bar{p}_0 понимать математические ожидания этих процессов. Оценка для интенсивности получения прибыли (8.125) примет форму

$$J^* = \frac{1}{4}(\alpha_+ D_{\check{p}_0} + \alpha_- D_{\hat{p}_0}) + \frac{\alpha_+ \alpha_-}{4(\alpha_+ + \alpha_-)} (\bar{p}_0 - \bar{p}_0)^2,$$

где $D_{\check{p}_0} = \overline{\check{p}_0^2} - (\bar{p}_0^2)$, $D_{\hat{p}_0} = \overline{\hat{p}_0^2} - (\bar{p}_0^2)$ — дисперсии случайных величин \check{p}_0 и \hat{p}_0 .

Вероятности истощения запаса ресурса Рассматривая задачи извлечения базисного ресурса в системах с нестационарными экономическими резервуарами мы предполагали, что запасы ресурсов посредника не истощаются при изменении потоков закупок и продаж. Чтобы выяснить, насколько грубым является это допущение, найдем вероятность истощения запаса ресурса N в предположении, что $p_0(t)$ является гауссовым стационарным случайным процессом с корреляционной функцией вида

$$R_{p_0}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha|\tau|].$$

Нетрудно показать, что для линейной зависимости (8.112) потока ресурса от разности цен этот поток при $p = p^*(p_0)$ также является гауссовым случайным процессом с корреляционной функцией

$$R_{g^*}(\tau) = \frac{\alpha^2}{4} R_{p_0}(\tau) = \frac{\alpha^2 \sigma^2}{4} \exp(-\alpha|\tau|).$$

Здесь множитель при экспоненте равен дисперсии D_{g^*} . Такой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S_{g^*}(w) = \frac{2\alpha D_{g^*}}{\alpha^2 + w^2} = \frac{\alpha^3 \sigma^2}{2(\alpha^2 + w^2)}.$$

Спектральная плотность процесса $N(t)$, связанного с $g^*(t)$ уравнением (8.106), имеет вид

$$S_N(w) = \frac{\overline{N_0} - S_g(w)}{w^2}.$$

Константа $\overline{N_0}$ имеет смысл математического ожидания процесса $N(t)$ и выбирается из условия ограниченности дисперсии. Дисперсия процесса $N(t)$

$$D_N = \int_0^{\infty} S_N(w) dw$$

ограничена при $\overline{N_0} = \frac{\alpha\sigma^2}{2}$. При таком выборе

$$D_N = \frac{\sigma^2}{4}. \quad (8.126)$$

Вероятность истощения запаса ресурса равна вероятности того, что отрицательные отклонения $N(t)$ от $\overline{N_0}$ превысят величину начального запаса. Эту вероятность можно найти, так как закон распределения величины N нормальный, известны ее математическое ожидание и дисперсия.

Одной из возможных (близкой к оптимальной) стратегий выбора $p(t)$ является выбор по формуле (8.123) для тех моментов времени, когда $N(t) > 0$, и выбор $p(t)$ из условия равенства $g(t)$ нулю для случая, когда $N(t) = 0$. Средняя интенсивность получения прибыли в этом случае с учетом того, что при $g(t) = 0$ $\dot{M} = 0$, равна $\check{J}(N_0) = \check{J}^*(1 - P(N_0))$ и она может служить нижней оценкой для достижимой интенсивности прибыли посредника. При стремлении начального запаса N_0 к бесконечности оценки сближаются друг с другом.

Аналогичный анализ можно провести для вероятности выполнения второго из неравенств (8.108) (истощение капитала). Однако в отличие от $N(t)$ величина капитала $M(t)$ возрастает, и вероятность того, что $M(t)$ обратится в нуль, со временем уменьшается. Полученные оценки показывают, какие характеристики рыночных цен нужно прогнозировать для выбора оптимальных потоков и цен покупки и продажи ресурса.

8.6. Извлечение прибыли в открытой стационарной экономической системе

В гл. 7 было показано, что в открытой экономической системе, близкой к состоянию равновесия, запасы ресурса между подсистемами перераспределяются так, чтобы сумма произведений потоков ресурсов на разности их оценок в контактирующих подсистемах (диссипация капитала) была минимальна. Если система включает активную подсистему — посредническую фирму, которая может вступать в контакт с подсистемами, то диссипация капитала уменьшается и часть его может быть извлечена посредником.

Рассмотрим систему, состоящую из r экономических резервуаров и $k-r$ ЭА-в, обменивающихся друг с другом ресурсами и капиталом (рис. 8.6) в предположении, что оценки ресурсов ЭА-в не зависят от запасов базисного ресурса.

Оценки ресурса для резервуаров p_i ($i = 1, \dots, r$) постоянны, для $i > r$ эти оценки зависят от запасов ресурса N_i в i -й подсистеме.

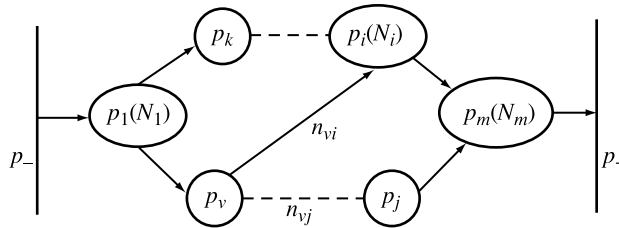


Рис. 8.6. Структура открытой системы с двумя экономическими резервуарами

Поток ресурса n_i экономического агента, имеющего оценку $p_i(N_i)$, сопровождается потоком капитала $q_i = -n_i c_i$, где c_i — цена ресурса, которая больше p_i , когда экономический агент продает ресурс ($n_i < 0$), и меньше p_i , когда он его покупает ($n_i > 0$). Если обмен происходит между ЭА и j -м резервуаром, то $c_i = p_j$, а

$$n_{ij} = n_{ij}(p_j, p_i), \quad q_{ij} = -p_j n_{ij}, \quad j = 1, \dots, r; \quad i = r + 1, \dots, k. \quad (8.127)$$

При обмене между двумя ЭА, введем, следуя [123], промежуточную цену c_{iv} так, чтобы

$$\bar{n}_{iv}(p_i, c_{iv}) = -\bar{n}_{vi}(p_v, c_{iv}), \quad (8.128)$$

где $(i; \nu) \geq r + 1$. Условия (8.128) позволяют выразить $c_{i\nu}$ через p_i, p_ν . В конечном счете получим

$$n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -n_{\nu i}(p_\nu, p_i). \quad (8.129)$$

Для потоков, линейных относительно разности цены и оценки,

$$\bar{n}_{i\nu} = \bar{\alpha}_{i\nu}(p_i - c_{i\nu}), \quad \bar{n}_{\nu i} = \bar{\alpha}_{\nu i}(p_\nu - c_{i\nu}),$$

по условию (8.128) получим $c_{i\nu}$ и потоки, фигурирующие в равенстве (8.129):

$$c_{i\nu} = \frac{\bar{\alpha}_{i\nu}p_i + \bar{\alpha}_{\nu i}p_\nu}{\bar{\alpha}_{i\nu} + \bar{\alpha}_{\nu i}}, \quad (8.130)$$

$$\begin{aligned} n_{i\nu}(p_i, p_\nu) &= \frac{\bar{\alpha}_{\nu i}\bar{\alpha}_{i\nu}}{\bar{\alpha}_{i\nu} + \bar{\alpha}_{\nu i}}(p_i - p_\nu) = \alpha_{i\nu}(p_i - p_\nu), \\ n_{\nu i}(p_\nu, p_i) &= -n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \alpha_{i\nu}(p_\nu - p_i). \end{aligned} \quad (8.131)$$

Потоки капитала равны

$$q_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -c_{i\nu}(p_i, p_\nu)n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -q_{\nu i}(p_\nu, p_i). \quad (8.132)$$

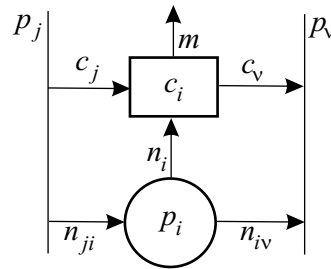


Рис. 8.7. Открытая система, включающая фирму, экономические резервуары и подсистему с конечной емкостью

Пусть система (рис. 8.7) включает фирму, которая может покупать ресурс у одних ЭА и продавать другим, извлекая при этом базисный ресурс. Фирма назначает цену v_i при обмене с i -й подсистемой, поток ресурса при этом равен $n_i(p_i, v_i)$. В условиях равновесия задача о максимальной интенсивности извлечения базисного ресурса примет вид

$$m = - \sum_{i=1}^k n_i(p_i, c_i)c_i \rightarrow \max_{c,p} \quad (8.133)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^k n_i(p_i, c_i) = 0, \quad (8.134)$$

$$\sum_{j=1}^k n_{ji}(p_j, p_i) = n_i(p_i, c_i), \quad i = r+1, \dots, k. \quad (8.135)$$

Знак минус в (8.133) объясняется тем, что за положительное направление принято направление потока ресурса от ЭА к фирме, такой поток сопровождается затратами фирмой базисного ресурса. Условие (8.134) соответствует балансу фирмы, а условия (8.135) — балансу каждого из $(k-r)$ ЭА по ресурсам.

Для получения условий оптимальности запишем функцию Лагранжа задачи (8.133), (8.135):

$$L = \sum_{i=1}^k \left[n_i(p_i, c_i)(\Lambda - c_i + \lambda_i) - \lambda_i \sum_{j=1}^k n_{ji}(p_j, p_i) \right]. \quad (8.136)$$

При этом $\lambda_i = 0$ при $i \leq r$.

Условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_i}{\partial c_i}(\Lambda - c_i - \lambda_i) = n_i(p_i, c_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (8.137)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_i}{\partial p_i}(\Lambda - c_i - \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial n_{ji}}{\partial p_i}, \quad i = r+1, \dots, k. \quad (8.138)$$

Условия (8.134), (8.135), (8.137), (8.138) определяют $2(k-r)$ неизвестных p_i и λ_i , величину Λ и k оптимальных цен c_i .

В частности, для $n_{ji} = \alpha_{ji}(p_i - p_j)$, $n_i = \alpha_i(c_i - p_i)$ эти условия примут вид

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(c_i - p_i) = 0, \quad (8.139)$$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_{ji}(p_i - p_j) = \alpha_i(c_i - p_i), \quad i = r+1, \dots, k, \quad (8.140)$$

$$2c_i = \lambda_i + \Lambda + p_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (8.141)$$

$$-\alpha_i(\Lambda - c_i + \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^k \alpha_{ji}, \quad i = r+2, \dots, k. \quad (8.142)$$

Пример. Для частного случая, когда $k = r = 2$, $p_1 = p_-$, $p_2 = p_+$, причем $p_+ > p_-$, система (8.139)–(8.141) примет вид (условия (8.140) и (8.142) отсутствуют, так как $r = k$, а λ_1 и λ_2 равны нулю)

$$\alpha_1(c_1 - p_-) + \alpha_2(c_2 - p_+) = 0, \quad 2c_1 = \Lambda + p_-, \quad 2c_2 = \Lambda + p_+.$$

Необходимо найти c_1 , c_2 . Решение этой системы

$$c_1^* = \frac{2\alpha_1 p_- + \alpha_2(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad c_2^* = \frac{2\alpha_2 p_+ + \alpha_1(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

где c_1^* и c_2^* — оптимальные цены закупки и продажи ресурса. По условию (8.133) с учетом оптимальных цен интенсивность извлечения базисного ресурса

$$m^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (p_+ - p_-)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2 - 2)}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда $r = 2$, а $k = 3$. Другими словами, система содержит два резервуара, фирму и ЭА. Здесь c_3 — цена покупки (продажи) ресурса фирмой у ЭА, p_3 — его оценка ресурса. Подсистема контактирует с резервуарами и фирмой, между ними возникают потоки ресурсов. Цель фирмы остается прежней — извлечение максимально возможного потока базисного ресурса. Система (8.139)–(8.142) примет форму

$$\alpha_1(c_1 - p_-) + \alpha_2(c_2 - p_+) + \alpha_3(c_3 - p_3) = 0, \quad (8.143)$$

$$\alpha_3(c_3 - p_3) = \alpha_4(p_3 - p_-) + \alpha_5(p_3 - p_+), \quad (8.144)$$

$$c_1 = \frac{\Lambda + p_-}{2}, \quad (8.145)$$

$$c_2 = \frac{\Lambda + p_+}{2}, \quad (8.146)$$

$$c_3 = \frac{\lambda_3 + \Lambda + p_3}{2}, \quad (8.147)$$

$$-\alpha_3(\Lambda - c_3 + p_3) = \lambda_3(\alpha_4 + \alpha_5), \quad (8.148)$$

откуда получаем c_1^* , c_2^* , c_3^* , p_3^* .

Исследуем зависимость предельной интенсивности извлечения базисного ресурса и потока ресурса между фирмой и ЭА от коэффициента α_4 . Зададим следующие значения:

$$\alpha_1 = 0,2, \quad \alpha_2 = 0,3, \quad \alpha_3 = 0,01, \quad \alpha_5 = 0,4, \quad p_- = 4, \quad p_+ = 7,$$

и для них найдем зависимости $c_1^*(\alpha_4)$, $c_2^*(\alpha_4)$, $c_3^*(\alpha_4)$ и $p_3^*(\alpha_4)$. Подставляя найденные величины в выражение для интенсивности извлечения базисного ресурса (8.133), получим функцию $m^*(\alpha_4)$.

На рис. 8.8 изображена функция $m^*(\alpha_4)$ и поток между фирмой и ЭА $n_3^*(\alpha_4) = \alpha_3 \cdot (c_3^*(\alpha_4) - p_3^*(\alpha_4))$.

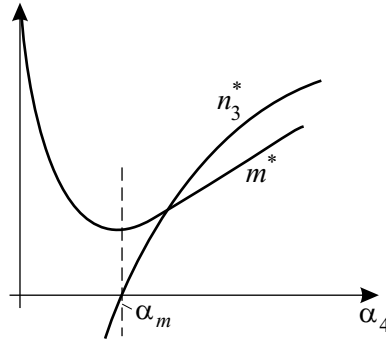


Рис. 8.8. Зависимости предельной интенсивности извлечения базисного и потока обмена между фирмой и ЭА от параметра α_4

Как видно из графиков, функция $m^*(\alpha_4)$ при некотором $\alpha = \alpha_m$ достигает своего минимума, а функция $n_3^*(\alpha_4)$ равна нулю при том же значении $\alpha_4 = \alpha_m$. Это естественно, так как фирма обменивается с ЭА с целью увеличения своей прибыли. Если при некотором значении α_4 поток обмена $n_3 = 0$, то поток прибыли t минимален.

В ряде случаев представляет интерес задача, обратная по отношению к рассмотренной, а именно: какие подсистемы и в каком количестве следует подпитывать базисным ресурсом для того, чтобы с минимальными его затратами поддерживать заданную конфигурацию оценок ресурсов во всех или в выбранных подсистемах. Подобную задачу решает, например, государство при поддержании заданного уровня цен на те или иные ресурсы в отдельных регионах, обменивающихся с другими ЭА. Условия оптимальности подобной обратной задачи совпадают с условиями (8.137), (8.138) прямой, так как максимуму потока t базисного ресурса, когда он отрицателен, соответствует минимум его затрат.

Глава 9

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

9.1. Экономические системы, включающие производственную фирму

Производственная функция и микроэкономические балансы. В этом разделе рассмотрены микроэкономические системы, включающие производственную фирму той или иной структуры. Она, как и посредническая фирма, является активной подсистемой, т. е. устанавливает цены закупок сырья и продаж готовой продукции с целью извлечения максимума базисного ресурса (функция благосостояния — монотонная функция M). Но в отличие от посреднической производственная фирма характеризуется *производственной функцией*, определяющей связь между вектором потока выпускаемой продукции и входными потоками предприятия.

Потоки ресурсов, используемых для производства, обозначим через q , а получаемые в результате производства — через P . Расходуемые ресурсы могут измеряться в натуральных единицах или быть агрегированными потоками затрат на сырье, оборудование, людские ресурсы и пр. Их называют факторами производства. Факторы производства подразделяют на *взаимозаменяемые* и *взаимодополняющие*. В последнем случае каждый из этих факторов необходим, при его отсутствии выпуск P равен нулю, а при ограничении такого фактора выпуск продукции может быть ограничен. взаимодополняющие ресурсы могут

быть *комплементарными*, т. е. входить в каждую единицу выпускаемой продукции в строго определенных пропорциях.

Возможности производства характеризует производственная функция $P = P(q)$, показывающая как связан поток производимой продукции с затратами факторов производства. Как правило, эта зависимость удовлетворяет следующим условиям [40]:

1. Выпуск продукции невозможен без затрат ресурсов ($P(0) = 0$).
2. Функция P — монотонная по каждому из факторов производства, дифференцируемая, выпуклая вверх и однородная первой степени, т.е.

$$P(rq_1, rq_2, \dots) = rP(q_1, q_2, \dots).$$

Примером такой функции является функция Кобба–Дугласа:

$$P(q) = \kappa \prod_{i=0}^m q_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1. \quad (9.1)$$

Последнее равенство связано с однородностью функции P . Все факторы производства при таком задании производственной функции предполагают взаимодополняющими.

Уравнения экономических балансов по ресурсам N , M и связанному капиталу F для системы, содержащей фирму, примут вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_i &= g_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} - q_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{N}_i &= g_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} + P_i(q), \quad i = n + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\dot{M} = m_{\text{вх}} - m_{\text{вых}} - \sum_{i=1}^m (g_{i\text{вх}}c_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}}c_{i\text{вых}}), \quad (9.3)$$

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^m (g_{i\text{вх}}p_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}}p_{i\text{вых}}) + \sigma. \quad (9.4)$$

При этом диссипация капитала σ равна (см. гл. 7)

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_j \sum_\nu g_{j\nu}(p_j, p_\nu)(p_j - p_\nu) - \sum_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij}q_{ij} - \sum_{i=n+1}^m p_{ij}P_{ij}(q_j) \right), \quad (9.5)$$

где $g_{i\text{вх}}$, $g_{i\text{вых}}$ — суммарные потоки i -го ресурса, поступающие и покидающие систему; p_j и p_ν — векторы оценок ресурсов j -й и ν -й подсистем с составляющими p_{ij} и $p_{i\nu}$. Индекс для потребляемых ресурсов изменяется от единицы до n , а для производимых продуктов от $n + 1$ до m . Функция $P_{ij}(q)$ — производственная функция по i -му продукту для

j -ой подсистемы; $m_{\text{вх}}$ и $m_{\text{вых}}$ — потоки базисного ресурса, в число потребляемых ресурсов включено закупаемое, а в число производимых — списанное оборудование. В неоднородной системе диссипация капитала $\sigma \geq 0$.

Производственные фирмы закупают одни виды ресурсов (сырье, энергию, трудовые ресурсы и пр.), а продают — другие. Эти фирмы могут иметь сложную структуру с обменом потоками сырья и полуфабрикатов между ее элементами. Ниже с учетом структуры рассмотрены предельные возможности производственной фирмы, функционирующей в открытой экономической системе.

Однородная производственная фирма со скалярным потоком продукции. Рассмотрим производственную фирму, приобретающую потоки ресурсов q_i по ценам c_i ($i = 1, \dots, m$) и продающую поток g продукции по цене c_g . Зависимость между потоком производимой продукции и используемыми для производства ресурсами определяет производственная функция P . Мы не учитываем внутренней структуры фирмы и промежуточных потоков сырья и полуфабрикатов. Поэтому рассматриваемую фирму можно назвать однородной.

Разобьем вектор поступающих ресурсов на две категории: взаимодополняющие ресурсы с потоками $q_i(c_i)$ ($i = 1, \dots, n$) и взаимозаменяемые ресурсы с потоками $q_i(c_i)$ ($i = n + 1, \dots, m$). На каждый из потоков наложено условие неотрицательности. То значение цены закупки c_{i0} , для которого поток q_i обращается в нуль, называют оценкой ресурса. При $c_i > c_{i0}$, $q_i(c_i) > 0$. Аналогично, оценка c_{g0} определяет область ненулевого потока продукции (при $c_g < c_{g0}$, $g(c_g) > 0$).

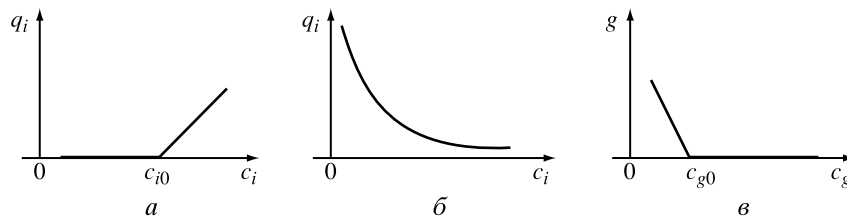


Рис. 9.1. Зависимость потоков ресурсов (a , b) и продукции (v) от цен

Функция предложения (зависимость потока от цены закупки) может быть различной. Например (рис. 9.1, a),

$$q_i(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_i \leq c_{i0}, \\ k_i(c_i - c_{i0}) & \text{при } c_i > c_{i0}. \end{cases} \quad (9.6)$$

Здесь коэффициент k_i больше нуля. Для ресурсов, плата K за которые постоянна и не зависит от потока q_i , таких, как оплата аренды зданий, земли и пр. (рис. 9.1, б), вводят условный поток ресурса и его цену так, что

$$q_i(c_i)c_i = K \text{ при } c_i > 0. \quad (9.7)$$

Поток продукции фирмы определен функцией спроса $g(c_g)$. Характер этой зависимости показан на рис. 9.1, в:

$$g(c_g) = \begin{cases} 0 & \text{при } c_g \geq c_{g0}, \\ k_g(c_{g0} - c_g) & \text{при } c_g < c_{g0}. \end{cases} \quad (9.8)$$

Для комплементарных ресурсов потребление каждого однозначно определяется потоком продукции g , так что

$$q_i = \varphi_i(g), \quad i = 1, \dots, n,$$

а поток затрат на эти ресурсы

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^n c_i q_i(c_i) = \sum_{i=1}^n c_i(g) \varphi_i(g), \quad (9.9)$$

где зависимости $c_i(g)$ определяются из условия

$$q_i(c_i) = \varphi_i(g), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.10)$$

В общем случае зависимость между потоком продукции g и потоками q_i :

$$g = P(q_{n+1}, \dots, q_m),$$

не позволяет определить q_i через g . Для каждого значения производительности g минимальные затраты

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \sum_{i=n+1}^m c_i q_i(c_i) \Big/ P(q(c)) = g. \quad (9.11)$$

Таким образом, затраты на взаимозаменяемые ресурсы определяются решением экстремальной задачи (9.11).

Предельное значение потока прибыли производственной фирмы, в свою очередь, находят как решение задачи:

$$r(c_g) = c_g g(c_g) - T_1(g(c_g)) - T_2(g(c_g)) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}}. \quad (9.12)$$

Диссипация капитала при закупке сырья и продаже продукции фирмой равна

$$\sigma = \sum_{i=1}^m (c_i - c_{i0})q_i + (c_{g0} - c_g)g; \quad (9.13)$$

$\sigma = 0$, если закупка ресурса и продажа продукции проводятся по ценам c_{i0} и c_{g0} , при этом отношение прибыли к затратам $\eta = r/(T_1 + T_2)$ максимально, хотя как числитель, так и знаменатель этого выражения стремятся к нулю.

Найдем решение задачи о максимуме интенсивности получения прибыли r при линейных функциях $P(q)$ и $\varphi_i(g)$ для разных типов ресурсов:

$$P(q) = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i q_i, \quad i = n+1, \dots, m, \quad (9.14)$$

$$\varphi_i(g) = \frac{g}{\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.15)$$

Используя зависимости (9.6) и (9.10), находим выражения для $c_i(g)$

$$c_i = c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.16)$$

и потока затрат $T_1(g)$:

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^n \frac{g}{\alpha_i} \left(c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i} \right). \quad (9.17)$$

Задача (9.11) для взаимозаменяемых ресурсов примет вид

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \sum_{i=n+1}^m c_i k_i (c_i - c_{i0}) \Big/ \sum_{i=n+1}^m \alpha_i k_i (c_i - c_{i0}) = g. \quad (9.18)$$

Ее решение

$$T_2(g) = \sum_{i=n+1}^m c_i^*(g) k_i (c_i^*(g) - c_{i0}), \quad (9.19)$$

где

$$c_i^*(g) = \frac{c_{i0}}{2} + \alpha_i \frac{2g + \sum_{i=n+1}^m k_i c_{i0} \alpha_i}{2 \sum_{i=n+1}^m k_i \alpha_i^2}, \quad i = n+1, \dots, m, \quad (9.20)$$

откуда

$$T_2(g) = \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2g + \sum_{i=n+1}^m \alpha_i k_i c_{i0}\right)^2}{\sum_{i=n+1}^m \alpha_i^2 k_i} - \sum_{i=n+1}^m k_i c_{i0}^2 \right]. \quad (9.21)$$

Задачу (9.12) с учетом этих выражений запишем в форме

$$r = c_g g(c_g) - g(c_g) \sum_{i=1}^n \frac{c_{i0}}{\alpha_i} - g^2(c_g) \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i \alpha_i^2} - \sum_{i=n+1}^m k_i c_i^*(g(c_g)) [c_i^*(g(c_g)) - c_{i0}] \rightarrow \max_{c_g}. \quad (9.22)$$

Для зависимостей (см. (9.20), (9.8))

$$\frac{dc_i^*}{dg} = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=n+1}^m \alpha_j^2 k_j}, \quad \frac{dg}{dc_g} = -k_g$$

эта задача выпукла вверх и условие ее оптимальности запишем как

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dc_g} = 0 \implies & (2c_g - c_{g0}) - \sum_{i=1}^n \frac{c_{i0}}{\alpha_i} - 2k_g(c_{g0} - c_g) \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i \alpha_i} - \\ & - \sum_{i=n+1}^m \frac{k_i \alpha_i}{\sum_{j=n+1}^m k_j \alpha_j^2} [2c_i^*(g) - c_{i0}] = 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом (9.20) получим выражение для c_g^* :

$$c_g^* = c_{g0} + \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_{i0}}{\alpha_i} - c_{g0} + \frac{\sum_{i=n+1}^m \alpha_i k_i c_{i0}}{\sum_{i=n+1}^m \alpha_i^2 k_i}}{1 + k_g \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i^2 k_i} + \frac{1}{\sum_{i=n+1}^m k_i \alpha_i^2} \right)}. \quad (9.23)$$

После подстановки c_g^* в (9.8) и (9.22), найдем максимальный поток извлечения прибыли r^* .

Учет внутренней структуры и распределение потоков ресурса. В реальной производственной системе зависимости между потоками закупаемых и производимых ресурсов непосредственно не заданы. Переработка может состоять из нескольких стадий, включать в

себя рециклы, распределение полуфабрикатов, цены которых не определены, и пр. Ниже рассмотрены несколько задач, связанных с учетом структуры производственной фирмы.

Система с рециклом (рис. 9.2, а). В этой системе долю выпуска γ производимой продукции повторно направляют в производство. Обозначим этот поток через $q_0 = \gamma g$.

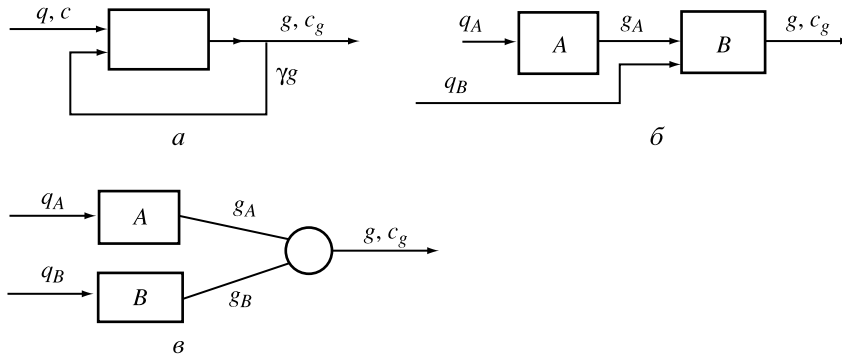


Рис. 9.2. Соединения производственных ячеек с рециклом (а), последовательное (б) и параллельное (в)

Если рецикл с потоком q_0 относится к взаимодополняющим ресурсам, а значит, однозначно связан с производительностью g , то условие

$$q_0 = \gamma g = \varphi_0(g(1 + \gamma))$$

для монотонной функции φ_0 определяет $\gamma(g)$. Так, для зависимостей в форме (9.14) из условия $\gamma g = (1 + \gamma)g/\alpha_0$ следует, что $\gamma = 1/(\alpha_0 - 1)$. Задача оценки предельной прибыли отличается от задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, тем, что в функциях $T_1(g)$ и $T_2(g)$ нужно заменить g на $(1 + \gamma(g))g$.

Если рецикл относится к взаимозаменяемым ресурсам, то задача (9.11) примет вид

$$T_2(g, \gamma) = \min_{c \geq c_0} \left[\sum_{i=n+1}^m c_i q_i(c_i) + c_g \gamma g \right] / P(q_{n+1}, \dots, q_m, \gamma g) = (1 + \gamma)g. \tag{9.24}$$

Минимальные затраты $T_2(g, \gamma)$ будут зависеть не только от g , но и от γ . Критерий максимальной интенсивности извлечения прибыли:

$$r = c_g g(c_g) - T_1((1 + \gamma)g(c_g)) - T_2(g(c_g), \gamma) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}, 1 > \gamma \geq 0}. \tag{9.25}$$

Последовательное соединение производственных ячеек (рис. 9.2, б). Для первой из ячеек A по формулам (9.9), (9.11) могут быть рассчитаны минимальные затраты как функция потока g_A полуфабриката:

$$T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A). \quad (9.26)$$

В том случае, когда полуфабрикат является комплементарным, его поток определяется значением потока продукции g : $g_A = \varphi_A(g)$, а значит, и затраты T_A оказываются зависимыми от g . Выбор цены c_g и производительности g осуществляется решением задачи (9.12), которая для данного случая примет форму

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_{1B}(g(c_g)) - T_{2B}(g(c_g)) - T_A(g(c_g)) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}}. \quad (9.27)$$

Если же поток g_A полуфабриката взаимозаменяемый, то слагаемое $T_A(g(c_g))$ в выражении для m (9.27) отсутствует, и задача (9.11) преобразуется к виду

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \left[\sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} q_{iB}(c_{iB}) + T_A(g_A) \right] / F(q(c)) = g. \quad (9.28)$$

Пример. Решим задачу (9.28) для линейных зависимостей $q_\nu(c_\nu)$ (9.6), $F_\nu(q_\nu)$ (9.13), $\varphi_\nu(g_\nu)$ (9.14) ($\nu = \{A, B\}$). С учетом (9.17), (9.21) эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} k_{iB} (c_{iB} - c_{i0B}) + \sum_{i=1}^{n_A} \frac{g_A}{\alpha_{iA}} \left(c_{i0A} + \frac{g_A}{\alpha_{iA} k_{iA}} \right) + \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2g_A + \sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA} k_{iA} c_{i0A} \right)^2}{\sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}} - \sum_{i=n_A+1}^{m_A} k_{iA} c_{i0A}^2 \right] \rightarrow \min_{c_{iB}, g_A} \end{aligned} \quad (9.29)$$

при условии

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} \alpha_{iB} q_{iB} + \alpha_{0B} g_A = g_B. \quad (9.30)$$

Условия оптимальности этой задачи определяют выражения для переменных c_{iB} и g_A с точностью до константы λ :

$$c_{iB} = \frac{\lambda \alpha_{iB} + c_{i0B}}{2} \implies q_{iB} = k_{iB} \frac{\lambda \alpha_{iB} - c_{i0B}}{2} \quad (i = 1 + n_A, \dots, m_A),$$

$$g_A = \frac{\sum_{i=1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}}{2} \left[\lambda \alpha_{0B} - \left(\sum_{i=1}^{n_A} \frac{c_{i0A}}{\alpha_{iA}} + \frac{\sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA} k_{iA} c_{i0A}}{\sum_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}} \right) \right].$$

Значение λ находят из условия (9.30) после подстановки туда этих равенств.

Параллельное соединение производственных ячеек (рис. 9.2, extitv). Системы с параллельной структурой тщательно изучены. Найдя для каждой ячейки минимальные затраты $T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A)$ и $T_B(g_B) = T_{1B}(g_B) + T_{2B}(g_B)$, решают задачу оптимального распределения общего потока g . В частности, если найденные зависимости выпуклые вниз и гладкие, а их производные в нуле по модулю сколь угодно велики, то оптимальные потоки g_A и g_B удовлетворяют условиям

$$\frac{dT_A}{dg_A} = \frac{dT_B}{dg_B}, \quad g_A + g_B = g. \quad (9.31)$$

Условия (9.31) связывают потоки ячеек с общим потоком g и тем самым определяют затраты T_A и T_B как функции g . Последний же выбирают из условия максимума прибыли

$$r(c_g) = c_g g(c_g) - T_A(g(c_g)) - T_B(g(c_g)) \rightarrow \max_{c_g \leq c_{g0}}. \quad (9.32)$$

Представив производственную структуру как соединение отдельных производственных ячеек, каждая из которых в свою очередь, может не быть однородной, можно найти предельные возможности системы.

Для систем с векторным потоком готового продукта $g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_\kappa)$ максимальная прибыль для каждого вида продукции n_{0j} (g_j) определяется выражением (9.12). Выбор вектора g осуществляют как решение задачи

$$r(g) = \sum_{j=1}^{\kappa} n_{0j} [g_j(c_{gj})] \rightarrow \max_{c_{gj}}. \quad (9.33)$$

при тех или иных ограничениях, связывающих друг с другом потоки g_j . Такими ограничениями могут быть возможности оборудования, ограничения на поток какого-либо ресурса и пр.

Интенсивность извлечения прибыли r не всегда является критерием для выбора цен и потоков в производственных системах. Величина r может быть задана: $r = r^0$. Если это заданное значение не превосходит максимально возможного и требуется при $r = r^0$ минимизировать

затраты на единицу продукции, то, как нетрудно показать, задача сводится к минимизации диссипации капитала σ (9.13) при фиксированном $r^0(g)$.

Целесообразность складов сырья и готовой продукции. Наличие складов сырья и готовой продукции позволяет не только сгладить изменения внешних условий, но в ряде случаев повысить эффективность производства даже в стационарном окружении. Если на производстве есть склады сырья и готовой продукции, то «жесткие» связи между потоками заменяют усредненными. Так, например, для взаимодополняющих ресурсов имеем

$$\int_0^{\tau} [q_i(c_i(t)) - \varphi_i(g(t))] dt = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.34)$$

вместо равенства (9.10). Аналогично, для взаимозаменяемых ресурсов в задаче (9.11) нужно искать минимум функционала

$$\bar{T}_2 = \sum_{i=n+1}^m \int_0^{\tau} c_i(t) q_i(c_i(t)) dt \quad (9.35)$$

по $c_i(t) \geq c_{i0}$ ($i = n + 1, \dots, m$) при условии

$$\int_0^{\tau} [g(t) - F(q_{n+1}(c_{n+1}(t)), \dots, q_m(c_m(t)))] dt = 0. \quad (9.36)$$

В критерии оптимальности (9.12) при наличии складов также можно провести усреднение по времени, аналогичное (9.35), и искать изменение во времени отпускной цены $c_g(t)$ и потока $g(t)$.

Сформулированные таким образом задачи являются усредненными задачами нелинейного программирования [65]. Они имеют оптимальное решение либо в форме констант (статический режим), в этом случае наличие складов не приводит к дополнительному эффекту, либо в форме кусочно-постоянных функций (циклический режим). В случае циклического режима часть или все переменные задачи принимают в течение определенных долей γ_ν интервала времени τ оптимальные (базовые) значения, переключаясь между ними. Максимальное среднее значение \bar{r} в этом случае больше, чем r в статическом режиме, и склады позволяют получить дополнительный эффект. Приведем как следствие из общих свойств оптимальных решений усредненных задач (см. приложение П.3) условия целесообразности или, напротив, нецелесообразности складов.

1. Пусть g^* — оптимальное статическое значение производительности, а c_i^* — соответствующие этому значению цены. Если

$$\max_{\lambda} \min_c \left[\sum_{i=n+1}^m c_i q_i(c_i) + \lambda [F(q(c)) - g^*] \right] < \sum_{i=n+1}^m c_i^* q_i^*(c_i^*), \quad (9.37)$$

то склад на взаимозаменяемых потоках сырья целесообразен.

2. Аналогично, если для i -го взаимодополняющего потока

$$\max_{\lambda} \min_c \left[c_i q_i(c_i) + \lambda [q_i(c_i) - \varphi_i(g^*)] \right] < c_i^* q_i^*(c_i^*), \quad (9.38)$$

то склад i -го ресурса позволит получить дополнительную прибыль. Разность между левой и правой частями неравенств (9.37), (9.38) дает оценку сверху для возможного увеличения прибыли. Если эта разница невелика, то не стоит тратить средства на создание складов сырья.

3. Наконец, склад готовой продукции целесообразен, если

$$\min_{\lambda} \max_{c_g} \left[r(c_g) + \lambda [g(c_g) - g^*] \right] > r(c_g^*). \quad (9.39)$$

Условие (9.39) означает, что при $c_g = c_g^*$ выпуклая оболочка функции $r(c_g)$ проходит выше ее графика.

Как правило, целесообразность складов объясняется существенной нелинейностью определяющих усредненную задачу зависимостей: скачками в функциях спроса и предложения, связанными с переходом при некоторых значениях потока на другое оборудование, другие средства доставки, льготные тарифы и пр.

9.2. Банки как финансовые посредники в открытой экономической системе

Основными задачами моделирования банковской деятельности является исследование влияния тех или иных внешних факторов, таких как доля обязательного резервирования, ограничение на ставку по депозитам, ставка межбанковских кредитов, собственные затраты банка, темпы инфляции и др. на поведение банка и его клиентов, а также на результаты его деятельности. При этом предполагают [21], что банк действует на рынке совершенной конкуренции, когда ставки по кредитам r_L и по депозитам r_D фиксированы, либо на монопольном или

олигопольном рынке [112], [127], когда банки изменяют эти ставки, воздействуя тем самым на объем кредитов L и депозитов D .

Задача оптимального планирования деятельности банка должна учитывать его состояние, определяющееся объемами кредитов, депозитов, инвестиций и пр., состояние его клиентов, изменяющиеся во времени внешние факторы. Планирование действий банка на период τ с учетом этих данных и их прогнозируемых значений представляет собой стохастическую оптимизационную задачу большой размерности.

При оптимизации текущей деятельности банка его можно рассматривать как финансового посредника в открытой экономической системе, стремящегося извлечь максимальную прибыль. При этом от объемов ресурсов можно перейти к их потокам. Функцию C затрат банка на обслуживание клиентов также можно считать зависящей не от объемов ресурсов, а от потоков кредитов и депозитов, что во многих случаях ближе к реальности. Задача об оптимизации ставок банка в такой предельно упрощенной постановке рассмотрена ниже, при этом предполагаем, что ставки влияют не на объемы, а на потоки кредитов и депозитов.

Первоначально рассмотрим простейшую модель системы из банка-монополиста на рынках кредитов и депозитов, каждый из которых является экономическим резервуаром, а затем систему, состоящую из ЭА, каждый из которых может быть как вкладчиком банка, так и получателем кредита.

Оптимизация ставок банка-монополиста

В рассматриваемой упрощенной системе банк является посредником между двумя рынками — вкладчиков и заемщиков, которые по тем или иным причинам не могут вступать в непосредственный контакт. Заемщики нуждаются в деньгах и готовы получать кредиты по большей ставке, чем та, которую банк выплачивает по вкладам (депозитам). За счет этого различия образуется прибыль банка, которую он максимизирует, управляя ставками по кредитам и депозитам. Ставки могут быть фиксированными или зависеть от сроков и объемов заимствований. В последнем случае банк должен собирать информацию о том, как зависят от сроков и объемов заимствования показатели, характеризующие заинтересованность участников рынков, и менять свою стратегию в соответствии с этими данными.

Далее будем обозначать через $r(\tau)$ учетную ставку по кредиту, взятому на время τ , равную той доле взятого капитала, которую следует возвратить вместе с полученным кредитом. Величина r , как правило, есть неотрицательная, неубывающая функция от τ . Исключения составляют случаи, когда вкладчик использует банк как место безопасного хранения своего капитала или банк предоставляет льготный заем в благотворительных целях.

Выбор ставок $r_D(\tau_D)$ для депозитов и $r_L(\tau_L)$ для кредитов влияет на интенсивность вложений и займов. Эти ставки банк выбирает по условиям максимума средней прибыли. Если банк назначает лишь годовые ставки $r_D^0 = r_D(1)$ и $r_L^0 = r_L(1)$, то ставки $r_i(\tau_i)$ для произвольного срока хранения рассчитываются через них по тому или иному правилу. В частности, при непрерывном начислении процентов по вкладу

$$r_i(\tau_i) = (1 + r_i^0)^{\tau_i} - 1, \quad (9.40)$$

при начислении пропорционально сроку заимствования

$$r_i(\tau_i) = r_i^0 \tau_i, \quad i = D, L. \quad (9.41)$$

Заинтересованность вкладчиков и заемщиков банка в капитале будем характеризовать той минимальной ставкой p_D , по которой вкладчики готовы положить деньги в банк, и той максимальной ставкой p_L , по которой заемщики согласны взять кредит; p_D и $p_L > p_D$ называют оценками капитала на рынках депозитов и кредитов соответственно. Они могут зависеть от объема и срока заимствования. Будем предполагать, что эти показатели заинтересованности вкладчиков и заемщиков в капитале известны, найдем для этого случая оптимальные ставки и соответствующую им максимальную прибыль $\Pi^*(\tau_D, \tau_L)$ как функцию τ_D и τ_L . Если банк может влиять на сроки заимствования, то он выбирает τ_D и τ_L по условию максимума Π^* . Затем рассмотрим случай, когда сроки кредитов и депозитов — случайные величины и ставки следует выбирать по условию максимума средней прибыли.

Выбор ставок с учетом зависимости оценок от сроков заимствования. Предположим, что сроки заимствования для депозитов τ_D и кредитов τ_L и соответствующие им оценки капитала p_D и p_L известны. Найдем, как нужно выбирать ставки по займам r_D и кредитам r_L , чтобы прибыль банка была максимальна. Для выбора нужно знать связь между оценками p_i , назначаемыми ставками r_i ($i = D, L$) и потоками

капитала, поступающими в банк и выдаваемыми им в единицу времени. Объемы $G_D(r_D, p_D)$ и $G_L(p_L, r_L)$ являются функциями предложения и спроса для банка-монополиста

$$\begin{aligned} G_D(r_D, p_D) &= \begin{cases} 0 & \text{при } r_D \leq p_D, \\ > 0 & \text{при } r_D > p_D, \end{cases} \\ G_L(p_L, r_L) &= \begin{cases} 0 & \text{при } r_L \geq p_L, \\ > 0 & \text{при } r_L < p_L. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Прибыль, полученная от выдачи кредита G_L на время τ_L , равна

$$\Pi_L = G_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L))r_L(\tau_L),$$

а среднегодовое значение этой прибыли

$$\bar{\Pi}_L = G_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) \frac{r_L(\tau_L)}{\tau_L} = g_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L))r_L(\tau_L). \quad (9.43)$$

Аналогично, средние издержки по оплате депозитов при сроке заимствования τ_D равны

$$\bar{\Pi}_D = G_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) \frac{r_D(\tau_D)}{\tau_D} = g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D))r_D(\tau_D). \quad (9.44)$$

Средняя прибыль банка

$$\begin{aligned} \Pi(\tau_D, \tau_L) &= \overline{\Pi_L(\tau_L)} - \overline{\Pi_D(\tau_D)} = \frac{r_L(\tau_L)}{\tau_L} G_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) - \\ &- \frac{r_D(\tau_D)}{\tau_D} G_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) - C\left(\frac{G_L}{\tau_L}, \frac{G_D}{\tau_D}\right). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Здесь $C\left(\frac{G_L}{\tau_L}, \frac{G_D}{\tau_D}\right)$ — функция затрат банка на обслуживание клиентов, непрерывная, выпуклая вверх и монотонно возрастающая по каждому из своих аргументов (потоков кредитов и депозитов).

Пусть зависимости оценок от сроков заимствования $p_D(\tau_D)$ и $p_L(\tau_L)$ известны, ставки $r_D(\tau_D)$ и $r_L(\tau_L)$ нужно выбрать по условию максимума средней прибыли, учтя, что все полученные вклады используются для выдачи кредитов. Сроки заимствования предполагаются случайными величинами с плотностями распределения $P_D(\tau_D)$ и $P_L(\tau_L)$.

Средняя прибыль за год

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \overline{\frac{1}{\tau_L} G_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) r_L(\tau_L)} - \\ & - \overline{\frac{1}{\tau_D} G_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) r_D(\tau_D)} - C \left(\frac{G_L}{\tau_L}, \frac{G_D}{\tau_D} \right) \end{aligned} \quad (9.46)$$

должна быть максимальна при условии

$$(1 - \beta) \overline{G_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D))} - \overline{G_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L))} = 0, \quad (9.47)$$

где β — доля обязательного резервирования от объема депозитов, устанавливаемая центральным банком. При этом усреднение в некоторых слагаемых ведется по τ_L , или по τ_D , так что, например,

$$\begin{aligned} \overline{G_D} &= \int_0^{\infty} G_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) P_D(\tau_D) d\tau_D, \\ \overline{\left(\frac{G_L r_L}{\tau_L} \right)} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau_L} G_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) r_L(\tau_L) P_L(\tau_L) d\tau_L. \end{aligned}$$

Функция Лагранжа задачи (9.46), (9.47) имеет вид

$$\bar{L} = \left(\overline{\left(\frac{G_L r_L}{\tau_L} \right)} - \lambda \overline{G_L} \right) - \left(\overline{\left(\frac{G_D r_D}{\tau_D} \right)} - \lambda \overline{G_D} (1 - \beta) \right) - C \left(\frac{G_L}{\tau_L}, \frac{G_D}{\tau_D} \right).$$

Усреднение в первом слагаемом ведется по τ_L , а во втором по τ_D .

Приведем условия оптимальности сформулированной задачи в предположении, что C и β малы и ими можно пренебречь. Учет этих факторов делает выкладки несколько более громоздкими, но не меняет существа дела. При сделанных допущениях условия оптимальности задачи (9.46), (9.47) по $r_D(\tau_D)$ и $r_L(\tau_L)$ приводят к соотношениям

$$\frac{G_{ir_i} r_i(\tau_i) + G_i(r_i(\tau_i), r_i(\tau_i))}{G_{ir_i}} = \lambda \tau_i, \quad i = L, D, \quad (9.48)$$

которые определяют оптимальные зависимости $r_D(\tau_D, \lambda)$ и $r_L(\tau_L, \lambda)$. Подстановка этих зависимостей в (9.47) позволяет найти λ , а значит, и оптимальное решение.

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда

$$G_D = \alpha_D(r_D(\tau_D) - p_D(\tau_D)), \quad G_L = \alpha_L(p_L(\tau_L) - r_L(\tau_L)). \quad (9.49)$$

В этом случае частные производные

$$G_{1r_D} = \alpha_D, \quad G_{2r_L} = -\alpha_L.$$

Условия (9.48) для потоков капитала в форме (9.49) примут вид

$$2r_D(\tau_D) - p_D(\tau_D) = \lambda\tau_D, \quad 2r_L(\tau_L) - p_L(\tau_L) = \lambda\tau_L. \quad (9.50)$$

Подставим эти равенства в условие (9.47). Получим

$$\alpha_D \left(\frac{\lambda\bar{\tau}_D + \bar{p}_D}{2} - \bar{p}_D \right) = \alpha_L \left(\bar{p}_L - \frac{\lambda\bar{\tau}_L + \bar{p}_L}{2} \right),$$

где $\bar{\tau}_D$ и $\bar{\tau}_L$ — математические ожидания τ_D и τ_L .

Из последнего равенства получим значение множителя λ

$$\lambda = \frac{\alpha_D\bar{p}_D + \alpha_L\bar{p}_L}{\alpha_D\bar{\tau}_D + \alpha_L\bar{\tau}_L}, \quad (9.51)$$

так что оптимальные значения учетных ставок равны:

$$\begin{aligned} r_D(\tau_D) &= \frac{1}{2} \left(p_D(\tau_D) + \frac{\alpha_D\bar{p}_D + \alpha_L\bar{p}_L}{\alpha_D\bar{\tau}_D + \alpha_L\bar{\tau}_L} \tau_D \right), \\ r_L(\tau_L) &= \frac{1}{2} \left(p_L(\tau_L) - \frac{\alpha_D\bar{p}_D + \alpha_L\bar{p}_L}{\alpha_D\bar{\tau}_D + \alpha_L\bar{\tau}_L} \tau_L \right). \end{aligned} \quad (9.52)$$

Максимальная средняя прибыль банка при таком выборе ставок

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{4} \left[\alpha_D \left(\frac{r_D^2(\tau_D)}{\tau_D} \right) + \alpha_L \left(\frac{r_L^2(\tau_L)}{\tau_L} \right) - \lambda^2(\alpha_D\bar{\tau}_D + \alpha_L\bar{\tau}_L) \right], \quad (9.53)$$

где λ выражается через усредненные оценки \bar{p}_i и коэффициенты α_i в соответствии с (9.51).

Выбор годовых ставок, оптимальных в среднем. Если банк выбирает только годовые ставки r_D^0 и r_L^0 , то функции $r_i(\tau_i, r_i^0)$ зависят от выбранных ставок и способа начисления процентов (см. (9.40), (9.41)). Оптимум в задаче (9.46), (9.47) ищем по параметрам r_D^0 и r_L^0 .

Обозначив производные

$$\frac{\partial r_i(\tau_i, r_i^0)}{\partial r_i^0} = r_i'(\tau_i, r_i^0), \quad i = D, L,$$

получим вместо условий оптимальности (9.48) после исключения λ соотношение

$$\frac{r_D'}{\tau_D} \left(G_D + r_D \frac{\partial G_D}{\partial r_D} \right) \frac{r_L'}{\tau_L} \frac{\partial G_L}{\partial r_L} = \frac{r_L'}{\tau_L} \left(G_L + r_L \frac{\partial G_L}{\partial r_L} \right) \frac{r_D'}{\tau_D} \frac{\partial G_D}{\partial r_D}. \quad (9.54)$$

Это равенство вместе с условием (9.47) определяет оптимальные значения параметров r_D^0, r_L^0 .

Для зависимостей между объемами вложений и ставками в форме (9.49)

$$\frac{\partial G_D}{\partial r_D} = \alpha_D, \quad \frac{\partial G_L}{\partial r_L} = -\alpha_L,$$

в случае, когда $r_i(\tau, r_i^0)$ имеют вид (9.41),

$$\frac{r_i'}{\tau_i} = r_i^0, \quad i = D, L,$$

система (9.54), (9.47) может быть решена.

Условия (9.54) примут вид

$$\bar{\tau}_D + (r_D^0 \bar{\tau}_D - \bar{p}_D) = \bar{\tau}_L - (\bar{p}_L - r_L^0 \bar{\tau}_L). \quad (9.55)$$

Уравнение (9.47) для этого случая запишем как

$$\alpha_D (r_D^0 \bar{\tau}_D - \bar{p}_D) = \alpha_L (\bar{p}_L - r_L^0 \bar{\tau}_L),$$

что позволяет переписать (9.55) в форме

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_D + \frac{\alpha_L}{\alpha_D} (\bar{p}_L - r_L^0 \bar{\tau}_L) &= \bar{\tau}_L - (\bar{p}_L - r_L^0 \bar{\tau}_L), \\ \bar{\tau}_D + (r_D^0 \bar{\tau}_D - \bar{p}_D) &= \bar{\tau}_L - \frac{\alpha_D}{\alpha_L} (r_D^0 \bar{\tau}_D - \bar{p}_D). \end{aligned}$$

Откуда получим оптимальные в среднем значения годовых ставок:

$$r_L^0 = \frac{\alpha_D (\bar{\tau}_D - \bar{\tau}_L)}{(\alpha_D + \alpha_L) \bar{\tau}_L} + \frac{\bar{p}_L}{\bar{\tau}_L}, \quad r_D^0 = \frac{\alpha_L (\bar{\tau}_L - \bar{\tau}_D)}{(\alpha_D + \alpha_L) \bar{\tau}_D} + \frac{\bar{p}_D}{\bar{\tau}_D}. \quad (9.56)$$

Они зависят лишь от средних по срокам заимствованиям оценок капитала $\overline{r_i(\tau_i)}$ и средних значений сроков заимствования $\overline{\tau_i}$.

Оптимизация ставок по объему депозитов и кредитов. Если известны зависимости оценок капитала r_i не только от продолжительности заимствования, но и от объемов депозитов и выдаваемых кредитов V_i , то этот фактор можно учесть при назначении оптимальных ставок $r_i(\tau_i, V_i)$. Будем считать, что τ_i и V_i случайны и их плотность распределения $P_i(\tau_i, V_i)$ ($i = D, L$). Как и выше, индекс $i = D$ относится к вкладчикам, а $i = L$ к заемщикам банка. Обозначим через $m_i[p_i(\tau_i, V_i), r_i(\tau_i, V_i)]$ поток клиентов, т. е. количество вкладчиков (заемщиков), обращающихся в банк в единицу времени. Задача о максимуме средней прибыли примет вид

$$\overline{\Pi} = \sum_i \overline{\frac{V_i}{\tau_i} m_i[p_i(\tau_i, V_i), r_i(\tau_i, V_i)]} \rightarrow \max_{r_i} \quad (9.57)$$

при условии

$$\sum_i \overline{V_i m_i[p_i(\tau_i, V_i), r_i(\tau_i, V_i)]} = 0, \quad i = D, L. \quad (9.58)$$

Усреднение в i -м слагаемом ведем по τ_i, V_i .

Условия оптимальности задачи (9.57), (9.58) совпадают с условиями (9.48) с заменой G_i на $m_i V_i$.

Если поток вкладчиков (заемщиков) пропорционален разности ставок банка и оценок его клиентов

$$m_i = \alpha_i(p_i - r_i), \quad (9.59)$$

то

$$G_i = \frac{\alpha_i}{V_i}(p_i - r_i), \quad i = L, D.$$

Условия оптимальности после исключения λ -множителя примут вид

$$2 \left[\frac{r_L(\tau_L, V_L)V_L}{\tau_L} - \frac{r_D(\tau_D, V_D)V_D}{\tau_D} \right] = \frac{p_L(\tau_L)V_L}{\tau_L} - \frac{p_D(\tau_D)V_D}{\tau_D}. \quad (9.60)$$

После выкладок, аналогичных проделанным при выводе равенства (9.52), получим

$$r_i(\tau_i, V_i) = \frac{1}{2}p_i(\tau_i, V_i) + \lambda\tau_i, \quad i = L, D, \quad \lambda = \frac{\alpha_D \overline{p_{1v}} + \alpha_L \overline{p_{2v}}}{\alpha_D \overline{\tau_{1v}} + \alpha_L \overline{\tau_{2v}}}, \quad (9.61)$$

где

$$\overline{p_{iv}} = \left(\frac{p_i(\tau_i, V_i)}{V_i} \right), \quad \overline{\tau_{iv}} = \left(\frac{\tau_i}{V_i} \right), \quad i = D, L.$$

Усреднение ведем по V_i, τ_i с учетом их плотностей распределения.

Банк в системе экономических агентов

Пусть клиент банка является ЭА, характеризующимся оценками кредитов $p_{L\nu}$ и депозитов $p_{D\nu}$. Первая из них равна той ставке банка по кредитам, выше которой ЭА отказывается их брать, а вторая ставке банка по депозитам, ниже которой ЭА их не вкладывает ($p_{L\nu} > p_{D\nu}$). Мы предполагаем, что ЭА не могут обмениваться капиталом непосредственно, т. е., например, инвесторы не могут выпускать ценные бумаги.

Обмен ν -го клиента с банком зависит от оценки p_ν и ставки банка r , так что поток кредитов $l_\nu(p_{L\nu}, r_L)$, а депозитов $d_\nu(r_D, p_{D\nu})$. Прибыль банка

$$\Pi = \sum_\nu (l_\nu(p_{L\nu}, r_L)r_L - d_\nu(r_D, p_{D\nu})r_D) - C(l, d) \rightarrow \max_{r_L, r_D} \quad (9.62)$$

при условии, что

$$(1 - \beta) \sum_\nu d_\nu(r_D, p_{D\nu}) = \sum_\nu l_\nu(p_{L\nu}, r_L), \quad (9.63)$$

где $l = \sum_\nu l_\nu(p_{L\nu}, r_L)$, $d = \sum_\nu d_\nu(r_D, p_{D\nu})$; β — доля обязательного резервирования; C — функция затрат на обслуживание.

Здесь ν -й ЭА соответствует категории клиентов, характеризующихся близкими оценками кредитов и депозитов. Функция Лагранжа

$$L = \sum_\nu [(l_\nu r_L - d_\nu r_D) - C(l, d) + \lambda(1 - \beta)d_\nu - \lambda l_\nu]. \quad (9.64)$$

Условия оптимальности задачи (9.62), (9.63) в предположении единых ставок r_L и r_D для всех клиентов имеют форму

$$\frac{\partial L}{\partial r_D} = 0 \rightarrow \sum_\nu \frac{\partial d_\nu}{\partial r_D} \left[\lambda(1 - \beta) - r_D - \frac{\partial C}{\partial d} \right] = \sum_\nu d_\nu, \quad (9.65)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_L} = 0 \rightarrow \sum_\nu \frac{\partial l_\nu}{\partial r_L} \left[\lambda + r_L - \frac{\partial C}{\partial l} \right] = - \sum_\nu l_\nu. \quad (9.66)$$

Эти равенства вместе с условием (9.63) определяют r_L, r_D и λ .

Примем

$$\begin{aligned} l_\nu &= \alpha_{L\nu}(p_{L\nu} - r_L) \quad \text{при } p_{L\nu} > r_L, \\ d_\nu &= \alpha_{D\nu}(r_D - p_{D\nu}) \quad \text{при } r_D > p_{D\nu}, \end{aligned} \quad (9.67)$$

в противном случае потоки l_ν и d_ν равны нулю.

Функция обслуживания

$$C(l, d) = kl^\mu d^{1-\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (9.68)$$

Коэффициенты α_ν в (9.67) косвенно характеризуют «доступность» банка для ν -го ЭА.

Условия (9.63), (9.65), (9.66) примут вид

$$(1 - \beta) \left[r_D \sum_\nu \alpha_{D\nu} - \sum_\nu \alpha_{D\nu} p_{D\nu} \right] = \sum_\nu \alpha_{L\nu} p_{L\nu} - r_L \sum_\nu \alpha_{L\nu}, \quad (9.69)$$

$$\begin{aligned} \sum_\nu \alpha_{D\nu} \left[2r_D - \lambda(1 - \beta) + k(1 - \mu) \left[\frac{\sum_\nu \alpha_{L\nu} p_{L\nu} - r_L \sum_\nu \alpha_{L\nu}}{r_D \sum_\nu \alpha_{D\nu} - \sum_\nu \alpha_{D\nu} p_{D\nu}} \right]^\mu \right] = \\ = - \sum_\nu \alpha_{D\nu} p_{D\nu}, \end{aligned} \quad (9.70)$$

$$\sum_\nu \alpha_{L\nu} \left[2r_L - \lambda + k\mu \left[\frac{r_D \sum_\nu \alpha_{D\nu} - \sum_\nu \alpha_{D\nu} p_{D\nu}}{\sum_\nu \alpha_{L\nu} p_{L\nu} - r_L \sum_\nu \alpha_{L\nu}} \right]^{1-\mu} \right] = \sum_\nu \alpha_{L\nu} p_{L\nu}. \quad (9.71)$$

Найденные по условиям (9.69)–(9.71) оптимальные ставки разбивают множество ЭА на три категории:

- вкладчики ($(p_{D\nu} < r_D, p_{L\nu} \leq r_L)$),
- заемщики ($(p_{L\nu} > r_L, p_{D\nu} \geq r_D)$),
- клиенты, не участвующие в обмене с банком ($(p_{D\nu} < r_D, p_{L\nu} < r_L)$).

Банк может увеличить свою прибыль, изменяя ставки применительно к различным категориям клиентов (пенсионеров, военнослужащих, предпринимателей разного типа и пр.). В этом случае (дискриминация ставок) имеем вместо r_D и r_L ставки $r_{L\nu}$ и $r_{D\nu}$ и условия оптимальности следуют из условий стационарности по ним не функции L , а выражения, стоящего под знаком суммы в (9.64).

Учет налогов и инфляции

В рассмотренной выше простейшей схеме деятельности банка не учитывался целый ряд факторов. К ним относятся риски, связанные для вкладчика с ненадежностью банка, а для банка с возможностью невозврата кредитов, не учитывалось то, что часть средств банк вкладывает в ценные бумаги, курс которых изменяется, не учитывалось влияние инфляции и налогообложения.

Можно предположить, что надежность банка вкладчики учитывают, изменяя свою оценку $p_D(\tau_D)$ по отношению к разным банкам, а банк аналогично дискриминирует заемщиков. Те из них, кто проводит более рискованные, а значит, более доходные операции, согласны брать кредит под больший процент.

Обсудим учет влияния прогнозируемой инфляции, темп которой δ примем постоянным. Инфляция приносит убытки тем участникам рынка, которые получают доход с временным сдвигом, т. е. вкладчикам и банку. В условиях инфляции вкладчик увеличит свою оценку

$$r_{1\delta}(\tau_D) = p_D(\tau_D) \exp(\delta\tau_D),$$

аналогично заемщик, которому нужно возвращать меньшую сумму, скорректирует оценку в меньшую сторону

$$r_{2\delta}(\tau_L) = p_L(\tau_L) \exp(-\delta\tau_L).$$

Подстановка полученных таким образом оценок в приведенные выше расчетные соотношения позволяет найти оптимальные ставки с учетом инфляции. Фактор дисконтирования, учитывающий зависимость заинтересованности в капитале от момента его получения, оказывает влияние, аналогичное инфляции.

Следующий фактор — налогообложение. Пусть δ_D — доля дохода от депозитов, взимаемая в форме налога с вкладчиков, а δ — доля от разницы между суммой выданных кредитов и суммой возврата, взимаемая в форме налога с банка. Вкладчик получит в этом случае с учетом налога и инфляции доход

$$d_D = G_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D))(1 - \delta_D) \frac{r_D(\tau_D)}{\tau_D},$$

а банк — прибыль

$$\Pi_n = \Pi(r_D(\tau_D), r_L(\tau_L), p_D, p_L) - \delta G_L(r_L(\tau_L), p_L) \frac{r_L(\tau_L)}{\tau_L},$$

где Π имеет вид (9.45).

Максимизация этого выражения приводит к условиям оптимальности ставок. Полученные зависимости позволяют оптимизировать процентные ставки и оценить предельную прибыль коммерческого банка при известных функциях спроса кредиторов и заемщиков, определяющих интенсивность их обращения на обслуживание в зависимости от процентных ставок и сроков заимствования.

В рассмотренной упрощенной системе не учитывалась конкуренция банков друг с другом. Для учета различия в положении клиентов относительно конкурирующих банков в [145] было привлечено понятие обобщенных «транспортных издержек» как общих издержек клиента при использовании услуг того или иного из конкурирующих банков. Аналогичную роль могут играть коэффициенты кинетических зависимостей, связывающих потоки кредитов и депозитов с различием оценок ЭА и ставок банка. Чем меньше эти коэффициенты, тем меньше «доступность» банка для данного ЭА. В этом случае в рамках данной модели можно рассмотреть систему с несколькими банками и проследить концентрацию клиентов вокруг каждого банка, предположив, что клиент выбирает только один «предпочтительный» банк для своих кредитов и депозитов и может менять свое предпочтение по условию максимума своих «доходов», под которыми понимают произведение потоков кредитов и депозитов на разницу оценок ЭА и ставок банка, т. е. (см. гл. 7) скорость роста «связанного капитала» F ЭА.

9.3. Выбор генерирующих мощностей в сети энергетических рынков ¹

Рассмотрим систему из n энергетических рынков (ЭР), для каждого i -го из которых в момент t заданы потребляемая мощность d_i , зависимость цены от генерируемой мощности $P_i(q_i)$, ограничения на величину q_i сверху и снизу и возможности передачи излишней и получения дополнительной мощности из сети от других ЭР. Ограничения на величину q_i могут быть как технологическими, так и динамическими. Последние возникают, когда задача распределения мощностей решается периодически и заданы предельные скорости подъема и сброса мощности. Введение допустимого «коридора» относительно текущего значения q_i

¹Параграф написан совместно с В.А. Казаковым

представляет собой простейший вариант учета динамики перехода агрегатов с режима на режим.

Традиционный подход к выбору оптимальных нагрузок q_i^* состоит в решении оптимизационной задачи по некоторому критерию. Таким критерием может быть минимальная суммарная стоимость генерации, минимальная средняя стоимость энергии для потребителей, минимальные потери в сетях при заданном суммарном потреблении и др.

Другой подход, названный в этой работе макросистемным, состоит в том, что система ЭР рассматривается как открытая неоднородная макросистема с обменом потоками энергии, подобная термодинамической системе, элементы которой обмениваются теплотой и веществом по законам тепло- и массопереноса. Ниже проведено сравнение этих двух подходов и вытекающих из них алгоритмов решения задачи.

Постановка задачи

Фрагмент системы ЭР, состоящий из двух подсистем, показан на рис. 9.3.

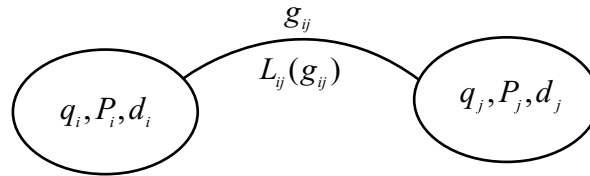


Рис. 9.3 Фрагмент системы ЭР-в

Цены P_i, P_j , генерируемые мощности q_i, q_j , потребляемые мощности d_i, d_j неотрицательны. Переток мощности в сети g_{ij} . Генерируемая мощность включает еще потери в сетях $L_{ij}(g_{ij})$. Они равны нулю при $g_{ij} = 0$ и положительны при $g_{ij} \neq 0$. Эти потери условно делят между рынками, относя заданные их доли α_{ij} и $\alpha_{ji} = (1 - \alpha_{ij})$ к каждому рынку. Потребление d_i, d_j будем считать заданным.

Условия энергетического баланса системы запишем как

$$\sum_i q_i = \sum_i d_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij}(g_{ij}). \quad (9.72)$$

При этом $L_{ij}(0) = 0$, когда $g_{ij} = 0$.

Стоимость генерации для i -го ЭР

$$C_i(q_i) = \int_0^{q_i} P_i(x) dx, \quad (9.73)$$

так что, в случае, когда зависимость $P_i(q_i)$ непрерывна,

$$\frac{dC_i}{dq_i} = P_i(q_i). \quad (9.74)$$

Функции C_i — монотонные и выпуклые вниз.

Как правило, функции $P_i(q_i)$ кусочно-постоянные, возрастающие, а $C_i(q_i)$ — кусочно-линейные. В этом случае в точках излома

$$\frac{dC_i}{dq_i} = \begin{cases} P_i^+(q_i) & \text{при } dq_i > 0, \\ P_i^-(q_i) & \text{при } dq_i < 0, \quad P_i^+ > P_i^-. \end{cases} \quad (9.75)$$

Оптимизационный подход

Выберем в качестве критерия суммарную стоимость генерации

$$I = \sum_i C_i(q_i) \rightarrow \min_{q_i, g_{ij}} \quad (9.76)$$

при условиях (9.72) и ограничениях

$$q_i^{\min} \leq q_i \leq q_i^{\max}, \quad (9.77)$$

$$q_i = d_i - \sum_j (g_{ij} - \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.78)$$

$$g_{ji} = -g_{ij}, \quad g_{ji}^{\min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{\max}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (9.79)$$

Число переменных в задаче (9.76), (9.77), (9.78) равно

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 2.$$

Здесь первое слагаемое в левой части равенства — количество неизвестных потоков обмена g_{ij} между ЭР-и, а второе — количество генерируемых мощностей.

Искомые переменные связаны друг с другом n балансовыми уравнениями (9.78), так что число свободных переменных равно $\frac{n(n-1)}{2}$. В частности, для $n = 2$ имеем одну свободную переменную, для $n = 3$ — три и т.д. Во многих случаях структура системы существенно уменьшает число искомых переменных.

Макросистемный подход

При макросистемном описании переменные, характеризующие подсистему, разбивают на две категории — экстенсивные и интенсивные. Первые пропорциональны масштабу подсистемы, а вторые от этого масштаба не зависят. Потоки между подсистемами зависят от различия интенсивных переменных, причем при равенстве этих переменных поток равен нулю, а знак потока совпадает со знаком разности интенсивных переменных. Для экономических систем экстенсивными являются запасы, а интенсивными оценки ресурсов. Поток обмена направлен в сторону системы с более высокой оценкой и равен нулю при равенстве оценок, при этом в соответствии с принципом Ле-Шателье [146] поток уменьшает различие оценок.

Для ЭР экстенсивными являются генерируемые мощности q_i , потребляемые мощности d_i , а интенсивными — цены $P_i(q_i)$; потоки обмена между подсистемами — g_{ij} . Будем рассматривать каждый из ЭР как макросистему, характеризующуюся оценкой ресурса (мощности q_i). Попытаемся найти такие оценки мощности на каждом из ЭР и такие зависимости перетоков g_{ij} от этих оценок, чтобы макросистема моделировала реальную систему, работающую в оптимальном режиме.

Условия оптимальности

Условия оптимального выбора перетоков. Так как генерируемые мощности q_i входят в уравнение (9.78) линейно, то их можно исключить и свести задачу (9.76)–(9.79) о минимуме средней цены генерации к задаче нелинейного программирования вида

$$I = \sum_i C_i \left\{ d_i - \sum_j [g_{ij} - \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})] \right\} \rightarrow \min_{g_{ij}} \quad (9.80)$$

при условиях

$$q_i^{\min} \leq d_i - \sum_j [g_{ij} - \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})] \leq q_i^{\max}, \quad (9.81)$$

$$g_{ij}^{\min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{\max}, \quad j, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.82)$$

Условие неухудшаемости I по g_{ij} имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \geq 0, \quad (9.83)$$

где δg_{ij} — вариация перетока, допустимая по ограничениям (9.81), (9.82).

Так как g_{ij} входит только в два слагаемых в (9.80), то

$$\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} = \frac{dC_i}{dq_i} \left(-1 + \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right) + \frac{dC_j}{dq_j} \left(1 + (1 - \alpha_{ij}) \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right). \quad (9.84)$$

Для гладких зависимостей $C_i(q_i)$ производные $\frac{dC_i}{dq_i} = P_i(q_i)$, выражение (9.84) переписывается в форме

$$\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} = P_j - P_i + \frac{\partial L_{ij}}{\partial g_{ij}} (P_i \alpha_{ij} + P_j (1 - \alpha_{ij})). \quad (9.85)$$

Будем называть эффективной с учетом потерь цену P_{ij} энергии на i -м рынке для j -го и P_{ji} — на j -м для i -го, если

$$P_{ij}(q_i, \alpha_{ij}) = P_i(q_i) \left(1 - \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right), \quad (9.86)$$

$$P_{ji}(q_j, \alpha_{ji}) = P_j(q_j) \left(1 + \alpha_{ji} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right), \quad \alpha_{ji} = (1 - \alpha_{ij}). \quad (9.87)$$

При этом j -м рынком считаем тот, из которого выходит поток мощности, а i -м тот, куда он входит. Тогда

$$-\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} = P_{ij}(q_i, \alpha_{ij}) - P_{ji}(q_j, \alpha_{ji}) = \Delta P_{ij}. \quad (9.88)$$

Из неравенства (9.83) следует, что переток g_{ij} от j -го к i -му рынку следует увеличивать, если эффективная цена на i -м рынке больше, чем на j -м. Он может быть пропорционален разности эффективных цен, если не нарушено ни одно из ограничений (9.81), (9.82).

Рассмотрим, как влияет на полученные выражения и сделанные выводы негладкость функций $C_i(q_i)$ и $L_{ij}(g_{ij})$. При этом последняя может иметь разрыв производной в точке $g_{ij} = 0$, так что

$$\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} = l_{ij}^- < 0 \quad \text{при} \quad g_{ij} = 0_-, \quad \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} = l_{ij}^+ > 0 \quad \text{при} \quad g_{ij} = 0_+. \quad (9.89)$$

Пусть $g_{ij} \neq 0$, тогда в точках разрыва производной нужно учесть, что рост g_{ij} снижает q_i и увеличивает q_j . Производную $\frac{dC_i}{dq_i}$ нужно считать

в точке, лежащей левее точки разрыва, а $\frac{dC_i}{dq_j}$ в точке, лежащей правее нее. Получим

$$\delta g_{ij} > 0, \quad \text{если} \quad \Delta P_{ij}^+ = P_{ij}^-(q_i, \alpha_{ij}) - P_{ji}^+(q_j, \alpha_{ji}) > 0, \quad (9.90)$$

$$\delta g_{ij} < 0, \quad \text{если} \quad \Delta P_{ij}^- = P_{ij}^+(q_i, \alpha_{ij}) - P_{ji}^-(q_j, \alpha_{ji}) < 0. \quad (9.91)$$

Здесь

$$P_{ij}^+ = P_i^+ \left(1 - \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right), \quad (9.92)$$

$$P_{ij}^- = P_i^- \left(1 - \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right). \quad (9.93)$$

Аналогичные выражения справедливы для j -го рынка с той разницей, что внутри скобок вычитание следует заменить сложением.

Так как $P_i^+ > P_i^-$, то для разрывных зависимостей $P_i(q_i)$ зависимость перетока от разности эффективных цен носит характер, показанный на рис. 9.4.

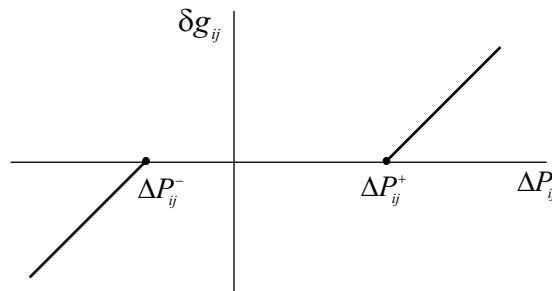


Рис. 9.4. Характер зависимости между изменением перетока и разностью эффективных цен, для случая кусочно-непрерывных ценовых заявок

В окрестности $g_{ij} = 0$ в выражении (9.92) производная функции потерь равна l_{ij}^+ , а в (9.93) она равна l_{ij}^- , что увеличивает зазор между ΔP_{ij}^+ и ΔP_{ij}^- .

Для оптимального режима системы g_{ij}^* удовлетворяют ограничениям (9.81), (9.82) и условиям неухудшаемости, которые приводят к неравенствам

$$\Delta P_{ij}^- \leq P_{ij}(q_i, q_j) \leq \Delta P_{ij}^+. \quad (9.94)$$

Учтем ограничения (9.81) на генерируемую мощность с использованием функции Лагранжа. По теореме Куна-Таккера найдутся такие множители λ^+ и λ^- , что функция

$$R = I + \sum_i [\lambda_i^+(q_i(g_{ij}) - q_i^{\max}) + \lambda_i^-(q_i(g_{ij}) - q_i^{\min})],$$

локально неуплучшаема на оптимальном решении, причем

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } (q_i - q_i^{\max}) \leq 0, \\ > 0 & \text{при } (q_i - q_i^{\max}) > 0, \end{cases} \quad (9.95)$$

$$\lambda_i^- = \begin{cases} 0 & \text{при } (q_i - q_i^{\min}) \geq 0, \\ < 0 & \text{при } (q_i - q_i^{\min}) < 0. \end{cases}$$

Произведение $\lambda_i^+ \lambda_i^- = 0$, так как оба множителя не могут быть отличны от нуля одновременно.

Условие неуплучшаемости R по g_{ij} сводится к тому, что в оптимальном режиме

$$\frac{\partial R}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} = \left[\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} + \sum_i \left(\lambda_i^+ \frac{\partial q_i}{\partial g_{ij}} + \lambda_i^- \frac{\partial q_i}{\partial g_{ij}} \right) \right] \delta g_{ij} \geq 0, \quad (9.96)$$

где δg_{ij} — вариации, удовлетворяющие ограничениям (9.82). С учетом выражения (9.85) для $\frac{\partial I}{\partial g_{ij}}$ и того, что

$$\frac{\partial q_i}{\partial g_{ij}} = -1 + \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}},$$

получим, что

$$\frac{\partial R}{\partial g_{ij}} = P_{ij}^\lambda - P_{ji}^\lambda = \Delta P_{ij}, \quad (9.97)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_{ij}^\lambda &= (P_i(q_i) + \lambda_i^+ + \lambda_i^-) \left(1 - \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right), \\ P_{ji}^\lambda &= (P_j(q_j) + \lambda_j^+ + \lambda_j^-) \left(1 + \alpha_{ji} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}} \right), \quad \alpha_{ji} = (1 - \alpha_{ij}). \end{aligned} \right\} \quad (9.98)$$

В точках разрыва производной в этих выражениях фигурируют P_i^+, P_i^-, P_j^+ и P_j^- , которым соответствуют $P_{ij}^{\lambda+}, P_{ij}^{\lambda-}, P_{ji}^{\lambda+}, P_{ji}^{\lambda-}$ — эффективные цены с учетом потерь и ограничений на выработку энергии.

Таким образом, при выходе производительности q_i на i -м ЭР на верхнее или нижнее ограничение, эффективная цена этого рынка увеличивается ($\lambda_i^+ > 0$) либо уменьшается ($\lambda_i^- < 0$) до тех пор, пока для всех перетоков, удовлетворяющих условиям (9.82), будут выполнены неравенства (9.94) в форме

$$\Delta P_{ij}^{\lambda^-} \leq \Delta P_{ij}^{\lambda}(q_i, q_j, \lambda) \leq \Delta P_{ij}^{\lambda^+}. \quad (9.99)$$

Если при этом оказывается, что значение g_{ij} вышло за пределы ограничений (9.82), то в соответствии с условиями (9.96) ему присваивается граничное значение g_{ij}^{\max} или g_{ij}^{\min} соответственно.

Вычислительный алгоритм решения задачи оптимизации перетоков. Влияние изменения перетока на критерий оптимальности I характеризует разность эффективных цен ΔP_{ij}^+ . Если генерируемая мощность на i -ом рынке ограничена, то $\Delta P_{ij}^{\lambda^+} > 0$. Будем называть эту величину «влиянием g_{ij} ».

Пусть известен некоторый реализуемый режим, характеризующийся вектором перетоков $g^0 = \{g_{ij}^0\}$, цен P^0 и генерируемых мощностей q_0 . Если генерация на ν -ом рынке имеет граничное значение, то за счет выбора λ_ν цены $P_{\nu j}^{\lambda}$ для этого рынка устанавливаются такими, чтобы изменения перетоков $\delta g_{\nu j}$ для всех ν , выбираемые по условиям (9.94), (9.99), удовлетворяли балансовому соотношению (9.78).

Когда эффективные цены P_{ij}^{λ} найдены для всех рынков, определяют тот переток g_{ij} , «влияние» для которого ΔP_{ij} максимально, и изменяют его до тех пор, пока величина ΔP_{ij} не окажется меньше, чем «влияние» другого перетока мощности или до тех пор, пока g_{ij} не примет граничное допустимое значение. При этом генерируемая мощность на i -м или j -м рынке может оказаться на границе, тогда ее фиксируют, а цену на соответствующем рынке корректируют за счет добавления λ вместе с изменением перетоков до тех пор, пока «влияние» g_{ij} перестанет быть максимальным.

Таким образом изменяют поочередно все перетоки до тех пор, пока они либо не окажутся на границах, либо их «влияния» не окажутся равными нулю. Полученное решение удовлетворяет условию Куна-Таккера.

Система энергетических рынков как открытая макросистема

В термодинамических, экономических и других макросистемах потоки ресурса равны нулю, когда характеризующие «потребность» в нем интенсивные переменные одинаковы, а направление потока определяет знак разности этих переменных. Так, поток тепловой энергии всегда направлен от тела с высокой к телу с низкой температурой, поток товаров, наоборот, от рынка с низкими ценами к рынку с высокими ценами.

Введем для каждого i -го ЭР оценку θ_{ij} мощности g_{ij} , подаваемой от j -го рынка. Эта оценка зависит от q_i, d_i , функции потерь в сетях $L_{ij}(g_{ij})$ и коэффициента α_{ij} . Предположим, что g_{ij} зависит только от θ_{ij} и θ_{ji} , причем

$$\left. \begin{aligned} g_{ij}(\theta_{ij}, \theta_{ji}) = -g_{ji}(\theta_{ji}, \theta_{ij}) = 0 \quad \text{при} \quad \theta_{ij} = \theta_{ji}, \\ \text{sign} g_{ij} = \text{sign}(\theta_{ij} - \theta_{ji}) \quad \text{при} \quad g_{ij} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.100)$$

Эту зависимость называют кинетической функцией.

Выберем кинетическую функцию и $\theta_{ij}(q_i, d_i, \alpha_{ij}, L_{ij})$ так, чтобы функционирование системы ЭР-в, потоки в которой характеризуются кинетической функцией (9.100), было оптимально по критерию (9.76). Аппроксимируем $L_{ij}(g_{ij})$ зависимостью вида

$$L_{ij}(g_{ij}) = \begin{cases} l_{ij}^+ g_{ij} + m_{ij}^+ g_{ij}^2 & \text{при} \quad g_{ij} \geq 0, \\ l_{ij}^- g_{ij} + m_{ij}^- g_{ij}^2 & \text{при} \quad g_{ij} < 0 \end{cases} \quad (9.101)$$

и для гладких функций $C_i(q_i)$ в отсутствие ограничений на q_i перепишем условие $\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} = 0$ с учетом (9.87) в форме

$$P_i - P_j = \frac{\partial L_{ij}}{\partial g_{ij}} (\alpha_{ij} P_i + (1 - \alpha_{ij}) P_j). \quad (9.102)$$

Подставляя (9.101), получим

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2m^+} \left[\frac{P_i - P_j}{\alpha_{ij} P_i + (1 - \alpha_{ij}) P_j} - l_{ij}^+ \right] & \text{при} \quad g_{ij} \geq 0, \\ \frac{1}{2m^-} \left[\frac{P_i - P_j}{\alpha_{ij} P_i + (1 - \alpha_{ij}) P_j} - l_{ij}^- \right] & \text{при} \quad g_{ij} \leq 0. \end{cases} \quad (9.103)$$

При этом $l_{ij}^- < 0$, а переток g_{ij} положителен, когда квадратная скобка в верхнем равенстве больше нуля, и отрицателен, когда квадратная скобка в нижнем равенстве меньше нуля.

Так что, обозначая средневзвешенную цену как

$$\bar{P}_{ij} = \alpha_{ij}P_i + (1 - \alpha_{ij})P_j, \quad (9.104)$$

а оценки

$$\theta_{ij} = \frac{P_i}{\bar{P}_{ij}}, \quad \theta_{ji} = \frac{P_j}{\bar{P}_{ij}}, \quad \Delta\theta_{ij} = \theta_{ij} - \theta_{ji}, \quad (9.105)$$

можно записать искомую кинетическую функцию в форме

$$g_{ij}(\theta_{ij}, \theta_{ji}) = \begin{cases} \frac{1}{2m^+}(\theta_{ij} - \theta_{ji} - l_{ij}^+) & \text{при } \Delta\theta_{ij} > l_{ij}^+, \\ 0 & \text{при } l_{ij}^- < \Delta\theta_{ij} < l_{ij}^+, \\ \frac{1}{2m^-}(\theta_{ij} - \theta_{ji} - l_{ij}^-) & \text{при } \Delta\theta_{ij} < l_{ij}^-, \\ g_{ij}^{\min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{\max}. \end{cases} \quad (9.106)$$

Для случая, когда зависимости $C_i(q_i)$ имеют точки разрыва производной, для рынка, в который направлен поток (в нашем случае i -й для $g_{ij} > 0$), производную по q_i в такой точке находят как P_i^- , а для рынка j в этом случае — как P_j^+ . Выражение (9.106) остается в силе с той разницей, что P_i нужно заменить на P_i^- , а P_j на P_j^+ при $g_{ij} > 0$ и P_i заменить на P_i^+ , P_j на P_j^- при $g_{ij} < 0$. При этом расширяется зона, в которой оптимальное значение перетока $g_{ij} = 0$.

Наконец, если для некоторого i -го рынка $q_i = q_i^{\max}$, то величину θ_{ij} на этом рынке считаем по формулам (9.105), заменив в них P_i на

$$P_i^{\lambda^+} = P_i + \lambda^+, \quad P_i = P_i(q_i^{\max}),$$

величину $P_i^{\lambda} > P_i$ находят по условию

$$q_i^{\max} + \sum_i g_{ij}(\theta_{ij}, \theta_{ji})[1 - \alpha_{ij}L_{ij}(g_{ij}(\theta_{ij}, \theta_{ji}))] = d_i. \quad (9.107)$$

Аналогично для случая, когда генерируемая мощность q_i на нижней границе, цену

$$P_i^{\lambda^-} = P_i + \lambda^-, \quad \lambda^- < 0, \quad P_i = P_i(q_i^{\min}),$$

находят по условию (9.107), в котором q_i^{\max} заменяют на q_i^{\min} , а θ_{ij} и θ_{ji} — зависят от $P_i^{\lambda^-}$.

При таком выборе оценок мощностей задача оказывается децентрализованной. Для каждого рынка находится цена P_i или, если генерируемая мощность оказалась предельной, — P_i^{λ} , а затем по формулам (9.103) и (9.106) находят оптимальные перетоки мощности между рынками. Другими словами, вместо оптимизации системы по перетокам, ее оптимизируют по эффективным «ценам», учитывающим ограничения на потребляемую и генерируемую мощность. Число переменных (цен), как правило, существенно меньше числа перетоков. Стационарному режиму такой макросистемы соответствует оптимальное распределение потоков и генерируемых мощностей в системе энергетических рынков.

Приложение

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В приложении рассмотрены различные типы экстремальных задач и условия оптимальности их решения.

В разделе П.1 приведены различные постановки задач и без какого-либо обоснования необходимые условия оптимальности для каждой из постановок. Это дает возможность читателю убедиться, что все условия построены по близкой схеме и сводятся к утверждению о существовании таких неопределенных множителей, что построенная с их помощью вспомогательная конструкция Лагранжа на оптимальном решении задачи удовлетворяет требованиям стационарности либо максимума.

Чтобы понять, с чем связаны эти требования, как и почему образуют ту или иную вспомогательную конструкцию, нужно познакомиться с преобразованиями экстремальных задач. О них рассказано в разделе П.2.

Наибольшие возможности для конкретизации этих преобразований их геометрической иллюстрации и объяснения логической схемы получения условий оптимальности как необходимых так и достаточных дает конечномерная задача нелинейного программирования (НП) и ее модификации, связанные с усреднением переменных или функций от этих переменных. Этой задаче посвящен третий раздел.

Наконец в последнем разделе П.4 рассмотрены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для вариационных задач с различными сочетаниями критерия и ограничений.

П.1. Обзор экстремальных задач и условий оптимальности решения

П.1.1. Конечномерные задачи

В этих задачах искомым является вектор $x \in R^n$.

1.1. Задача условного максимума функции без ограничений.

$$f_0(x) \rightarrow \max / f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{П.1})$$

Функции f_0 и f_i — гладкие. Необходимое условие оптимальности формулируют через функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x), \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_0 = 1. \quad (\text{П.2})$$

Оно заключается в том, что *найдется такой ненулевой вектор λ , что на оптимальном решении x^* функция $L(x, \lambda)$ стационарна по x .*

В неособом случае константа $\lambda_0 = 1$. Этот множитель равен нулю, когда искомое решение является экстремальной точкой системы связей, т. е. одна из функций $f_i(x)$ достигает в x^* экстремума на множестве, определяемом остальными условиями. Те же требования гладкости функций f_0 и f_i , требования к множителю λ_0 при критерии оптимальности в функции Лагранжа и ее обобщениях, как и требование необращения в нуль всех множителей одновременно, имеются в условиях оптимальности других экстремальных задач, поэтому ниже мы не будем их специально оговаривать.

1.2. Задача с автономными ограничениями.

Пусть переменные в задаче (П.1) ограничены:

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{П.3})$$

Эти ограничения наложены на каждую переменную в отдельности (автономно). К условиям стационарности L по переменным, лежащим внутри ограничений (П.3), добавляют условия локальной неухудшаемости L по переменным, лежащим на границе. Они имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \delta x_j \leq 0, \quad \begin{array}{l} \delta x_j \leq 0 \quad \text{при} \quad x_j = x_j^{\max}, \\ \delta x_j \geq 0 \quad \text{при} \quad x_j = x_j^{\min}. \end{array} \quad (\text{П.4})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &\geq 0 \quad \text{при} \quad x_j = x_j^{\max}, \\ \frac{\partial L}{\partial x_j} &\leq 0 \quad \text{при} \quad x_j = x_j^{\min}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

1.3. Задача с неравенствами.

В задаче (П.1) $f_i(x) \leq 0$ для $i = k + 1, \dots, m$. Это задача нелинейного программирования. Она сводится к задаче п. 1.2 с автономными ограничениями введением добавочных переменных $z_i \geq 0$ и записью ограничений в форме неравенств как

$$\tilde{f}_i(x, z_i) = f_i(x) - z_i = 0, \quad z_i \geq 0, \quad i = k + 1, \dots, m. \quad (\text{П.6})$$

Функция

$$\tilde{L}(x, z, \lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i (f_i(x) - z_i). \quad (\text{П.7})$$

Необходимые условия оптимальности (стационарность L по x и неухудшаемость по z_i) с учетом (П.5) приводят к неравенствам

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial z_i} \leq 0, \quad i = k + 1, \dots, m. \quad (\text{П.8})$$

Из (П.8) следуют требования к множителям λ_i для второго слагаемого в (П.7)

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0 \quad \text{при} \quad z_i^* = 0 \quad (f_i(x^*) = 0) \\ \lambda_i &= 0 \quad \text{при} \quad z_i^* > 0 \quad (f_i(x^*) < 0), \quad i = k + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

так что на оптимальном решении каждое слагаемое и их сумма равны нулю

$$\sum_{i=k+1}^m \lambda_i f_i(x^*) = 0. \quad (\text{П.10})$$

Соотношения (П.9), (П.10) вместе с требованием стационарности \tilde{L} , а значит, и L по x , представляют собой условия Куна-Таккера. Условия (П.9), (П.10) называют условиями дополняющей нежесткости.

1.4. Задача на максимин.

В этой задаче критерий оптимальности

$$f_0(x) = \min_{\nu} (f_{01}(x), f_{02}(x)) \rightarrow \max_x, \quad \nu = 1, 2. \quad (\text{П.11})$$

Функция $f_0(x)$ не дифференцируема для тех x , в которых (см. рис. П.1)

$$f_{01}(x) = f_{02}(x). \quad (\text{П.12})$$

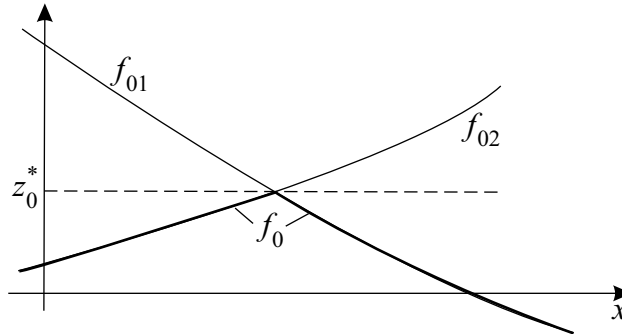


Рис. П.1. Максимум от минимума для двух функций

Задача может быть сведена к задаче 1.3 введением добавочной переменной z_0 и записью в форме задачи о максимуме ограничения

$$z_0 \rightarrow \max \left\{ \begin{array}{l} f_{01}(x) - z_0 \leq 0, \\ f_{02}(x) - z_0 \leq 0, \\ f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{П.13})$$

Функция Лагранжа

$$\tilde{L}(x, z_0, \lambda) = \lambda_0 z_0 + \lambda_{01}(f_{01}(x) - z_0) + \lambda_{02}(f_{02}(x) - z_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x).$$

По условиям Куна-Таккера

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial z_0} = 0 \rightarrow \lambda_0 = \lambda_{01} + \lambda_{02}, \quad (\text{П.14})$$

$$\lambda_{01} \geq 0, \quad \lambda_{02} \geq 0, \quad (\text{П.15})$$

$$\sum_{\nu=1}^2 \lambda_{0\nu}(f_{0\nu}(x) - z_0) = 0, \quad (\text{П.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{\nu=1}^2 \lambda_{0\nu} f_{0\nu}(x) \right) = 0. \quad (\text{П.17})$$

Число функций $f_{0\nu}$ в (П.11) может быть и больше двух.

Эти примеры показывают, что введением добавочных переменных и записью в стандартной форме задачи 1.2 с автономными ограничениями условия оптимальности разнообразных конечномерных экстремальных задач могут быть получены без каких-либо специальных выкладок.

П.1.2. Усредненные задачи

2.1. Задача с усреднением функций.

$$\tau \bar{f}_0 = \int_0^\tau f_0(x(t)) dt \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \bar{f}_i = \int_0^\tau f_i(x(t)) dt = 0, \\ x_j^{\min}(t) \leq x_j(t) \leq x_j^{\max}(t), \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{П.18})$$

Функции f_0 и f_i непрерывны по x .

Условия оптимальности этой задачи формулируют через ту же функцию Лагранжа (П.2), что и в задаче (П.1), но теперь эти условия более сильные (множество сравнения Δ шире). Они утверждают, что *найдется ненулевой вектор λ такой, что на оптимальном решении функция Лагранжа L достигает максимума по x для почти всех t* . Непрерывность L по x и ограничения, наложенные на $x(t)$, гарантируют, что максимум существует. Таким образом,

$$x^*(\lambda) = \arg \max_x L(x, \lambda) = \arg \max_x \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x), \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_0 = 1. \quad (\text{П.19})$$

Максимум может быть единственным, тогда он совпадает с решением задачи 1.2. Если же максимумов несколько, то значения x^* в каждом из них называют базовыми, количество базовых значений $x_k^*(\lambda)$ не превышает $(m + 1)$. Значения \bar{f}_0 и \bar{f}_i в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_0^* &= \sum_{k=0}^m \gamma_k f_0(x_k^*(\lambda)), & \bar{f}_i &= \sum_{k=0}^m \gamma_k f_i(x_k^*(\lambda)), \\ i &= 1, \dots, m, & \gamma_k &\geq 0, \quad \sum_{k=0}^m \gamma_k = 1. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Множители λ выбирают так, чтобы \bar{f}_i обращались в ноль.

Задача (П.18) рассмотрена ниже подробнее. Здесь лишь подчеркнем, что:

а) усреднение приводит к тому, что можно отказаться от гладкости функций и заменить условие стационарности L на условие максимума,

б) ограничения на искомые переменные x учесть существенно проще;

в) максимальное число базовых значений x зависит от размерности f , а не x .

Задачу 1.2 тоже можно решать, используя (П.19), когда f_0 выпукла вверх, а f_i — линейны. В этом случае максимум L по x заведомо единственный, и задачи 1.2 и 2.1 эквивалентны.

2.2. Задача с усреднением по части переменных.

$$\tau \bar{f}_0 = \int_0^\tau f_0(x(t), y) dt \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} \bar{f}_i = \int_0^\tau f_i(x(t), y) dt = 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ f_i(y) = 0, \quad i = k + 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (\text{П.21})$$

$$x_j^{\min}(t) \leq x_j(t) \leq x_j^{\max}(t), \quad y_j^{\min} \leq y_j \leq y_j^{\max}. \quad (\text{П.22})$$

В этой задаче два типа переменных: вектор-функция $x(t)$ и вектор y , размерность которого больше, чем $(m - k)$. При любом фиксированном $y = y^*$, удовлетворяющем (П.22), задача (П.21) сводится к усредненной, а для любого решения $x^*(t)$, критерий τf_0 и ограничения \bar{f}_i оказываются функциями y , а задача (П.21), (П.22) — задачей типа 1.2. Так, что условия ее оптимальности вытекают из условий оптимальности этих двух задач и имеют форму

$$x^*(\lambda, y) = \arg \max_x L(x, \lambda, y), \quad (\text{П.23})$$

$$L(x, \lambda, y) = \left[\lambda_0 f_0(x, y) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x, y) \right].$$

$$\frac{\partial S(x, \lambda, y)}{\partial y_j} \begin{cases} \geq 0 & \text{при } y_j = y_j^{\max}, \\ = 0 & \text{при } y_j^{\min} < y_j < y_j^{\max}, \\ \leq 0 & \text{при } y_j = y_j^{\min}, \end{cases} \quad (\text{П.24})$$

где

$$S(x, \lambda, y) = \int_0^\tau L(x, \lambda, y) dt + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i f_i(y). \quad (\text{П.25})$$

Совершенно очевидно, как изменятся условия (П.24), (П.25), если часть равенств (П.21) заменить на условия в форме неравенств (см. (П.9), (П.10)).

Отметим, что функции f по y должны быть гладкими, а по x непрерывными, по переменным усреднения x используется требование максимума функции Лагранжа, а по вектору параметров y — требование

стационарности функционала Лагранжа. Максимум S по u мы требовать не можем, так как не гарантировано существования вектора λ , для которого это требование реализуется.

В усредненных задачах критерий оптимальности может зависеть как от среднего значения функций, так и от функций средних значений переменных. Условия оптимальности для этого случая рассмотрены в [62].

П.1.3. Вариационные задачи

3.1. Задача с интегральными условиями, обобщенное решение.

$$\tau \bar{f}_0 = \int_0^\tau f_0(u(t), t) dt \rightarrow \max \quad / \quad \bar{f}_i = \int_0^\tau f_i(u(t), t) dt = 0, \\ u_j^{\min} \leq u_j(t) \leq u_j^{\max}(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{П.26})$$

где $u(t)$ — кусочно-непрерывны.

В этой задаче вектор-функция f зависит не только от u , но и от t . Эта функция непрерывна по u и непрерывна и дифференцируема по t . Условия оптимальности задачи (П.26) имеют форму, подобную (П.19): *Если оптимальное решение задачи (П.26) существует, то найдется ненулевая вектор-функция $\lambda(t)$, такая что на оптимальном решении функция Лагранжа*

$$L(u, \lambda, t) = \sum_{i=0}^m \lambda_i(t) f_i(u(t), t)$$

достигает максимума по u для почти всех t , $\lambda_0 = (0; 1)$:

$$u^*(\lambda, t) = \arg \max_u L(u, \lambda, t). \quad (\text{П.27})$$

Существует такое решение лишь тогда, когда для почти всех t максимум в (П.27) достигается при одном значении $u^*(t, \lambda)$. Если же этих базовых значений $u_\nu^*(t, \lambda)$ несколько, то каждому соответствует вес $\gamma_\nu(t)$. Решения в классе кусочно-непрерывных функций не существует, но можно построить последовательность функций $\tilde{u}(t, \lambda)$, которая бы на любом малом интервале от t до $t + \Delta t$ с вероятностью $\gamma_\nu(t)$ принимала значение $u_\nu^*(t, \lambda)$, и такую, что \bar{f}_i на этой последовательности сходятся

к нулю, а \bar{f}_0 — к своей верхней границе. Подобное обобщенное решение называют «скользящим режимом». Количество базовых значений u_ν , как и в задаче 2.1, не превышает $m + 1$ для любого t .

Таким образом, возможность использования условий (П.27) в форме максимума, позволяющая просто учесть ограничения на u и снять требования гладкости f по u , связана с тем, что в окрестности каждого t задача (П.26) близка к усредненной задаче (П.18).

3.2. Задача оптимального управления.

$$\int_0^T f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \max, \quad (\text{П.28})$$

где $x \in R^m$, $u \in R^r$,

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{П.29})$$

$$u(t) \in M. \quad (\text{П.30})$$

Здесь f_0 и f_i непрерывны по u , и непрерывно дифференцируемы по x и t ; M — замкнутое и ограниченное множество в R^r .

Необходимые условия оптимальности даются принципом максимума Понтрягина:

Если оптимальное решение x^ , u^* задачи (П.28)–(П.30) существует ($u^*(t)$ — кусочно-непрерывная функция), то найдутся $\psi_0 = (0; 1)$, $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, не равные нулю одновременно и такие, что функция*

$$R = \psi_0 f_0(x, u, t) + \sum_i (\psi_i f_i(x, u, t) + \dot{\psi}_i x_i)$$

стационарна по x и достигает максимума по $u \in M$.

Так что

$$u^*(x, \psi, t) = \arg \max_{u \in M} R = \arg \max_{u \in M} \left[\psi_0 f_0 + \sum_i \psi_i f_i \right], \quad (\text{П.31})$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_\nu} = 0 \Rightarrow \dot{\psi}_\nu = - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\psi_0 f_0 + \sum \psi_i f_i \right]. \quad (\text{П.32})$$

В эту задачу переменные x и u входят различным образом. Если переписать уравнения (П.29) в несколько более общей форме

$$x_i(t) = \int_0^t f_i(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{П.33})$$

то становится очевидно, что в отличие от x переменные $u(t)$ в окрестности любого момента t входят в задачу так, как искомые переменные входили в задачу 3.1, т. е. усредненно. Поэтому и условия оптимальности по ним имеют форму максимума и функции f могут быть не дифференцируемы, а непрерывны по $u(t)$.

При записи дифференциального уравнения в форме (П.33) условия оптимальности примут форму принципа максимума, но функция R имеет вид

$$\tilde{R} = \psi_0 f_0(x, u, t) + \sum_i (f_i(x, u, t) \int_T^t \lambda_i(\tau) d\tau + \lambda_i(t) x_i). \quad (\text{П.34})$$

Найдутся такие $\psi_0, \lambda(t)$, что функция (П.34) достигает максимума по u и стационарна по x . Если для всех t существует $\dot{\psi}$ в (П.32), то, обозначив $\dot{\psi} = \lambda(t)$, приходим к принципу максимума Понтрягина в обычной форме, в противном случае используют функцию \tilde{R} .

Отметим, что здесь, как и в задаче 3.1, оговаривается существование решения. Если максимумов по u несколько на интервале ненулевой меры внутри $(0, T)$, то возможно решение в форме скользящего режима. При этом, как и в задаче 3.1, число базовых значений u^ν не превышает $(m + 1)$.

3.3. Задача оптимального управления с вектором параметров. Пусть в задаче (П.28) наряду с функциональными переменными $x(t), u(t)$ функции $f_i (i = 0, \dots, m)$ зависят от вектора параметров $y = (y_1, \dots, y_n)$, на множество значений которого наложены условия

$$\varphi_\nu(y) \leq 0, \quad \nu = 1, \dots, r < n. \quad (\text{П.35})$$

В число параметров может входить и T .

При каждом y задача в этом случае является задачей оптимального управления, а при фиксированных $x^*(t)$ и $u^*(t)$ — задачей нелинейного программирования по y .

Необходимые условия имеют стандартную форму утверждения о существовании таких вектор-функций $\psi(t)$ и вектора λ , не обращающихся в нуль одновременно, в функции

$$R = \sum_{i=0}^m [\psi_i f_i(x, u, t, y) + \psi_i x_i], \quad \psi_0 = \{0; 1\}, \quad (\text{П.36})$$

и функционале

$$S = \int_0^T R(\psi, x, u, t, y, \dot{\psi}) dt + \sum_{\nu=1}^r \lambda_{\nu} \varphi_{\nu}(y), \quad (\text{П.37})$$

что

$$u^*(x, \psi, t, y) = \arg \max_{u \in M} R, \quad (\text{П.38})$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = 0, \quad \lambda_{\nu} \geq 0, \quad (\text{П.39})$$

$$\sum_{\nu=1}^r \lambda_{\nu} \varphi_{\nu}(y^*) = 0. \quad (\text{П.40})$$

Аналогично задаче 1.4 задача на максимум минимума (на минимум максимума) нескольких функционалов может быть сведена к вариационной задаче с параметром введением дополнительной переменной z_0 и требованием максимума этой переменной при условиях в форме неравенств.

3.4. Задача о равномерном приближении функции

$$f_0(x) = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \varphi_0(t) - \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t) \right| \rightarrow \min_x, \quad (\text{П.41})$$

где вектор $x \in R^n$, функции $\varphi_j (j = 0, \dots, n)$ заданы, непрерывны и дифференцируемы по t . При любом x множество значений t , для которых модуль $\left| \varphi_0(t) - \sum_j x_j \varphi_j(t) \right|$ максимален, имеет нулевую меру. Искомым является конечномерный вектор коэффициентов, но критерий оптимальности представляет собой функционал на $[0, T]$.

Введем добавочную переменную $z_0 > 0$, удовлетворяющую условию

$$f(x, t) - z_0 = \left| \varphi_0(t) - \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t) \right| - z_0 \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{П.42})$$

Функция $f(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и по t на множестве тех x и t , для которых $f > 0$.

Задача (П.41) примет форму

$$z_0 \rightarrow \min_x / f(x, t) - z_0 \leq 0. \quad (\text{П.43})$$

Будем ее рассматривать как вариационную задачу с вектором параметров. Функционал

$$S = \lambda_0 z_0 + \int_0^T \lambda(t)[f(x, t) - z_0] dt. \quad (\text{П.44})$$

Поскольку в задаче требуется найти минимум, а не максимум, то в невырожденном случае $\lambda_0 = -1$, а не единице.

По условиям оптимальности задачи 3.3 получим

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0 \rightarrow \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x_j} dt = \int_0^T \lambda(t) \varphi_j(t) \operatorname{sign} f(x, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{П.45})$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_0} = 0 \rightarrow \int_0^T \lambda(t) dt = -\lambda_0 = 1. \quad (\text{П.46})$$

Ограничения имеют форму неравенств, поэтому $\lambda(t) \geq 0$, а

$$\int_0^T \lambda(t)(f(x, t) - z_0) dt = 0. \quad (\text{П.47})$$

Отсюда следует, что мера $\lambda(t) = d\mu(t)$ сосредоточена на множестве $W = \{t_i \in [0, T] : f(x, t_i) = z_0\}$. Представим $d\mu(t)$ в форме

$$d\mu(t) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta(t - t_i),$$

тогда условия (П.45), (П.47) примут вид

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_j(t_i) \operatorname{sign} \left(\varphi_0(t_i) - \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t_i) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{П.48})$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad (\text{П.49})$$

$$\left| \varphi_0(t_i) - \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j(t_i) \right| = z_0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (\text{П.50})$$

Функция $f(x, t)$ в точках t_i экстремальна по t , так что

$$\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)_{t_i} - \sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)_{t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (\text{П.51})$$

количество условий оптимальности (П.48)–(П.51) равно числу неизвестных t_i, λ_i, x_j и z_0 , которых в задаче $(2k + n + 1)$.

П.1.4. Основные подходы к получению условий оптимальности

Необходимые условия оптимальности решения экстремальных задач всегда основаны на предположении о том, что оптимальное решение x^* существует (для этого на зависимости, определяющие задачу, накладывают соответствующие требования). Вычисляют вариацию критерия оптимальности при вариации решения δx , допустимой по условиям задачи или сколь угодно близкой к допустимой. На множестве Δ таких вариаций критерий оптимальности не должен улучшаться. Решение x^* называют локально-неулучшаемым. Каждое локально-неулучшаемое решение является претендентом на то, чтобы быть искомым решением.

Множество сравнения Δ , с одной стороны, желательно расширить, чтобы число претендентов было меньше, а с другой стороны, оно должно быть таким, чтобы условия локальной неулучшаемости были просты для решения.

Для гладких задач без ограничений множество сравнения Δ выбирают так, чтобы задачу на нем можно было линеаризовать. Условия неулучшаемости для линеаризованной задачи сводились к требованию стационарности функции Лагранжа в конечномерных задачах либо ее аналогов в вариационных (уравнение Эйлера).

Для задач оптимального управления, особенно линейных с ограничениями на $u(t)$, уравнение Эйлера нельзя было использовать. Между тем, инженеры с ними сталкивались. То, что эти задачи требуют изменения математического аппарата, было осознано А.А. Фельдбаумом, который решал задачи на быстродействие ($T \rightarrow \min$) для линейных систем n -го порядка. Роль Александра Ароновича в появлении принципа максимума Понтрягина очень существенна, именно он сформулировал задачу оптимального управления и на семинаре М.А. Айзермана доложил свои результаты математикам во главе с Л.С. Понтрягиным.

Формулировка принципа максимума (первоначально только для задач на быстроедействие) была дана раньше, чем его доказательство. Геометрическое доказательство, предложенное В.Г. Болтянским, несколько искусственно и не получило продолжения в других исследованиях. Несколько ранее доказательство принципа максимума было получено Л.И. Розоноэром [45], который выбрал множество сравнения Δ , включающее игольчатые вариации $u(t)$ (столбик конечной высоты и сколь угодно малой ширины), подсчитал приращение функционала на таких вариациях с учетом связей в форме дифференциальных уравнений и получил принцип максимума как условие неупрощаемости на этом множестве. Подобный подход оказался очень продуктивным, именно на его основе был обобщен принцип максимума на разные варианты задач со связями в форме дифференциальных уравнений, построены численные алгоритмы и пр.

В 1962 г. А.Я. Дубовицкий и А.А. Милютин [18] сформулировали условия оптимальности вариационных задач с ограничениями как обобщение условий Куна-Таккера на функциональные пространства. При этом для получения игольчатых вариаций по управлению они использовали специальное преобразование времени. Изложение подхода Дубовицкого и Милютина было дано в лекциях Гирсанова [12].

Отметим, что с помощью нелинейных преобразований задачу с ограничениями на те или иные переменные можно свести к задаче без ограничений, и использовать условия оптимальности типа уравнений Эйлера. Однако при этом теряются преимущества принципа максимума (возможность снять требования гладкости, расширение множества сравнения Δ , простота учета ограничений на u в том числе и тогда, когда эти ограничения выделяют целочисленные значения u).

Очень плодотворным оказалось направление, основанное на получении решения и оценки достижимого значения критерия оптимальности с использованием достаточных условий, развитое В.Ф. Кротовым и его учениками [15], [23]. Логика достаточных условий основана на переходе от множества D допустимых решений исходной задачи к более широкому и более простому множеству V . Расширение может быть проведено как за счет отбрасывания части ограничений, так и за счет расширения класса допустимых функций (вместо гладких — непрерывные, вместо непрерывных — измеримые и т.д.). Если решение задачи на V (расширенной) получено, то либо оно является искомым, если оказалось допустимым, либо дает оценку предельного на D значения критерия, к

которой нужно постараться приблизиться, используя допустимые решения или последовательность таких решений. Из множества возможных расширенных задач нужно решать такую, для которой максимальное значение критерия минимально. Эта оценка либо самая точная, либо достижимая на D .

Вариант, когда решение расширенной задачи допустимо в исходной, наиболее желателен. Чтобы этого добиться, нужно учесть то обстоятельство, что есть огромное количество способов изменить критерий оптимальности и ограничения так, чтобы оптимальное решение не изменилось. Другими словами, эти преобразования дают множество задач, эквивалентных исходной.

Если заранее доказать, что при выбранном способе расширения любое решение расширенной задачи либо допустимо в исходной либо может быть сколь угодно точно приближено последовательностью допустимых в исходной задаче решений, то необходимые условия оптимальности решения расширенной задачи становятся необходимыми условиями оптимальности исходной в классе обычных либо обобщенных решений. Такой подход дает еще один способ доказательства принципа максимума для задачи оптимального управления, включая в возможные решения и скользящие режимы [23], [58], [65]. Он имеет перед другими подходами то существенное преимущество, что может быть обобщен на задачи с условиями не только в форме дифференциальных уравнений, но и с ограничениями различного типа.

Приведенный выше очень беглый и неполный обзор различных видов экстремальных задач показывает их разнообразие и возможность получить условия оптимальности простым приведением задачи к стандартной форме, для которой такие условия известны, посредством введения добавочных переменных.

Число критериев оптимальности различных типов сравнительно невелико, как и разновидностей связей и ограничений, наложенных на функциональные и векторные переменные (конечные соотношения, интегральные и дифференциальные уравнения, условия в фиксированный момент времени, интегральные условия). Но количество возможных сочетаний критериев, с теми или иными ограничениями, с тем или иным распределением переменных между критерием и ограничениями необозримо. Ниже (см. П.4) дана такая формулировка условий оптимальности, которая не зависит от условий конкретной задачи, а дает правило составления по ним конструкции типа функции R и функционала S

в задаче 3.3, а также правило разделения переменных на те, по которым допустимо требование максимума R , и те, по которым эта функция должна быть стационарна, чтобы гарантировать существование неопределенных множителей. По переменным первого типа от условий задачи требуется лишь непрерывность и ограничения на эти переменные легко учесть при вычислении максимума, а по переменным второго типа — непрерывная дифференцируемость.

В следующих разделах мы остановимся подробнее на логике получения и использования условий оптимальности.

П.2. Эквивалентные преобразования и расширение экстремальных задач

Под экстремальной задачей понимают задачу о максимуме некоторого критерия $I(x)$ на множестве допустимых решений $x \in D$

$$I(x) \rightarrow \max / x \in D. \quad (\text{П.52})$$

Множество D может принадлежать векторному пространству R^n либо пространству функций, на котором определен функционал $I(x)$. Элемент x^* множества D , на котором I достигает максимума, называют *оптимальным решением*, а величину критерия $I(x^*)$ на этом решении — *значением задачи*.

Если решения задачи не существует, но найдена последовательность допустимых решений, на которой критерий оптимальности стремится к значению, большему, чем $I(x)$ для любого $x \in D$, то значением задачи называют точную верхнюю грань критерия ($\sup I(x)/x \in D$).

П.2.1. Эквивалентные преобразования экстремальных задач

Задачу (П.52) можно видоизменить таким образом, чтобы ее оптимальное решение x^* , значение I^* или и то, и другое не изменились. В первом случае преобразованную задачу называют тождественной исходной задаче по решению, во втором — по значению, а в третьем — просто тождественной. Приведем несколько примеров подобных преобразований.

1. Монотонное преобразование критерия, при котором задача (П.52) преобразуется в задачу

$$F_0(I(x)) \rightarrow \max / x \in D, \quad (\text{П.53})$$

где функция F_0 монотонно растет с ростом I (если F_0 дифференцируема, то производная этой функции по I , почти всюду положительна). Задача (П.53) тождественна исходной задаче (П.52) относительно решения.

2. Введение в критерий оптимальности исчезающего слагаемого

$$I(x) + \varphi(x) \rightarrow \max / x \in D, \quad (\text{П.54})$$

где функция $\varphi(x)$ обращается в нуль для любого $x \in D$. Задача (П.54) тождественна исходной.

3. Монотонное преобразование суммы критерия оптимальности с исчезающим слагаемым

$$F_0(I(x) + \varphi(x)) \rightarrow \max / x \in D.$$

Эта задача, как и задача (П.53), тождественна исходной относительно решения.

Понятие тождественности экстремальных задач можно обобщить на случай, когда множества допустимых решений исходной и преобразованной задач различны. Рассмотрим две задачи:

$$\text{Задача } A: \quad I_A(y) \rightarrow \max / y \in D_A.$$

$$\text{Задача } A1: \quad I_{A1}(z) \rightarrow \max / z \in D_{A1}.$$

Определение: *Экстремальные задачи A и $A1$ назовем тождественными относительно решения, если между элементами множеств D_A и D_{A1} можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что из неравенства*

$$I_A(y_1) \geq I_A(y_2), \quad (y_1, y_2) \in D_A \quad (\text{П.55})$$

следует неравенство

$$I_{A1}(z_1) \geq I_{A1}(z_2), \quad (z_1, z_2) \in D_{A1}, \quad (\text{П.56})$$

где z_1 соответствует y_1 , а z_2 соответствует y_2 (рис. П.2). Все задачи, тождественные задаче A относительно решения, будем объединять в класс \bar{A} . Неравенства (П.55), (П.56) гарантируют, что оптимальному решению задачи A соответствует оптимальное решение задачи $A1$.

Пример. Рассмотрим задачу A вида

$$f_0(x) \rightarrow \max / f_0(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b$$

и задачу $A1$

$$\int_a^b \sqrt{f_0(\tau)} \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \max / f_0(\tau) \geq 0.$$

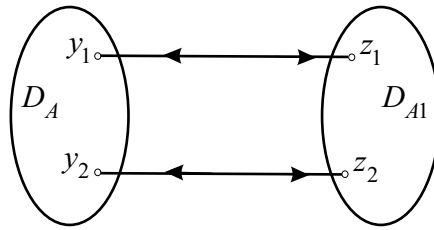


Рис. П.2. К определению задач, тождественных относительно решения

Функция f_0 непрерывна и ограничена на $[a, b]$. Если ввести соответствие между множествами допустимых решений этих задач, при котором решению x^0 задачи A соответствует решение $\delta(x^0 - \tau)$ в задаче $A1$, то они окажутся тождественными относительно решения в смысле данного выше определения.

П.2.2. Расширение экстремальных задач

Далее часто будет использован прием, при котором исходная экстремальная задача заменяется другой задачей — с более широким множеством допустимых решений. Простейший способ такого перехода заключается в отбрасывании того или иного ограничения в исходной задаче. Ясно, что получившаяся после этого задача имеет более широкое множество допустимых решений D . Другие способы — отбросить условие постоянства во времени искомого решения и перейти от поиска вектора к поиску вектор-функции; ослабить требования к гладкости искомого решения и пр. Во всех случаях мы приходим к расширению экстремальной задачи.

Исходной экстремальной задаче соответствует целый класс A ее эквивалентных преобразований. Поэтому расширением исходной задачи будем считать расширение любой из задач этого класса.

О п р е д е л е н и е: Задача B ($I_B(y) \rightarrow \max / y \in D_B$) называется расширением для задачи A ($I_A(y) \rightarrow \max / y \in D_A$), если из множества D_B можно выделить такое подмножество \tilde{D}_B , что задача \tilde{B} ($I_B(y) \rightarrow \max / y \in \tilde{D}_B$) тождественна по решению задаче A . Таким образом, задача \tilde{B} принадлежит классу \bar{A} .

Прокомментируем это определение. Согласно ему множества исходной задачи D_A и расширенной D_B могут иметь разную природу. Например, множество векторов и множество действительных функций. Критерии оптимальности исходной и расширенной задач I_A и I_B в об-

щем случае различны, но таковы, что на множествах D_A и \tilde{D}_B они удовлетворяют неравенствам (П.55), (П.56), т. е. на этих множествах они монотонно связаны друг с другом. В частности, если D_A и \tilde{D}_B совпадают, критерии оптимальности могут совпадать друг с другом или быть монотонно связанными на D_A .

В расширенной задаче критерий и условия, определяющие множество \tilde{D} , могут зависеть от некоторого параметра λ , причем так, что для любого значения $\lambda \in V_\lambda$ задача B_λ является расширением. Такое расширение $B_\lambda(I_B(\lambda, y) \rightarrow \max / y \in D_{B\lambda})$ называют *параметрическим*.

Дадим определения эквивалентного и эффективного расширения, предположив, что критерии I_A и I_B таковы, что на соответствующих друг другу элементах множеств D_A и \tilde{D}_B они совпадают.

О п р е д е л е н и е I: *Расширение задачи A эквивалентно, если значения исходной и расширенной задач одинаковы, то есть*

$$I_A^* = \sup_{y \in D_A} I_A(y) = I_B^* = \sup_{y \in D_B} I_B(y). \quad (\text{П.57})$$

Параметрическое расширение эквивалентно, если равенство (П.57) выполнено хотя бы для одного значения $\lambda \in V_\lambda$.

О п р е д е л е н и е II: *Показателем эффективности расширения называют величину $\Delta = I_B^* - I_A^*$; для параметрического расширения показатель эффективности $\Delta = \inf_{\lambda \in V_\lambda} I_B^*(\lambda) - I_A^*$.*

Так как множество D_B шире, чем \tilde{D}_B , а на последнем максимальное значение I_B совпадает с I_A^* , максимум I_B на D_B может быть только больше, чем I_A^* . Таким образом, величина показателя эффективности Δ заведомо неотрицательна, а для эквивалентного расширения равна нулю. Отметим, что данные выше определения справедливы и тогда, когда одна или обе задачи, исходная и расширенная, имеют обобщенные решения, так как в эти определения входят верхние грани соответствующих критериев оптимальности.

Перечислим основные цели использования расширения:

1) сведение задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимума;

2) определение приближенного решения или решения в классе максимизирующих последовательностей для тех задач, которые обычного решения не имеют;

3) получение условий оптимальности решения и оценок значения задачи;

4) построение и обоснование некоторых типов вычислительных алгоритмов.

Наиболее распространенным способом расширения является такой, при котором значение критерия I_A на любом элементе множества D_A равно значению критерия I_B на соответствующем элементе подмножества \tilde{D}_B . Если D_A и \tilde{D}_B определены на элементах одного и того же пространства, то D_A и \tilde{D}_B совпадают, и $\forall y \in D_A \quad I_A(y) = I_B(y)$. Для этого способа расширения справедливы следующие свойства:

1. Оценочное свойство:

$$I_B^* = \sup_{y \in D_B} I_B(y) \geq I_A^* = \sup_{y \in D_A} I_A(y), \quad (\text{П.58})$$

или $\Delta \geq 0$. Таким образом, значение расширенной задачи дает верхнюю оценку для значения исходной задачи.

Для параметрического расширения

$$I_B^*(\lambda) \geq I_A^* \quad \forall \lambda \in V_\lambda. \quad (\text{П.59})$$

2. Неравенства седловой точки: для эквивалентного параметрического расширения справедливы неравенства седловой точки

$$I_B(y, \lambda^*) \leq I_B(y^*, \lambda^*) = I_A(y^*) \leq I_B(y^*, \lambda),$$

где y^*, λ^* — значения переменных, на которых $I_B = I_A$, при этом y^* является решением исходной задачи.

Эти неравенства следуют из того факта, что для любого λ справедливо (П.59), а для λ^* это неравенство превращается в равенство. Максимум $I_B^*(\lambda)$ функции $I(\lambda, y)$ по y в точке λ^* принимает свое минимальное значение.

3. Связь необходимых условий оптимальности. Оптимальное решение y^* исходной задачи удовлетворяет необходимым условиям оптимальности не только исходной, но и эквивалентной расширенной задачи.

4. Достаточные условия оптимальности (лемма Кротова) [23]: Чтобы y^* было решением исходной задачи A , достаточно, чтобы оно было решением расширенной задачи и принадлежало множеству D_A .

5. Условие эквивалентности расширения. Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы любое решение y^* расширенной задачи B , удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, можно было приблизить последовательностью $\{y_i\}$, каждый

элемент которой принадлежит множеству допустимых решений исходной D_A , причем $\lim_{i \rightarrow \infty} I_B(y_i) = I_B(y^*)$.

Прокомментируем эти свойства:

— Оценочное свойство и вытекающие из него неравенства седловой точки следуют непосредственно из определения расширения, так как максимум на более широком множестве не меньше максимума на его подмножестве.

— Свойство 3 не требует доказательства. Из определения эквивалентности расширения следует, что оптимальное решение исходной задачи является одним из оптимальных решений эквивалентной расширенной задачи, следовательно, удовлетворяет необходимым условиям ее оптимальности. Это свойство позволяет выразить необходимые условия оптимальности исходной задачи через необходимые условия оптимальности расширенной, доказав предварительно эквивалентность расширения. Для этого доказательства часто используют свойство 5.

— Из леммы Кротова вытекает, что для нахождения решения исходной задачи достаточно построить такую расширенную задачу, оптимальное решение которой оказалось бы допустимым для некоторой задачи из класса \bar{A} . В том случае, когда исходная задача не имеет решения, для построения ее обобщенного решения в форме максимизирующей последовательности, достаточно, чтобы решение либо предел максимизирующей последовательности расширенной задачи можно было сколь угодно точно приблизить последовательностью допустимых решений исходной.

Целый ряд постановок экстремальных задач содержит наряду с векторными и функциональными переменными их средние значения или средние значения функций, зависящих от этих переменных [4], [106]. Ниже мы покажем, что задачу с усреднением можно рассматривать как расширение экстремальной задачи и сопоставим этот способ с другими способами расширения для задачи нелинейного программирования и вариационной задачи со скалярным аргументом.

П.3. Задача нелинейного программирования

Остановимся подробнее на задаче нелинейного программирования (НП), способах ее преобразования и расширения.

П.3.1. Условия оптимальности решения задачи нелинейного программирования

Под задачей НП понимают задачу о максимуме функции $f_0(x)$ при наложенных на вектор x условиях в форме равенств и неравенств.

Формально

$$f_0(x) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \varphi_v(x) \geq 0, \quad v = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (\text{П.60})$$

При этом множество V_x пространства R^n определяется ограничениями, наложенными на каждую из составляющих вектора x , типа

$$a_k \leq x_k \leq b_k, \quad x_k \geq 0.$$

т. е. представляет собой параллелепипед в пространстве X . Число условий в форме равенств $m < n$. В противном случае решениями являются либо корни системы $f_i(x) = 0$ ($i = \overline{1, m}$) либо множество допустимых решений пусто. Функции f_0, f_i, φ_v , если это специально не оговорено, предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми.

Заметим, что условия в форме неравенств всегда можно свести к условиям в форме равенств, введя дополнительные переменные. Например,

$$\varphi_v(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi_v(x) - y_v = f_{m+v}(x, y_v) = 0, \quad y_v \geq 0.$$

Поэтому далее для сокращения выкладок будем рассматривать задачу с условиями только в форме равенств.

Оптимальным решением задачи НП (иногда просто решением) называют такой элемент $x^* \in D$, для которого $f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D$. Если множество D не пусто, замкнуто и ограничено, а функция f_0 ограничена и непрерывна на D , то x^* существует.

Функция Лагранжа. Пусть x^* — элемент множества допустимых решений D такой, что значение $f_0(x^*)$ не меньше значения f_0 для любого другого элемента D , то есть x^* — оптимальное решение задачи НП. Выясним, каким условиям, кроме неравенства

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D, \quad (\text{П.61})$$

должно удовлетворять это решение. Потребность в таких условиях связана с тем, что неравенство (П.61) не конструктивно, т. е. не дает никакого другого пути для определения x^* , кроме полного перебора.

Общая логика получения необходимых условий заключается в том, что из множества D выделяется *подмножество сравнения* L , включающее в себя x^* . Это подмножество должно быть таким, чтобы условия оптимальности на нем были в отличие от неравенства (П.61) конструктивными.

Чтобы x^* было решением задачи о максимуме $f_0(x)$ на D , необходимо, чтобы x^* доставляло максимум $f_0(x)$ на L , так что условия оптимальности на L — необходимые условия оптимальности для задачи НП. При этом они тем ближе к необходимым и достаточным (тем «сильнее»), чем шире множество сравнения.

В качестве L рассматривают множество элементов D , отличающихся от x^* на сколь угодно малый по модулю вектор δx , так что

$$1) x^* + \delta x \in D, \quad \forall \delta x \in l; \quad 2) |\delta x| \leq \epsilon.$$

Множество вариаций l образуется из L вычитанием x^* из всех его элементов.

Сначала предположим, что функции f_0 и f_i непрерывно дифференцируемы в точке x^* , а само это решение находится внутри V_x . Заменим, пользуясь малостью ϵ , функции f_0 и f_i линейной частью их разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0(x^*) + (\nabla f_0(x^*), \delta x), \\ f_i(x) &= f_i(x^*) + (\nabla f_i(x^*), \delta x), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{П.62}$$

Условия принадлежности к множеству L можно записать как

$$f_i(x) - f_i(x^*) = 0,$$

или с учетом (П.62)

$$(\nabla f_i(x^*), \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in l, \quad i = \overline{1, m}. \tag{П.63}$$

Условия оптимальности на L

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in L,$$

или

$$(\nabla f_0(x^*), \delta x) \leq 0 \quad \forall \delta x \in l. \tag{П.64}$$

Пусть точка x^* лежит строго внутри множества L . Тогда вектор δx , лежащий в плоскостях, выделяемых условиями (П.63), может иметь

любой знак. А это значит, что неравенство в (П.64) можно заменить равенством. Действительно, если бы нашелся такой вектор δx^1 , для которого это неравенство было бы строгим, то вектор $\delta x^2 = -\delta x^1$ тоже удовлетворял бы (П.63), однако для него неравенство (П.64) уже не выполнялось бы, его левая часть оказалась бы больше нуля. Следовательно, мы пришли к противоречию и доказали, что (П.64) может быть записано как

$$(\nabla f_0(x^*), \delta x) = 0, \quad \forall \delta x \in l. \quad (\text{П.65})$$

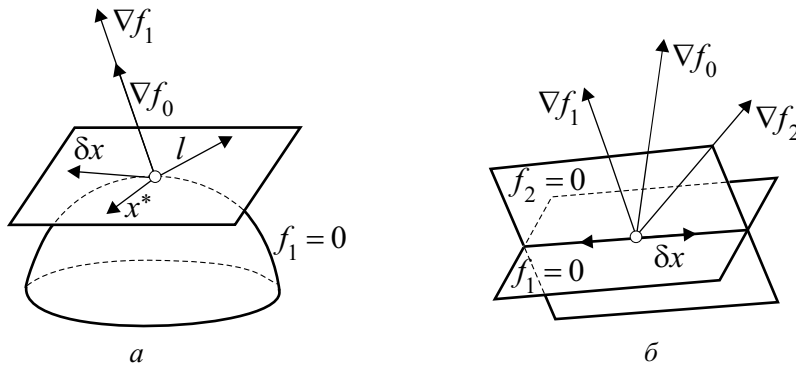


Рис. П.3. Расположение градиентов целевой функции и ограничений в локально-неулучшаемой точке для одного (а) и двух (б) ограничений

Как же расположены векторы ∇f_0 и ∇f_i ($i = \overline{1, m}$) в точке x^* ? Из условия (П.65) следует, что $\nabla f_0(x^*)$ нормален к любым допустимым векторам δx . Если $m = 1$, то множество допустимых δx представляет собой плоскость. Градиент f_1 , как и градиент f_0 , нормален к этой плоскости (рис. П.3, а). Следовательно, оба эти вектора лежат на одной прямой, а значит найдется такой скаляр λ , что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda \nabla f_1(x^*) = 0. \quad (\text{П.66})$$

Если $m = 2$, а размерность x равна, например, трем, то множество l — прямая, полученная пересечением двух плоскостей. Градиенты f_1 и f_2 , а также градиент f_0 нормальны к ней (рис. П.3, б). Следовательно, они лежат в одной плоскости и найдутся такие λ_1 и λ_2 , что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda_1 \nabla f_1(x^*) + \lambda_2 \nabla f_2(x^*) = 0.$$

В общем случае m условий равенства (П.63) и (П.65) означают, что в точке x^* градиенты целевой функции и функций f_i линейно зависимы, то есть найдется такой вектор λ с составляющими λ_i , что

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \quad (\text{П.67})$$

Мы получили условия оптимальности для задачи НП в гораздо более удобной, чем (П.61), форме. Совместное решение (П.67) и системы уравнений связи

$$f_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (\text{П.68})$$

позволяет найти векторы x^* и λ . Эти уравнения линейны относительно λ , но нелинейны по x . Они могут иметь не единственное решение. Каждое из таких решений удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, а одно из них является решением задачи НП во всех случаях, за исключением особых (вырожденных) решений (см. далее).

Условиям (П.67) можно придать более изящную форму, введя функцию

$$R = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x). \quad (\text{П.69})$$

Тогда, если x^* — решение задачи НП, то оно удовлетворяет уравнениям связи и условию

$$\nabla R(x^*) = 0,$$

стационарности функции R в этой точке. Функцию R называют *функцией Лагранжа* задачи НП.

Отметим, что если в задаче НП требовалось бы найти не максимум, а минимум $f_0(x)$ на том же множестве допустимых решений, то для решения, лежащего строго внутри V_x , условия (П.67), (П.68), определяющие x^* и λ , не изменились бы.

Вырожденное решение. При записи соотношений, определяющих множество l допустимых вариаций δx , предполагалось, что вектор δx имеет в условиях (П.63) ту же размерность, что и в (П.64). При этом каждое из условий (П.63) уменьшает размерность вектора допустимых вариаций на единицу, т. е. выделяет в пространстве x гиперплоскость. Таким образом, при невырожденном решении размерность множества допустимых вариаций равна размерности n вектора x минус число условий m . Однако это не всегда так. В некоторых случаях подобные допущения неверны.

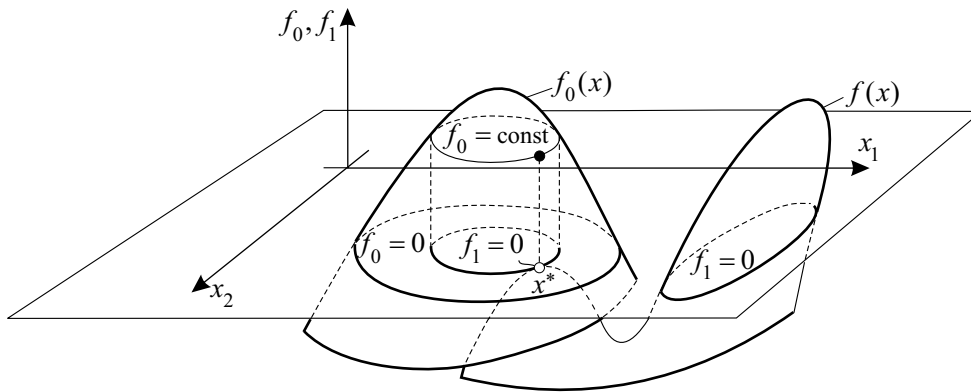


Рис. П.4. Случай, когда решение x^* задачи условной оптимизации является стационарной точкой ограничения $f(x) = 0$ (вырожденный)

Пусть $m = 1$. Для этого случая условия оптимальности получены в форме (П.66). Пусть точка x^* , кроме того, оказалась точкой стационарности функции f_1 (рис. П.4). Это значит, что вектор $\nabla f_1(x^*)$ равен нулю и при любом ограниченном λ из (П.66) следует, что вектор $\nabla f_0(x^*)$ также должен быть равен нулю. Но это, очевидно, не так. Градиент f_0 в точке x^* зависит от вида этой функции и не обязан обращаться в нуль. В этом случае условие

$$(\nabla f_1(x^*), \delta x) = 0 \tag{П.70}$$

выполнено не только для допустимых вариаций δx , но и для любого вектора δx , так как $\nabla f_1(x^*) = 0$.

Аналогичная ситуация возможна и в общем случае, если одна из функций (например, f_1) стационарна на множестве вариаций, определяемых остальными условиями. В этом случае условие (П.70) справедливо для любых вариаций δx , удовлетворяющих равенствам вида

$$(\nabla f_i(x^*), \delta x) = 0, \quad i = 2, 3, \dots \tag{П.71}$$

На рис. П.5 показан вид функций f_1 и f_2 для случая вырожденного решения.

Условие стационарности любой из функций f_i на множестве, определяемом остальными условиями задачи, может быть записано (аналогично условиям оптимальности) как условие линейной зависимости градиентов функций f_i . Если решение x^* вырождено, то найдется такой

ненулевой вектор λ , что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0, \quad (\text{П.72})$$

где любой отличный от нуля множитель λ_i можно принять равным единице, так как условие (П.72) не изменится при делении его правой и левой частей на λ_i .

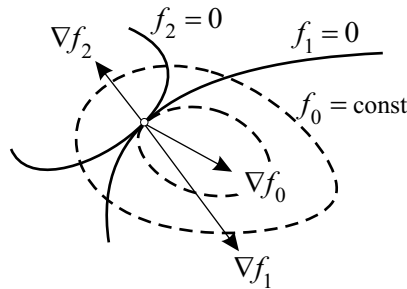


Рис. П.5. Расположение градиентов целевой функции и связей в случае вырожденного решения

Чтобы распространить условия оптимальности (П.67) на обычные и на вырожденные решения, функцию Лагранжа модернизируют, записывая как

$$R = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x). \quad (\text{П.73})$$

При невырожденном решении $\lambda_0 = 1$, при вырожденном $\lambda_0 = 0$. В последнем случае условие стационарности R совпадает с условием (П.72) вырожденности решения. При расчете x^* необходимо найти как обычные, так и вырожденные решения, подставить их в $f_0(x)$ и выбрать то, для которого целевая функция окажется больше.

Отметим, что вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ в нуль не обращается, т. е. хотя бы одна его составляющая отлична от нуля.

Если оптимальное решение x^* лежит на границе V_x , например, неотрицательная составляющая x_v вектора x в точке x^* равна нулю, то по этой составляющей допустимы только неотрицательные вариации $\delta x \geq 0$, приращение целевой функции, а значит и функции Лагранжа на этих вариациях должно быть неположительно. Условия оптимальности в этом случае можно переписать в форме

$$(\nabla_x R(x^*, \lambda), \delta x) \leq 0, \quad (\text{П.74})$$

Из этих условий вытекает, что множители Лагранжа при ограничениях, которые с введением вспомогательных неотрицательных переменных были преобразованы в равенства, должны быть равны нулю, если на оптимальном решении вспомогательная переменная положительна и должны быть неотрицательны, если оптимальное значение этой переменной равно нулю — условия дополняющей нежесткости.

Рассмотренные выше условия оптимальности составляют содержание теоремы Куна–Таккера:

Если x^ — решение задачи (П.60), то найдется такой вектор множителей Лагранжа λ с составляющими $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \dots$ (λ_0 — равно нулю или единице; все составляющие вектора λ не равны нулю одновременно), что в точке x^* выполнены условия (П.74) и условия дополняющей нежесткости.*

Достигает ли функция Лагранжа максимума в точке x^* ? Условие (П.74) теоремы Куна–Таккера совпадает по форме с необходимым условием максимума функции Лагранжа R на множестве V_x . В связи с этим возникает желание заменить условие (П.74) условием

$$x^* = \arg \max_{x \in V_x} R(x, \lambda^*), \quad (\text{П.75})$$

Правомерна ли такая замена?

Отметим, что переход от условия (П.74) к (П.75) очень заманчив по двум причинам:

1) Условие (П.74) содержит градиент R и требует дифференцируемости $f_0(x)$ и функций, задающих D . Условие (П.75) подобных требований не содержит.

2) Функция $R(x, \lambda)$ должна быть лишь непрерывна по x и ограничена на V_x . Тогда на ограниченном замкнутом множестве V_x она достигает точки максимума (теорема Вейерштрасса). Множество V_x при использовании (П.75) может состоять из изолированных областей или отдельных точек.

3) Условие (П.74) является лишь необходимым для максимума R по x . Множество сравнения L при использовании (П.74) уже, чем при использовании (П.75), и в общем случае требование (П.74) выделяет больше «претендентов» на решение, среди которых требуется произвести дополнительный выбор.

К сожалению, переход от слабого условия (П.74) стационарности внутри или локального максимума на границе V_x к условию максимума R для задачи НП в общем случае сделать нельзя, т. е. не найдется

такого вектора λ^* , для которого решение $x^*(\lambda^*)$, полученное по условию (П.75), удовлетворяло бы уравнениям связи и ограничениям. Ниже обсудим следующие вопросы:

- 1) Для каких задач можно использовать условие максимума (П.75)?
- 2) Как нужно модифицировать функцию Лагранжа R , чтобы можно было свести задачу НП к задаче безусловной оптимизации?
- 3) Можно ли использовать конструкции, аналогичные функции Лагранжа, для оценок значений задачи НП сверху и снизу?

П.3.2. Эквивалентные преобразования и функция достижимости задачи НП

Как и ранее, предположим, что все неравенства в условиях задачи сведены к равенствам и рассмотрим исходную задачу НП в форме

$$f_0(x) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m} \end{array} \right. \quad (\text{П.76})$$

Ее решение и значение обозначим как x^* и $f_0^* = f_0(x^*)$.

Задача, тождественная (П.76) относительно решения, может быть получена посредством замены $f_0(x)$ на $R(f_0(x), f(x), \lambda)$, если для почти всех x функция R монотонно возрастает по f_0 на множестве допустимых решений исходной задачи. Преобразованная задача примет вид

$$R(f_0, f, \lambda) \rightarrow \max / x \in D, \quad (\text{П.77})$$

где $R(f_0, 0, \lambda)$ непрерывна и монотонно возрастает по f_0 для всех λ и почти всех f_0 (при некоторых значениях f_0 , имеющих нулевую меру, производная $\partial R / \partial f_0$ может быть равна нулю или отсутствовать).

В частности, в форме (П.77) могут быть записаны преобразования задачи, с применением штрафных функций

$$R(f_0, f, \lambda) = f_0(x) - \Phi(\lambda, f(x)) \rightarrow \max / x \in D. \quad (\text{П.78})$$

О п р е д е л е н и е: Функцию $\Phi(\lambda, x)$ называют *штрафной функцией множества* $D \in V$, если Φ определена и неотрицательна на V , равна нулю для $x \in D$ и стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $x \notin D$.

Например,

$$\Phi(\lambda, f) = \lambda f^2(x) \text{ — квадратичный штраф;}$$

$\Phi(\lambda, f) = \lambda|f(x)|$ — модульный штраф.

Иногда используют комбинацию штрафной функции с исчезающими слагаемыми другого вида. Например,

$$R(f_0, f, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f(x) - \lambda_2 f^2(x)$$

— комбинация функции Лагранжа с квадратичным штрафом.

Пусть $x^* \in D$ — оптимальное решение исходной задачи (П.76), а $f_0^* = f_0(x^*)$ — ее значение. Им соответствует значение $R(f_0^*, 0, \lambda) = R^*(\lambda)$ преобразованной задачи. Так как

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D,$$

то в силу монотонности R по f_0 на D

$$R^*(\lambda) \geq R(f_0, f, \lambda) \quad \forall x \in D.$$

В свою очередь максимум R на множестве $V \supset D$ не может быть меньше, чем $R^*(\lambda)$. Так что

$$\max_{x \in V} R(f_0, f, \lambda) \geq R^*(\lambda). \quad (\text{П.79})$$

Пусть при $\lambda = \lambda^*$ максимум в левой части неравенства (П.79) принадлежит D , так что неравенство превратилось в равенство

$$\max_{x \in V} R(f_0, f, \lambda^*) = R^*(\lambda^*)$$

Таким образом, для преобразованной задачи справедливы неравенства

$$R(f_0(x), f(x), \lambda^*) \leq R(f_0(x^*), f(x^*), \lambda^*) \leq R(f_0(x^*(\lambda)), f(x^*(\lambda)), \lambda), \quad (\text{П.80})$$

где $x^*(\lambda) = \arg \max_{x \in V} R(f_0(x), f(x), \lambda)$.

Отметим, что $f(x^*(\lambda^*)) = 0$, так как $x^*(\lambda^*) \in D$, а $f_0(x^*(\lambda^*)) = f_0^*$. Левое из неравенств следует из того, что x^* — точка максимума R , а правое — из неравенства (П.79). Правое неравенство в (П.80) дает возможность найти оценку значения задачи НП, вычислив для некоторого вектора λ максимум R по $x \in V$ и используя то обстоятельство, что этот максимум больше, чем $R(f_0^*, 0, \lambda^*)$.

Логическая схема методов решения задачи НП, связанных с переходом к безусловной оптимизации, в общих чертах такова:

1. Исходной задаче НП A ставят в соответствие класс задач $\bar{A}(\lambda)$ тождественных A относительно решения для любого из допустимых значений параметра λ .

2. Строят расширение $B(\lambda)$ задач $\bar{A}(\lambda)$, отбрасывая те или иные ограничения, например, условия $f(x) = 0$.

3. Ищут такое значение λ , при котором решение расширенной задачи $B(\lambda)$ оказывается допустимым по ограничениям $\bar{A}(\lambda)$ (принадлежит $D_{\bar{A}}$). В этом случае в соответствии с леммой Кротова решение расширенной задачи совпадает с решением задачи из $\bar{A}(\lambda)$, а значит, и с решением A .

Задачу поиска λ , которая решается на последнем, третьем этапе, называют двойственной к задаче \bar{A} . Она, как следует из неравенств (П.80), сводится к минимизации по λ максимума по x критерия оптимальности расширенной задачи $B(\lambda)$.

Конкретизируем эту схему для задачи НП (П.76).

Задача $\bar{A}(\lambda)$ имеет вид (П.77).

Задача $B(\lambda)$:

$$R(x, \lambda) = R[f_0(x), f(x), \lambda] \rightarrow \max_{x \in V_x}. \quad (\text{П.81})$$

В этой задаче ограничения $f(x) = 0$ отброшены. Она представляет собой расширение $\bar{A}(\lambda)$.

Если удастся найти вектор неопределенных параметров $\lambda = \lambda^*$ такой, чтобы решение задачи $B(\lambda)$ удовлетворяло условиям $f(x) = 0$, т. е. условный максимум в (П.77) совпал с безусловным, то получим решение исходной задачи.

Прежде чем использовать такую схему решения, нужно сформулировать требования к выбору функции $R(f_0, f, \lambda)$:

1. Вектор λ^* должен существовать для достаточно широкого класса функций f_0 и f .

2. Размерность вектора параметров λ должна быть минимальна.

Различные виды функций $R(f_0, f, \lambda)$ в разной степени отвечают этим требованиям. Чтобы выбрать способ расширения и обосновать существование λ^* , важно разобраться в том, как изменяется максимальное значение функции f_0 при переходе от одной линии уровня функции f к другой.

Функция достижимости. При исследовании экстремальных задач часто требуется найти зависимость их оптимального решения или

значения от некоторого параметра, входящего в условия задачи. Ниже рассмотрим зависимость значения задачи НП от правых частей уравнений $f(x) = 0$, эту зависимость будем называть функцией достижимости [64] (в литературе ее называют функцией невязок, функцией возмущений и пр.).

Заменим в задаче НП условия $f_i(x) = 0$ условиями $f_i(x) = C$ и будем искать максимум целевой функции f_0 для всех значений вектора C , при которых равенства $f(x) = C$ и условия $x \in V_x$ совместны друг с другом. Очевидно, что максимальное достижимое значение $f_0(x)$ зависит от C . Формально *функция достижимости задачи НП*

$$f_0^*(C) = \max f_0(x) \Bigg/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = C_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \quad (\text{П.82})$$

При $C = 0$ значение $f_0^*(0)$ равно значению исходной задачи НП. Как будет показано далее, условия оптимальности и эффективность вычислительных алгоритмов во многом зависят от вида $f_0^*(C)$.

Предположим, что для любого $x \in V_x$ функции $f_0(x)$ и $f_i(x)$ принимают ограниченные значения. Тогда множеству V_x соответствует множество V_C значений вектора C , причем нескольким элементам V_x в общем случае соответствует один и тот же элемент V_C .

Например, для задачи

$$f_0(x_1, x_2) \rightarrow \max \Bigg/ \begin{array}{l} |x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq 1, \\ f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{array} \quad (\text{П.83})$$

линии уровня и множество допустимых решений изображены на Рис. П.6. Множество V_C для этой задачи представляет собой отрезок действительной оси

$$-\sqrt{2} - 1 \leq C \leq \sqrt{2} - 1,$$

причем каждой точке этого отрезка соответствуют все точки плоскости x , лежащие на линии $x_1 + x_2 = C + 1$ внутри квадрата, выделяемого неравенствами в (П.83).

Выясним, как связан характер функции достижимости с поведением целевой функции $f_0(x)$ и функций, определяющих множество допустимых решений. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \rightarrow \max / f_i(x) = C_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (\text{П.84})$$

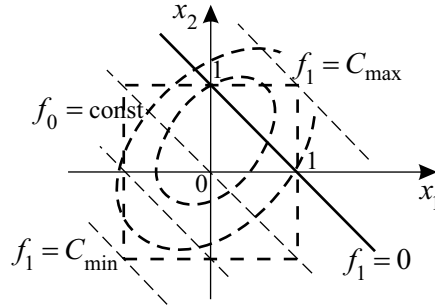


Рис. П.6. Линии уровня ограничения и множество допустимых значений переменных

Пусть $x^*(C)$ — решение этой задачи, а вектор $\lambda^*(C) = (\lambda_1^*(C), \dots, \lambda_m^*(C))$ — соответствующий этому решению вектор множителей Лагранжа. Пусть также решение невырожденно как x^* , так и λ^* непрерывны и непрерывно дифференцируемы по C в ϵ -окрестности некоторого значения C^0 . Вычислим частную производную функции достижимости $f_0^*(C)$ в точке C^0 по C_i :

$$\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i}. \quad (\text{П.85})$$

Условия, определяющие множество D в (П.84), перепишем как $\tilde{f}_i(x, C_i) = f_i(x) - C_i = 0$ и вычислим частные производные каждого из них по C_i :

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i} - 1, \quad (\text{П.86})$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_v}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i}, \quad v = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m. \quad (\text{П.87})$$

Умножим каждое из равенств (П.85)–(П.87) на $\lambda_v (v = \overline{0, m})$ и просуммируем друг с другом, в результате чего получим

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i} \left(\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j^*} + \sum_{v=1}^m \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial x_j^*} \right) - \lambda_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i} \frac{\partial R}{\partial x_j^*} - \lambda_i.$$

Так как x^* — точка стационарности функции Лагранжа, то $\partial R/\partial x_j^* = 0$ и всюду, где производные $\frac{\partial x_j^*}{\partial C_i}$ существуют,

$$-\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (\text{П.88})$$

Таким образом, если решение x^* задачи (П.84) — невырожденное ($\lambda_0 = 1$), то антиградиент функции достижимости в точке C^0 равен вектору множителей Лагранжа λ этой задачи при $C_i = C_i^0$. В частности, при $C_i^0 = 0$ в невырожденной задаче НП множители Лагранжа характеризуют чувствительность значения задачи к изменению ограничений. Если некоторое ограничение не существенно и его малое изменение никак не повлияет на значение целевой функции в точке x^* , то соответствующий множитель Лагранжа равен нулю.

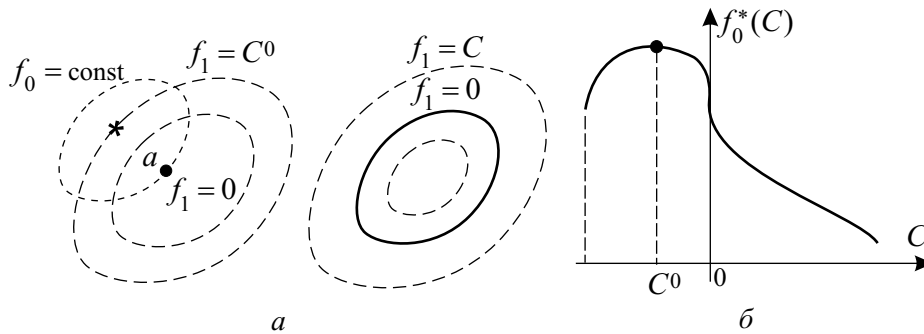


Рис. П.7. Линии уровня целевой функции f_0 , функции $f(a)$ и функция достижимости (б) для задачи, изображенной на рис. П.4

В случае вырожденного решения функция достижимости может изменяться скачком. Причина заключается в том, что вырожденному решению соответствует изолированная точка a на плоскости x . На рис. П.7, а показано расположение линий уровня, соответствующих задаче, изображенной на рис. П.4. При замене равенства $f_1 = 0$ на $f_1 = C$ поверхность f_1 перестанет касаться с плоскостью, соответствующей значению C . Если точка касания a при сколь угодно малом изменении C исчезнет, то произойдет скачок оптимального решения и функции достижимости (рис. П.7, б). Вырожденное решение может и не быть изолированным, так, в задаче с неравенствами вырожденному решению соответствуют точки, в которых границы двух неравенств касаются друг друга. И в этом случае малое изменение одной из границ (малое

изменение C приводит к тому, что решение перестает быть допустимым либо существенно изменится.

Нетрудно доказать следующее

У т в е р ж д е н и е [64]: *в том случае, когда задача НП выпукла (функция f_0 выпукла вверх и множество D выпукло), множество V_C и функция достижимости $f_0^*(C)$ также выпуклы.*

Связь между функциями достижимости исходной и преобразованной задачи. Проследим связь между функциями достижимости задачи НП

$$f_0(x) \rightarrow \max_{x \in V_x}, \quad f_i(x) = C_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

и преобразованной задачи с теми же ограничениями, но с модифицированной целевой функцией $R(f_0, f, \lambda)$. Будем предполагать, что функция R монотонно зависит от f_0 при любых допустимых по условиям $x \in V_x$ значениях вектор-функции f . Функцией достижимости преобразованной задачи назовем функцию

$$R^*(\lambda, C) = \max_{x \in V_x} R(f_0(x), \lambda, f(x)) / f(x) = C.$$

Так как при $f(x) = C$ от x зависит в R только f_0 , а функция R монотонна по f_0 , то максимум R достигается, когда f_0 достигает максимума по x при $x \in V_x$ и $f(x) = C$, то есть

$$R^*(\lambda, C) = \left\{ \max_{x \in V_x} R(f_0(x)C / f(x) = C) \right\} = R(f_0^*(C), C). \quad (\text{П.89})$$

Таким образом, для получения функции достижимости преобразованной задачи нужно, воспользовавшись равенством (П.89), подставить в R вместо f значение C , а вместо f_0 функцию достижимости задачи НП.

Рассмотрим случай, когда безусловный максимум целевой функции оказывается на множестве D (на поверхности $f = 0$). В терминах функции достижимости этот факт выразится в том, что функция $f_0^*(C)$ имеет абсолютный максимум на множестве V_C в точке $C = 0$. Действительно, абсолютный максимум функции $f_0(x)$ на множестве V_x достигается в некоторой точке x^0 , которой соответствуют значения $f_i(x^0) = C_i^0$ (рис. П.8, а). Если x^0 является решением задачи НП, то C_i^0 равны нулю и точка $C = 0$ оказывается точкой абсолютного максимума $f_0^*(C)$ (рис. П.8, б).

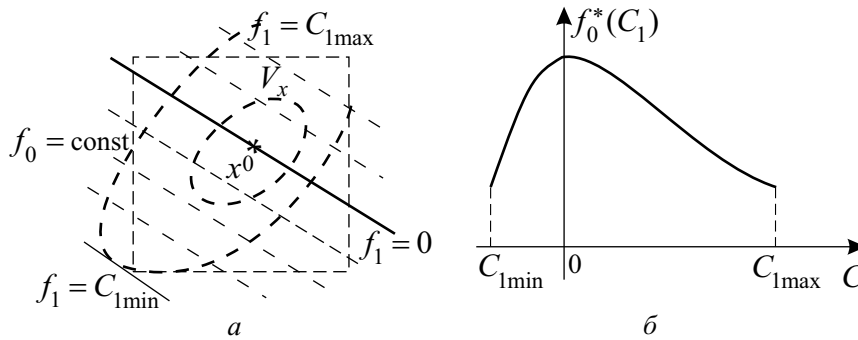


Рис. П.8. Случай совпадения условного и безусловного максимумов:
 а — линии уровня целевой функции и ограничения; б — характер функции
 достижимости

В исходной задаче НП такой вариант может возникнуть лишь в исключительных случаях. Однако, если удалось построить преобразованную задачу, для которой решение или значение (или и то, и другое) совпадали с решением и значением для исходной задачи НП, и при этом абсолютный максимум функции достижимости преобразованной задачи окажется в точке $C = 0$, то для нее можно перейти от требования условного максимума к требованию максимума безусловного.

Выбор вида функции R сводится к тому, чтобы для возможно более широкого класса функций достижимости $f_0^*(C)$ существовало решение неклассического (включающего операцию взятия максимума по C) уравнения

$$\operatorname{argmax}_C R^*(\lambda, C) = 0 \quad (\text{П.90})$$

относительно λ . Если функция R^* дважды дифференцируема по C , то для того, чтобы λ^* было решением уравнения (П.90) необходимо выполнения условий

$$\nabla_C R^*(\lambda^*, C)|_{C=0} = 0. \quad (\text{П.91})$$

Кроме того, матрица Гессе вторых производных этой функции по C должна быть при $C = 0$ отрицательно определенной.

Рассмотрим частные виды задач типа (П.77) и соответствующие им расширения.

Расширение Лагранжа. Пусть в (П.77) функция

$$R(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x), \quad (\text{П.92})$$

где λ_i — любые ограниченные числа.

Функция (П.92) совпадает с функцией Лагранжа. Задача (П.77) примет вид

$$R(x, \lambda) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \\ x \in V_x, \end{array} \right. \quad (\text{П.93})$$

а расширенная задача запишется как

$$R(x, \lambda) \rightarrow \max / x \in V_x. \quad (\text{П.94})$$

Задача (П.93) тождественна задаче НП; множество ее допустимых решений то же, что и в исходной задаче, и для любого из элементов этого множества $R(x, \lambda) = f_0(x)$, так как $f_i(x) = 0$. Вопрос об эквивалентности расширения (П.94) сводится к вопросу о том, при каких условиях найдутся такие ограниченные λ -множители, для которых решение задачи НП доставляет функции R максимум на множестве V_x .

Функция достижимости $f_0^*(C)$ задачи НП и функция достижимости задачи (П.93):

$$R^*(C, \lambda) = \max R(x, \lambda) \left/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = C_i, \quad i = \overline{1, m}, \end{array} \right.$$

связаны друг с другом (см. (П.89))

$$R^*(C, \lambda) = f_0^*(C) + \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i. \quad (\text{П.95})$$

Таким образом, функция достижимости задачи (П.93) отличается от $f_0^*(C)$ добавлением m -мерной плоскости, проходящей через начало координат. Множители λ_i определяют наклон этой плоскости (составляющие ее градиента).

У т в е р ж д е н и е: *Расширение Лагранжа (П.94) задачи НП эквивалентно тогда и только тогда, когда можно провести плоскость $M(C) = \sum_i k_i C_i + f_0^*(0)$ такую, что для любого $C \in V_C$*

$$M(C) \geq f_0^*(C).$$

В этом случае $\lambda_i^* = -k_i$.

Плоскость $M(C)$, когда $(df_0^*/dC)_{C=0}$ существует, является касательной к f_0^* . В более общем случае эту плоскость называют *опорной*.

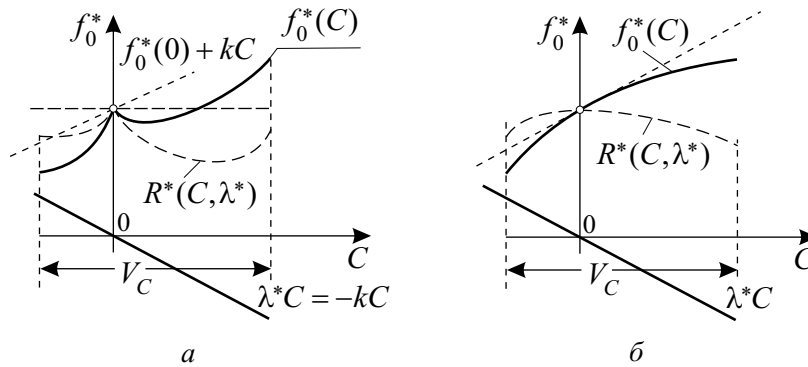


Рис. П.9. Функции достижимости, для которых расширение Лагранжа эквивалентно:

- a* — недифференцируемая в точке $C = 0$;
- б* — дифференцируемая в точке $C = 0$

Рис. П.9 иллюстрирует справедливость этого утверждения, когда имеется лишь одна связь. Функция $f_0^*(C)$ может быть и негладкой в точке $C = 0$, поэтому касательной в этой точке не существует, но опорная прямая может быть проведена. Ее наклон равен k , и она всюду выше, чем f_0^* . Если ко всем ординатам $f_0^*(C)$ добавить величину $-kC$, т.е. $R^*(C) = f_0^*(C) + \lambda C$ ($\lambda = -k$), то построенная таким образом функция имеет в точке $C = 0$ горизонтальную опорную прямую, нигде не пересекающуюся с $R^*(C)$. Таким образом, $R^*(0) \geq R^*(C) \quad \forall C \in V_C$, т.е. максимум функции достижимости задачи (П.89) оказался в точке $C = 0$, следовательно, параметрическое расширение Лагранжа (П.94) эквивалентно задаче (П.89), а значит и исходной задаче НП. Очевидно, что при любом значении λ , отличном от $-k$, значение расширенной задачи, равное максимальной ординате функции достижимости, больше значения задачи НП.

Когда (рис. П.10), такой опорной прямой нельзя построить, никакое значение λ не обеспечит смещение максимума $R^*(C)$ в точку $C = 0$. Так, на рис. П.9., *a* абсолютный максимум функции достижимости исходной задачи оказался на правом конце отрезка V_C . Так как точку максимума мы хотим сместить в точку $C = 0$, то выбираем λ отрицательным. При этом правый конец $R^*(\lambda, C)$ опустится, зато левый поднимется, и при некотором λ^0 для двух значений C , одно из которых больше, а другое меньше нуля, значения $R^*(\lambda^0, C)$ окажутся одинаковыми. Любое изме-

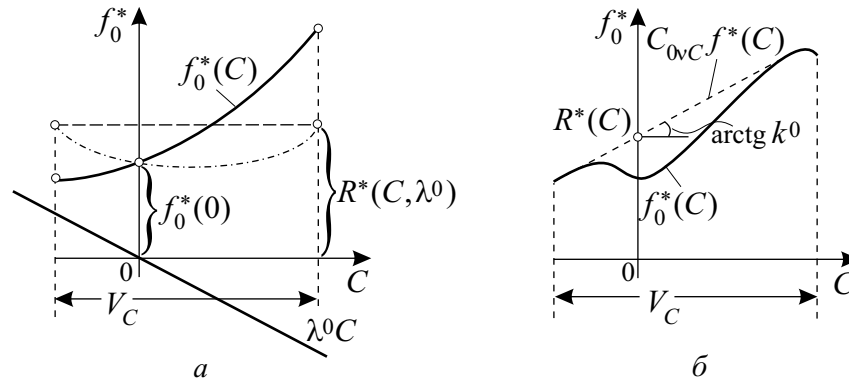


Рис. П.10. Функция достижимости в случаях, когда расширение Лагранжа не эквивалентно:

a — выпуклая вниз функция; *б* — функция выпуклая вниз в окрестности точки $C = 0$

нение λ приводит к повышению значения расширенной задачи. При $\lambda = \lambda^0$ значение расширенной задачи $\max R^*(\lambda^0, C)$ минимально по λ , но выше значения исходной задачи $f_0^*(0)$.

Обсудим некоторые следствия из условия эквивалентности расширения Лагранжа:

1) если функция достижимости $f_0^*(C)$ выпукла, то расширение Лагранжа заведомо эквивалентно (рис. П.9,б);

2) если функция достижимости $f_0^*(C)$ строго вогнута (даже только в окрестности $C = 0$), то расширение Лагранжа заведомо не эквивалентно (рис. П.10,б).

В том случае, когда расширение эквивалентно, можно воспользоваться свойством седловой точки и определить решение x^* задачи НП из условия

$$f_0(x^*) = \min_{\lambda} \max_{x \in V_x} R(x, \lambda).$$

При этом функции $f_0(x)$ и $f(x)$ могут быть и не дифференцируемыми (для существования максимума достаточно их непрерывности, ограниченности и замкнутости множества V_x).

Отметим, что когда расширение не эквивалентно, множители, при которых максимум $R(x, \lambda)$ по x минимален, не равны составляющим градиента плоскости, касательной к функции $f_0^*(C)$ в точке $C = 0$. Они соответствуют равенству максимальных значений $R^*(C)$ в нескольких точках, «между» которыми находится точка $C = 0$. Для задачи с одним

условием таких точек максимума оказалось две. Для случая m измерений можно предположить, что число максимумов не будет превышать $(m + 1)$. Как доказал Каратеодори, это утверждение справедливо.

Выпуклой оболочкой функции называют верхнюю границу выпуклой оболочки множества, лежащего под графиком функции (подграфика). Выпуклой оболочкой множества D в пространстве R^m называют множество, включающее все элементы D и элементы R^m , которые могут быть получены посредством операции усреднения элементов множества D .

Построим выпуклую оболочку $Co_{V_C} f_0^*(C)$ функции достижимости на множестве V_C . В некоторых точках она совпадает с $f_0^*(C)$, в других проходит выше. В тех точках, где выпуклая оболочка совпадает с функцией достижимости, любая опорная к $f_0^*(C)$ плоскость является опорной и к выпуклой оболочке, для других значений C она проходит выше, чем $Co_{V_C} f_0^*(C)$, а значит, тем более выше, чем функция достижимости. Таким образом, *если в точке $C = 0$ функция достижимости и ее выпуклая оболочка совпадают, то расширение Лагранжа эквивалентно* (достаточное условие эквивалентности).

Нетрудно показать, что это условие и необходимо, т. е. в том случае, когда

$$Co_{V_C} f_0^*(0) > f_0^*(0), \quad (\text{П.96})$$

расширение Лагранжа не эквивалентно.

Т е о р е м а Каратеодори: *Для построения любой точки выпуклой оболочки множества D в пространстве R^m нужно усреднять не более $(m + 1)$ -го элемента D .*

Размерность подграфика равна $(m + 1)$, но мы строим его границу, так что число усредняемых значений $f_0^*(C)$ не более $(m + 1)$.

Расширение с использованием исчезающего слагаемого. Обобщением расширения Лагранжа для задачи НП является задача

$$\hat{R} = f_0(x) + \Phi(f(x)) \rightarrow \max_{x \in V}, \quad (\text{П.97})$$

где Φ — произвольная непрерывная функция, причем $\Phi(0) = 0$. Таким образом на множестве D , когда $f(x) = 0$, целевые функции исходной и расширенной задач равны, а слагаемое $\Phi(f)$ исчезает.

Расширению (П.97) соответствует задача, тождественная задаче НП вида

$$\hat{R} = f_0(x) + \Phi(f(x)) \rightarrow \max \left/ \begin{array}{l} f(x) = 0, \\ x \in V_x. \end{array} \right. \quad (\text{П.98})$$

Функция достижимости задачи (П.98)

$$\hat{R}^*(C) = f_0^*(C) + \Phi(C).$$

Градиент и элементы матрицы Гессе для этой функции имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{R}^*}{\partial C_i} = \frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (\text{П.99})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{R}^*}{\partial C_i \partial C_j} = \frac{\partial^2 f_0^*}{\partial C_i \partial C_j} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_i \partial C_j} \quad \forall i, j. \quad (\text{П.100})$$

Таким образом, матрица Гессе для функции достижимости преобразованной задачи представляет собой сумму

$$\Gamma = \gamma + \Delta,$$

где γ и Δ — матрицы Гессе функции достижимости исходной задачи и исчезающего слагаемого соответственно. В частном случае, когда функция Φ линейна, расширение (П.97) совпадает с расширением Лагранжа, матрица $\Delta = 0$ и выпуклость $R^*(C)$ определяется выпуклостью $f_0^*(C)$.

Как выбором функции Φ добиться эквивалентности расширения? Пусть функция $R^*(C)$ дважды дифференцируема, тогда для эквивалентности необходимо, чтобы в точке $C = 0$ она была стационарна (см. (П.91)):

$$\left(\frac{\partial R^*(C)}{\partial C_i} \right)_{C=0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} \right)_{C=0} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} \right)_{C=0} \quad \forall i.$$

Следовательно, в точке $C = 0$ градиенты функций f_0^* и Φ должны быть равны по значению и противоположны по знаку. Достаточным условием эквивалентности является выполнение условий стационарности и выпуклость вверх функции $\hat{R}^*(C)$.

Другим общим соображением, определяющим выбор Φ , является то, что на множестве D , при $C = 0$, $R^*(0) = f_0^*(0)$ и не зависит от вида и

параметров функции Φ . Чтобы $\hat{R}^*(0)$ оказалось максимальным значением R^* , функция $\Phi(C)$ должна уменьшать $f_0^*(C)$ как при $C < 0$, так и при $C > 0$. При этом абсолютный максимум $R^*(C)$ заведомо уменьшается, а так как он ограничен снизу значением $R^*(0)$, то можно надеяться, что в пределе он стремится к этому значению. Функции $\Phi(f(x))$, равные нулю на множестве допустимых решений и уменьшающие критерий расширенной задачи для любого недопустимого решения, называют *штрафными функциями*. В расширенной задаче любой вектор $x \in V_x$ допустим, но если он не удовлетворяет равенствам $f(x) = 0$, то штрафная добавка $\Phi(f)$ стремится сделать такое решение невыгодным.

Наконец, последнее соображение, позволяющее в ряде случаев найти вид функции Φ , основано на лемме Кротова (см. п.2). Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы оптимальное решение расширенной задачи или одно из оптимальных решений, если их много, оказалось допустимым для исходной задачи, т. е. удовлетворяло связям $f(x) = 0$. Поэтому, выбрав Φ так, чтобы функция \hat{R} в расширенной задаче достигала максимума для очень многих значений вектора $x \in V_x$, можно ожидать, что хотя бы одно из них окажется допустимым, тогда, согласно лемме Кротова, расширение эквивалентно.

Расширение с использованием штрафных функций. Расширение для задачи НП образуется с использованием штрафной функции множества допустимых решений этой задачи

$$\hat{R}(x, a) = [f_0(x) + \Phi(a, x)] \rightarrow \max / x \in V_x.$$

При фиксированном a решение этой задачи $x^*(a)$ не обязательно принадлежит D , а следовательно,

$$\hat{R}(x^*(a), a) \geq \max_{x \in D} f_0(x).$$

По мере роста a штраф за нарушение ограничений задачи растет и максимум по x функции $\hat{R}(x, a)$ стремится к значению задачи НП $f_0(x^*)$ при некоторых условиях, которые приведем без доказательства:

Пусть последовательность $x^(a)$ имеет при $a \rightarrow \infty$ предельную точку; множество, определяемое условиями $|f(x)| \leq \epsilon$, ограничено при некотором $\epsilon > 0$; функции f_0, f_i определены и непрерывны в R^n , а f_0 ограничена сверху; функция $\Phi(a, x)$ является штрафной функцией множества D в смысле данного выше определения и для любого*

a непрерывно и монотонно зависит от f_i . Тогда $\lim_{a \rightarrow \infty} x^*(a) = x^*$, а $\lim_{a \rightarrow \infty} f_0(x^*(a)) = f_0(x^*)$.

Отметим, что число параметров расширения в этом случае не связано с числом ограничений, как при расширении Лагранжа. Например, a может быть скалярным, каковым бы ни было число ограничений.

Остановимся подробнее на некоторых видах штрафных функций для задачи с условиями в форме равенств.

1. Квадратичный штраф.

$$\Phi(a, x) = -a \sum_i f_i^2(x), \quad (\text{П.101})$$

где $a > 0$. В функции достижимости соответствующее слагаемое имеет вид

$$\Phi(C, a) = -a \sum_i C_i^2. \quad (\text{П.102})$$

Казалось бы, при достаточно большом a можно добиться, чтобы максимум $R^*(C)$ оказался в точке $C = 0$. Покажем, что это не так.

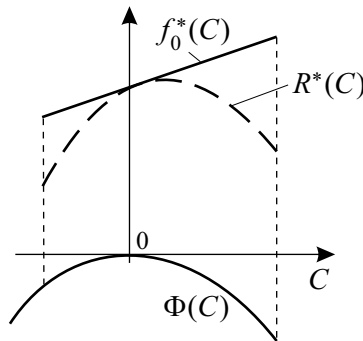


Рис. П.11. Функции достижимости исходной и расширенной задач с квадратичным штрафом

На рис. П.11 показан вид $f_0^*(C)$. Эта функция выпукла, и расширение Лагранжа в данном случае было бы эквивалентно при конечном λ . Расширение же с использованием функции штрафа (П.101) окажется эквивалентным лишь в пределе при $a \rightarrow \infty$. Действительно, вычислим производную функции $R^*(C)$:

$$\frac{d\hat{R}^*}{dC} = \frac{df_0^*}{dC} - 2aC.$$

В точке $C = 0$ второе слагаемое для любого конечного a равно нулю. Поэтому если $df_0^*/dC \neq 0$, то функция $R^*(C)$ не может иметь максимум в нуле, так как не выполнено необходимое условие ее максимума — условие стационарности.

С ростом a функция $\Phi(a, C)$ становится все круче, точка максимума R^* на множестве V_C становится все ближе к нулю. Оценка, полученная из решения задачи

$$R^*(a) = \max_{x \in V_x} \left[f_0(x) - a \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \right],$$

с ростом a уменьшается и стремится к значению задачи НП при $a \rightarrow \infty$ (рис. П.12, а).

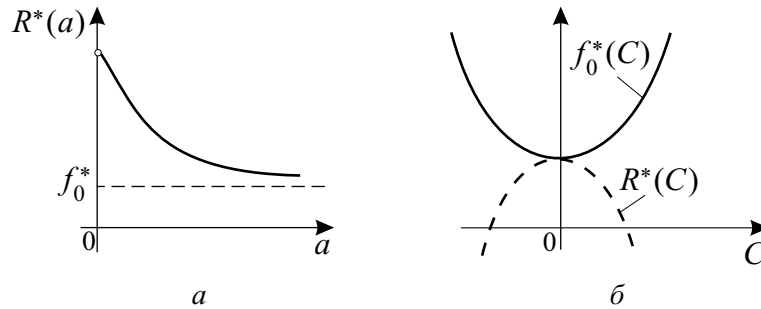


Рис. П.12. Изменение значения расширенной задачи с ростом штрафного коэффициента (а) и случай выпуклой вниз и стационарной в нуле функции достижимости (б)

Вместе с тем невыпуклость $f_0^*(C)$ часто не препятствует использованию квадратичного штрафа. Пусть, например, $f_0^*(C) = 1 + C^2$ (рис. П.12, б), функция выпукла вниз и использование расширения Лагранжа не позволяет свести задачу условной оптимизации к безусловной. Функция достижимости в задаче с использованием квадратичного штрафа имеет вид

$$R^*(C) = (1 + C^2) - aC^2.$$

Достаточно принять $a = 2$, чтобы ее абсолютный максимум оказался в точке $C = 0$, так как $R^*(C)_{a=2} = 1 - C^2$. Отметим, что в точке $C = 0$ функция $f_0^*(C)$ стационарна. Именно этот факт и позволил добиться эквивалентности расширения при конечном значении a .

2. Комбинация монотонного преобразования целевой функции с квадратичным штрафом. Тот факт, что расширение с использованием квадратичного штрафа может быть эквивалентным при конечном a только для задачи, у которой функция достижимости стационарна в точке $C = 0$, приводит к мысли о целесообразности предварительного перехода от исходной задачи НП с целевой функцией $f_0(x)$ к эквивалентно преобразованной задаче с целевой функцией $F_0(f_0(x))$, в которой F_0 монотонно возрастающая. Функция достижимости такой задачи (см. (П.102))

$$F_0^*(C) = F_0(f_0^*(C)).$$

Ее производная при $C = 0$

$$\frac{dF_0^*}{dC} = \left(\frac{dF_0}{df_0} \right)_{f_0^*(0)} \left(\frac{df_0^*}{dC} \right)_{C=0}.$$

Это выражение обращается в нуль при монотонной функции F_0 , например, вида

$$F_0(f_0) = (f_0 - f_0^*(0))^3. \quad (\text{П.103})$$

Расширенная задача примет форму

$$R = F_0(f_0(x), \beta) - a \sum_i f_i^2(x) \rightarrow \max_{x \in V_x}, \quad (\text{П.104})$$

а соответствующая функция достижимости для F_0 , заданной в виде (П.103),

$$R^*(C) = (f_0^*(C) - \beta)^3 - a \sum_i C_i^2.$$

При этом параметр β нужно изменять таким образом, чтобы он оказался равен $f_0^*(0)$.

3. Модульный штраф. Из сказанного выше следует, что достижению эквивалентности расширения при использовании квадратичного штрафа с конечным a препятствует то, что в этом случае градиент Φ по C при $C = 0$ обращается в нуль. Это же характерно для любой функции штрафа, дифференцируемой в нуле, так как точка $C = 0$ всегда является точкой максимума Φ . Однако можно использовать штрафные функции, не дифференцируемые в точке $C = 0$. Наибольшее распространение получил модульный штраф. Для этого случая функция достижимости

$$R^*(C, a) = f_0^*(C) - a \sum_{i=1}^m |C_i|.$$

На рис. П.13 показано изменение значения расширенной задачи, т. е. абсолютного максимума $R^*(C, a)$ на множестве V_C с ростом штрафного коэффициента a . При некотором конечном $a = a^0$ производная $R^*(C, a)$ по C слева от нуля оказывается положительной, а справа — отрицательной, абсолютный максимум R^* достигается в точке $C = 0$, независимо от величины для любой непрерывной функции $f_0^*(C)$ с ограниченным наклоном.

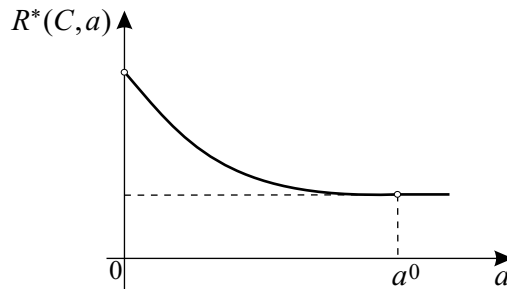


Рис. П.13. Изменение значения расширенной задачи с ростом a для модульного штрафа

Неудобство модульного штрафа состоит в том, что целевая функция расширенной задачи не является гладкой и ее градиент по x не существует при всех $x \in D$.

4. Комбинация функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Составим расширенную задачу в форме

$$R(x, a, \lambda) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x) - a \sum_i f_i^2(x) \rightarrow \max_{x \in V_x}$$

и соответствующую ей функцию достижимости

$$R^*(C, a, \lambda) = f_0^*(C) + \sum_i \lambda_i C_i - a \sum_i C_i^2. \quad (\text{П.105})$$

Если выбрать

$$\lambda_i = - \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} \right)_{C=0},$$

то градиент суммы первых двух слагаемых в (П.105) в точке $C = 0$ окажется равным нулю, а в этом случае, как показано ранее, при конечном a может быть достигнут абсолютный максимум R^* по C в точке $C = 0$ (при этом множество V_C предполагаем ограниченным, а если это

не так, то при $C \rightarrow \infty$ считаем, что $f_0^*(C)$ растет не быстрее квадратичной параболы).

Класс задач, для которых комбинированное расширение эквивалентно при конечных λ и a , гораздо шире, чем для расширения Лагранжа и для расширения с использованием квадратичного штрафа. Однако и в этом случае не для всех задач удастся добиться эквивалентности. Примером может служить задача, функция достижимости $f_0^*(C)$ для которой показана на рис. П.14. Действительно, ни при каком ограни-

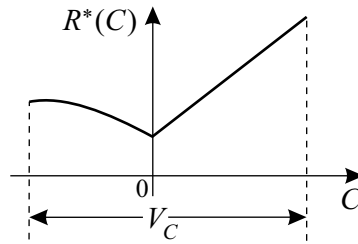


Рис. П.14. Вид функции достижимости, для которой комбинированное расширение не эквивалентно

ченном a добавление слагаемого $-aC^2$ не приведет к тому, что сумма $f_0^*(C) - aC^2$ будет выпукла в окрестности $C = 0$, а это означает (см. ранее), что не существует такого λ -множителя, для которого

$$R^*(C) = f_0^*(C) - aC^2 + \lambda C$$

была бы максимальна в точке $C = 0$. Между тем расширение с использованием модульной функции штрафа в данном случае эквивалентно при конечном a .

Кроме того размерность параметров, вводимых в функцию R , зависит от размерности связей и может быть велика в отличие от комбинации квадратичного штрафа с монотонным преобразованием целевой функции, где таких параметров всего два.

П.3.3. Усредненное расширение задачи НП

Рассмотрим в качестве исходной задачу

$$f(x) \rightarrow \max / x \in D, \quad (\text{П.106})$$

искомым решением которой является вектор $x \in D \subset V \subset R^n$.

Пусть из элементов множества V может быть произведена выборка с использованием случайного механизма. Плотность распределения $P(x)$ этой выборки требуется найти по некоторому критерию. В частности, $P(x)$ можно выбирать по условию максимума функции f от среднего по ансамблю значения x . В этом случае задача примет форму

$$f(\bar{x}) = f \left[\int_V xP(x)dx \right] \rightarrow \max_{P(x)} \quad (\text{П.107})$$

при условиях:

$$\int_V P(x)dx = 1, \quad P(x) \geq 0. \quad (\text{П.108})$$

Другой способ оценить плотность распределения — максимизировать среднее значение функции f на ансамбле решений

$$\overline{f(x)} = \int_V f(x)P(x)dx \rightarrow \max_{P(x)} \quad (\text{П.109})$$

при тех же условиях (П.108). При этом не требуется, чтобы каждый элемент ансамбля решений принадлежал D . Достаточно, чтобы, например, среднее значение

$$\bar{x} = \int_V xP(x)dx \in D. \quad (\text{П.110})$$

Если задача (П.106) выпукла и ее оптимальное решение равно x^* , то оптимальные решения $P^*(x)$ в задачах (П.107), (П.109) совпадают и равны

$$P^*(x) = \delta(x - x^*), \quad (\text{П.111})$$

где δ — функция Дирака. Значения задач (П.106), (П.107), (П.109) в этом случае одинаковы. В общем случае между значениями задачи (П.106) и каждой из задач (П.107), (П.109) выполнено неравенство, аналогичное (П.58).

Множества допустимых решений задач (П.107), (П.109) не принадлежат пространству R^n , тем не менее согласно определению расширения, приведенному выше, каждая из задач (П.107), (П.109) является расширением для задачи (П.106). Действительно, в соответствии с этим определением можно установить взаимно-однозначное соответствие между элементами \tilde{x} множества D задачи (П.106) и множеством

плотностей распределения D_1 вида

$$P_{\tilde{x}}(x) = \delta(x - \tilde{x}). \quad (\text{П.112})$$

Каждому вектору $\tilde{x}_0 \in D$ соответствует распределение вида $P_{\tilde{x}_0}(x)$ (П.112) и обратно, причем значения $f(x)$ в (П.106), $f(\bar{x})$ в (П.107) и $\bar{f}(x)$ в (П.109) на соответствующих элементах решений совпадают, так что задача (П.106) эквивалентна задачам (П.107), (П.109), в которых множество допустимых решений ограничено решениями, имеющими вид (П.112), а x берется из множества D .

Задачи (П.107) и (П.109), в которых $P(x)$ удовлетворяет только условиям (П.108), (П.110), являются расширением для задач с решениями вида (П.112), а значит, и для задачи (П.106).

Структура оптимального решения усредненной задачи НП. В качестве задачи A рассмотрим задачу НП, в которой для простоты ограничения имеют форму равенств

$$f_0(x) \rightarrow \max_x / f(x) = 0, \quad x \in V_x \subset R^n, \quad (\text{П.113})$$

где $x \in R^n$, f_0 — скалярная, полунепрерывная сверху и ограниченная на V_x ; f — вектор-функция размерности $m < n$; множество V_x замкнуто и ограничено. Сопоставим задаче (П.113) задачу вида

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f_0(x(t)) dt \rightarrow \max_{x(t)} / \bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt = 0, \quad (\text{П.114})$$

$$x(t) \in V_x \in R^n \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Решение $x(t)$ ищут в классе измеримых функций.

Задача (П.114) является расширением для (П.113), так как из множества ее допустимых решений можно выделить подмножество функций постоянных для почти всех $t \in [0, \tau]$ и каждому вектору $x_0 \in V_x$ в задаче НП (П.113) сопоставить $x(t) = x_0$.

Каждой функции $x(t)$ можно поставить в соответствие вероятностную меру $\mu(y) = \frac{1}{T} \mu\{t : x(t) \leq y\}$. С использованием вероятностной меры задача (П.114) может быть переписана в форме

$$\bar{f}_0 = \int_{V_x} f_0(x) d\mu(x) \rightarrow \max_{\mu(x)} / \bar{f} = \int_{V_x} f(x) d\mu(x) = 0, \quad (\text{П.115})$$

или с введением плотности меры $P_i(x) = \frac{d\mu_i}{dx_i}$

$$\bar{f}_0 = \int_{V_x} f_0(x)P(x)dx \rightarrow \max_{P(x)} \bar{f} = \int_{V_x} f(x)P(x)dx = 0. \quad (\text{П.116})$$

В точках разрыва первого рода $\mu(x)$ ее плотность содержит δ -составляющие. В силу свойств функции $\mu(x)$, решение задачи (П.116) должно удовлетворять требованиям (П.108).

Усредненную задачу (П.116), представляющую собой расширение для задачи НП, обозначают как $\overline{\text{НП}}$. Оптимальному решению задачи (П.116) $P^*(x)$ соответствуют сколь угодно много функций $x^*(t)$ в задаче (П.113), для каждой из которых $P(x) = P^*(x)$. Связано это с тем, что $P^*(x)$ определяет только доли интервала $(0, T)$, в течение которых решение $x^*(t)$ принимает то или иное значение, но не определяет последовательность? в которой оно эти значения принимает. Исключение составляет случай, когда $P^*(x) = \delta(x - x^0)$. В этом случае функция $x^*(t) = x^0$ постоянна и единственна.

Из приведенного далее доказательства следует структура оптимального решения задачи $\overline{\text{НП}}$:

1. *Оптимальное решение задачи $P^*(x)$ имеет вид*

$$P^*(x) = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu \delta(x - x^\nu), \quad (\text{П.117})$$

где

$$\gamma_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu = 1. \quad (\text{П.118})$$

2. *Если $P^*(x)$ — оптимальное решение, то найдется такой ненулевой вектор множителей $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$, что в точках x^ν функция Лагранжа*

$$R = \sum_{\nu=0}^m \lambda_j f_j(x) \quad (\text{П.119})$$

достигает абсолютного максимума по $x \in V_x$.

Значения x^ν называют базовыми значениями x .

3. *Если оптимальное решение задачи $\overline{\text{НП}}$ реализуется во времени, то функция $x(t)$ скачкообразно изменяется между базовыми значениями, принимая ν -е из них в течение доли γ_ν от общего интервала времени T .*

Задача $\overline{\text{НП}}$ с усреднением по части переменных. Усреднение в задаче НП может быть проведено не по всем, а по части переменных. Разобьем переменные в задаче (П.113) на две группы — детерминированные x и рандомизированные u . Усреднение проводится только по u . Задача $\overline{\text{НП}}^u$ имеет форму

$$\overline{f_0(x, u)}^u \rightarrow \max_{x, p(u)} \overline{f(x, u)}^u = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (\text{П.120})$$

При этом

$$\overline{f_j(x, u)}^u = \frac{1}{T} \int_0^T f_j(x, u(t)) dt = \int_{V_u} f_j(x, u) P(u) du. \quad (\text{П.121})$$

$$P(u) \geq 0; \quad \int_{V_u} P(u) du = 1.$$

Функции f_j непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x . Условия оптимальности задачи (П.120) имеют следующую форму:

1. *Оптимальное распределение рандомизированных переменных имеет вид*

$$P^*(u) = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu \delta(u - u^\nu), \quad (\text{П.122})$$

$$\gamma_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu = 1.$$

2. *Если $(x^*, P^*(u))$ — искомое оптимальное решение, то найдется такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$, что образованная с его помощью функция Лагранжа $R = \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j(x, u)$ локально неумлучшаема по детерминированным переменным и достигает максимума на множестве V_u для каждого из базовых значений u^ν :*

$$\frac{\delta}{\delta x} \left\{ \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu R(x, u^\nu) \right\} \delta x \leq 0, \quad (\text{П.123})$$

$$u^\nu = \arg \max_{u \in V_u} R(\lambda, x^*, u), \quad \nu = \overline{0, m},$$

где δx — вариация, допустимая по условиям $x \in V_x$.

Вариантов усредненного расширения задачи НП может быть очень много, так как не все ограничения могут зависеть и от детерминированных, и от рандомизированных переменных, наряду с усреднением функций могут быть условия в форме функций от средних значений переменных и пр. Доказывать условия оптимальности для каждого варианта постановки нет смысла. Целесообразно записать усредненное расширение задачи НП в канонической форме и получить для нее необходимые условия оптимальности, из которых вытекают в частности и результаты, приведенные для рассмотренных двух типов усредненных задач.

Каноническая форма усредненного расширения задачи НП имеет вид

$$F_0[\overline{f(x, u)}, x] \rightarrow \max \quad (\text{П.124})$$

при условиях

$$F_j[\overline{f(x, u)}, x] = 0, \quad j = \overline{1, r}; \quad x \in V_x, \quad (\text{П.125})$$

черта над функцией f соответствует усреднению по u на замкнутом и ограниченном множестве V_u . Размерность вектор-функции f равна m , функция F непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов, а f непрерывна по u и непрерывно дифференцируема по x .

Теорема П.1 (Условия оптимальности усредненной задачи НП):

1. *Оптимальная плотность распределения рандомизированных переменных имеет вид*

$$P^*(u) = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu \delta(u - u^\nu) \quad (\text{П.126})$$

где γ_ν удовлетворяют требованиям (П.118).

2. *Если $x^*, P^*(u)$ — оптимальное решение, то найдется такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_{j\nu})(j = \overline{1, r}; \nu = \overline{0, m})$, что для каждого из базовых значений u^ν вектора u достигает максимума на V_u функция*

$$L = \lambda_0 \frac{\delta F_0}{\delta f} f(x, u) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\delta F_j}{\delta f} f(x, u),$$

где

$$\bar{f} = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu f(x, u^\nu).$$

Так что

$$u^\nu = \arg \max_{U \in V_u} L(x^*, \lambda, u). \quad (\text{П.127})$$

3. Функция

$$R = \sum_{j=0}^r \lambda_j F_j \quad (\text{П.128})$$

локально неулучшаема по детерминированным переменным

$$\frac{\delta R}{\delta x} \delta x \leq 0. \quad (\text{П.129})$$

После приведения задач $\overline{\text{НП}}$ (П.115) и $\overline{\text{НП}}^u$ (П.120) к форме (П.124), (П.125) из теоремы 1 следуют сформулированные ранее условия оптимальности их решения. Отметим, что максимальное число базовых значений вектора рандомизированных переменных u определяется только размерностью вектор-функции f .

Доказательство теоремы 1: При фиксированном $x \in V_x$ значения вектор-функции f в задаче (П.124), (П.125) принадлежат множеству Q , которое представляет собой отображение множества V_u в m -мерное пространство f . Значения же вектора \overline{f} принадлежат выпуклой оболочке Q . Согласно теореме Каратеодори каждый элемент выпуклой оболочки может быть представлен как линейная комбинация не более чем $(m + 1)$ -го элемента Q . Таким образом, $\overline{f(x, u)}$ можно представить как

$$\overline{f(x, u)} = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu f(x, u^\nu), \quad (\text{П.130})$$

где γ_ν удовлетворяют требованиям (П.118). Равенство (П.130) позволяет преобразовать задачу (П.124), (П.125) к форме обычной задачи НП с переменными $x, u^\nu, \gamma_\nu (\nu = \overline{0, m})$, условиями (П.125) и (П.118) и воспользоваться теоремой Куна–Таккера. Действительно, задача примет вид

$$F_0 \left(\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu f(x, u^\nu), x \right) \rightarrow \max \quad (\text{П.131})$$

при условиях

$$F_j \left(\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu f(x, u^\nu), x \right) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad x \in V_x, \quad (\text{П.132})$$

$$\sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} = 1, \quad \gamma_{\nu} \geq 0. \quad (\text{П.133})$$

Функция Лагранжа для нее имеет форму

$$\bar{R} = \sum_{j=0}^r \lambda_j F_j \left[\sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} f(x, u^{\nu}), x \right] - \Lambda \left(\sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} - 1 \right).$$

Условия ее оптимальности по искомым переменным с учетом неотрицательности γ_{ν} приводят к утверждениям теоремы П.1. А именно из

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \gamma_{\nu}} \delta \gamma_{\nu} \leq 0, \quad \delta \gamma_{\nu} \geq 0$$

следует, что для базовых значений $u = u^{\nu}$ функция

$$L = \sum_{j=0}^r \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial f} f(x, u) = \Lambda \quad \text{при} \quad \gamma_{\nu}^* > 0 \quad (\text{П.134})$$

и

$$L \leq \Lambda \quad \text{при} \quad \gamma_{\nu} = 0.$$

Таким образом, для всех значений u^{ν} , входящих в задачу (П.131)–(П.133) с положительным весом, функции L максимальна по u на множестве V_u , т. е. выполнено требование (П.127). Если на оптимальном решении $f(x, u^*) \in Q$, то u^* доставляет максимум L .

Условия оптимальности по x представляют собой условия локальной неухудшаемости

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \delta x \leq 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^r \lambda_j \left[\frac{\partial F_j}{\partial f} \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} \frac{\partial f(x, u^{\nu})}{\partial x} + \frac{\partial F_j}{\partial x} \right] \delta x \leq 0. \quad (\text{П.135})$$

Здесь, как и в (П.134), обозначено $\overline{f(x, u)} = \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} f(x, u^{\nu})$. Соответственно

$$\sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} \frac{\partial f(x, u^{\nu})}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}.$$

Условия (П.135) с учетом обозначения (П.128) приводят к неравенствам (П.129).

Условия оптимальности двух рассмотренных выше задач и структура их оптимального решения непосредственно вытекают из доказанной теоремы.

Связь задачи $\overline{\text{НП}}$ с расширением Лагранжа задачи НП. Запишем функцию Лагранжа для задачи (П.116) и с ее использованием условия оптимальности этой задачи:

$$\begin{aligned}\overline{R} &= \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} f_0(x^{\nu}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} f_i(x^{\nu}) + \Lambda \left(1 - \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} \right) = \\ &= \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} \left[f_0(x^{\nu}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^{\nu}) - \Lambda \right] + \Lambda.\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с функцией Лагранжа $R = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ исходной задачи НП, видим, что

$$\overline{R} = \sum_{\nu=0}^m \gamma_{\nu} (R(x^{\nu}, \lambda) - \Lambda) + \Lambda, \quad (\text{П.136})$$

где $R(x^{\nu}, \lambda)$ — функция Лагранжа задачи НП для базовых значений вектора x .

С учетом того, что $\sum_{\nu} \gamma_{\nu} = 1$, функция Лагранжа усредненной задачи равна среднему значению функции Лагранжа для исходной задачи, причем усреднение ведется по всем базовым значениям x^{ν} . Заметим, что некоторые из весовых множителей γ_{ν} могут быть равны нулю. Это означает, что число базовых точек меньше $m+1$. Выясним, каким условиям должны удовлетворять те x^{ν} , которые входят в выражение (П.136) с ненулевым весом. Для этого запишем условия оптимальности задачи (П.136) по переменным γ_{ν} , воспользовавшись теоремой Куна—Таккера:

$$\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_{\nu}} \right) \delta \gamma_{\nu} \leq 0.$$

Так как γ_{ν} ограничены только с одной стороны ($\gamma_{\nu} \geq 0$), то $\delta \gamma_{\nu} \geq 0$, следовательно,

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_{\nu}} = R(x^{\nu}) - \Lambda \leq 0 \quad (\text{П.137})$$

или $R(x^{\nu}) \leq \Lambda$. Если $\gamma_{\nu}^* > 0$, то $\delta \gamma_{\nu}$ может быть любого знака, следовательно, неравенство (П.137) превращается в равенство:

$$R(x^{\nu}) = \Lambda.$$

Для всех остальных x весовой коэффициент можно считать нулевым ($\gamma_\nu = 0$), при этом $\partial \bar{R} / \partial \gamma_\nu < 0$ и $R(x) < \Lambda$.

Таким образом, для всех тех значений x^ν , которые входят в усредненную задачу с ненулевым весом, функция Лагранжа R исходной задачи НП достигает абсолютного максимума. Этот максимум, естественно, одинаков для всех x^ν (рис. П.15), откуда следует, что

$$\bar{R}(\gamma_\nu^*, x^{\nu*}, \lambda) = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu^* [R(x^{\nu*}, \lambda) - \lambda] + \Lambda = \sup_{x \in V_x} R(x, \lambda). \quad (\text{П.138})$$

Условия равенства значений R в точках $x^{\nu*}$ и условия ее максимума в них позволяют выписать уравнения для расчета соответствующих значений переменных.

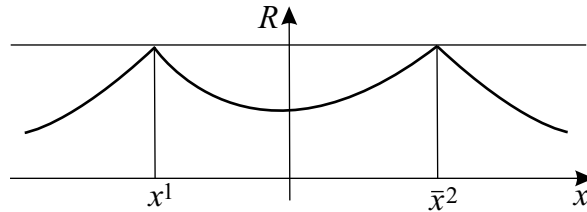


Рис. П.15. Функция Лагранжа при выборе λ из условия минимума по λ и максимума $R(x, \lambda)$ по x

Из теоремы Куна–Таккера для задачи $\bar{\text{НП}}$ вытекает, таким образом, что найдется вектор λ -множителей Лагранжа, для которого функция \bar{R} достигает абсолютного максимума по переменным $x^\nu \in V_x$ и $\gamma_\nu \in V_\gamma$ на элементе множества \bar{D} допустимых решений задачи $\bar{\text{НП}}$. Отсюда следует, что расширение Лагранжа для задачи $\bar{\text{НП}}$ эквивалентно. Как для любого эквивалентного параметрического расширения, λ -множители удовлетворяют условию

$$\bar{R}(\lambda^*, \gamma_\nu^*, x^{\nu*}) = \inf_{\lambda \in V_\lambda} \sup_{\gamma_\nu, x^\nu} \bar{R}(\lambda, \gamma_\nu, x^\nu).$$

С учетом равенства (П.138) получим

$$\bar{R}(\lambda^*, \gamma_\nu^*, x^{\nu*}) = \inf_{\lambda \in V_\lambda} \sup_{x \in V_x} R(\lambda, x). \quad (\text{П.139})$$

Таким образом, расширение Лагранжа эквивалентно задаче НП тогда и только тогда, когда этой задаче эквивалентно усредненное расширение $\bar{\text{НП}}$, т. е. когда функция достижимости $f_0^*(C)$ совпадает со

своей выпуклой оболочкой в точке $C = 0$. В этом случае найдутся такие λ -множители, не обращающиеся в нуль одновременно ($\lambda_0 = \{0; 1\}$), что требование стационарности функции Лагранжа можно заменить требованием ее максимума по x .

П.4. Принцип максимума для вариационных задач со скалярным аргументом

П.4.1. Усреднение в вариационных задачах

В вариационных задачах, где искомые переменные зависят от скалярного аргумента t , введение усреднения позволяет получить решение в форме максимизирующих последовательностей и сформулировать условия оптимальности в форме принципа максимума для произвольного сочетания критерия оптимальности и ограничений того или иного типа. Предварительно приведем вспомогательные утверждения и определения.

Пусть в задаче A : $I_A(y) \rightarrow \max / y \in D_A$ для каждого j -го из условий, определяющих множество D_A , может быть введена норма Δ_j отклонения этого условия от его номинального значения (норма невязки).

О п р е д е л е н и е 1: *Задачу называют корректной относительно значения, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое δ , что из неравенства $\max_j(\Delta_j) \leq \delta$ следует, что отклонение значения I_A^* задачи по модулю не превышает ϵ .*

В задаче НП корректность в смысле определения 1 соответствует непрерывности функции достижимости.

О п р е д е л е н и е 2: *Расширение B : $I_B(y) \rightarrow \max / y \in D_B$ задачи A эквивалентно, если*

$$I_A^* = \sup_{y \in D_A^-} I_A^-(y) = \sup_{y \in D_B} I_B(y) = I_B^*. \quad (\text{П.140})$$

Отметим, что в левой части этого равенства стоит не I_A^* и D_A , а I_A^- и D_A^- , т.е. критерий оптимальности и множество допустимых решений любой задачи из класса эквивалентных преобразований A .

Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения:

Л е м м а 1: Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы любому решению расширенной задачи $y^0 \in D_B$ можно было сопоставить такую последовательность $\{y_i\} \subset D_A$ допустимых решений исходной задачи, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I_{\bar{A}}(y_i) = I_B(y^0). \quad (\text{П.141})$$

Для задач, корректных относительно значения, последовательность $\{y_i\}$ может не принадлежать $D_{\bar{A}}$, нужно лишь, чтобы в пределе при $i \rightarrow \infty$ любое из ограничений исходной задачи выполнялось сколь угодно точно. Утверждение леммы 1 следует из определения 2. Если оптимальное решение y^* расширенной задачи существует, то y^0 можно заменить на y^* .

Л е м м а 2: Если y_A^* — оптимальное решение задачи A , расширение B эквивалентно A и $D_B \supset D_A$, то y_A^* удовлетворяет необходимым условиям оптимальности расширенной задачи.

Лемма 2 следует из того факта, что y_A^* неумлучшаемо на D_A , а последнее является подмножеством множества допустимых решений расширенной задачи.

Назовем вариационной задачей в канонической форме задачу вида

$$I = \int_0^T [f_{01}(t, x(t), u(t), a) + \sum_l f_{02}(t, x(t), a)\delta(t - t_l)] dt \rightarrow \max \quad (\text{П.142})$$

при условиях

$$J_j(\tau) = \int_0^T [f_{j1}(t, x(t), u(t), a, \tau) + f_{j2}(t, x(t), a, \tau)\delta(t - \tau)] dt = 0 \quad (\text{П.143})$$

$$\forall \tau \in [0, T], \quad j = \overline{1, m}, \quad u \in V_u, \quad a \in V_a,$$

где a — вектор параметров, постоянных на $[0, T]$; функции f_{j1} и f_{j2} ($j = \overline{0, m}$) непрерывно дифференцируемы по x , a и t и непрерывны по u .

Л е м м а 3: Пусть задача (П.142), (П.143) корректна относительно значения задачи в смысле определения 1, в котором величина вариации каждого из условий (П.143) определена как $\Delta_j = \max_{\tau} |J_j(\tau)|$, тогда усредненное расширение этой задачи

$$\bar{I} = \int_0^T [f_{01}(t, x, u, a)^u + \sum_l f_{02}(t, x, a)\delta(t - t_l)] dt \rightarrow \max \quad (\text{П.144})$$

при условиях

$$\bar{J}_j(\tau) = \int_0^T \left[\overline{f_{j1}(t, x, u, a, \tau)}^u + f_{j2}(t, x, a, \tau) \delta(t - \tau) \right] dt = 0 \quad (\text{П.145})$$

$$\forall \tau \in [0, T], \quad j = \overline{1, m}, \quad u \in V_\lambda, \quad a \in V_a$$

эквивалентно задаче (П.142), (П.143).

Здесь

$$\overline{f_{j1}}^u = \int_{V_u} f_{j1}(t, x, u, a, \tau) P(u, t) du. \quad (\text{П.146})$$

Плотность вероятностной меры $P(u, t)$ удовлетворяет условиям

$$P(u, t) \geq 0, \quad \int_{V_u} P(u, t) du = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{П.147})$$

Справедливость леммы 3 следует из леммы 1 и того факта, что любому решению $P^0(u, t)$, $x^0(t)$, a^0 можно сопоставить последовательность решений

$$\{z_i\} = \{u_i(t), x^0(t), a^0\},$$

на которых

$$I(z_i) \rightarrow \bar{I}^*, \quad J_j(\tau, z_i) \rightarrow \bar{J}_j(\tau) = 0, \quad i \rightarrow \infty, j = \overline{1, m}.$$

Действительно, совершенно аналогично тому, как это было сделано выше при доказательстве теоремы 1, можно доказать справедливость первого из утверждений леммы 3. При любом фиксированном значении t, x, a, τ значения вектора $\bar{f} = (\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$ принадлежат выпуклой оболочке \bar{Q} множества Q , получающегося при отображении V_u в $(m+1)$ -мерное пространство f . Искомое решение максимизирует f_0 по u . Поэтому оно принадлежит верхней границе \bar{Q} и может быть получено как линейная комбинация $(m+1)$ -го элемента Q .

Для любого решения $P^0(u, t)$ в форме (П.147) можно построить последовательность $\{u_i(t)\}$ решений задачи (П.142), (П.143) следующим образом: разобьем $[0, \tau]$ на i интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i$ и примем на каждом из интервалов $\gamma_\nu(t)$ и $u^\nu(t)$ постоянными. Пусть для r -го интервала их значения равны $\gamma_{\nu r}$ и u_r^ν ($\nu = \overline{0, m}$). Полученную при этом задачу назовем дискретизацией задачи (П.144), (П.145).

Аналогичное разбиение отрезка $[0, \tau]$ проведем в задаче (П.142), (П.143) с той разницей, что каждый из интервалов разобьем на $(m + 1)$ более мелких. Так, Δ_r разобьем на $\Delta_{r0}, \Delta_{r1}, \dots, \Delta_{rm}$, причем отношение $\Delta_{r\nu}/\Delta_r = \gamma_{\nu r}$, а переменные $u(t)$ в задаче (П.142), (П.143) будем считать кусочно-постоянными и принимающими в интервале $\Delta_{r\nu}$ значение u_r^ν . Для построенных таким образом решений на каждом из интервалов $\Delta_r (r = 1, \dots, i)$ значения функционалов I и $J(\tau)$ в задаче (П.142), (П.143) равны значениям соответствующих функционалов для дискретизации задачи (П.144), (П.145). При $i \rightarrow \infty$ и величинам интервалов Δ_r , равномерно по r стремящимся к нулю, величины I_D и $J_D(\tau)$ в дискретизации усредненной задачи сколь угодно близки к \bar{I} и $\bar{J}(\tau)$, а значит, то же относится и к I и $J(\tau)$ в задаче (П.142), (П.143) с учетом ее корректности относительно значения. Лемма 3 доказана.

Искомым решением задачи (П.144)–(П.145) являются мера $P^*(u, t)$, вектор-функция $x^*(t)$ и вектор a^* . Это решение удовлетворяет условиям

Т е о р е м ы П.2: Пусть $P^*(u, t), x^*(t), a^*$ — искомое решение; оптимальное распределение рандомизированных переменных имеет вид

$$P^*(u, t) = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) \delta(u - u^\nu(t)), \quad (\text{П.148})$$

где $\forall t \in [0, T]$ кусочно-непрерывные функции $\gamma_\nu(t) \geq 0$, $\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) = 1$.

Найдется такой скаляр $\lambda_0 \geq 0$ и такая вектор-функция $\lambda(\tau) = (\lambda_1(\tau), \dots, \lambda_m(\tau))$, не равная нулю одновременно с λ_0 на отрезке $[0, T]$ и равная нулю за его пределами, что для функционала

$$S = \lambda_0 \bar{I} + \sum_{j=1}^m \int_0^T \lambda_j(\tau) \bar{J}_j(\tau) d\tau = \int_0^T R dt \quad (\text{П.149})$$

и его подынтегрального выражения

$$R = \lambda_0 R_0 + \sum_{j=1}^m R_j, \quad (\text{П.150})$$

$$R_0 = \sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) f_{01}(t, x(t), u^\nu(t), a) + \sum_l f_{02}(t, x(t), a) \delta(t - t_l),$$

$$R_j = \int_0^T \lambda_j(\tau) \left[\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) f_{j1}(t, x(t), u^\nu, a, \tau) + f_{j2}(t, x(t), a, \tau) \delta(\tau - t) \right] d\tau \quad (\text{П.151})$$

справедливы соотношения

$$\frac{\delta S}{\delta a} \delta a \leq 0, \quad (\text{П.152})$$

$$\frac{\delta R}{\delta x} = 0, \quad (\text{П.153})$$

$$u^\nu(t) = \arg \max_{u \in V_u} R(x, \lambda, a^*, u). \quad (\text{П.154})$$

Для доказательства воспользуемся следующей теоремой из [58]:

Пусть $y^*(t)$ — решение задачи о максимуме функционала

$$I = \int_0^T f_0(y, t) dt \quad (\text{П.155})$$

при условиях

$$J_j(\tau) = \int_0^T f_j(y, t, \tau) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \tau \in [0, T], \quad (\text{П.156})$$

в которой f непрерывна и непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов. Тогда найдется такой не равный нулю вектор

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1(\tau), \dots, \lambda_m(\tau)), \quad \lambda_0 \geq 0,$$

что для $y = y^*$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} \right) \delta y \leq 0, \quad (\text{П.157})$$

где

$$R = R_0 + \sum_{j=1}^m R_j = \lambda_0 f_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^T \lambda_j(\tau) f_j(y, t, \tau) d\tau;$$

δy — допустимая вариация $y(t)$ по условию $y \in V_y(t)$.

Задача (П.144), (П.145) для распределения $P(u, t)$ в форме (П.148) имеет форму (П.155), (П.156), причем

$$\bar{R} = R + R_{m+1} = \lambda_0 R_0 + \sum_j R_j^{\text{CB}} - R_{m+1},$$

где R_0 и R_j^{CB} имеют форму (П.151), а слагаемое R_{m+1} соответствует условию

$$\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) - 1 = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{П.158})$$

которое может быть записано в форме (П.156) как

$$J_{m+1}(\tau) = \int_0^T \left(\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) - 1 \right) \delta(t - \tau) d\tau = 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Так что

$$R_{m+1} = \int_0^T \lambda_{m+1}(\tau) \left(\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) - 1 \right) \delta(t - \tau) d\tau = \lambda_{m+1}(t) \left(\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) - 1 \right).$$

Условия (П.157) для переменных γ_ν

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \gamma_\nu} \delta \gamma_\nu \leq 0, \quad \gamma_\nu \geq 0$$

приводят к тому, что для базовых значений $u^\nu(t)$ (для них $\gamma_\nu(t) > 0$),

$$R(x, \lambda, a^*, u^\nu) = \lambda_{m+1}(t), \quad \nu = \overline{0, m},$$

а для $u \neq u^\nu(t)$ $\gamma_\nu(t) = 0$ и $\delta \gamma_\nu > 0$, а значит $R(x, \lambda, a^*, u) \leq \lambda_{m+1}(t)$, откуда следует условие максимума (П.154).

Условие (П.153) следует из (П.157) с учетом отсутствия ограничений на x , условия же (П.152) вытекают из того, что по отношению к вектору параметров a задача (П.144), (П.118) является задачей нелинейного программирования, а S — ее функцией Лагранжа.

Так как расширение (П.144), (П.145) эквивалентно задаче (П.142), (П.143), то в силу леммы 2 оптимальное решение этой последней ($u^*(t)$, $x^*(t), a$), если оно существует, удовлетворяет условиям оптимальности (П.152)–(П.154). Условие существования оптимального решения задачи (П.142), (П.143) в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$ предполагает, что $\gamma_0(t) = 1$, а остальные множители $\gamma_j(t)$ в (П.148) равны нулю.

Соотношения (П.152)–(П.154) позволяют получить условия в форме принципа максимума для задачи с произвольным сочетанием критерия оптимальности и ограничений разного типа. Для этого достаточно каждому типу критерия и каждому типу ограничений сопоставить слагаемые R_0 и R_j , обозначить через $u(t)$ (переменные первой группы в конкретной задаче) только те переменные, которые при приведении условий задачи к канонической форме оказались в любом из условий, куда они вошли в составе функций f_{j1} для $j = 0, \dots, m$ (т. е. оказались рандомизированными по отношению как к критерию оптимальности, так и к любому из ограничений задачи), записать функцию R согласно (П.150) и подставить ее в (П.152), (П.154).

В прикладных задачах могут встречаться разнообразные сочетания типов критериев оптимальности и условий, определяющих множество допустимых решений. Математическая модель объекта может уточняться в ходе решения, при этом изменяются не только параметры, но и структура ограничений. Нетрудно проследить, как изменение или добавление некоторого ограничения влияет на условия оптимальности решения, меняя одно из слагаемых функции R и, возможно, принадлежность переменных к первой группе.

Здесь мы приведем различные типы условий и критериев оптимальности в задачах со скалярным аргументом t и дадим вытекающее из теоремы П.2 правило получения соотношений, представляющих собой необходимые условия оптимальности этих задач.

Будем считать, что аргумент $t \in [0, \bar{t}]$. Составляющие, зависящие от t , называют *функциональными*. Наряду с ними искомое решение может содержать векторные составляющие, принимающие постоянные значения на всем интервале $(0, \bar{t})$, их называют *параметрическими*. Рассмотрим различные виды критериев оптимальности и связей, наложенных на искомые переменные.

П.4.2. Формы оптимизируемых функционалов

1. Комбинация интегральной и терминальной составляющих:

$$I = \int_0^{\bar{t}} f_0[a, y(t), t] dt + F_0[a, \bar{t}, y(\bar{t})] \rightarrow \sup. \quad (\text{П.159})$$

Здесь $y(t)$ — функциональные; a — параметрические составляющие решения. К числу параметрических составляющих может относиться и

продолжительность процесса \bar{t} . В частности, функции f_0 или F_0 , определяющие интегральную и терминальную составляющие критерия, могут быть равны нулю. В том случае, когда $F_0 = 0$, а $f_0 = -1$, критерий (П.159) примет форму

$$I = - \int_0^{\bar{t}} dt \rightarrow \sup \sim \bar{t} \rightarrow \inf. \quad (\text{П.160})$$

Задачи с критерием (П.160) называют *задачами максимального быстрого действия*.

2. Критерий, зависящий от параметров:

$$I = f_0(a) \rightarrow \sup, \quad (\text{П.161})$$

не включает функциональных составляющих. Однако если параметры a связаны с $y(t)$ условиями, определяющими множество допустимых решений, то задача является вариационной.

3. Критерий минимаксного типа:

$$I = \min_{t \in [0, \bar{t}]} f_0[a, y(t), t] \rightarrow \sup. \quad (\text{П.162})$$

Критерии одного типа можно привести к другому типу, введя в условия задачи вспомогательные переменные и добавив те или иные ограничения. Например, терминальное слагаемое в (П.159) в том случае, когда функция F_0 при $t = \bar{t}$ непрерывна по t , может быть записано в интегральной форме как

$$F_0(a, \bar{t}, y(\bar{t})) = \int_0^{\bar{t}} F_0(a, t, y(t)) \delta(t - \bar{t}) dt.$$

П.4.3. Формы условий, определяющих множество допустимых решений

Условия, определяющие множество допустимых решений, могут иметь как форму равенств, так и форму неравенств. Ниже для краткости будем записывать только равенства.

1. Интегральные ограничения:

$$J = \int_0^{\bar{t}} f(a, y(t), t) dt - c(a) = 0. \quad (\text{П.163})$$

2. Конечные соотношения на интервале $(0, \bar{t})$:

$$f(a, y(t), t) = 0, \quad \forall t \in (0, \bar{t}). \quad (\text{П.164})$$

3. Конечные соотношения для фиксированного значения $t = t_0$, принадлежащего интервалу $[0, \bar{t}]$:

$$f(a, y(t_0), t_0) = 0. \quad (\text{П.165})$$

В качестве значения t_0 , для которого справедливо условие (П.165), часто выступают значения $t_0 = \bar{t}$ или $t_0 = 0$.

Если конечные соотношения удается разрешить относительно одной из составляющих решения, то размерность задачи можно снизить. Однако далеко не всегда это удается сделать.

4. Обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = f[a, x(t), u(t), t], \quad (\text{П.166})$$

или в интегральной форме:

$$x(t) = \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0. \quad (\text{П.167})$$

Здесь функциональные составляющие решения по-разному входят в условия (П.166), (П.167). Составляющие $u(t)$ — управления, входят только в правые части уравнений, составляющие $x(t)$ входят как в правые части, так и в левые части уравнений (П.166), (П.167).

5. Интегральное уравнение:

$$x(t) = \int_0^{\bar{t}} f[a, x(\tau), u(\tau), \tau, t] d\tau. \quad (\text{П.168})$$

6. Интегральные преобразования:

$$y(t, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} f(u(\tau), \tau, t) d\tau.$$

Вводя добавочные переменные, можно самые различные ограничения записать в стандартной форме. Приведем несколько примеров таких преобразований. Дифференциальное уравнение может быть задано в неявной форме $F(\dot{x}, a, t, x, u) = 0$. Для приведения к стандартной форме введем переменные

$$\dot{x} = v(t) \quad (\text{П.169})$$

и перепишем уравнение в форме конечного соотношения

$$F(v, a, t, x, u) = 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \quad (\text{П.170})$$

Условия (П.169), (П.170) соответствуют неявной форме дифференциального уравнения.

Переменные, вводимые для того, чтобы преобразовать форму связи, называют *искусственно вводимыми переменными*. Они входят только в те условия задачи, которые преобразуются с их использованием.

Условие

$$\min_{t \in [0, \bar{t}]} f(a, t, y(t)) = 0 \quad (\text{П.171})$$

эквивалентно двум требованиям, одно из которых имеет форму неравенства

$$f(a, t, y(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

а второе — форму равенства, содержащего искомый параметр $t_0 \in [0, \bar{t}]$,

$$f(a, t_0, y(t_0)) = 0.$$

Интегральную составляющую критерия оптимальности в (П.159) можно привести к терминальной форме, введя связь в форме дифференциального уравнения

$$\dot{x}_0 = f_0(a, t, y(t))$$

с начальным условием $x_0(0) = 0$. Критерий оптимальности примет при этом вид

$$I = x_0(\bar{t}) + F_0[a, \bar{t}, y(\bar{t})] \rightarrow \sup.$$

Аналогично критерий (П.162) минимаксного типа может быть переписан как требование максимума некоторого искусственно введенного параметра b с дополнительным ограничением

$$I = b \rightarrow \sup / f_0[a, y(t), t] - b \geq 0. \quad (\text{П.172})$$

П.4.4. Необходимые условия оптимальности вариационных задач в классе скользящих режимов

Теорема П.2 позволяет получить условия оптимальности в форме принципа максимума для задач с критерием и связями разного типа. Причем эти условия удобно получить как следствие из более общего утверждения — условий оптимальности вариационных задач в классе скользящих режимов.

Т а б л и ц а П.1.

**Критерии оптимальности и соответствующие им слагаемые
в функции Лагранжа**

№	Критерий оптимальности $I \rightarrow \max$	Слагаемое R_0	Тип слагаемого
1	$\int_0^T f_0(y(t), a, t) dt$	$\lambda_0 f_0(y(t), a, t)$	R_{0I}
2	$F_0(y(t_0), a, t_0)$	$\lambda_0 F_0(y(t), a, t) \delta(t - t_0)$	R_{0II}
3	$\min_{t \in [0, T]} f_0(y(t), a, t) = z$	$\frac{\lambda_0 z}{T} + \lambda(t)[z - f_0(y(t), a, t)]$ $\lambda(t) \leq 0,$ $\lambda(t)[z^* - f_0(y(t), a, t)] = 0.$	R_{0II}

Пр и м е ч а н и е. Если $I = \sum_k a_k I_k$, то $R_0 = \sum_k a_k R_{0k}$.

Т а б л и ц а П.2.

**Основные типы связей и соответствующие им слагаемые
в функции Лагранжа**

№	Вид связи	Слагаемое R_{CB}	Тип слагаемого
1	$\int_0^T f(y(t), a, t) dt = 0$	$\lambda f(y(t), a, t)$ при $t \in (0, T)$ 0 при $t \notin (0, T)$	R_I
2	$f(y(t), a, t) = 0,$ $\forall t \in (0, T)$	$\lambda(t) f(y(t), a, t),$ при $t \in (0, T)$ 0 при $t \notin (0, T)$	R_{II}
3	$f(y(t_0), a, t_0) = 0$	$\lambda f(y(t), a, t) \delta(t - t_0)$	R_{II}
4	$\dot{x} = f(x(t), u(t), a, t),$ при $t \in [0, T]$	$\psi(t) f(x(t), u(t), a, t),$ $\psi(t) = 0$ при $t \notin [0, T]$ $\dot{\psi}(t)x(t) + (x(0)/T)\psi(0)$	R_I R_{II}
5	$x(t) = \int_0^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0$	$f(x, u, t) \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$ $\lambda(t) = 0$ при $t \notin [0, T]$ $\lambda(t)(x(t) - x(0))$	R_I R_{II}
6	$x(t) = \int_0^T f(x(\tau), u(\tau), a, \tau, t) d\tau$	$\int_0^T \lambda(\tau) f(x(t), u(t), a, \tau, t) d\tau$ $-\lambda(t)x(t)$	R_I R_{II}

Для формулировки условий оптимальности нам потребуются вспомогательные конструкции, собранные в табл. П.1 и П.2.

В этих таблицах некоторым наиболее часто используемым видам целевого функционала и условиям типа равенств сопоставлены слагаемые R_0 и R в функции Лагранжа R . Будем рассматривать задачи, в которых требуется обеспечить максимум критерия оптимальности, совпадающего с одним из критериев табл. П.1 при произвольном сочетании условий, определяющих множество допустимых значений переменных, из табл. П.2. Переменные задачи разобьем на две группы по следующему правилу:

К первой группе относим те функциональные составляющие, которые в соответствии с табл. П.1, П.2 вошли в слагаемые R_{0I} и R_I как для критерия оптимальности I , так и для всех условий, имеющихся в задаче. Все остальные функциональные составляющие решения отнесем ко второй группе. Обозначим переменные первой группы через $u(t)$, а второй — через $x(t)$. Для справедливости сформулированных ниже условий оптимальности потребуем, чтобы при каждом t значения $u(t)$ принадлежали замкнутой ограниченной области V пространства R^n , а функции f_0 и f были определены на прямом произведении множеств допустимых значений своих аргументов, непрерывны по совокупности этих аргументов и непрерывно дифференцируемы по x, t . Функционал I ограничен на множестве допустимых решений.

В выражении (П.174) выделим слагаемые, содержащие $u(t)$, и сумму этих слагаемых обозначим через H . Оставшиеся слагаемые обозначим через N . Так что $R = N(x, \lambda, t) + H(x, u, \lambda, t)$. Наряду с этой функцией запишем функцию Лагранжа для расширенной задачи:

$$\tilde{R} = N(x, \lambda, t) + \sum_{k=0}^m \gamma_k(t) H(x, u_k, \lambda, t),$$

где m — общее число условий задачи, содержащих $u(t)$, ($m \leq n$), а $\gamma_k(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_k(t) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^m \gamma_k(t) = 1. \quad (\text{П.173})$$

Оптимальным решением задачи в классе скользящих режимов назовем такие функции $\gamma^*(t)$ с составляющими $\gamma_k^*(t)$; $u^*(t)$ с составляющими $u_k^*(t)$ и $x^*(t)$, что $u_k^* \in V$, $\gamma_k^*(t)$ удовлетворяет (П.173), а вектор-функция $x^*(t)$ может быть для любого $t \in [0, \bar{t}]$ сколь угодно точно приближена последовательностью $\{x_r(t)\}$ допустимых по уравнениям

связей решений задачи, если на этом решении функционал I достигает своей верхней грани. Мерой близости функций $x^*(t)$ и $x_r(t)$ служит максимальное по t значение модуля их разности.

Переменных первой группы в задаче может и не оказаться, если, например, все переменные связаны друг с другом конечными соотношениями (строка 3, табл. П.2).

Для каждой конкретной задачи, используя табл. П.1 и П.2, можно составить функцию R , как

$$R = \lambda_0 R_0 + \sum_{\nu=1}^n R_\nu. \quad (\text{П.174})$$

Необходимые условия оптимальности в классе скользящих режимов дает следующее

У т в е р ж д е н и е (следствие из теоремы П.2): Если $\gamma_k^*(t)$, $u_k^*(t)$ ($k = \overline{0, m}$), $x^*(t)$ — решение задачи о максимуме функционала I из табл. П.1, на множестве допустимых решений, определяемом условиями из табл. П.2, в классе скользящих режимов, то существует не равная тождественно нулю при $t \in [0, \bar{t}]$ и обращающаяся в нуль за пределами этого отрезка вектор-функция $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t))$; $\lambda_0 = (0; 1)$ такая, что при почти всех t , удовлетворяющих условиям $t \in [0, \bar{t}]$, и $\gamma_k(t) \geq 0$, достигает абсолютного максимума по u в точках u_k^* функция

$$H(x^*, u_k^*, \lambda, t) = \max_{u \in V} H(x^*, u, \lambda, t), \quad (\text{П.175})$$

а расширенная функция \tilde{R} стационарна по x :

$$\frac{\partial N(x, \lambda, t)}{\partial x} = - \sum_{k=0}^m \gamma_k(t) \frac{\partial H(x, u_k, \lambda, t)}{\partial x}. \quad (\text{П.176})$$

Если в задаче имеется вектор параметров a , то в условия (П.175), (П.176) входит его оптимальное значение a^* , для которого выполнены условия локальной неумлучшаемости функционала L по a :

$$\frac{\partial L}{\partial a} \delta a = \left[\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\bar{t}} \left[N(x, \lambda, a, t) + \sum_{k=0}^m \gamma_k(t) H(x, u_k, a, \lambda, t) \right] dt \right] \delta a \leq 0, \quad (\text{П.177})$$

где δa — вариация, допустимая по ограничениям на вектор a .

От всех функций, определяющих условия задачи, требуется непрерывность по u и непрерывная дифференцируемость по x и a . Для существования максимума в (П.175) достаточно, чтобы множество V было замкнуто и ограничено, а функция H ограничена по u .

В том случае, когда в рассматриваемой задаче максимум функции H по u для почти всех t достигается в одной точке ($\gamma_0(t) \equiv 1$), задача имеет решение $u^*(t)$ в форме кусочно-непрерывной функции, а из соотношений (П.175), (П.177) следуют У с л о в и я о п т и м а л ь н о с т и:

$$H(x^*, u^*, t, \lambda, a^*) = \max_{u \in V} H(x^*, u, t, \lambda, a^*), \quad (\text{П.178})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (\text{П.179})$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} \delta a = \left[\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\bar{t}} [N(x, \lambda, a, t) + H(x, u, a, \lambda, t)] dt \right] \delta a \leq 0, . \quad (\text{П.180})$$

Из этих соотношений вытекает изложенная ниже процедура получения условий оптимальности для задач со скалярным аргументом.

П.4.5. Алгоритм получения условий оптимальности в форме принципа максимума

Для получения необходимых условий оптимальности в задаче с функционалом конкретного вида и конкретным набором связей можно воспользоваться условиями (П.152)–(П.154), записав функционал в форме (П.144), а каждое из условий в форме (П.145). Практически удобно наиболее распространенные типы критериев и ограничений переписать в канонической форме и сопоставить им слагаемые R_0 и R в функции Лагранжа

$$R_0 = \lambda_0 f_0(y(t), a, t), \quad (\text{П.181})$$

$$R = \int_{V_\tau} \lambda(\tau) f(y(t), a, t, \tau) d\tau. \quad (\text{П.182})$$

Приведем несколько примеров такого перехода, показывающих, как получены выражения R_0 и $R_{\text{СВ}}$ в табл. П.1 и П.2.

1. Условия в форме дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau), \tau), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{П.183})$$

в интегральной форме

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x(t), u(t), t) dt.$$

Последнее выражение с использованием δ -функции и функции Хевисайда $h(t)$ можно переписать в виде (П.145):

$$J(\tau) = \int_0^{\bar{t}} \left[x(t)\delta(\tau - t) - f(x(t), u(t), t)h(\tau - t) - \frac{x_0}{\bar{t}} \right] dt = 0, \quad \tau \in [0, \bar{t}].$$

Функция $h(\tau - t)$ равна нулю при $t > \tau$ и равна единице при $t \leq \tau$. Согласно (П.182) слагаемое R в обобщенной функции Лагранжа для дифференциального уравнения (П.183) имеет вид

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) \left[x(t)\delta(\tau - t) - f(x, u, t)(h(\tau - t) - \frac{x_0}{\bar{t}}) \right] d\tau = \\ &= x(t)\lambda(t) - f(x, u, t) \int_t^{\bar{t}} \lambda(\tau) d\tau - \frac{x_0}{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Введем функцию $\psi(t)$ такую, что

$$\dot{\psi}(t) = \lambda(t), \quad \psi(\bar{t}) = 0,$$

$$\int_t^{\bar{t}} \lambda(\tau) d\tau = -\psi(t), \quad \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) d\tau = -\psi(0).$$

Используя функцию ψ , получим

$$R = \dot{\psi}x + \psi f(x, u, t) + \psi(0)\frac{x_0}{\bar{t}}. \quad (\text{П.184})$$

В том случае, когда интервал \bar{t} и x_0 фиксированы, последнее слагаемое в этом выражении не зависит от переменных задачи и не влияет на условия оптимальности.

При записи уравнения (П.183) в стандартной форме (П.145) было использовано равенство

$$x(\tau) = \int_0^{\bar{t}} x(t)\delta(\tau - t)dt \quad \tau \in [0, \bar{t}],$$

которое справедливо лишь в случае, когда $x(t)$ — непрерывная функция. Слагаемое, содержащее δ -функцию в выражении для R , называют *сингулярным*, а слагаемое, не содержащее δ -функцию, — *регулярным*. Составляющие решения, вошедшие в регулярное слагаемое выражения

для R , являются *составляющими первой группы* по отношению к связи в форме дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения (П.183) к первой группе относятся составляющие $u(t)$.

2. Условия в форме конечных соотношений

$$f(y(\tau), \tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, \bar{t}] \quad (\text{П.185})$$

в канонической форме (П.145) могут быть записаны, как

$$J(\tau) = \int_0^{\bar{t}} f(y(t), t) \delta(\tau - t) dt = 0 \quad \forall \tau \in [0, \bar{t}],$$

функция f непрерывна по совокупности своих аргументов, а y непрерывна по t . Для связей (П.185) составляющих решения, которые можно было бы отнести к первой группе, нет. Слагаемое R , соответствующее условию (П.185), имеет форму

$$R = \int_0^{\bar{t}} f(y(t), t) \lambda(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \lambda(t) f(y(t), t),$$

причем регулярное слагаемое R_1 отсутствует.

В табл. П.1 и П.2 некоторым наиболее распространенным типам критериев оптимальности и связей сопоставлены слагаемые R_0 , $R_{\text{СВ}}$ в обобщенной функции Лагранжа R , полученные так же, как это сделано в приведенных примерах. При этом выделены слагаемые $R_{\text{СВ}I}$ и $R_{\text{СВ}II}$, соответствующие регулярной и сингулярной составляющей. Использование этих таблиц делает ненужной процедуру приведения конкретной задачи к канонической форме (П.145).

Алгоритм получения условий оптимальности в форме принципа максимума для вариационных задач со скалярным аргументом сводится к следующим операциям:

1. Для конкретного критерия оптимальности и конкретных условий по табл. П.1 и П.2 выписывают слагаемые R_0 и R и их сумму $R = R_0 + \sum R_\nu$.

2. Выделяют переменные первой группы, вектор которых обозначают через u , по правилу: *к переменным первой группы относят те составляющие решения $y(t)$, которые ни в слагаемом R_0 и ни в одном из слагаемых R_ν , соответствующих связям, не оказались в R_{0II} и R_{II} .*

3. Оставшиеся функциональные составляющие решения обозначают через $x(t)$ и относят к переменным второй группы.

4. Для полученной функции R и разбиения переменных выписывают соотношения (П.152)–(П.154), убедившись, что условия непрерывности по u и гладкости по x (см. выше) выполнены.

Если в задаче не оказалось переменных первой группы, это означает, что, используя функционал Лагранжа, для этой задачи ни по одной из составляющих искомого решения нельзя получить условия оптимальности в форме принципа максимума (П.154).

Принцип максимума Понтрягина. В качестве одного из примеров алгоритма получения необходимых условий оптимальности рассмотрим получение таких условий для задачи

$$I = \int_0^{\bar{t}} f_0(x, u, t) dt + F_0(x(\bar{t})) \rightarrow \max, \quad (\text{П.186})$$

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(x, u, t), \quad x_\nu(0) = x_{\nu 0}, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad u \in V,$$

все связи в которой имеют форму дифференциальных уравнений.

Выпишем функцию

$$R = \lambda_0 R_0 + \sum_{\nu=1}^m R_\nu = \lambda_0 f_0 + \sum_{\nu=1}^m (\psi_\nu f_\nu + \dot{\psi}_\nu x_\nu) + \lambda_0 F_0(x) \delta(t - \bar{t}) \quad (\text{П.187})$$

и отметим, что переменные u (управления) ни в R_0 , ни в R не оказались в составе R_{0II} и R_{II} . Следовательно, управления в данной задаче относятся к переменным первой группы. Параметры в задаче (П.186) отсутствуют, и условия оптимальности в предположении существования решения в классе для почти всех t дифференцируемых $x(t)$ и непрерывных $u(t)$ примут форму

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in V} R(\lambda, u, x^*), \quad \frac{\partial R}{\partial x_\nu} = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (\text{П.188})$$

что с учетом вида функции (П.187) эквивалентно условиям

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in V} H(\psi, u, x^*),$$

$$\dot{\psi}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_\nu} \delta(t - \bar{t}), \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (\text{П.189})$$

Здесь функция H (функция Гамильтона) представляет собой сумму тех слагаемых в R , которые зависят от u :

$$H = \lambda_0 f_0 + \sum_{\nu=1}^m \psi_\nu f_\nu.$$

Если учесть, что за пределами отрезка $[0, \bar{t}]$ $\psi = 0$, то из (П.189) следует, что $\psi_\nu(t)$ в точке \bar{t} имеет разрыв и при $t = \bar{t}$:

$$\psi_\nu(\bar{t}) = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_\nu}, \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (\text{П.190})$$

Условия (П.189), (П.190), которые нужно решать совместно с дифференциальными уравнениями задачи (П.186) и краевыми условиями для x , составляют расчетные соотношения принципа максимума Понтрягина.

Использование алгоритмического подхода к получению необходимых условий оптимальности позволяет проследить, как изменятся эти условия при добавлении к задаче тех или иных ограничений. Пусть, например, к задаче (П.186) добавлено условие, связывающее друг с другом значения фазовых переменных x в момент \bar{t} :

$$F(x(\bar{t})) = 0. \quad (\text{П.191})$$

В функцию R войдет слагаемое

$$\tilde{R} = \tilde{\lambda} F(x) \delta(t - \bar{t}),$$

для $t < \bar{t}$ условия оптимальности (П.189) не изменятся, при $t = \bar{t}$ значение функций ψ_ν будет теперь равно

$$\psi_\nu(\bar{t}) = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_\nu} + \tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}, \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (\text{П.192})$$

Дополнительная переменная $\tilde{\lambda}$ определяется условием (П.191).

Функция F_0 в функционале задачи (П.186) и функция F в условии (П.191) могут зависеть и от управлений. В этом случае при $t < \bar{t}$ условия принципа максимума не изменятся. Управление же $u(\bar{t})$ должно удовлетворять слабым условиям локальной неумлучшаемости

$$\frac{\partial}{\partial u} [\lambda_0 F_0 + \tilde{\lambda} F] \delta u \leq 0,$$

так как при $t = \bar{t}$ оно оказалось переменной второй группы.

Условия оптимальности Бутковского для задачи со связями в форме интегральных уравнений [9]. Для задачи

$$I = \int_0^{\bar{t}} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \max_{u \in V_u} \int_0^{\bar{t}} f(x(\tau), u(\tau), t, \tau) dt - x(t) = 0 \quad (\text{П.193})$$

обобщенная функция Лагранжа, составленная с использованием табл. П.1 и П.2, имеет вид

$$R = \lambda_0 f_0(x, u, t) + \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x(\tau), u(\tau), \tau, t) d\tau - \lambda(t)x(t);$$

к переменным первой группы относятся $u(t)$. Условия оптимальности примут форму

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_0 f_0 + \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x, u, \tau, t) d\tau \right], \quad (\text{П.194})$$

$$u^* = \arg \max_{u \in V} \left[\lambda_0 f_0 + \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x, u, \tau, t) d\tau \right].$$

В частности, в задаче управления линейным объектом с импульсной переходной функцией $k(t)$ связь между управляющим воздействием и переменной состояния x имеет форму уравнения свертки

$$\int_0^{\bar{t}} u(\tau) k(t - \tau) d\tau - x(t) = 0.$$

Условия оптимальности (П.194) переписутся как

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}, \quad u^* = \arg \max_{u \in V} \left[\lambda_0 f_0 + u(t) \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) k(\tau - t) d\tau \right]. \quad (\text{П.195})$$

Задачи с условиями в форме неравенств и критерием типа максимина. Некоторые из условий задачи могут иметь форму неравенств. Для получения условий оптимальности по изложенной выше схеме эти неравенства могут быть переписаны в форме равенств с добавлением новых искусственно вводимых переменных. Например, неравенство

$$f(y(t), t) \geq 0 \quad (\text{П.196})$$

с добавлением неотрицательной переменной $z(t)$ может быть переписано как равенство

$$f(y(t), t) - z(t) = 0.$$

Соответствующее слагаемое в функции R имеет вид

$$R_\nu = \lambda(t)f(y, t) - \lambda(t)z(t).$$

Переменная $z(t)$ относится ко второй группе и не входит в другие слагаемые функции R , кроме R_ν , поэтому условия локальной неувлучшаемости R по z с учетом того, что допустимая вариация $\delta z \geq 0$, приводят к неравенствам

$$\frac{\partial R}{\partial z} \delta z \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial R_\nu}{\partial z} \geq 0 \Rightarrow \lambda(t) \geq 0.$$

При этом $\lambda(t) = 0$, когда $z(t) > 0$, т. е. когда $f(y, t) > 0$ и $\lambda(t) > 0$, когда $f(y, t) = 0$. Мы имеем здесь полный аналог условий дополняющий нежесткости в математическом программировании.

Тот же прием позволяет получить условия оптимальности и для критерия типа максимина

$$I = \min_{t \in [0, \bar{t}]} f_0(y(t), t) \rightarrow \max, \quad (\text{П.197})$$

который может быть с введением добавочного параметра a , не зависящего от t , переписан, как

$$a \rightarrow \max \quad (\text{П.198})$$

с добавлением к условиям задачи неравенства, справедливого при любом значении $t \in [0, \bar{t}]$,

$$f_0(y(t), t) - a \geq 0. \quad (\text{П.199})$$

Критерию (П.198) и условию (П.199) в функции R соответствует слагаемое

$$\tilde{R} = \lambda_0 \frac{a}{\bar{t}} + \lambda(t)f_0 - \lambda(t)a,$$

в котором, как и для неравенства (П.196), $\lambda(t) \geq 0$, а

$$\lambda(t)[f_0(t, y^*(t)) - a^*] = 0.$$

Здесь $\lambda_0 = 1$ для невырожденного и $\lambda_0 = 0$ для вырожденного решения. Поскольку параметр a не входит ни в какие другие слагаемые R , кроме

\tilde{R} , и на этот параметр не наложено ограничений, постольку из условия стационарности по a функционала Лагранжа L следует

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} dt = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \int_0^{\bar{t}} \lambda(t) dt. \quad (\text{П.200})$$

Аналогично рассмотренным примерам могут быть получены условия оптимальности решения для самых разных задач, в том числе для всех тех, что приведены в разделе П.1. Табл. П.1 и П.2 можно пополнять для других критериев и ограничений, получая R_0 и R_j через запись условий в канонической форме.

Список литературы

1. *Амелькин С.А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А.М., Юмагужина В.Н.* Предельные возможности тепломеханических систем. Процессы с одним источником // Изв. РАН. Энергетика. 1998. №2. С. 48–58.
2. *Амелькин С.А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А.М., Юмагужина В.Н.* Предельные возможности тепломеханических систем с несколькими источниками // Изв. РАН. Энергетика. 1999. №1. С. 31–40.
3. *Амелькин С.А., Мартинаш К., Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах // АиТ. 2002. №4. С. 3–25.
4. *Бабиевский В.Н., Морозов М.Н., Цирлин А.М.* Осредненные и вероятностные задачи оптимизации в системах управления // АиТ. 1980. №7. С. 68–76.
5. *Беляева Н.П., Цирлин А.М.* Оптимальное управление покупкой и продажей ценных бумаг // АиТ. 1998. №4. С. 135–143.
6. *Беме Б., Софиева Ю.Н., Цирлин А.М.* О характере установившегося режима для некоторых типов управляемых объектов // АиТ. 1979. №2. С. 7–12.
7. *Бошнякович Ф.* Техническая термодинамика. М.: ГЭИ, 1955.
8. *Бродянский В.М., Фратшке В., Михалек К.* Эксергетический метод и его приложения. М.: Энергоатомиздат, 1988.
9. *Бутковский А.Г.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.

10. *Варга Дж.* Оптимальное управление функциональными и дифференциальными уравнениями. М.: Наука, 1977.
11. *Волкова М.Е., Майков Г.П., Цирлин А.М.* Задачи оптимального управления с непрерывными и дискретно изменяющимися параметрами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. №2. С.36–42.
12. *Гирсанов И.В.* Лекции по математической теории экстремальных задач // Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2003.
13. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
14. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
15. *Гурман В.И.* Принцип расширения в экстремальных задачах. М.: Физматлит, 1997.
16. *Гухман А.А.* Об основаниях термодинамики. М.: Энергоатомиздат, 1986.
17. *Долан Э.Д.* Микроэкономика. Санкт-Петербург.: Оркестр, 1994.
18. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. ВМ и МФ. 1965, № 3..
19. *Зубов Д.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* К расчету числа теоретических тарелок и высоты колонны ректификации // Химическая промышленность. 2002. №12.
20. *Карно С.* Размышление о движущей силе огня и о машинах ... // Второе начало термодинамики. М.-Л.: Гостехиздат, 1934.
21. *Конюховский П.В.* Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. Санкт-Петербург.: Питер, 2001.
22. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1973.
23. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

24. *Кузнецов А.Г., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Оптимальное управление в термодинамических системах с конечной емкостью источников // *АиТ.* 1985. №6. С. 56–62.
25. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
26. *Линецкий С.Б., Роднянский И.Е., Цирлин А.М.* Оптимальные циклы холодильных машин и тепловых насосов // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.* 1985. №6. С. 42–49.
27. *Линецкий С.Б., Цирлин А.М.* Оценка термодинамического совершенства и оптимизация теплообменников // *Теплоэнергетика.* 1988. №10. С. 87–91.
28. *Майков В.П., Балунев Ф.И.* Ректификация атермальных смесей. М.: МИХМ, 1979.
29. *Майков Г.П., Цирлин А.М.* Условия оптимальности при различных формах записи процесса управления // *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.* 1973. №5. С. 63–71.
30. *Малых В.Л.* Термодинамические ограничения и эффективность изотермических процессов разделения // *Деп. ВИНТИ. №2020-В87.* 1987. С. 12.
31. *Мартыновский В.С.* Циклы, схемы и характеристики теплотрансформаторов. М.: Энергия, 1979.
32. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. М.: Химия, 2000.
33. *Миронова В.А., Соболев В.А., Цирлин А.М.* Оптимальное управление потоками сырья и готовой продукции путем выбора цен // *АиТ.* 1998. №2.
34. *Миронова В.А., Цирлин А.М.* Предельные возможности и оптимальная организация регенеративного теплообмена // *Теплоэнергетика.* 1987. №2. С. 32–36.

35. *Миронова В.А., Цирлин А.М., Самарин Ю.Б.* Термодинамический анализ процессов разделения газовых смесей // Химическая промышленность. 1988. №8. С. 486–490.
36. *Молочников Б.Э., Цирлин А.М.* Термодинамически-оптимальные профили концентраций в задачах изотермического необратимого массопереноса // ТОХТ. 1990. №2. С. 191–197.
37. *Орлов В.А., Розоноэр Л.И.* Оценки эффективности управляемых термодинамических процессов на основе уравнений баланса энергии вещества и энтропии. X Всесоюз. совещ. по проблемам управления. М.: Наука, 1986.
38. *Орлов В.А., Руденко А.В.* Оптимальное управление в задачах о предельных возможностях необратимых термодинамических процессов (обзор) // АиТ. 1985. № 5. С. 7–41.
39. *Петров А.А.* Математическая модель рыночного равновесия. М.: Наука, 1966.
40. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
41. *Попков Ю.С.* Теория макросистем, равновесные модели. М.: УРСС, 1999.
42. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
43. *Поспелов И.Г.* Динамическое описание коллективного поведения на рынке // Мат. моделирование: Методы описания и исследования сложных систем // Ред. Самарский А.А., Моисеев Н.Н., Петров А.А. М.: Наука, 1989.
44. *Пригожин И., Дефей Р.* Химическая термодинамика. М.: Наука, 1966.
45. *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // АиТ. 1959. № 10, 11, 12.

46. *Розоноэр Л.И.* Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход) // I-III. *АиТ.* 1973. №5. С. 115–132; №6. С. 65–79; №8. С. 82–103.
47. *Розоноэр Л.И., Малишевский А.В.* Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой // Всесоюз. совещание по проблемам управления. Рефераты докладов. 1971, С. 207–209.
48. *Розоноэр Л.И., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Использование методов оптимизации для оценки предельных возможностей абсорбционно-десорбционных циклов // *ТОХТ.* 1984. №3. С. 362–370.
49. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Об оптимальных термодинамических процессах // VIII Всес. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. 1980. С. 75–77.
50. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами // *АиТ.* 1983. №1. С. 70–79; №2. С. 88–101; №3. С. 50–64.
51. *Руденко А.В., Орлов В.Н.* Предельные возможности необратимых термодинамических процессов (Обзор) // *Теплоэнергетика.* 1984. №9. С. 68–70.
52. *Софиев М.А.* К расчету активной тепловой изоляции // *ТОХТ.* 1988. №3. С. 150–157.
53. *Софиева Ю.Н., Цирлин А.М.* Условная оптимизация, методы и задачи. М.: УРСС, 2003.
54. *Трофимов В.В.* Геометрический анализ динамики больших экономических систем // *Нелинейная экономическая динамика. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика.* 2000. С. 174–198.
55. *Хейвуд Р.* Термодинамика равновесных процессов. М.: Мир, 1983.
56. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами // *Доклады РАН.* 2000. №2. С. 177–179.
57. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике // *АиТ.* 2001. №5.

58. *Цирлин А.М.* Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. №2. С. 143–151.
59. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности периодических установившихся режимов технологических процессов // ТОХТ. 1974. №2. С. 43–50.
60. *Цирлин А.М.* Оптимальные циклы и циклические режимы. М.: Энергоатомиздат, 1985.
61. *Цирлин А.М.* Оптимальное управление процессами необратимого тепло- и массопереноса // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. №2. С. 81–86.
62. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности решения усредненных задач математического программирования // Доклады РАН. 1992. Т.323. №1.
63. *Цирлин А.М.* Термодинамика экономических систем // Труды ИПС РАН. 1994. Т.1. С.64–78.
64. *Цирлин А.М.* Оптимальное управление обменом ресурсами в экономических системах // АиТ. 1995. №3. С.116–126.
65. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. М.: Физматлит, 1997.
66. *Цирлин А.М.* Второй закон термодинамики и предельные возможности тепловых машин // Журн. технической физики. 1999. Т.69. №1. С. 140–142.
67. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и микроэкономике. М.: Физматлит, 2003. 416 с.
68. *Цирлин А.М.* Необратимые оценки предельных возможностей термодинамических и микроэкономических систем. М.: Наука, 2003. 348 с.
69. *Цирлин А.М.* Оптимизация деятельности посредника в условиях задержки поставок и платежей // АиТ. №3. 2000.

70. Цирлин А.М. Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами // ДАН. 2000. Т.374. №2. С. 174–177.
71. Цирлин А.М. Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике // АиТ. 2001. №5. С. 159–170.
72. Цирлин А.М., Амелькин С.А., Амелькина М.А. Модель производственной фирмы в открытой микроэкономической системе // Мат. моделирование. 2002. Т.14. №4. С. 21–34.
73. Цирлин А.М., Беляева Н.А. Предельные возможности процессов теплообмена // Теплоэнергетика. 1998. №9. С. 53–55.
74. Цирлин А.М., Казаков В.А. Область реализуемости термодинамических систем заданной производительности // Изв. РАН. Энергетика. 2001. №5. С. 44–51.
75. Цирлин А.М., Миронова В.А., Амелькин С.А. Процессы минимальной диссипации // ТОХТ. 1997. Т.31. №6. С. 649–658.
76. Цирлин А.М., Миронова В.А., Крылов Ю.М. Сегрегированные процессы в химической технологии. М.: Химия, 1978.
77. Цирлин А.М., Титова И.В. Необратимые оценки минимальной работы для процессов разделения // ТОХТ. 2004. №3.
78. Шамбодаль П. Развитие и приложение понятия энтропии. М.: Наука, 1967.
79. Amelkin S.A., Tsirlin A.M. Optimal Choice of Prices and Flows in a Complex Open Industrial System // Open Sys. & Information Dyn. 8: 169–181. 2001.
80. Andresen B., Berry R.S., Nitzan A., Salamon P. Thermodynamics in finite time: I. The step-Carnot cycle // Phys. Rev.A. 1977. V.15. №5. P. 2086–2093.
81. Andresen B., Berry R.S., Ondrechen M.J., Salamon P. Thermodynamics for processes in finite time // Acc. Chem. Res. 1984. V.17. №8. P. 266–271.

82. *Andresen B., Gordon J.M.* Optimal heating and cooling strategies for heat exchanges design // J. Appl. Phys. N1. 1992. P. 71–78.
83. *Andresen B., Rubin M.H., Berry R.S.* Availability for finite-time processes. General theory and a model // J. Phys. Chem. 1983. V.87. №15.
84. *Andresen B., Salamon P., Berry R.S.* Thermodynamics in finite time // Phys. Today. 1984. №62.
85. *Andresen B., Salamon P., Berry R.S.* Thermodynamics in finite time: extremals for imperfect heat engines // J. Chem. Phys. 1977. V.66. №4. P. 1571–1577.
86. *Andresen B.* Finite-time thermodynamics. Copenhagen, 1983.
87. *Ayres R.U., Martinas K. A.* Non-equilibrium evolutionary economic theory // P. Burley, J. Foster (eds.) Economics and thermodynamics: new perspectives on economic analysis // Boston. Kluwer Academic Publishers. 1994. P. 73–98.
88. *Ayres R.U., Martinas K.* Waste Potential Entropy: The Ultimate Ecotoxic? // Economie Appliquee, V.XLVIII. №2. 1995. P. 95–120.
89. *Ayres R.U., Nair I.* Thermodynamics and Economics // Physics Today. 1984. V.37. P. 313–325.
90. *Barrere M.* Le role du temps dans l'optimisation des cycles thermodynamiques // Revue generale de thermique, 1980. №228. P. 995–1006.
91. *Bejan A.* Entropy generation minimization: the new thermodynamics of finite size devices and finite time process // J. Appl. Phys. 1996. №79. P. 1191–1218.
92. *Bejan A.* Entropy generation through heat and fluid flow. N.Y.: Wiley, 1994.
93. *Bejan A.* Solutions Manual for Entropy Generation through Heat and Fluid Flow. N.Y.: Wiley, 1984.

94. *Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamic constraints in economic analysis // Self- organization and dissipative structures: Applications in the physical and social sciences. Ed. By W.C. Schieve and P.M. Allen. University of Texas Press. Austin. Texas. 1982.
95. *Berry R.S., Kasakov V.A., Sieniutycz S., Szwast Z. and Tsirlin A.M.* Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes // Wiley. Chichester, 1999.
96. *Brody A., Martinas K., Sajo K.* Essay on Macroeconomics // Acta Oeconomica. 1985. V.35. №.3–4. P. 337–343.
97. *Brody A.* The Use of Thermodynamic Models in Economics // In P. Burley, J. Foster (eds.) Economics and Thermodynamics: new perspectives on economic analysis // Kluwer Academic Publishers. Boston, 1994.
98. *Bryant J.* A Thermodynamic approach to economics // Energy Economics. 1982. V.4. P. 36–50.
99. *Chen J., Yan Z., Lin G. and Andresen B.* On the Curzon-Ahlborn efficiency and its connection with the efficiencies of real heat engines // Energy Convers. Mgnt. 2000. №42. P. 173–181.
100. *Chen L., Wu C. and Sun F.* Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems // J. Non-Equilib. Thermodyn. 1999. №24. P. 327–359.
101. *Chiappori P.A., Perez-Castilio D., Verdier F.* Spatial Competition in the banking system, localization, cross-subsides and regulation of interest rates// European Economy Review. 1995. V.39. P. 889–919.
102. *Curzon F.L., Ahlborn B.* Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. Amer.J. Physics. 1975. V.43. P. 22–24.
103. *De Vos A.* Endoreversible thermoeconomics // Energy Conversion Management. V.36. №1. 1995. P. 1–5.
104. *De Vos A.* Endoreversible Economics // Energy Conversion nagement. 1997. V.38. №4. P. 311–317.

105. *Dyke C.* From entropy to economy a thorny path // *Advances in Human Ecology*. 1992. V.1. P. 149–176.
106. *Fromovitz St.* Non – Linear programming with randomisation // *Management Sci. ser.A*. 1965. V.11. №9.
107. *Georgescu-Roegen N.* *The Entropy Law and the Economic Process*. Cambridge: Harvard University Press. 1971.
108. *Hoffman K.H., Watowich S.J. and Berry R.S.* // *J. Appl. Phys.* 1985. №58. P. 21–25.
109. *Holyst J. A., Urbanowicz K.* Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // *Phys.A.* 2000. V.287. №3–4. P. 587–598.
110. *Hurwicz L., Richter M.* An Integrability Condition with Applications to Utility Theory and Thermodynamics // *J.of Mathematical Economics*. 1979. V.6. P. 7–14.
111. *Ibrahim O.M., Klein S.A., Mitchell J.W.* Effects of Irreversibility and Economics on the Performance of a Heat Engine // *J. of Solar Energy Engineering*. 1992. V.141. P. 267–271.
112. *Klein M.A.* Theory of the banking firm // *J. of Money. Credit and Banking*. 1971. V.3. P. 205–218.
113. *Krane R.J.* A second law analysis of the optimum design and operation of thermal energy storage systems // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1987. V.30. №1.
114. *Landsberg P.T., Left H.S.* Thermodynamic cycles with nearly universal maximum-work efficiencies // *J. Phys. A: Math. Gen.* 22.
115. *Lee W.Y., Kim S.S.* // *Energy*. 1992. №17. P. 275–279.
116. *Leff H.S.* Thermal efficiency at maximum work output: New results for old heat engines // *Am.J.Phys.* 1987. №55. P. 602–610.
117. *Lichnerowicz M., Lichnerowicz A.* *Economie et Thermodynamique: Un Modele de change economique* // *Econ. et Societes*. 1971. V.5.

118. *Lichnerowicz M.* Un modele dechange economique (economie et thermodynamique) // Annales de l'Institut Henri Poincare. 1970. №2.
119. *Long N.V., Siebert H.* Lay-off Restraints, Employment Subsidies, and the Demand of Labor // Optimal Control Theory and Economic Analysis. V.2. / G. Feichtinger. Amsterdam, 1985.
120. *Lukacs J.* Once more about economic entropy // Acta Oeconomica. 1989. V.41. №1–2. P. 181–192.
121. *Mantegna R.N., Palagyi Z., Stanley H.E.* Applications of statistical mechanics to finance // Phys.A. 1999. V.274. P. 216–221.
122. *Martinas K.* About Irreversibility in Microeconomics // Reserch Report (AHFT-89-1). Department of Low Temperature Phisics. Roland Eotvos University. Budapest, 1989.
123. *Martinas K.* Irreversible microeconomics // Complex Systems in Natural and Economic Sciences. Matrafured, 1995.
124. *Martinas K.* Irreversible Microeconomics, Intern // Onsager-Workshop. Leiden. 2000. P. 147–152.
125. *Mironova V., Tsirlin A., Kazakov V., Berry R.S.* Finite-time thermodynamics: Exergy and optimization of time-constrained processes // J.Appl.Phys. 1994. №76. P. 629.
126. *Mirowski P.* More Heat than Light. Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics. Historical perspectives on modern economics // Cambridge University Press. Cambridge, 1989.
127. *Monti M.* Deposit, credit and interest rate determination under alternative bankobjectives // Methematics methods of finance. Amsterdam: North-Holland, 1972.
128. *Mozurkewicz M. and Berry R.S.* Optimization of a heat engine based on a dissipative system // J. Appl. Phys. 1983. V.54. №7. P. 3651–3661.
129. *Naka Y., Terashita M.* An intermediate heating and cooling method for a distillation column // J. of Chem. Eng. of Japan. 1980. V.11. №2.

130. *Nicolis G, Prigogine I.* Self-organization in nonequilibrium systems // Jon Wiley&Sons, 1977.
131. *Novikov I.I.* The efficiency of atomic power stations // At. Energ. 1957 3(11).; English translation in J. Nuclear Energy 1958. №7. P. 25–128.
132. *Ondrechen M.J., Andresen B., Mozurkewich M., Berry R.S.* Maximum work from a finite reservoir by sequential Carnot cycles // Am. J. Phys. 1981. №49. P. 681.
133. *Ondrechen M.J., Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamics in finite time: A chemically driven engine // J. Chem. Phys. 1980. V. 72, №9. P. 5118–5124.
134. *Ondrechen M.J., Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamics in finite time: Processes with temperature-dependent chemical reactions // J. Chem. Phys. 1980. V.73. №11. P. 5838–5843.
135. *Orlov V.N., Berry R.S.* Power output from an irreversible heat engine with a nonuniform working fluid // Phys.Rev. 1990. A. №12. P. 7230.
136. *Orlov V.N.* Analytical solutions in optimal control of cyclic heat transfer processes // Sys. Scien. 1989. V.15. №1.
137. *Proops J.L.R.* Organization and dissipation in economic systems // J. of Social and Biological Structures. 1983. V.6. P. 353–366.
138. *Rubin M.H.* Optimal configuration of a class of irreversible heat engines. c. I, II // Phys. Rev. A. 1970. V.19. №3. P. 1272.
139. *Salamon P., Nitzan A.* Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle // J.Chem. Phys. 1981. V.74. №6. P. 3546–3560.
140. *Salamon P., Band Y.B., Kafri O.* Maximum power from a cycling working fluid // J. Appl.Phys. 1982. 53(1).
141. *Salamon P., Hoffman K.H., Schubert S., Berry R.S. and Andresen B.* What conditions make minimum entropy production equivalent to maximum power production? // J. Non-Equilibri. Thermodyn. 2001. V.26.

142. *Salamon P., Nitzan A., Andresen B. and Berry R.S.* Minimum entropy production and the optimization of heat engines // *Phys. Rev. A.* 1980. 21. P. 2115–2129.
143. *Salamon P., Nulton J.D., Siragusa G., Andresen T.R. and Limon A.* Principles of control thermodynamics // *Energy, The Int. J.* 2001. V.26.
144. *Salamon P.* Physics versus engineering of finite-time thermodynamic models and optimizations // *Thermodynamic Optimization of Complex Energy Systems*, Eds: A. Bejan and E. Mamut, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999. P. 421–424.
145. *Salop S.* Monopolistic competition with outside goods // *Bell Journal of Economics.* 1979. V.10. P. 141–156.
146. *Samuelson P.A.* Extension of the LeChatelier Principle // *Econometrica.* 1960. V.28. №2.
147. *Samuelson P.A.* Maximum Principle in Analytical Economics // *The Am. Econ. Rev.* 1972. V.B2. P. 249–262.
148. *Shambadal P.* *Les Centrales Nuclearis.* Paris: Armand Colin, 1957.
149. *Sieniutycz S., Berry R.S.* Thermal Mass and Thermal Inertia in Fluids – A Comparison of Hypotheses // *Open system & information dynamics.* V4. №1. 1977.
150. *Sieniutycz S.* *Finite-Time Thermodynamics and Thermoeconomics* // Sieniutycz S. and Salamon P. N-Y: Taylor & Francis, 1990.
151. *Spirkl W., Ries H.* Optimal finite-time endoreversible processes // *Physical rev. E.* 1995. V.52. №4. P. 3455–3459.
152. *Tatarinow A.W., Tsirlin A.M.* Dynamics of Heat Transfer // *Thermal Engineering.* 1993. V2. P. 38–41.
153. *Tolman R.C., Fine P.C.* On the Irreversible Production of Entropy // *Rev. of modern Phys.* 1948. V.20. №1. P. 51–77.

154. *Tsirlin A., Kazakov V.* Irreversibility factor and limiting performance of financial systems (thermodynamic approach) // *Advances in Mathematics Research*. Nova Science. 2003. V.5. P. 47–77.
155. *Tsirlin A.M., Amelkin S.A.* Dissipation and Conditions of Equilibrium for an Open Microeconomic System // *Open Sys. & Information Dyn.* 8: 2001. P. 157–168.
156. *Tsirlin A.M., Andreev D.A., Mogutov V.A., Kazakov V.A.* Optimal thermostating // *Int. J. Thermodynamics*. 2003. V.6. №2. P. 79–84.
157. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: I. Thermodynamics // *Open Sys. & Information Dyn.* 2001. 8: P. 315–328.
158. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: II. Microeconomics // *Open Sys. & Information Dyn.* 2001. №8. P. 329–347.
159. *Tsirlin A.M., Kazakov V.* Maximal work problem in finite-time thermodynamics // *Phys. Rev. E*. 2000. №1.
160. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A., Berry R.S.* Finite-time thermodynamics: limiting performance of rectification and minimal entropy production in mass transfer // *J. of Phys. Chem.* 1994. №98. P. 3330–3336.
161. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A.* Extremal principles and limiting possibilities of open thermodynamic and economic systems // *Variational and extremum principles in macroscopic systems* / S. Sieniutycz, H. Farkas (eds.). Kluwer Academic Publishers, 2004.
162. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A.* Irreversible work of separation and heat-driven separation // *J. Phys. Chem. B* 2004. V.108. P. 6035–6042.
163. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A.* Realizability Areas for Thermodynamic Systems with Given Productivity // *J. Non-Equilibri. Thermodyn.* 2002. V.27. P. 91–103.
164. *Tsirlin A.M., Mironova V.A., Amelkin S.A., Kazakov V.A.* Finite-time thermodynamics: Conditions of minimal dissipation for thermodynamic process with given rate // *Phys. Rev. E*. 1998. V.58. №1.

165. *Tsirlin A.M., Sofiev M.A., Kazakov V.* Finite-time thermodynamics. Active potentiostatting // *J. Phys. D.* 1998. V.31. P. 2264–2268.
166. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A., Kolinko N.A.* A Minimal Dissipation Type-Based Classification in Irreversible Thermodynamics and Microeconomics // *Europ. Phys. J. B.* 2003. V.35. P. 565–570.
167. *Ville J.* The Existence Conditions of a Total Utility Function // *Rev. Economics Studies.* V.19. 1951. P. 123–128.
168. *Von Neumann J.* A Model of General Economic Equilibrium // *Review of Economic Studies.* 1945. V.3. P. 1–9.
169. *Yan Z., Chen J.* // *Int. J. Energy Environment Economics.* 1992. №2. P. 63.

Оглавление

Предисловие	3
1 Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах	7
1.1. Особенности математических моделей и задач оптимального управления для макросистем	7
1.2. Задачи оптимизации в макросистемах	13
1.3. Общая схема решения оптимизационных задач, процессы минимальной диссипации	16
2 Математические модели термодинамических систем	19
2.1. Математическое описание термодинамических систем	19
2.2. Термодинамические балансы	42
2.3. Производство энтропии для различных видов взаимодействия	46
2.4. Эффективность термодинамических систем и производство энтропии	53
3 Моделирование процессов с сегрегацией	63
3.1. Сегрегированные системы без обмена через среду	64
3.2. Сегрегированные системы с обменом через среду	70
3.3. Динамика и необратимость процессов в открытой сегрегированной системе	79
3.4. Структурный подход к расчету плотностей распределения возраста и времени пребывания агрегатов	83
3.5. Использование преобразования Лапласа для расчета ПРВП	92
4 Термодинамические процессы минимальной диссипации	101
4.1. Условия минимальной диссипации	103
4.2. Условия минимальной диссипации для конкретных процессов	113

4.3.	Стационарное состояние открытых термодинамических систем	125
4.4.	Классификация кинетики обмена по типу условий минимальной диссипации	127
5	Теплообменные и тепломеханические системы	133
5.1.	Системы теплообмена	134
5.2.	Предельные возможности теплообменных систем с заданной гидродинамикой потоков	141
5.3.	Задача о максимальной работе в замкнутой системе	146
5.4.	Преобразование теплоты в работу в системах с двумя резервуарами	169
5.5.	Предельные возможности циклов тепловых и холодильных машин	176
5.6.	Тепломеханические системы с источниками конечной емкости	185
5.7.	Системы с нестационарными резервуарами	198
5.8.	Прямое и обратное преобразование тепловой энергии в работу в стационарной неоднородной системе	204
5.9.	Задача оптимального потенциалостативирования в сплошной среде	223
6	Оптимальные процессы в массообменных системах	229
6.1.	Термодинамические балансы процессов разделения	230
6.2.	Необратимая работа разделения	235
6.3.	Идеальная рабочая линия и область реализуемости бинарной ректификации	248
6.4.	Термический абсорбционно-десорбционный цикл	266
6.5.	Извлечение работы в массообменных системах. Диффузионные машины	277
6.6.	Области реализуемости химических реакторов	290
7	Макросистемные модели экономики	299
7.1.	Модели экономических агентов и второй закон микроэкономики	300
7.2.	Микроэкономические балансы	312
7.3.	Ресурсообмен в изолированных системах	317
7.4.	Ресурсообмен вблизи состояния равновесия	326

7.5.	Заклучение	328
8	Оптимальные процессы в экономических системах	329
8.1.	Прибыльность и условия минимальной диссипации ресурсообмена	330
8.2.	Классификация законов ресурсообмена по типу процессов минимальной диссипации	339
8.3.	Извлечение базисного ресурса при отсутствии дискриминации цен	342
8.4.	Посредник между двумя подсистемами	347
8.5.	Обмен с нестационарными рынками	357
8.6.	Извлечение прибыли в открытой стационарной экономической системе	366
9	Экстремальные задачи для экономических систем	371
9.1.	Экономические системы, включающие производственную фирму	371
9.2.	Банки как финансовые посредники в открытой экономической системе	381
9.3.	Выбор генерирующих мощностей в сети энергетических рынков	392
	Приложение. Экстремальные задачи	403
П.1.	Обзор экстремальных задач и условий оптимальности решения	404
П.2.	Эквивалентные преобразования и расширение экстремальных задач	417
П.3.	Задача нелинейного программирования	422
П.4.	Принцип максимума для вариационных задач со скалярным аргументом	458
	Список литературы	479

Mathematical models and optimal processes in macrosystems

Contents

Introduction	3
1 Mathematical models and optimal processes in macro- systems	7
1.1. Major features of the mathematical models and optimal control problems for macrosystems	7
1.2. Optimization problems macrosystems	13
1.3. General methodology for solving optimization problems, minimal dissipation processes	16
2 Mathematical models of thermodynamic systems	19
2.1. Mathematical description of thermodynamic systems	19
2.2. Thermodynamic balances	42
2.3. Entropy production for various types of interaction	46
2.4. Efficiency of thermodynamic systems and entropy production	53
3 Modelling of processes with segregation	63
3.1. Segregated systems without exchange through the environment	64
3.2. Segregated systems with exchange through the environment	70
3.3. Dynamics and processes' irreversibility in an open segregated system	79
3.4. Structural approach to calculation of probability density distri- bution for age and working time for aggregates	83
3.5. Calculation of PRVP using Laplace transform	92
4 Thermodynamic processes of minimal dissipation	101
4.1. Conditions of minimal dissipation	103
4.2. Conditions of minimal dissipation for particular processes . .	113

4.3.	Stationary state of an open thermodynamic system	125
4.4.	Kinetics classification by the type of minimal dissipation processes	127
5	Heat exchange and heat-mechanical systems	133
5.1.	Heat exchange systems	134
5.2.	Limiting possibilities of heat-exchange systems with given hydrodynamics of flows	141
5.3.	Maximal work problem in closed system	146
5.4.	Transformation of heat into work in systems with two reservoirs	169
5.5.	Limiting possibilities of cycles for heat engines and reservoirs	176
5.6.	Heat-mechanical systems with finite capacity sources	185
5.7.	Systems with non-stationary reservoirs	198
5.8.	Direct and inverse transformation of heat energy into work in a stationary nonhomogeneous system	204
5.9.	Optimal thermostating problem for continuous media	223
6	Optimal processes in mass exchange systems	229
6.1.	Thermodynamic balances for separation processes	230
6.2.	Irreversible work of separation	235
6.3.	Ideal operating line and realizability area for binary distillation	248
6.4.	Thermal absorption- desorption cycle	266
6.5.	Work extraction in mass transfer systems. Diffusion engines	277
6.6.	Realizability areas for chemical reactors	290
7	Macrosystem models in economics	299
7.1.	Models of economic agents and the second law of microeconomics	300
7.2.	Microeconomic balances	312
7.3.	Resource exchange in isolated systems	317
7.4.	Resource exchange near equilibrium	326
7.5.	Conclusion	328
8	Optimal processes in economic systems	329
8.1.	Profitability and conditions of minimal dissipation for resource exchange	330

8.2. Classification of the resource exchange laws by the type of minimal dissipation processes	339
8.3. Extraction of the basic resource without price discrimination	342
8.4. Intermediary between two subsystems	347
8.5. Exchange with non-stationary markets	357
8.6. Profit extraction in an open stationary economic system . .	366
9 Extremal problems for economic systems	371
9.1. Economic systems that include production firm	371
9.2. Banks as financial intermediaries in an open economic system	381
9.3. Choice of generating powers in network of energy markets . .	392
Appendix. Extremal problems	403
II.1. Review of extremal problems and conditions of optimality .	404
II.2. Equivalent transformations and relaxation of extremal problems	417
II.3. Nonlinear programming problem	422
II.4. Maximum principle for variational problems with scalar argument	458
Bibliography	479

Научное издание

Цирлин Анатолий Михайлович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В МАКРОСИСТЕМАХ**

*Утверждено к печати
Ученым советом
Института программных систем
Российской академии наук*

Зав. редакцией *Н.А. Степанова*
Редактор *С.С. Матвеев*
Художник *Ю.И. Духовская*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

Подписано к печати 02.02.2006
Формат 70x100 1/16
Печать офсетная
Усл.печ. л. 41,0. Усл.кр.-отт. 41,0. Уч.-изд.л. 30,0
Тираж 400 экз. Тип.зак. 4 знака

Издательство «Наука»
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП «Типография «Наука»
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12