А. М. Цирлин

Методы оптимизации в необратимой термодинамике и микроэкономике

2003 г.

УДК 62.50
ББК 32.00
Ц.68

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 02-01-14007

Ц и р л и н А.М. **Методы оптимизации в необратимой термодинамике и микроэкономике.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 416 с. — ISBN 5-9221-0265-6.

С применением методов оптимизации и оптимального управления исследованы предельные возможности тепловых, химических, массообменных процессов при заданной средней интенсивности целевого потока. Аналогия между термодинамическими и микроэкономическими системами позволяет перенести методологию термодинамики при конечном времени на микроэкономику, введя количественные показатели необратимости процессов и, в частности, экономический аналог диссипации. Рассмотрен класс процессов минимальной диссипации, определяющих через уравнения термодинамических и микроэкономических балансов область достижимых режимов.

Для научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся методами оптимизации и их приложениями в термодинамике и экономике.

Табл. 9. Ил. 92. Библиогр. 183 назв.

Научное издание

ЦИРЛИН Анатолий Михайлович

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В НЕОБРАТИМОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ И МИКРОЭКОНОМИКЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *М.А. Журавлевой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.07.02.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 26. Уч.-изд.л. 28,6. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской
типографии № 6 Министерства РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
109088 Москва, Южнопортовая ул., 24

ISBN 5-9221-0265-6

МОЕМУ УЧИТЕЛЮ
Е.Г. ДУДНИКОВУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Широкий класс систем физико-химической, экономической, социальной природы состоит из большого числа элементов, не управляемых непосредственно. Так, термодинамические системы состоят из большого числа молекул, экономические — из многих индивидуальных участников экономического взаимодействия, то же относится к процессам миграции населения, процессам страхования, налогообложения и т. п.

Во всех этих системах управлением является изменение условий общих для всех составляющих систему элементов (изменение температур, давлений, химических потенциалов в термодинамике, цен и налогов в экономике, таможенных сборов, страховых выплат, банковских ставок и пр.) Управления, изменяющие условия функционирования всей совокупности элементов, составляющих систему, называют *макроуправлениями*, а подобные системы *макроуправляемыми*. Параметры состояния, характеризующие систему на макроуровне, и скорости их изменения зависят от управляющих воздействий.

Одному и тому же макросостоянию могут соответствовать различные микросостояния. Невозможность управления на микроуровне приводит к тому, что при контакте макроуправляемых систем происходит самопроизвольный обмен между составляющими их элементами, в результате которого состояния подсистем изменяются таким образом, что неопределенность микросостояния системы возрастает. Для того чтобы вернуть каждую из подсистем к прежнему состоянию, нужно приложить управляющее воздействие, что сопровождается затратой того или иного ресурса, полученного от окружающей среды, т.е. необратимостью процессов. Необратимость является важной особенностью макроуправляемых систем. От нее зависит область их реализуемых режимов, оптимальные процессы перехода из одного состояния в другое, равновесие в сложных системах и пр. Их свойства наряду с законами сохранения материи и энергии характеризуются балансовыми уравнениями, учитывающими изменения показателя необратимости.

Как правило, наилучшие показатели систем, связанные с полнотой использования тех или иных видов ресурсов, соответствуют обратимым процессам. Однако сравнение с найденными так показателями мало что дает, так как процессы, близкие к обратимым, протекают, как правило, сколь угодно медленно, производительность систем сколь угодно мала. Гораздо важнее найти предельно достижимые значения эффективности системы при заданной интенсивности целевого потока или предельно возможную интенсивность такого потока. Получение таких оценок — одна из основных тем этой книги. Нами рассмотрены два вида макроуправляемых систем — термодинамические и микроэкономические. При этом подчеркнута общность постановок и близость методов решения целого ряда оптимизационных задач.

Математические методы оптимизации и оптимального управления в задачах как термодинамики, так и микроэкономики имеют свои особенности. Связано это, во-первых, с тем, что в каждой из этих областей важную роль играют циклические процессы, при которых скорость изменения состояния всей или части системы в среднем за цикл равна нулю. Во-вторых, математические модели часто приводят к уравнениям ляпуновского типа, для которых скорость изменения состояния не зависит от самого состояния. Эти особенности позволяют в ряде случаев свести задачи оптимального управления к усредненным задачам нелинейного программирования, определяют метод получения и характер оптимального решения. Последняя глава книги посвящена методам оптимизации и оптимального управления, применяемым для решения задач о предельных возможностях макроуправляемых систем.

Ряд результатов, вошедших в книгу, был получен в соавторстве с Л.И. Розоноэром, который подчеркивал важность общего подхода к макроуправляемым системам, ввел применительно к ним термин «макродинамика» и в работах которого наиболее последовательно прослеживается аналогия между равновесными термодинамическими и экономическими системами. Данная книга продолжает эту аналогию для необратимых и управляемых процессов. Весьма полезными для автора были дискуссии с К. Мартинаш, много сделавшей для исследования необратимости в микроэкономике.

Исследования по термодинамике при конечном времени проводились автором совместно с коллегами Р.С. Берри и П. Саламоном (США), Б. Андрессеном (Дания), К-Х. Хоффманом (Германия), С. Синютичем (Польша) и учениками В.А. Мироновой, С.А. Амелькиным, В.А. Казаковым. Они были поддержаны РФФИ, фондами Сороса и INTAS. Всем упомянутым лицам и организациям автор выражает свою глубокую признательность.

ВВЕДЕНИЕ

Фактор необратимости в термодинамических и экономических системах. Необратимость является одним из самых характерных свойств процессов, происходящих в природе, экономике и обществе. При растворении сахара в стакане воды окружающая среда не претерпевает никаких изменений, но для приведения системы сахар–вода в первоначальное состояние, требуется затратить существенную энергию на разделение этих веществ. Аналогично, когда два экономических агента обмениваются друг с другом разными видами ресурсов в процессе бартера, отдавая друг другу «что-нибудь ненужное», для приведения этой системы в исходное состояние потребуется закупить у каждого из них полученный им при бартере ресурс по одной цене и продать его второму экономическому агенту — по другой, более низкой. Таким образом, придется затратить капитал.

Процесс в системе A, переводящий ее из состояния A_0 в состояние A_1, называют *необратимым*, если эту систему невозможно перевести из A_1 в A_0 без каких-либо изменений в окружающей среде.

И процесс растворения, и процесс бартерного обмена являются необратимыми.

С наибольшей полнотой необратимые процессы изучены в термодинамике, где введена количественная характеристика необратимости — прирост энтропии системы и показано, что для замкнутой системы, состоящей из нескольких подсистем, состояние равновесия характеризуется максимумом суммарной энтропии, а каждый процесс необратимого взаимодействия подсистем приводит к возрастанию энтропии.

Для открытых термодинамических систем, состоящих из нескольких взаимодействующих подсистем и обменивающихся с внешней средой потоками сырья и энергии, известен результат Пригожина [20, 53]: *в стационарном состоянии открытой термодинамической системы устанавливается такое распределение интенсивных переменных (температур, давлений, химических потенциалов и др.) между подсистемами, для которого производство энтропии минимально.* При этом предполагается, что интенсивность потоков между подсистемами достаточно мала, так что они линейно зависят от движущих сил, определяемых различием интенсивных переменных.

Широкое применение получил метод анализа систем, основанный на понятии работоспособной энергии — эксергии (той доле энергии, которая потенциально может быть превращена в механическую работу). Эксергетический подход позволяет сопоставить различные виды энергии (тепловую, химическую, электрическую и др.) и оценить термодинамическое совершенство систем через потери эксергии [4]. Чем больше необратимость процесса, тем больше потери эксергии, так что эти потери, как и прирост энтропии, могут служить количественной мерой необратимости.

Учет необратимости экономических процессов не менее важен, чем термодинамических, тем более, что аналогия между обратимой термодинамикой и экономикой прослеживается давно и оказывается достаточно полной [55, 61, 140, 141]. Однако подобная аналогия для необратимой микроэкономики последовательно не проведена, несмотря на значительное число работ, появившихся в последние годы [85, 145, 146].

Некоторые примеры. Рассмотрим на качественном уровне примеры, демонстрирующие близость задач, возникающих в макроуправляемых системах различной природы.

1. *Процесс непосредственного теплового контакта двух тел.* При контакте друг с другом двух тел, изолированных от внешней среды и имеющих различные начальные температуры T_1 и T_2, через достаточно большое время их температуры выравниваются до некоторой средней температуры. Чтобы вернуть систему к прежнему состоянию, нужно охладить одно из тел и нагреть второе, использовав в первом случае холодильную установку, а во втором — тепловой насос. При этом должна быть затрачена некоторая работа A, а значит, изменится состояние окружения. Таким образом, процесс непосредственного теплового контакта необратим. Чем меньше время τ, отпущенное на то, чтобы вернуть систему в исходное состояние, тем больше потребуется работы. Предел $A(\tau)$ при τ, стремящемся к бесконечности, обозначим через A^0.

2. *Тепловой контакт двух тел через идеальную тепловую машину.* Пусть в той же системе имеется идеальная тепловая машина (в ней нет потерь на трение, она получает тепло от горячего тела при температуре газа в цилиндре, сколь угодно близкой к температуре нагревателя, и отдает тепло при температуре газа, близкой к температуре холодного тела). Продолжительность процесса не ограничена, и машина будет извлекать работу до тех пор, пока температуры тел не выравняются. При этом общая температура двух тел окажется ниже, чем при непосредственном контакте, а полученной работы при использовании для этого идеальных теплового насоса и холодильной машины как раз хватит для того, чтобы вернуть систему в исходное состояние, если на это отпущено неограниченное время. Так что при неограниченной продолжительности процесс контакта через посредника — идеальную тепловую машину — оказывается обратимым.

Если продолжительность процесса ограничена, то он будет необратимым и в системе с посредником, хотя для возврата системы и понадобится меньше энергии, чем при непосредственном контакте. Задачи о том, как провести процессы, чтобы при ограниченном времени потери, связанные с необратимостью, были минимальны, каково значение этих «неизбежных» потерь, как они зависят от кинетики теплопереноса, — типовые задачи для «термодинамики при конечном времени» или, как ее иногда называют, «оптимизационной термодинамики».

3. *Непосредственный контакт двух экономических агентов (ЭА).* Под экономическим агентом понимают *совокупность потребителей или производителей того или иного ресурса*; он характеризуется оценкой ресурса p — минимальной ценой, по которой потребитель готов продавать ресурс. Если цена ниже, чем оценка, то ЭА готов ресурс покупать. Оценка ресурса зависит от его запаса N и уменьшается с ростом запаса. При прямом контакте двух ЭА тот, у которого оценка выше, покупает ресурс у ЭА с более низкой оценкой до тех пор, пока в результате перераспределения ресурса оценки не выравняются на некотором значении промежуточном между начальными значениями у каждого из ЭА.

Для того чтобы вернуть систему в первоначальное состояние, нужно закупить ресурс у того ЭА, у которого она снизилась в результате обмена, и продать тому, у которого она повысилась. При этом закупать ресурс придется по цене выше установившейся, а продавать — по цене ниже установившейся, что потребует затрат капитала в количестве A. Состояние окружения изменится, значит, процесс непосредственного контакта двух ЭА необратим. Чем меньше времени τ отпущено на возврат системы к начальному состоянию, тем больше денег потебуется на приведение системы в исходное состояние. Предел $A(\tau)$ при τ, стремящемся к бесконечности, обозначим через A^0.

4. *Контакт экономических агентов через посредника.* Пусть в той же системе имеется посредник, закупающий ресурс у ЭА с низкой оценкой и продающий его ЭА, у которого оценка выше. Если продолжительность процесса не ограничена и посредник стремится извлечь от перепродажи ресурса максимально возможный капитал, то он будет торговать по ценам сколь угодно близким к оценкам. При этом он извлекает капитал в количестве A^0, вложив который может вернуть систему в исходное состояние. Таким образом, процесс контакта ЭА через посредника обратим. Общая для двух ЭА оценка ресурса, к которой придет система с посредником, будет выше, чем в системе без посредника.

Если продолжительность процесса извлечения капитала или возврата системы в исходное состояние ограничена, то посреднику для возврата системы в исходное состояние не хватит извлеченного капитала, и процесс оказывается необратимым. Как проводить процессы закупок–продаж, чтобы потери капитала, связанные с необратимостью, оказались минимальны, какова величина этих «неизбежных» потерь, как они зависят от функций спроса и предложения ЭА — типовые задачи необратимой оптимизационной микроэкономики.

Эти примеры рассмотрены очень бегло, чтобы продемонстрировать близость оптимизационных задач (извлечению работы соответствует извлечение капитала, температурам — оценки ресурсов, тепловой машине — посредническая фирма, наконец, потери связаны с необратимостью и растут с уменьшением продолжительности процессов). В книге эти и подобные им задачи точно сформулированы, а их решения получены на количественном уровне.

Здесь прослеживается аналогия между необратимыми процессами в термодинамических и микроэкономических системах. Для этого было введено понятие *прибыльности* экономической системы — аналога *работоспособности* системы термодинамической.

Прибыльностью называют предельное значение капитала, которое может быть извлечено из экономической системы, а *работоспособностью* предельное значение работы, которое можно извлечь из системы термодинамической.

При наложении тех или иных ограничений на процесс работоспособность и прибыльность системы оказываются различными. Например, может быть ограничена продолжительность процесса, зафиксирована интенсивность некоторых потоков и пр. Каждое такое ограничение уменьшает возможности посредника. Величина потерь прибыльности является в необратимой микроэкономике количественной характеристикой необратимости, интенсивность этих потерь названа диссипацией капитала подобно тому, как диссипация энергии характеризует потери работоспособности термодинамической системы. Эксергия термодинамической системы равна ее работоспособности в условиях, когда система контактирует с окружающей средой параметры которой неизменны, и продолжительность процесса извлечения работы сколь угодно велика.

Виды систем и характеризующие их переменные. Система, обменивающаяся с окружением потоками вещества и энергии (термодинамика) или материальных и денежных ресурсов (экономика), называется *открытой*. Если система не обменивается с окружающей средой, ее называют *изолированной*. Наконец, система может быть изолирована по одним видам потоков и открыта по другим — *частично изолированная* или *замкнутая*.

Свойства системы могут быть *экстенсивными* и *интенсивными*, соответственно называют переменные, характеризующие эти свойства. При объединении двух идентичных систем в одну экстенсивные переменные удваиваются. Интенсивные же переменные с размерами системы не связаны и при объединении двух одинаковых систем не изменяются. Примерами экстенсивных переменных в термодинамике являются обьем, количество вещества, запас энергии. Интенсивные переменные — температура, давление, концентрация вещества. На наличие этих двух типов переменных в экономике указал Джон фон Нейман [182]. Экстенсивные переменные здесь — количества ресурса и капитала ЭА, а интенсивные — их оценки, о которых упоминалось в примерах 3 и 4.

Замкнутая система называется *внутренне равновесной*, если ее интенсивные переменные одинаковы для любого элемента системы. Система может быть равновесной не по всем, а лишь по части переменных, например, поле температур может быть однородным, а поле концентраций неоднородным.

В открытой системе состоянию равновесия соответствует неизменность интенсивных переменных во времени, но они могут меняться от подсистемы к подсистеме и их значения зависят от величины внешних потоков вещества, энергии, ресурсов и пр. Если система состоит из нескольких подсистем, в каждой из которых переменные одинаковы по обьему, и в каждый момент времени эти переменные связаны между собой так же, как и в равновесии, то такое допущение называют *гипотезой локального равновесия.*

В равновесии система характеризуется только частью переменных, их называют независимыми. Остальные переменные могут быть найдены через независимые и через *уравнения состояния.* Эти уравнения могут быть получены как обработкой экспериментальных наблюдений над макросистемой, так и на основе модельных представлений о свойствах составляющих систему элементов. Так, в статистической физике на основе модели поведения молекул идеального газа получают уравнение, связывающее температуру, давление и обьем макроскопической системы (уравнение Клайперона–Менделеева).

При контакте двух подсистем с отличными друг от друга значениями интенсивных переменных u_1 и u_2 возникают потоки вещества, энергии, ресурсов, величина которых зависит от различия u_1 и u_2. Эти потоки меняют значения экстенсивных переменных каждой из подсистем. Они равны нулю при равенстве векторов интенсивных переменных контактирующих подсистем.

Как видно из приведенных примеров, важную роль в макроуправляемых системах играют посредники. Интенсивные переменные посредника не определяются количеством имеющегося у него ресурса, они являются управляющими переменными и выбираются исходя из условий оптимальности поставленной перед посредником задачи. При этом посредник (рабочее тело тепловой машины) может поочердно контактировать с подсистемами, изменяя свое состояние во времени (цикл тепловой машины, челночная торговля и пр.) или контактировать одновременно с несколькими подсистемами, индивидуально выбирая значения интенсивных переменных для каждой из них (турбина, фирма, одновременно покупающая и продающая товары). В первом случае посредник циклически изменяет (регенерирует) свое состояние в каждом цикле. Такие системы называют *регенеративными.*

Имеют место следующие аналоги второго начала термодинамики и принципа Пригожина: *в состоянии равновесия замкнутой микроэкономической системы ее прибыльность достигает минимума, совместимого с наложенными на систему ограничениями.*

Так, в упомянутой выше системе, состоящей из двух подсистем с разными оценками ресурса, прибыльность E_0 равна максимуму капитала, который может извлечь посредник, покупая ресурс у подсистемы с более низкой и продавая его подсистеме с более высокой оценкой. Если в той же системе произошел бартерный обмен, она пришла к равновесию и оценки ресурса для каждой из подсистем оказались одинаковы, то никакого капитала посредник извлечь уже не может. Так что бартерный обмен необратим, а потери прибыльности равны E_0.

В состоянии равновесия открытой микроэкономической системы запасы и связанные с ними оценки ресурсов таковы, что диссипация капитала минимальна. При этом предполагают, что потоки ресурса между подсистемами пропорциональны разнице его оценок.

Диссипация капитала подобно диссипации энергии неотрицательна, а при тех или иных наложенных на систему ограничениях можно получить ее оценку снизу, распространив на экономические системы методы оценки предельных возможностей систем, использующие балансовые соотношения. При этом необходимо решить ряд задач оптимального управления, чтобы получить оценки для минимальной диссипации капитала в процессах ресурсообмена.

Термодинамика при конечном времени стала активно развиваться с начала 80-х годов усилиями математиков и инженеров из разных стран мира. Одной из первых задач была задача, связанная с упомянутой в примере 2 системой: «Как нужно изменять температуру рабочего тела и какое время цикла τ надо выбрать, чтобы получить максимальную мощность тепловой машины?» При этом считалось, что к горячему источнику подводится тепло и его температура, как и температура холодного источника, фиксированы.

Эта задача, и задача о максимальном КПД машины при заданной ее мощности, привели к выявлению класса процессов минимальной диссипации [83, 110, 164, 179], на которых и достигается их решение. Процессы минимальной диссипации в термодинамике при конечном времени играют ту же роль, что и обратимые процессы в равновесной термодинамике. Для решения задач термодинамики при конечном времени использовались методы оптимального управления и усредненной оптимизации [32, 87], адекватные особенностям математических моделей термодинамических систем.

Близость моделей и проблематики термодинамических и экономических систем делает возможным распостранение развитых для термодинамики методов на микроэкономику. При этом нужно ввести количественную меру необратимости процессов в микроэкономике, решить задачи о максимальном извлечении капитала за ограниченное время для систем самой разной структуры со стационарными и нестационарными характеристиками.

Схема исследования. Между изменениями количеств веществ, энергии, капитала и потоками, поступающими в систему, справедливы соотношения, вытекающие из уравнений материального, энергетического, финансового балансов. Однако эти балансы лишь утверждают неизменность некоторого фактора при обмене подсистем (сколько вещества покинуло одну систему, столько появится в других). Они никак не определяют направленность обмена. Между тем тепло переходит от тела с высокой к телу с низкой температурой, а ресурс — от ЭА с низкой к ЭА с высокой оценкой. Особенностью макроуправляемых систем является фактор необратимости, делающий невозможным протекание некоторых процессов, совместимых с балансовыми уравнениями. Именно он определяет направление процессов (по выражению И. Пригожина, «стрелу времени»). Так, в замкнутой системе примера 1 закон сохранения энергии разрешает любые обмены теплом в одинаковых количествах между телами. Однако этот переход совершается в определенном направлении, и при этом процесс необратим. В термодинамике уравнения балансов по веществу и энергии могут быть дополнены уравнением энтропийного баланса. Ниже показано, что и в микроэкономике может быть введена функция благосостояния, во многом подобная энтропии, и записано уравнение баланса по этой функции. Расширенную уравнением, характеризующим фактор необратимости, систему балансовых уравнений будем называть *макродинамическими балансами.* В уравнение, характеризующее изменение фактора необратимости, войдет неотрицательное слагаемое, связанное с возрастанием фактора необратимости (энтропии, благосостояния) за счет потоков между подсистемами. Это слагаемое зависит от интенсивности потоков, кинетических коэффициентов, конфигурации системы. Его обозначают обычно через σ и называют *диссипацией.* В термодинамике диссипация определяет потери работоспособной энергии, в микроэкономике — потери потенциально извлекаемого из системы капитала (прибыльности).

Общая схема исследования предельных возможностей макроуправляемых систем такова.

1. Для рассматриваемой системы записывают уравнения макродинамических балансов.

2. При тех или иных условиях, наложенных на систему (длительности процессов τ, средней интенсивности того или иного потока g и пр.), определяют минимальное значение средней за период процесса диссипации $\sigma_{\min}$ как функцию наложенных ограничений.

3. Условие в форме неравенства $\sigma \geq \sigma_{\min}(\tau, g, \ldots)$ вместе с уравнениями макродинамических балансов определяет область реализуемых режимов.

4. В области реализуемости решают задачу о предельном значении того или иного показателя функционирования системы. Обычно оптимум находится на границе области реализуемости, так что неравенство п. 3 является активным. В этой схеме п.2 требует решения задачи оптимального управления, решением которой является процесс минимальной диссипации.

Основные задачи выявления предельных возможностей макроуправляемых систем и расчета соответствующих оптимальных процессов таковы.

1. Расчет максимально возможного при тех или иных условиях значения интенсивности целевого потока (мощности тепловых машин, продуктового потока в процессах разделения, потока прибыли в экономических системах и т.п.).

2. Определение минимальных затрат при заданном значении целевого потока, если оно меньше того, которое найдено в п.1.

3. Исследование равновесия в замкнутых и открытых системах (равновесное распределение экстенсивных переменнных — вещества, энергии, капитала, ресурсов и пр. между подсистемами).

Первая часть книги (гл. 1–5) посвящена решению подобных задач для термодинамических, вторая (гл. 6–8) — для микроэкономических систем. В гл. 9 приведены сведения по математическим методам исследования и решения задач оптимизации и оптимального управления.

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ [1]

В этой главе приведены математические модели систем и записаны уравнения термодинамических балансов, изложена общая схема исследования термодинамических систем в классе процессов заданной интенсивности, даны выражения для производства энтропии в типовых процессах и для обратимых оценок их эффективности.

1.1. Общая схема исследования

В «Размышлениях о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», вышедших в 1824 г., Сади Карно писал: «Часто поднимали вопрос: ограничена или бесконечна движущая сила тепла, существует ли определенная граница для возможностей улучшений, граница, которую природа вещей не может перешагнуть каким бы то ни было способом?». Карно показал, что такая граница существует, и получил предельное значение коэффициента превращения тепла, отобранного у высокотемпературного источника, в работу. Результат, полученный Карно, стал основополагающим для развития термодинамики и теплотехники. Как писал Ф. Энгельс в «Диалектике природы», Карно «устранил безразличные для главного процесса побочные обстоятельства и сконструировал идеальную паровую машину, которую, правда, так же нельзя осуществить, как нельзя, например, осуществить геометрическую линию или плоскость, но которая оказывает по-своему такие же услуги, как и эти математические абстракции: она представляет рассматриваемый процесс в чистом, независимом, неискаженном виде».

Говоря современным языком, Карно построил, хотя и очень упрощенную, математическую модель тепловой машины, поставил задачу о максимуме ее термического КПД, т.е. о максимуме отношения полученной работы к затраченному теплу и нашел решение этой экстремальной задачи. Конечно, строгой математической постановки в работе Карно не было. Нельзя забывать, что ему был неизвестен закон сохранения энергии, а при решении он опирался на представление о тепле как об особого рода жидкости — теплороде. Тем замечатель-

[1] В главе использованы материалы В.А. Мироновой.

нее, что Карно удалось найти правильное решение. При этом оказалось, что в идеальной тепловой машине процессы передачи тепла от одного тела к другому должны были протекать со сколь угодно малой интенсивностью, при стремящейся к нулю разности температур. Эти процессы можно провести и в обратном направлении, используя энергию, полученную в прямом процессе, без затраты энергии извне. Продолжительность таких обратимых процессов для получения конечной работы должна быть сколь угодно велика, а значит, мощность машины Карно должна быть равна нулю. Отметим, что если бы Карно ставил задачу о максимуме КПД строго, то ему было бы нелегко ее решить, поскольку максимума в этой задаче нет, ее решение достигается лишь в пределе при продолжительности цикла, стремящейся к бесконечности. Иначе говоря, полученный им результат есть точная верхняя грань (supremum) для коэффициента полезного действия.

Пусть термодинамический процесс в системе заключается в преобразовании некоторого вида энергии, например, тепловой, в работу. Если процесс обратим, то полученная работа достаточна для возврата системы в исходное состояние, если необратим, то недостаточна, и требуется подвод дополнительной энергии извне. Та дополнительная внешняя энергия, которая требуется при этом, может служить мерой необратимости, а тот факт, что работа, полученная в обратимом процессе, больше, чем в процессе необратимом, составляет содержание теоремы о максимальной работе.

Широкое распространение для анализа технологических систем термодинамическими методами получил эксергетический подход. При таком подходе термодинамическое совершенство систем оценивается по величине потерь работоспособной энергии (эксергии), т.е. потенциальной работы, которую могла бы совершить система за счет обратимого выравнивания своих параметров с параметрами окружающей среды. Эксергетический анализ позволяет сказать, в каких элементах системы, на каких стадиях технологического процесса происходят наибольшие потери эксергии, что указывает на необходимость совершенствования этих стадий; он позволяет сравнить два различных процесса, протекающих в одинаковом окружении.

Основной недостаток эксергетического подхода состоит в том, что он учитывает необратимость процесса, связанную с приростом энтропии системы, через потенциальный обратимый процесс выравнивания ее параметров с параметрами среды. При этом механизм «генерации» энтропии, связанный с кинетикой процесса, коэффициентами тепло- и массообмена, не учитывается. Никак не оцениваются неизбежные потери эксергии, зависящие от заданной интенсивности процесса (мощности машин, производительности аппаратов и пр.). Естественно, что при эксергетическом подходе не ставится задача об обеспечении минимальной необратимости процесса при тех или иных условиях, определяющих его производительность.

Введение в задачу о предельных возможностях тепловой машины добавочного ограничения на ее мощность снизит величину достижимого в такой машине термического КПД. Возникает целый ряд вопросов.

1. Насколько снизится предельное значение термического КПД?

2. Как на это снижение влияют законы, связывающие потоки тепла с температурами обменивающихся теплом тел?

3. Какова при заданных величинах поверхностей теплообмена, а значит, при заданных коэффициентах теплопередачи предельная мощность тепловой машины?

Актуальность подобных задач для тепловых машин, тепловых насосов, холодильных машин, а также для целого ряда термодинамических процессов массообмена, разделения и др. вызвала к жизни ряд работ, в которых в той или иной форме учитывается фактор продолжительности термодинамических процессов или вводится ограничение на их интенсивность. Это направление получило название «термодинамика при конечном времени».

Первой в этом направлении была работа И. И. Новикова о предельной мощности цикла тепловой машины [151]. Независимо от него ту же задачу решили Ф. Л. Курзон и Б. Альборн [120]. Именно их публикация благодаря последующим работам Р. С. Берри и его сотрудников, [95, 112, 163] и др. стала толчком к активному развитию термодинамики при конечном времени.

В термодинамике при конечном времени предполагают, что систему можно разбить на такие подсистемы, в каждой из которых в любой момент времени отклонения интенсивных переменных от их средних по объему значений пренебрежимо малы, а значит, отсутствуют связанные с этими отклонениями потоки внутри подсистем. Изменение же интенсивных переменных происходит только на границах подсистем, так что система в целом находится в неравновесном состоянии. Такое допущение позволяет использовать при описании подсистем уравнения состояния, справедливые лишь в условиях равновесия, для описания переходных процессов в системе оказывается возможным применить обыкновенные дифференциальные уравнения, а для решения экстремальных задач — методы оптимального управления объектами с сосредоточенными параметрами.

Общая проблематика термодинамики при конечном времени заключается в следующем.

1. Как обеспечить заданную среднюю интенсивность потока при минимальной средней диссипации?

2. Каков предельный коэффициент превращения одного вида энергии в другой при ограниченной продолжительности процессов или при их фиксированной средней интенсивности?

3. Если параметры одной подсистемы меняются, то как нужно изменять параметры другой, чтобы обеспечить максимальную среднюю интенсивность потоков?

Охарактеризуем предварительно ту общую схему, по которой могут быть решены эти и другие подобные задачи.

Первым шагом в исследовании предельных возможностей термодинамических систем является составление балансовых соотношений для вещества, энергии и энтропии. В последнее из этих соотношений войдет слагаемое, характеризующее необратимость процессов, — производство энтропии. Это слагаемое равно нулю, если все процессы в системе протекают обратимо, и больше нуля для необратимых процессов. Неотрицательность диссипации определяет некоторое множество реализуемости в пространстве параметров входных и выходных потоков. Если на систему наложены дополнительные условия конечного времени процессов или их заданной средней интенсивности, то можно найти величину диссипации, минимально возможную при этих ограничениях. В любой реальной системе $\sigma \geq \sigma_{\min}$, что сужает множество реализуемости. При этом важно, что это множество учитывает кинетику процессов, а также через коэффициенты тепло и массообмена учитывает размеры установки.

Вторым шагом является получение из уравнений балансов связи между тем или иным показателем эффективности системы и диссипацией σ. Как правило, естественные показатели эффективности монотонно ухудшаются с ростом σ и достигают своих предельных значений в обратимом процессе, что приводит к оценкам, аналогичным КПД Карно для процессов самой разной природы.

Третьим, наиболее трудным шагом является решение задачи о такой организации процессов, для которой диссипация минимальна при заданной интенсивности целевого потока.

Так как в сложной системе диссипация аддитивно зависит от диссипации в каждом из элементарных процессов, то важным этапом исследования является выявление условий минимальной диссипации. Оптимальная организация процессов в сложной системе сводится к согласованию друг с другом отдельных процессов минимальной диссипации, например, к выбору, таких поверхностей на каждой из связанных друг с другом стадий, чтобы суммарное производство энтропии было минимально при заданных суммарных затратах на материалы поверхностей. На этом этапе задача оказывается технико-экономической. Для того чтобы реализовать намеченную схему, нужно познакомиться с основными величинами, характеризующими термодинамические системы, методами составления термодинамических балансов и уравнениями, характеризующими динамику таких систем.

1.2. Математическое описание термодинамических систем

Равновесные термодинамические системы. Основные переменные и уравнения состояния. Сложная термодинамическая система может быть разбита на равновесные подсистемы, каждую из которых выделяют контрольной поверхностью. Для описания термодинамических систем используют физические величины, характеризующие макроскопическое состояние отдельных подсистем и системы в целом. Подсистемы могут взаимодействовать, т.е. обмениваться теплом или веществом через разделяющие их поверхности. Взаимодействия могут быть различного рода — теплообмен (обмен тепловой энергией), массообмен (обмен веществом), механическое взаимодействие (совершение работы), деформационное (изменение объема подсистемы) и т.д. Каждому виду процесса соответствует пара величин: координата и потенциал.

Координата и потенциал взаимодействия. Координатой называют величину, изменение которой свидетельствует о наличии взаимодействия данного рода. Если эта величина не изменяется, то взаимодействия данного рода нет. Например, координатой деформационного взаимодействия является объем; если объем не изменяется, то деформационного взаимодействия нет. Координатой массообменного взаимодействия является масса. Если масса ни одного из компонентов не изменяется, то массообмена нет.

Потенциалом взаимодействия называется величина, отличие в значениях которой для двух контактирующих подсистем является причиной взаимодействия между ними. Для деформационного взаимодействия потенциалом является давление, для теплообмена — температура. Отличие температур тел вызывает обмен теплом. Отличие значений потенциалов вызывает взаимодействие, а изменение координаты — его следствие. Координаты и потенциалы будем обозначать z_i и Y_i; i — индекс, отражающий вид взаимодействия.

Равновесное и неравновесное состояния. Говорят, что подсистема находится в равновесном состоянии, если величины потенциалов каждого рода по ее объему одинаковы (давление, температура, концентрации всех компонентов одинаковы во всех точках объема). Равновесное состояние полностью характеризуется заданием значений координат всех взаимодействий в одной точке объема. При этом нужно задавать координаты не всех мыслимых взаимодействий, а только тех, которые в рассматриваемых условиях существенно влияют на процесс. Например, все тела находятся в поле действия гравитации. Однако, если ее действие на интересующий нас процесс мало, то наличие гравитационного взаимодействия можно не учитывать.

Если значения потенциалов, например, температуры, по объему подсистемы отличаются, то в ней идет некоторый процесс. В этом случае говорят, что состояние системы неравновесно.

Если в подсистему, находящуюся в состоянии равновесия, внести некоторое количество вещества или энергии, в ней начнется переходной процесс, в ходе которого значения потенциалов (температуры, давления) будут выравниваться. Подсистема будет переходить в новое состояние равновесия. Такой процесс называется релаксацией. Он протекает с определенной скоростью и требует времени, называемого временем релаксации.

Равновесный и неравновесный, обратимый и необратимый процессы. Как уже говорилось, подсистема, находящаяся в состоянии равновесия, может быть выведена из него в результате внешних воздействий — изменения значений потенциалов на ее поверхности. Если внешние условия изменяются медленно, скорость их изменения существенно меньше скорости релаксации, то в каждый момент времени состояние подсистемы будет пренебрежимо мало отличаться от равновесного. Такой процесс называется квазиравновесным или просто равновесным [24]. Скорость протекания такого процесса бесконечно мала, время протекания бесконечно велико, поэтому понятие скорости для таких процессов не используется. В технике такие процессы не проводятся. Однако подобная идеализация позволяет существенно упростить их описание.

Равновесные процессы часто, но не всегда, обратимы. Ни один из реальных процессов, протекающих в природе, не является обратимым. Но существуют процессы, которые можно вести как угодно близко к обратимым, задавая бесконечно малую разность между потенциалами на границе подсистемы, т.е. проводя процесс квазиравновесно. Это процессы теплообмена, массообмена, совершения механической работы, протекания обратимых химических реакций. Вместе с тем существуют процессы, которые принципиально нельзя вести обратимо, например, процессы смешения жидкостей или газов, так как для их разделения нужно будет прикладывать дополнительную работу, которая не совершалась в прямом процессе, или процесс непосредственного обмена теплом тел с разными начальными температурами.

Реальные процессы протекают при конечной разности потенциалов с конечной, а не с бесконечно малой скоростью. При этом состояние подсистем существенно отклоняется от равновесного. Такие процессы называются неравновесными. Они изучаются в неравновесной термодинамике. Все неравновесные процессы являются необратимыми.

Потенциалы и координаты для процессов теплообмена, массообмена, химического взаимодействия. Как уже говорилось, координатой z_i является величина, изменение которой свидетельствует о наличии взаимодействий данного рода. При отсутствии взаимодействия данного рода координата не изменяется. Потенциалом Y_i является величина, отличие в значении которой для взаимодействующих подсистем является причиной возникновения взаимодействия данного рода. При этом существует количественная мера dQ взаимодействия для взаимодействий всех видов. Она определяется соотношением

$$dQ_i = Y_i dz_i$$

и имеет размерность энергии. Конкретизируем это выражение для основных видов взаимодействий.

Деформационное взаимодействие. Рссмотрим деформационное взаимодействие, проявляющееся в изменении объема. Координатой этого взаимодействия является объем V. Это взаимодействие возникает, если отличаются давления на поверхности подсистемы, поэтому потенциалом этого взаимодействия является давление P. Количество деформационного взаимодействия определяется величиной PdV, которая оценивает совершенную работу.

Традиционно принято считать работу PdV положительной, если она совершается подсистемой. В то же время в термодинамике для всех видов взаимодействий принято считать количественную меру взаимодействия dQ положительной, если в результате взаимодействия энергия подсистемы увеличивается. Для того чтобы не возникало противоречия, потенциалом деформационного взаимодействия нужно считать не давление, а величину, отличающуюся от давления только знаком, — обобщенную силу $Y = -P$. Тогда $dQ = -PdV$.

Теплообмен. Процесс теплообмена возникает, если отличаются температуры взаимодействующих тел, поэтому потенциалом этого взаимодействия является температура T. Предполагая, что обмен теплом представляет собой одну из форм обмена энергией и что для него должна существовать своя координата, ее ввели, обозначили S и назвали энтропией (entropos — преобразование, энтропия — параметр преобразования; введена в 1850 г. Рудольфом Клаузиусом). Тогда количество теплового взаимодействия

$$dQ = TdS, \tag{1.1}$$

откуда изменение энтропии определяется величиной

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{1.2}$$

Это — известное соотношение Р. Клаузиуса.

Массообмен. Проявляется массообмен в изменении массы, поэтому координатой массообменного взаимодействия является масса m или число молей N. Потенциал же не вполне ясен. Вводить эту величину произвольно нельзя, потенциал и координата взаимодействия связаны между собой. Поэтому, как и в предыдущем случае, вначале можно просто утверждать, что потенциал этого взаимодействия существует. Он вводится, обозначается μ и называется химическим потенциалом (введен в 1874 г. Д. Гиббсом). Затем к нему предъявляются те же требования, что и к потенциалам остальных взаимодействий, что позволяет доопределить эту величину. Это будет сделано в дальнейшем. Количество массообменного взаимодействия —

$$dQ = \mu dm. \tag{1.3}$$

Химическое взаимодействие. Пусть происходит химическая реакция

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + ... + \alpha_\nu R_\nu \rightleftharpoons \alpha_{\nu+1} R_{\nu+1} + \alpha_{n+2} R_{n+2} + ... + \alpha_m R_m, \tag{1.4}$$

где R_i — реагенты, а α_i — стехиометрические коэффициенты.

В дальнейшем будем считать, что α_i отрицательно для исходных веществ, $\alpha_i < 0$, $i = 1, \ldots, \nu$, и положительно для продуктов рекции, $\alpha_i > 0$, $i = \nu + 1, \ldots, m$. В результате этого процесса изменяется масса или число молей реагентов, причем для всех реагентов

$$dm_i = \alpha_i d\xi, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.5}$$

Здесь ξ — степень полноты реакции (степень превращения). Она и является координатой химического взаимодействия.

Реакция протекает слева направо, если некоторая величина A, называемая химическим сродством реакции, положительна, $A > 0$. Реакция протекает справо налево, если $A < 0$, и скорость реакции равна нулю, если $A = 0$. Величина химического сродства реакции —

$$A = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu_i. \tag{1.6}$$

Она введена де Донде [53]. Поэтому потенциалом химического взаимодействия можно считать взвешенную с учетом стехиометрических коэффициентов сумму химических потенциалов реагентов (исходных веществ и продуктов реакции) A. Величина

$$dQ = A d\xi$$

определяет количество химического взаимодействия.

В каждый момент времени состояние равновесной термодинамической системы может быть охарактеризовано набором различных макроскопических величин, таких, как внутренняя энергия E, объем V, энтропия S, составы N (N_i — количество молей i-го вещества, содержащееся в системе, $i = 1, \dots, m$), температура T, давление p, химические потенциалы μ_i, $i = 1, \dots, m$, и т.д. Ниже мы будем рассматривать системы электрически нейтральные, поэтому такая их характеристика, как электрический заряд, не вводится.

Остановимся несколько подробнее на одной из перечисленных величин — энтропии. Как и внутреннюю энергию, энтропию непосредственно нельзя измерить. Изменение внутренней энергии определяют через изменение температуры и давления. Аналогично и изменение энтропии системы может быть вычислено по непосредственно измеряемым переменным. Первоначально энтропия была введена Клаузисом как мера полноты преобразования теплоты в работу. Позднее был выявлен статистический смысл энтропии применительно к термодинамическим, информационным и другим системам. В этих системах, состоящих из множества подсистем, одному и тому же макросостоянию системы (давлению, температуре, объему и пр.) могут соответствовать различные микросостояния, т.е. различные конфигурации подсистем. Число таких различных микросостояний Ω и характеризует энтропия (она пропорциональна логарифму Ω). Таким образом, энтропия при данном макросостоянии характеризует неопределенность состояния системы на микроуровне. Если две назависимые системы, имеющие число возможных состояний Ω_1 и Ω_2, объединяются в одну, то для объединенной системы $\Omega = \Omega_1\Omega_2$ (для каждого микросостояния первой возможно $\Omega 2$ микросостояний второй), а энтропия S равна сумме S_1 и S_2 — энтропий каждой из подсистем. Когда к системе при температуре T подводится порция энергии dQ, то энтропия системы возрастает (см. (1.2.)).

Все переменные, характеризующие систему, в термодинамике принято разбивать на две группы — экстенсивные и интенсивные. Интенсивные величины (температура, давление, химические потенциалы) не изменяются при разделении системы непроницаемой перегородкой. Экстенсивные же величины (внутренняя энергия, энтропия, число молей) при таком разделении для каждой из получившихся подсистем уменьшаются во столько раз, во сколько объем подсистемы окажется меньше объема первоначальной системы.

Перечисленные величины не являются независимыми. Они связаны друг с другом уравнениями состояния. Обычно в качестве независимых переменных выбирают E, V, N или S, V, N, а остальные переменные выражают через них с использованием уравнений состояния. Так, если в качестве независимых переменных приняты E, V и N, то энтропия выражается как функция этих переменных

$$S = S(E, V, N). \tag{1.7}$$

Интенсивные же переменные могут быть выражены через экстенсивные переменные и функцию (1.7) с помощью соотношений

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}, \quad p = T\frac{\partial S}{\partial V}, \quad \mu_i = -T\frac{\partial S}{\partial N_i}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.8}$$

Термодинамические потенциалы. Неподвижное тело, находящееся в поле тяготения, обладает потенциальной энергией. Величина потенциальной энергии не зависит от того, как оказалось тело в том или ином состоянии, она зависит только от состояния. При переходе из одного состояния в другое тело совершает работу (или внешняя среда совершает работу над телом), максимальная величина которой равна разности потенциальных энергий в исходном и конечном состояниях. Если переход осуществлялся с рассеянием энергии, например, путем трения, то произведенная работа может только уменьшиться, а подводимая энергия только увеличиться по сравнению с потенциально возможной.

Функции, аналогичные потенциальной энергии, вводят и для термодинамических систем. Однако здесь максимальная полезная работа, которую может совершить система при переходе из одного состояния в другое, зависит от того, в каких условиях проделан такой переход. В силу этого термодинамических потенциалов несколько. Общим для всех термодинамических потенциалов является то, что они зависят только от состояния системы. Разность потенциалов характеризует предельную работу, которую может совершить система при переходе из одного состояния в другое в тех или иных условиях. Запишем условие, связывающее между собой возможные изменения параметров замкнутой термодинамической системы при подводе к ней некоторой порции энергии dQ:

$$dQ = dE + pdV - \sum_{i=1}^{n} \mu_i dN_i. \tag{1.9}$$

Здесь dE — изменение внутренней энергии системы; pdV — работа, совершаемая системой и связанная с изменением ее объема; $\mu_i dN_i$ — изменение энергии системы, вызванное изменением количества i-го вещества (в замкнутой системе оно может возникнуть при наличии химических реакций).

С учетом связи (1.1) между dQ и dS равенство (1.9) примет форму

$$TdS = dE + pdV - \sum_{i=1}^{n} \mu_i dN_i. \tag{1.10}$$

Рассмотрим случай, когда химические реакции отсутствуют. В этом случае

$$TdS = dE + pdV. \tag{1.11}$$

При постоянной температуре приращение работы pdV равно $d(TS-$ $-E)$, а значит, предельная работа расширения, совершенная телом при переходе в изотермических условиях из состояния 1 в состояние 2, равна

$$A_T = F_1 - F_2 \quad (dA_T = -dF), \tag{1.12}$$

где

$$F = TS - E \tag{1.13}$$

— энергия Гельмгольца. Так как внутренняя энергия E и энтропия S зависят только от состояния системы и являются экстенсивными переменными, то и энергия Гельмгольца обладает теми же свойствами.

В изоэнтропическом обратимом процессе, когда система изолирована от внешней среды нетеплопроводными стенками, $dS = 0$, и из уравнения (1.11) следует, что потенциально возможная работа расширения

$$A_S = E_1 - E_2 \quad (dA_S = -dE). \tag{1.14}$$

Таким образом, внутренняя энергия также является термодинамическим потенциалом и характеризует предельное значение работы термодинамической системы.

Кроме работы расширения, связанной с изменением объема тела и равной

$$A = \int_1^2 pdV, \quad dA = pdV, \tag{1.15}$$

часто используют понятие полезной внешней работы. Эта работа L образуется как разность между работой расширения и так называемой работой проталкивания, равной pV. Последняя представляет собой работу, которую нужно затратить, чтобы ввести тело объема V в среду с давлением p:

$$dL = dA - d(pV).$$

Так как $dA = pdV$, а $d(pV) = Vdp + pdV$, то

$$dL = -Vdp.$$

Заменив в равенстве (1.11) dA на dL, получим

$$TdS = dE + d(pV) + dL. \tag{1.16}$$

В адиабатическом процессе, когда левая часть в этом равенстве равна нулю,

$$dL_S = -d(E + pV).$$

Функцию

$$I = E + pV \tag{1.17}$$

называют энтальпией. Она, как E и F, является термодинамическим потенциалом и определяет предельное значение полезной внешней работы, произведенной телом при переходе из одного состояния в другое в обратимом адиабатическом процессе

$$L_S = I_1 - I_2. \tag{1.18}$$

Наконец, в изотермическом процессе из равенств (1.16) и (1.17) следует, что

$$dL_T = -d(I - TS),$$

а предельное значение полезной внешней работы, произведенной телом, может быть выражено через термодинамический потенциал

$$\Phi = I - TS, \tag{1.19}$$

называемый энергией Гиббса. Очевидно, что, как и остальные термодинамические потенциалы E, F, I, энергия Гиббса является функцией состояния и аддитивна. Так что в системе, состоящей из нескольких тел,

$$E = \sum_{\nu} E_{\nu}, \quad F = \sum_{\nu} F_{\nu}, \quad I = \sum_{\nu} I_{\nu}, \quad \Phi = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}. \tag{1.20}$$

Вернемся теперь к случаю, когда состав системы может изменяться и условие закона сохранения энергии имеет форму (1.10). Перепишем это уравнение с заменой внутренней энергии E на энергию Гиббса Φ. Получим

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i dN_i = d\Phi + SdT - V dp.$$

В условиях постоянства температуры и давления два слагаемых в правой части этого уравнения равны нулю, а химический потенциал i-го компонента

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_i}\right)_{P,T,N_{j\neq i}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.21}$$

Так как энергия Гиббса аддитивна, то $d\Phi = \sum_{i=1}^{n} d\Phi_i$, а химический потенциал представляет собой удельную энергию Гиббса i-го вещества.

Использование термодинамических потенциалов позволяет определить предельную работу, которую можно получить при различных типах контакта системы с окружающей средой. Пусть, например, система состоит из m подсистем и имеет тепловой контакт с термостатом, так что температура каждой j-й подсистемы T_j постоянна и равна температуре термостата T_0. Объем каждой из подсистем может меняться, но их суммарный объем $V = \sum_{j=1}^{m} V_j$ постоянен. Предельная работа, совершаемая в такой системе, в силу равенства (1.12) и свойства аддитивности внутренней энергии (1.20) равна

$$A_{T,V} = \sum_{j=1}^{m} \Delta F_j = \sum_{j=1}^{m} \Delta E_j - T_0 \sum_{j=1}^{m} \Delta S_j. \tag{1.22}$$

Здесь $\Delta F_j = F_{j1} - F_{j2}$, аналогичный вид имеют ΔE_j и ΔS_j. Таким же образом при контакте системы, состоящей из равновесных подсистем, с термостатом и баростатом, т.е. при $T_j = T_0$, $P_j = P_0$ для всех значений j, предельная полезная работа системы

$$L_{T,p} = \sum_{j=1}^{m} \Delta \Phi_j = \sum_{j=1}^{m} \Delta I_j - T_0 \sum_{j=1}^{m} \Delta S_j. \tag{1.23}$$

Так как термодинамические потенциалы, а значит, и их приращения ΔF_j, $\Delta \Phi_j$ и т.д., являются функциями состояния, то достаточно, чтобы требования $T_j = T_0$ и $P_j = P_0$ выполнялись лишь для начального и конечного состояний системы, а не в течение всего процесса.

Связи между термодинамическими потенциалами и параметрами системы в дифференциальной форме позволяют выразить одни величины через другие. Действительно, имеем

$$\begin{gathered} dE = TdS - pdV,\ dI = TdS + VdP, \\ d\Phi = VdP - SdT,\ dF = -(SdT + pdV). \end{gathered} \tag{1.24}$$

Если в системе возможны химические превращения, то в правые части каждого из этих равенств нужно добавить слагаемое $\sum_{i=1}^{n} \mu_i dN_i$.

Из равенств (1.24) следует, что

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_{P,N}, \quad p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N},$$

$$V = \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_{T,N}, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{P,N}, \qquad (1.25)$$

$$\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial I}{\partial N_i}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i}\right)_{V,T} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_i}\right)_{P,T}.$$

Если задана одна из зависимостей, то можно найти значения остальных величин, характеризующих систему в данном состоянии. Например, пусть известна функция $F(T, V, N)$. По соотношениям (1.25) можно найти S и P при заданных T, V, N, после этого вычислить $E = F - TS$ и т.д.

Условия равновесия. Замечательным свойством энтропии является то, что в любом термодинамическом процессе, протекающем в изолированной системе, энтропия системы не уменьшается. Если процесс протекает обратимо, т.е. суммарная энтропия системы S_Σ не возрастает, то система может быть возвращена в исходное состояние только за счет энергии, выделившейся в прямом процессе, так что все параметры системы и среды восстанавливаются. В необратимом же процессе величина S_Σ растет. Прирост энтропии может служить характеристикой необратимости процесса. *Когда изолированная система состоит из нескольких подсистем, то в состоянии равновесия энтропия системы достигает своего максимально возможного значения при тех или иных ограничениях, наложенных на систему.*

Рассмотрим, например, изолированную систему, состоящую из двух подсистем, объемы которых V_1, V_2 и составы N_1, N_2 фиксированы, а обмен энергией между ними может осуществляться только через теплопроводящую перегородку. Внутренняя энергия системы E равна сумме энергий подсистем, как и ее энтропия

$$E = E_1 + E_2; \; S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2).$$

Так как системы находятся в равновесии, то их энтропия для заданного значения E максимальна, так что E_1 и E_2 должны быть таковы, чтобы доставлять решение следующей экстремальной задаче:

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2) \to \max \Big/ \; E_1 + E_2 = E.$$

Необходимым условием оптимальности в этой задаче является стационарность по E_1 и E_2 функции Лагранжа

$$R = S_1(E_1) + S_2(E_2) + \lambda(E_1 + E_2 - E),$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}.$$

С учетом формулы (1.8) это равенство соответствует тому, что в тепловом равновесии температуры подсистем должны быть одинаковы.

Говорят, что системы находятся в механическом равновесии, если поршень, их разделяющий, неподвижен. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в этом случае объемы подсистем должны распределяться так, чтобы производные энтропии каждой из подсистем по величине их объемов были одинаковы, а это означает равенство давлений (см. (1.8)).

При рассмотрении химического равновесия те же соображения о максимуме суммарной энтропии при заданном суммарном количестве каждого из компонентов в системе приводят к условию равенства производных энтропии каждой из подсистем по числу молей в ней i-го вещества, т.е. к равенству векторов химических потенциалов μ_i.

Таким образом, если кроме теплового равновесия наблюдается еще механическое и химическое, то равны не только температуры, но и давления и химические потенциалы подсистем.

Идеальный газ. Уравнение состояния может быть конкретизировано при тех или иных допущениях о свойствах термодинамической системы. Одной из простейших таких систем является идеальный газ, который по предположению состоит из большого числа частиц, чье взаимодействие друг с другом пренебрежимо мало. Реальные газы близки к этой модели в достаточно разреженном состоянии.

Напомним без вывода основные соотношения, связывающие термодинамические переменные для идеального газа.

Уравнение состояния имеет вид:

$$PV = NRT. \tag{1.26}$$

Здесь P, V, T — давление, объем и температура N молей газа, R — универсальная газовая постоянная, равная $8,314\,10^{-7}$ эрг/град моль.

Внутренняя энергия E идеального газа зависит только от температуры. Она меняется, например, при подводе или отводе тепла. Производную $\partial Q/\partial T$ называют теплоемкостью газа. Однако эта производная зависит от того, каким образом происходит нагрев или охлаждение газа. Если объем газа V остается постоянным, то теплоемкость обозначают как C_v, а если остается постоянным давление, то C_p. При постоянном объеме все подводимое тепло ΔQ идет только на повышение внутренней энергии, а при постоянном давлении изменение температуры в соответствии с уравнением состояния (1.26) вызывает изменение объема, и газ производит работу равную $P\Delta V$. Ясно, что при том же

ΔQ изменение температуры, а значит, и внутренней энергии во втором случае окажется меньше, так что $C_p > C_v$. Разность двух этих теплоемкостей для одного моля газа постояннна, так как при постоянном объеме

$$C_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = \frac{dE}{dT},$$

при постоянном же давлении

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \frac{dE}{dT} + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Но, как следует из уравнения состояния (1.26), при $N = 1$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{P}.$$

Так что $C_p = C_v + R$. Подчеркнем, что при выводе этого равенства мы использовали полную производную dE/dT, так как от p и V внутренняя энергия не зависит.

Используя уравнение состояния (1.26), получим зависимость энтропии от параметров идеального газа. При $N = 1$ в равновесном процессе по условию (1.10)

$$TdS = dE + dA = C_v dT + pdV. \tag{1.27}$$

При постоянной теплоемкости C_v

$$dS = d(C_v \ln T + R \ln V). \tag{1.28}$$

Если выразить $\ln T$ из уравнения состояния $pV = RT$,

$$\ln T = \ln p + \ln V - \ln R$$

и учесть связь между R, C_p и C_v, то получим

$$dS = d(C_v \ln p + C_p \ln V). \tag{1.29}$$

Величина энтропии может отличаться от выражений, стоящих в (1.28), (1.29) под знаком дифференциала, только на некоторую константу. Если известна энтропия при некоторых стандартных параметрах P_0, V_0 (обозначим ее как S_0), то энтропия S одного моля идеального газа удовлетворяет равенствам

$$\begin{gathered} S - S_0 = C_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_0}\right), \\ S - S_0 = C_v \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + C_p \ln\left(\frac{V}{V_0}\right), \\ S - S_0 = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{P}{P_0}\right). \end{gathered} \tag{1.30}$$

Часто принимают S_0 равной нулю и записывают (1.30) как зависимость энтропии S от переменных состояния системы. Чтобы подсчитать энтропию N молей газа, занимающих объем $\tilde{V}$ по формуле (1.30), надо умножить S на N и подставить вместо V объем одного моля $\tilde{V}/N$. Получим

$$S_N = N\left(C_v \ln\frac{T}{T_0} + R\frac{\tilde{V}}{NV_0}\right) = N\left(C_v \ln\frac{P}{P_0} + C_p \ln\frac{\tilde{V}}{NV_0}\right). \quad (1.31)$$

При смешении идеальных газов каждый из них ведет себя в общем объеме так, как будто других газов не существует. Давление P_i удовлетворяет уравнению (1.26), в которое входит число молей N_i i-го газа, температура T и объем V, занимаемый смесью. Так что

$$P_i V = N_i RT.$$

Давление P_i называют парциальным давлением i-го газа. Общее давление смеси равно сумме парциальных давлений (закон Дальтона)

$$P = \sum_{i=1}^{M} P_i = \frac{RT}{V}\sum_{i=1}^{M} N_i. \quad (1.32)$$

При смешении идеальных газов тепло не подводится и не совершается никакой работы, значит, температура смеси и внутренняя энергия не изменяются. Таким образом, внутренняя энергия смеси равна сумме внутренних энергий отдельных компонент:

$$E = \sum_{i=1}^{m} E_i.$$

Подсчитаем изменение энтропии газов при их смешении при фиксированной температуре T и давлении P, взяв для простоты два газа с числом молей N_1 и N_2 и объемами V_1 и V_2 соответственно. По формуле (1.31) энтропия системы до смешения равна

$$S^H = N_1\left(C_{v1} \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V_1}{N_1 V_0}\right) + N_2\left(C_{v2} \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V_2}{N_2 V_0}\right).$$

После смешения энтропия определяется выражением

$$S^C = N_1\left(C_{v1} \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V}{N_1 V_0}\right) + N_2\left(C_{v2} \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V}{N_2 V_0}\right),$$

так как каждый из газов занял весь объем $V = V_1 + V_2$. Учтем, что при одинаковых температурах и давлениях объемы газов пропорциональны числу молей N_1, так что

$$\frac{V_1}{V} = \frac{N_1}{N}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{N_2}{N}, \quad N = N_1 + N_2.$$

Энтропией смешения называют приращение энтропии $\Delta S_{\text{см}} = S^C - S^H$. Она равна

$$\Delta S_{\text{см}} = R\left(N_1 \ln \frac{N}{N_1} + N_2 \ln \frac{N}{N_2}\right). \tag{1.33}$$

В расчете на один моль смеси

$$\Delta \tilde{S}_{\text{см}} = \frac{\Delta S_{\text{см}}}{N} = -R(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2). \tag{1.28a}$$

Здесь $x_i = N_i/N$ — мольная концентрация. Процесс смешения необратим, о чем и свидетельствует увеличение энтропии. Отметим, что для одинаковых газов энтропия смеси равна

$$S^C = (N_1 + N_2)\left(C_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0(N_1 + N_2)}\right).$$

Нетрудно показать, что в этом случае $\Delta S_{\text{см}} = 0$.

Чтобы получить зависимость химического потенциала от температуры и давления для идеального газа, используем равенство (1.24) для дифференциала энергии Гиббса чистого вещества

$$d\Phi = V dP - S dT + \mu dN.$$

Так как $d\Phi$ — полный дифференциал, то значение его второй производной не зависит от порядка дифференцирования

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N \partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p\, \partial N}\right)_T \tag{1.34}$$

или

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = \frac{V}{N}.$$

Из уравнения состояния идеального газа $V/N = \dfrac{RT}{p}$, так что

$$d\mu = RT \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя это соотношение при $T = \text{const}$, получим

$$\mu = \mu^0(T) + RT \ln p. \tag{1.35}$$

Постоянная интегрирования $\mu^0(T)$ представляет собой химический потенциал газа при температуре T и давлении, равном единице.

В смеси идеальных газов каждая составляющая характеризуется парциальным давлением P_i, и уравнение (1.35) примет форму

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln P_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.36}$$

Так как $P_i = \dfrac{N_i}{V} RT = C_i RT$, то

$$\mu_i(C, T) = \mu_{iC}^0 + RT \ln C_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\mu^0_{iC}(T)$ — химический потенциал чистого вещества. Если концентрации веществ в смеси исчисляются в мольных долях, то $P_i = px_i$ и

$$\mu_i(x_i, p, T) = \mu^0_i + RT\ln(px_i) = \bar{\mu}_{iC}(T, p) + RT\ln x_i. \qquad (1.37)$$

Сумма $\bar{\mu}_{iC}(T, p)$ первых двух слагаемых в правой части этого равенства равна химическому потенциалу i-го газа, взятого в чистом виде при давлении и температуре смеси. По аналогии со смесями идеальных газов другие смеси, у которых химические потенциалы подчиняются равенствам (1.35), (1.36), называют идеальными растворами.

Рассмотрим систему, состоящую из жидкости, содержащей несколько компонент и паров этой жидкости. Если температура и давление таковы, что каждая из компонент жидкости способна в рассматриваемых условиях находиться в конденсированном состоянии, то газовая фаза будет смесью насыщенных паров тех же компонент. Газовую фазу можно считать смесью идеальных газов, так что химический потенциал i-й компоненты в ней имеет вид (1.36)

$$\mu^{\Gamma}_i = \mu^0_i + RT\ln p_i.$$

Для жидкости, являющейся идеальным раствором, химические потенциалы в соответствии с (1.36) равны

$$\mu^{\text{ж}}_i = \bar{\mu}_i + RT\ln x_i.$$

В условиях равновесия $\mu^{\Gamma}_i = \mu^{\text{ж}}_i$, так что

$$\mu^0_i + RT\ln p_i = \bar{\mu}_i + RT\ln x_i,$$

откуда после преобразований следует

$$\frac{p_i}{x_i} = \exp\left(\frac{\bar{\mu}_i - \mu^0_i}{RT}\right). \qquad (1.38)$$

Правая часть этого выражения зависит от давления и температуры.

Обозначим ее как $F_i(p, T)$, оставив пока функцию F_i неопределенной. В таких обозначениях из (1.38) следует равенство

$$p_i = F_i x_i. \qquad (1.39)$$

Чтобы найти функцию F_i, устремим x_i к единице, т.е. рассмотрим случай, когда раствор приближается к чистому i-му компоненту. При этом давление i-го компонента над раствором должно приближаться к равновесному давлению пара чистого вещества $\bar{P}_i$. Так что $F_i = \bar{P}_i$, и уравнение (1.39) примет вид

$$P_i = \bar{P}_i x_i. \qquad (1.40)$$

Давление насыщенного пара над раствором пропорционально давлению насыщенного пара чистого вещества и концентрации рассматриваемого вещества в растворе. Соотношение (1.40) называют законом Рауля.

Обратимая работа разделения. Формула (1.37) для химических потенциалов позволяет рассчитать потери свободной энергии при смешении газов или идеальных растворов. Рассмотрим смесь двух веществ A и B. Их химические потенциалы равны

$$\mu_A = \bar{\mu}_A + RT \ln x_A, \quad \mu_B = \bar{\mu}_B + RT \ln x_B.$$

Свободная энергия Гиббса для моля смеси:

$$\Phi_{\text{см}} = x_A \mu_A + x_B \mu_B$$

Свободная энергия чистых веществ, взятых в тех же количествах:

$$\bar{\Phi} = x_A \bar{\mu}_A + x_B \bar{\mu}_B.$$

Потери энергии при смешении чистых веществ:

$$A_0 = \bar{\Phi} - \Phi_{\text{см}} = -RT(x_A \ln x_A + x_B \ln x_B). \tag{1.41}$$

Очевидно, что $A_0 > 0$. Эту величину называют обратимой работой разделения, так как она равна минимальной работе, которую нужно

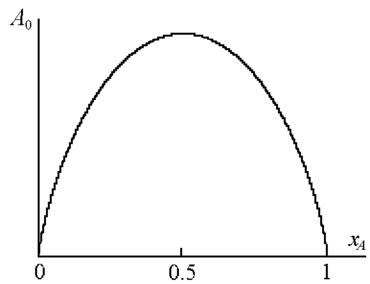


Рис. 1.1. Зависимость потерь энергии при смешении от концентрации ключевого компонента

затратить для разделения одного моля смеси на чистые компоненты. Функция $A_0(x_A)$ показана на рис. 1.1, при этом учтено, что $x_B = 1 - x_A$. Сравнение функции $A_0(x)$ с энтропией смешения (1.28а) приводит к соотношению

$$\Delta S_{\text{см}} = \frac{A_0}{T}. \tag{1.42}$$

В более общем случае для смеси m компонент совершенно аналогичным образом потери энергии при смешении примут форму

$$A_0 = -RT \sum_{i=1}^{m} x_i \ln x_i. \tag{1.43}$$

Рассмотрим случай, когда один моль смеси, состоящей из двух компонентов A и B, нужно разделить на два потока, в первом из которых концентрации равны x_{A1} и x_{B1}, а во втором x_{A2} и x_{B2}. Обозначим долю первого потока через γ, так что доля второго потока равна $1 - \gamma$, энергия Гиббса для каждого из выходных потоков и их сумма равны

$$\Phi_1 = \gamma(x_{A1}\mu_{A1} + x_{B1}\mu_{B1}), \quad \Phi_2 = \gamma(1-\gamma)(x_{A2}\mu_{A2} + x_{B2}\mu_{B2}),$$

$$\Phi_\Sigma = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Потери энергии при смешении (они же равны минимальной работе разделения):

$$A_{\text{см}} = \Phi_\Sigma - \Phi_{\text{см}}.$$

После подстановки в это равенство выражений для химических потенциалов минимальная работа разделения примет форму

$$A_{\text{см}} = A_0(x_A) - [\gamma A_0(x_{A1}) + (1-\gamma)A_0(x_{A2})]. \tag{1.44}$$

Если участь, что $x_A = \gamma x_{A1} + (1-\gamma)x_{A2}$, то $A_{\text{см}}$ представляет собой расстояние между точкой $A_0(x_A)$ и ординатой отрезка, соединяющего $A_0(x_{A1})$ и $A_0(x_{A2})$, для $x = x_A$. Так как функция $A_0(x_A)$ выпукла вверх, работа разделения неотрицательна.

1.3. Термодинамические балансы

Открытая система. Термодинамические балансы устанавливают связь между потоками по каждому из веществ, энергии и энтропии, которыми система обменивается с окружением,а также возникновением этих величин в системе и скоростью изменения их количества. Все потоки далее мы будем суммировать, считая входящие потоки положительными, а выходящие — отрицательными. Разделим потоки на конвективные и диффузионные, отметив последние индексом d. В отличие от конвективного потока диффузионный зависит от различия между интенсивными переменными исследуемой системы в точке, куда он входит или откуда выходит и интенсивными переменными окружения. Кроме того, будем использовать следующие обозначения: j — индекс потока, e_j, v_j, — внутренняя энергия и обьем одного моля соответствующего потока, а P_j — его давление, $h_j = e_j + P_j v_j$ — мольная энтальпия, h_{dj} — энтальпия в потоке, поступающем диффузионно, q_j – j-й поток тепла, N_a — мощность, производимая системой.

Приведем общий вид балансовых уравнений.

Энергетический баланс. Скорость изменения энергии E системы определяется потоками энергии, приносимой и уносимой вместе с конвективнми потоками вещества, изменением энергии за счет диффузионного обмена веществом, потоками тепла, передаваемого кондуктивно, и мощностью совершаемой работы:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j g_{dj} h_{dj} + \sum_j q_j - N_a.$$

Материальный баланс. Изменение числа N_i молей i-го компонента в системе определяется потоками вещества, поступающими конвективно и диффузионно, а также протеканием химических реакций:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} x_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu.$$

Здесь x_{ij} — мольная доля i-го компонента в j-м потоке, $\alpha_{i\nu}$ — стехиометрический коэффициент, с которым i-й компонент входит в уравнение ν-й реакции, W_ν — скорость ν-й реакции.

Энтропийный баланс. Изменение энтропии S системы происходит вследствие притока энтропии вместе с веществами, поступающими конвективно и диффузионно, притока или отвода тепла ($q_j = T_j dS_j/dt$, откуда q_j/T_j — изменение энтропии под влиянием j-го потока тепла с температурой T_j) и производства энтропии σ вследствие неравновесности процессов, проходящих внутри самой системы:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j g_{dj} s_{dj} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma.$$

Увеличение энтропии вследствие диффузионного притока вещества можно выразить и с использованием потоков вносимой энергии $q_{dj} = g_{dj} h_{dj}$. Так как удельная энергия Гиббса $\phi_{dj} = h_{dj} - T_{dj} s_{dj}$, то $s_{dj} = (h_{dj} - \phi_{dj})/T_{dj}$, где s_{dj} — удельная энтропия j-го диффузионного потока, h_{dj} — удельная энтальпия. Следовательно, $g_{dj} s_{dj} = g_{dj}(h_{dj} - \phi_{dj})/T_{dj}$. Если диффузионно переносится несколько потоков вещества, то

$$g_{dj} s_{dj} = \left(q_{dj} - \sum_i \frac{g_{dj} \mu_{dij}}{T_{dj}} \right),$$

где μ_{dij} — химический потенциал i-го компонента в j-м диффузионном потоке. Тогда уравнение энтропийного баланса приобретает вид

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dj} \mu_{dij}}{T_{dj}} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma.$$

Таким образом, уравнения для энергии, вещества и энтропии имеют вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_{dj} + \sum_j q_j - N_a, \tag{1.45}$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \tag{1.46}$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum_i g_{dj} \mu_{dij}}{T_d j} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma. \tag{1.47}$$

Здесь $n_{i\nu} = -\alpha_{i\nu} W_\nu$ — интенсивность образования i-го вещества в ν-й реакции, T_ν — температура ν-й реакции. Если диффузионных потоков нет, то

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_j - N_a, \tag{1.48}$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \tag{1.49}$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sigma, \tag{1.50}$$

где в число тепловых потоков включены потоки тепла, выделяющиеся или поглощаемые при химических реакциях, которые зависят от скорости реакций.

Если рассматривается стационарный режим процесса, когда $dE/dt = dN_i/dt = dS/dt = 0$, то записанные уравнения из дифференциальных превращаются в конечные соотношения. При рассмотрении циклического процесса балансы можно записать не для каждого момента времени, а в среднем за цикл работы установки. Так как в начале и конце цикла состояние системы одинаково, то общее изменение энергии, количества вещества и энтропии за цикл равно нулю. Балансы в этом случае также сводятся к системе соотношений, связывающих средние за цикл значения слагаемых, стоящих в правых частях уравнений.

Для замкнутых систем, состоящих из нескольких равновесных подсистем, термодинамические балансы имеют форму

$$\dot{E}_0 = \sum_i \dot{E}_i, \quad \dot{N}_0 = \sum_i \dot{N}_i, \quad \dot{S}_0 = \sum_i \dot{S}_i,$$

где i — номер подсистемы, а индекс 0 относится к системе в целом. В свою очередь, $\dot{E}_i, \dot{N}_i$ и $\dot{S}_i$ определяются соотношениями (1.45)–(1.47).

Термодинамические балансы связывают интенсивность и составы потоков, поступающих в систему, скорости химических превращений в ней и производство энтропии. Они же позволяют найти производство энтропии в неоднородной изолированной системе, когда подсистемы обмениваются друг с другом веществом и энергией.

Производство энтропии в неоднородной изолированной системе. В изолированной неоднородной системе между i-й и j-й подсистемами возникают потоки тепла, диффузионные потоки вещества, протекают химические реакции. Внешние потоки отсутствуют и изменение энтропии каждой из подсистем с учетом ее равновесия ($\sigma_j = 0$) имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T_j}\left[\sum_i \left(q_{ij} + q_{dij} + \sum_k g_{dij} x_{ijk} \mu_{jk}\right) + \sum_{k\nu} \mu_{k\nu} n_{k\nu}\right]. \tag{1.51}$$

Здесь k_ν — индекс вещества, образующегося в ν-й реакции. Скорость изменения энтропии в такой системе связана с ее неоднородностью. Она равна

$$\sigma = \sum_j \frac{dS_j}{dt}. \tag{1.52}$$

Она неотрицательна и в том случае, когда те или иные процессы отсутствуют, так что зависимости потоков от интенсивных переменных подсистем $q_{ij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j)$, $g_{dij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j), n_{kj\nu}(P_j, T_j, \mu_j)$ должны быть таковы, чтобы сумма по j определяющихся ими слагаемых в (1.52) была неотрицательна при отсутствии остальных потоков.

Отметим, что для записи термодинамических балансов не требуется знания уравнения состояния подситем $S(E, V, N)$, нужно лишь, чтобы такая зависимость существовала. Тогда

$$\dot{S} = S_E \dot{E} + S_V \dot{V} = \sum_{i=1}^{m} S_{N_i} \dot{N}_i,$$

что совпадает с выражением (1.47) для равновесной подсистемы, если учесть, что

$$S_E = \frac{1}{T}, \quad S_V = \frac{P}{T}, \quad S_{N_i} = -\frac{\mu_i}{T}, \quad \dot{E} = q - N_a = q - P\dot{V}.$$

Покажем, как из термодинамических балансов вытекают выражения для производства энтропии.

Теплообмен. Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух равновесных подсистем с температурами T_1 и T_2. Поток тепла между ними зависит от T_1 и T_2, так что

$$\operatorname{sign} q(T_1, T_2) = \operatorname{sign}(T_1 - T_2), \quad q(T_1, T_2) = 0/T_1 = T_2. \tag{1.53}$$

В соответствии с (1.51) имеем

$$\dot{S}_1 = -\frac{q}{T_1}, \quad \dot{S}_2 = \frac{q}{T_2},$$

так что

$$\dot{S} = \sigma = q(T_1, T_2)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right). \tag{1.54}$$

В силу равенства (1.53) производство энтропии неотрицательно.

Пренос тепла в слое. Найдем производство энтропии в слое теплопроводного вещества. Для этого выражение (1.54) запишем через градиент темпреатуры как

$$\sigma = q\nabla\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{q\nabla(T)}{T^2}.$$

Если справедлив закон Фурье и тепловой поток пропорционален градиенту температуры с коэффициентом $-k$, то

$$\sigma = \frac{k}{T^2}(\nabla T)^2.$$

Изотермический массоперенос. Для двух однородных подсистем, имеющих температуру T и химические потенциалы μ_1 и μ_2, g_k — поток k-го вещества. Согласно (1.51)

$$\dot{S}_j = -\frac{1}{T}\sum_k g_k(\mu_1, \mu_2)\mu_{kj}, \quad j = 1, 2.$$

Скорость изменения суммарной энтропии:

$$\sigma = \dot{S} = \dot{S}_1 = \dot{S}_2 = \frac{1}{T}\sum_j g_j(\mu_1, \mu_2)(\mu_{2j} - \mu_{1j}). \tag{1.55}$$

При этом законы массопереноса удовлетворяют условию неотрицательности σ при μ_1, не равном μ_2.

Неизотермический массоперенос. Пусть температуры подсистем различны, как и их химические потенциалы, и между ними осуществляется массоперенос. Совершенно аналогично тому, как это было сделано в рассмотренных выше случаях, производство энтропии в системе можно записать в форме

$$\sigma = \sum_k \left[g_k\left(\frac{\mu_1 k}{T_1} - \frac{\mu_2 k}{T_2}\right) + q_k\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right], \tag{1.56}$$

где q_k — приток энергии с потоком вещества, $g_k(\mu_1, \mu_2, T_1, T_2)$.

Деформационное взаимодействие. Рассмотрим две подсистемы, разделенные поршнем; P_1 и P_2 — давления в подсистемах, T — их температура. Разность давлений вызывает перемещение поршня. Обозначим через v скорость изменения объема каждой из подсистем, связанную с перемещением поршня.

Производство энтропии определяется отношением энергии, рассеивающейся при перемещении поршня $q = v(P_1, P_2)(P_1 - P_2)$, к температуре

$$\sigma = \frac{v(P_1, P_2)}{T}(P_1 - P_2). \tag{1.57}$$

Вид зависимости скорости от перепада давлений определяется характером трения поршня о стенки.

Дросселирование газа. При прохождении газа через сужающее устройство (дроссель) его давление изменяется от P_1 до P_2, а расход g зависит от перепада давлений. Будем предполагать, что поток тепла q подводится к системе так, что температура газа не изменяется.

$$\sigma = g(s_2 - s_1) + \frac{q}{T}.$$

Ввиду того, что в изотермическом процессе подводимое тепло равно

$$q = g(h_2 - h_1),$$

а также учитывая, что химические потенциалы имеют вид

$$\mu_i = h_i - Ts_i, \quad i = 1, 2,$$

получим

$$\sigma = g(P_1, P_2)(\mu_1 - \mu_2)/T. \tag{1.58}$$

Для идеальных газов энтальпия зависит только от температуры, поэтому

$$\sigma = g(P_1, P_2)(s_1 - s_2) = g(P_1, P_2) R \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right). \tag{1.59}$$

Процесс химического превращения. Рассмотрим термодинамическую систему, в которой при постоянных температуре T и давлении P происходит химический процесс вида

$$\sum_{i \in I_{j1}} \alpha_{ij} B_i, \ \underset{\mathrm{k_{2j}}}{\overset{\mathrm{k_{1j}}}{\rightleftharpoons}} \ \sum_{i \in I_{j2}} \alpha_{ij} B_i, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1.60}$$

Здесь j — номер реакции, B_i — участвующие компоненты, I_{j1} и I_{j2} — множество индексов исходных компонентов и конечных продуктов реакции, α_{ij} — стехиометрические коэффициенты (они положительны для продуктов реакции и отрицательны для исходных компонент), k_{1j} и k_{2j} — константы скоростей прямых и обратных реакций.

Если через W_j обозначить скорость j-й реакции, то изменение числа молей i-го вещества в реакционном объеме определяется как

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j \alpha_{ij} W_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.61}$$

Производство энтропии вследствие химического превращения имеет вид

$$\sigma_x = -\frac{1}{T} \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{T} \sum_j W_j A_j, \tag{1.62}$$

где $A_j = -\sum\limits_i \alpha_{ij} \mu_i$ — химическое сродство j-й реакции. В обратимой реакции в состоянии равновесия $A_j = 0$. Скорости реакций в свою очередь зависят от концентраций, температуры и давления.

Тепломассоперенос. Подсистемы, контактирующие друг с другом, имеют разные температуры T_1 и T_2 и векторы химических потенциалов μ_1 и μ_2 с составляющими μ_{ji} $(j = 1, 2; i = 1, \ldots, n)$. Эти различия вызывают поток тепла q и векторный поток вещества $g =$

$\{g_1, \ldots, g_h\}$, каждый из которых зависит и от температуры T_j и от химических потенциалов μ_j. Производство энтропии примет форму

$$\sigma = q(T_1, T_2, \mu_1, \mu_2)\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) + \sum_i g_i(T_1, T_2, \mu_1, \mu_2)\left(\frac{\mu_{i2}}{T_2} - \frac{\mu_{i1}}{T_1}\right). \tag{1.63}$$

Смешение потоков. Рассмотрим первоначально случай, когда в системе смешиваются потоки чистых веществ, имеющих одинаковую температуру T. Обозначим через N_k число молей k-го вещества, поступающего в систему в единицу времени (мольный расход). Процесс смешения необратим, производство энтропии может быть найдено как разность между энтропией выходного и входных потоков. С учетом неизменности их энтальпии получим

$$\sigma = -\frac{1}{T}\sum_k N_k(\mu_k - \mu_k^0). \tag{1.64}$$

Для идеальных газов и идеальных растворов разница между химическим потенциалом k-го вещества в смеси $\mu_k(x_k)$ и его потенциалом в чистом виде μ_k^0 равна $RTx_k \ln x_k$, так что

$$\sigma = -R\sum_k N_k x_k \ln x_k,$$

где

$$x_k = \frac{N_k}{\sum\limits_\nu N_\nu}.$$

В более общем случае в смеситель поступают потоки с мольными расходами g_j, каждый из которых содержит x_{kj} мольных долей k-го компонента. Химический потенциал k—того компонента в j-м потоке обозначим как μ_{kj}. Состав смеси на выходе определяется соотношением

$$x_k = \frac{\sum\limits_j g_j x_{kj}}{\sum\limits_j g_j} = \frac{N_k}{\sum\limits_\nu N_\nu}, \tag{1.65}$$

а производство энтропии — соотношением

$$\sigma = -\frac{1}{T}\left(\sum_k \mu_k(x_k)\sum_j g_j x_{kj} - \sum_k\sum_j g_j x_{kj}\mu_{kj}(x_{kj})\right).$$

Здесь $\mu_k(x_k)$ — химический потенциал k-го вещества в выходном потоке. С учетом (1.64)

$$\sigma = -\frac{1}{T}\left[\sum_k N_k\mu_k(x_k) - \sum_j g_j x_{kj}\mu_{kj}(x_{kj})\right],$$

или, переходя к приращениям химических потенциалов,

$$\sigma = -\frac{1}{T}\left[\sum_k N_k(\mu_k(x_k) - \mu_k^0) - \sum_j g_j x_{kj}(\mu_{kj}(x_{kj}) - \mu_k^0)\right].$$

При смешении двух однородных потоков идеального газа с расходами g_1 и g_2 и температурами T_1 и T_2 производство энтропии равно

$$\sigma_{\text{см}} = \left(g_1 \ln\frac{T_{\text{см}}}{T_1} + g_2 \ln\frac{T_{\text{см}}}{T_2}\right) C_p,$$

где температура смеси $T_{\text{см}}$ определяется из уравнения теплового баланса

$$T_{\text{см}}(g_1 + g_2) = T_1 g_1 + T_2 g_2.$$

Теплоемкость потоков C_p предполагается одинаковой, как и их давление P.

Учет смешения в химическом реакторе. Для изотермического реактора периодического действия, в который в момент $t = 0$ загружаются чистые компоненты, в качестве производства энтропии естественно принять отношение прироста энтропии смеси к продолжительности процесса τ. В изотермическом процессе прирост энтропии равен

$$\Delta S = S(\tau) - S(0) = \Delta S_{\text{см}} + \Delta S_x. \tag{1.66}$$

Первое слагаемое в этом выражении — прирост энтропии за счет смешения

$$\Delta S_{\text{см}} = -\frac{1}{T}\sum_k N_{k0}(\mu_k(x_k) - \mu_k^0).$$

Здесь N_{k0} — число молей k-го компонента в смеси в момент $t = 0$. Для любого момента t

$$x_k(t) = \frac{N_k(t)}{\sum\limits_\nu N_\nu(t)},$$

x_{k0} — начальная концентрация k-го компонента.

Прирост энтропии за счет протекания химической реакции подсчитывается через химические потенциалы и концентрации в момент окончания процесса τ:

$$\Delta S_x = -\frac{1}{T}\sum_k \Big(\overline{N_k}\mu_k(\overline{x_k}) - N_{k0}\mu_k(x_{k0})\Big).$$

Число молей в момент τ для k-го компонента зависит от стехиометрических коэффициентов и скоростей реакции как

$$\overline{N_k} = N_{k0} + \int\limits_0^\tau \sum_j \alpha_{kj} W_J(x(t))dt.$$

Суммируя приросты энтропии, получим

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\tau} = -\frac{1}{T}\sum_k (\overline{N_k}\mu_k(\overline{x}_k) - N_{k0}\mu_k^0).$$

Для реактора идеального смешения непрерывного действия, в который подаются чистые компоненты с расходами g_{k0}, производство энтропии можно представить как сумму двух составляющих:

$$\sigma = \sigma_{\text{см}} + \sigma_x. \tag{1.67}$$

Обозначая через $\overline{x}$ вектор концентраций на выходе из реактора (а значит, и в его объеме), получим для первого слагаемого в (1.67) (см. (1.64))

$$\sigma_{\text{см}} = -\frac{1}{T}\sum_k g_{k0}(\mu_k(\overline{x}_k) - \mu_k^0).$$

Второе слагаемое, аналогично выражению (1.62), равно

$$\sigma_x = -\frac{1}{T}\sum_k \mu_k(\overline{x}_k)\sum_j \alpha_{kj}W_j(\overline{x}) = \frac{1}{T}\sum_j W_j(\overline{x})A_j.$$

В свою очередь вектор $\overline{x}$ определяется из уравнений материального баланса

$$\overline{x}_k = \frac{N_k + \sum\limits_j \alpha_{kj}W_j(\overline{x})}{\sum\limits_\nu (N_\nu + \sum\limits_j \alpha_{\nu j}W_j(\overline{x})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Циклические процессы. В циклических процессах переменные, характеризующие состояние системы, периодически принимают одно и то же значение, так что справедливы условия цикличности

$$E(0) = E(\tau), \quad S(0) = S(\tau), \quad N_k(0) = N_k(\tau), \quad k = 1, \ldots, K.$$

В силу условий цикличности интегралы за период $[0, \tau]$ от правых частей в уравнениях термодинамических балансов (1.45)–(1.47) равны нулю. Если режим системы статический, то переменные состояния неизменны и левые части уравнений термодинамических балансов равны нулю.

1.4. Связь эффективности термодинамических систем с производством энтропии

Уравнение (1.47) позволяет качественно проследить связь показателей эффективности процесса с производством энтропии σ. Действительно, рассмотрим установившийся процесс, в котором левая часть уравнения (1.47) равна нулю (в каждый момент времени или в среднем за цикл). Согласно принятому выше правилу положительным считается направление потоков вещества и энергии, поступающих в систему, а отрицательным — выходящих из нее. Организация процессов в системе определяет ее необратимость и, в силу уравнения (1.47), сказывается при фиксированных параметрах входных потоков на характеристике выходных. Рост σ приводит к росту энтропии выходных потоков, при прочих равных условиях этот рост уменьшает температуру потоков на выходе либо при фиксированной температуре увеличивает отходящий поток тепла. И в том, и в другом случае это приводит к уменьшению механической работы, вырабатываемой системой, или работы разделения. Энергетическая эффективность термодинамической системы, характеризующаяся отношением полезной работы, вырабатываемой в ней, к затратам энергии, достигает максимума в обратимых процессах, когда $\sigma = 0$. В таблице 1.1 даны уравнения термодинамических балансов и вытекающие из этих уравнений зависимости между показателем эффективности процесса и производством энтропии σ для некоторых термодинамических систем. Покажем последовательность получения этих зависимостей на примерах конкретных систем.

Тепловая машина. Тепловая машина преобразует тепло, получаемое от резервуара с температурой T_+ (горячего источника), в работу. Состояние рабочего тела меняется циклично, при этом оно отдает часть энергии холодному источнику с температурой T_-. Показателем эффективности может служить отношение произведенной работы к количеству тепла, отобранного у горяего источника (термический КПД $\eta = p/q_+$).

Введя обозначения для средних интенсивностей потоков тепла, отбираемого от горячего (q_+) и отдаваемого холодному (q_-) источникам, а также для мощности p, запишем уравнения балансов энергии и энтропии для рабочего тела:

$$q_+ - q_- - p = 0, \tag{1.68}$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0. \tag{1.69}$$

Нули в правых частях этих уравнений соответствуют тому факту, что состояние рабочего тела либо вообще не меняется во времени (паровые и газовые турбины), либо меняется циклически (паровые машины).

Из уравнения (1.68) выразим термический КПД как

$$\eta = \frac{p}{q_+} = 1 - \frac{q_-}{q_+}.$$

В свою очередь из (1.69) следует, что

$$\frac{q_-}{q_+} = \frac{T_-}{T_+} + \sigma \frac{T_-}{q_+}.$$

Таблица 1.1

Термодинамические балансы и показатели эффективности

Процесс	Уравнения термодинамических балансов	Показатель эффективности
Тепловая машина (рис. 1.2, *а*)	$q^+ - q^- - P = 0, \quad \dfrac{q^+}{T^+} - \dfrac{q^-}{T^-} + \sigma = 0$	$\eta = \dfrac{P}{q^+} = \dfrac{1 - T^-/T^+}{1 + T^-\sigma/P}$
Тепловой насос и холодильник (рис. 1.2, *б*)	$q^+ + q^- - P = 0, \quad \dfrac{q^+}{T^+} + \dfrac{q^-}{T^-} + \sigma = 0$	$\eta_r = \dfrac{q^-}{\lvert P\rvert} = \dfrac{1}{T^+/T^- - 1} - \dfrac{T^+\sigma}{\lvert P\rvert},\ \eta_{hp} = \dfrac{q^+}{\lvert P\rvert} = 1 + \eta_r$
Диффузионно-механический цикл (рис. 1.2., *в*)	$q^+ + q^- - P = 0, \quad g^+ + g^- = 0,$ $q^+ + q^- - \mu^+ g^+ - \mu^- g^- + \sigma T = 0$	$\eta_d = \dfrac{P}{g^+} = \mu^+ - \mu^- - \dfrac{T\sigma}{g^+}, \quad \eta_r = \dfrac{g^-}{P} = \dfrac{1 - T\sigma/\lvert P\rvert}{\mu^+ - \mu^-}$
Циклическое разделение бинарных смесей (рис. 1.2, *г*)	$q^{cb} + q^c + q^b - q^o - P = 0, g_c^{cb} - g^c = 0,$ $g_b^{cb} - g^b = 0, \quad g^{cb} = g_c^{cb} + g_b^{cb},$ $1/T(q^{cb} + q^c + q^b + q^o - \mu_c^- g_c^{cb} - \mu_b^- g_b^{ab} -$ $-\mu_c^+ g^c - \mu_b^+ g^b) + \sigma = 0$	$\eta = \dfrac{g^{cb}}{\lvert P\rvert} = \dfrac{g^{cb}}{\lvert g^c\rvert(\mu_c^+ - \mu_c^-) + \lvert g^b\rvert(\mu_b^+ - \mu_b^-) + T\sigma}$
Нециклическое разделение бинарных смесей (рис. 1.2, *д*)	$g_0 = g_1 + g_2, \quad g_0 x_0 - g_1 x_1 - g_2 x_2 = 0,$ $q^+ - q^- - g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0,$ $\dfrac{q^+}{T^+} - \dfrac{q^-}{T^-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0$	$\eta = \dfrac{g_1}{q^+} = \dfrac{1}{F}\left(1 - \dfrac{T^-}{T^+}\right) - \sigma \dfrac{T^-}{Fq^+},$ $\Delta S_{0i} = \Delta S_{cm0} - \Delta S_{cmi} + C_p \ln\left(\dfrac{T_0}{T_i}\right) - C_p \ln\left(\dfrac{P_0}{P_i}\right),$ $F = T^-(\Delta S_{01} + a\Delta S_{02}) - \Delta h_{01} - a\Delta h_{02},$ $\Delta h_{0i} = C_p(T_0 - T_i), \ \ i = 1, 2$
Абсорбционно-десорбционный цикл (рис. 1.2, *е*)	$q^a + q^s = 0, \quad g^a + g^s = 0,$ $q^a/T_a + q^s T_s - \mu_a g^a/T_a - \mu_s g^s/T_s + \sigma = 0$	$\eta = \dfrac{g^s}{q^s} = \dfrac{1/T_a - 1/T_s}{\mu_s/T_s - \mu_a/T_a} - \sigma \dfrac{1/g^a}{\mu_s/T_s - \mu_a/T_a}$
Ректификация (рис. 1.2, *ж*)	$g_g h_g + g_b h_b + g_f h_f + q^+ + q^- = 0,$ $g_g x_{gi} + g_b x_{bi} + g_f x_{fi} = 0, \quad i = 1, \ldots, l,$ $g_g s_g + g_b s_b + g_f s_f + q^+/T_b + q^-/T_g + \sigma = 0$	$\eta = \dfrac{g_f}{q^+} = \dfrac{g_f(1/T_g - 1/T_b)}{\sum\limits_{i=b,g,f} (g_i s_i - g_i h_i/T_g) + \sigma}$
Двигатель внутреннего сгорания (рис. 1.2, *з*)	$g_1 h_1 + g_2 h_2 + q_0 - P = 0,$ $g_1 s_1 + g_2 s_2 + q_0/T + \sigma = 0, g_1 + g_2 = 0$	$\eta = P/g_1 = g^1 - g^2 - \sigma T/g_1$ $g^i = h_i - Ts_i, \quad i = 1, 2$

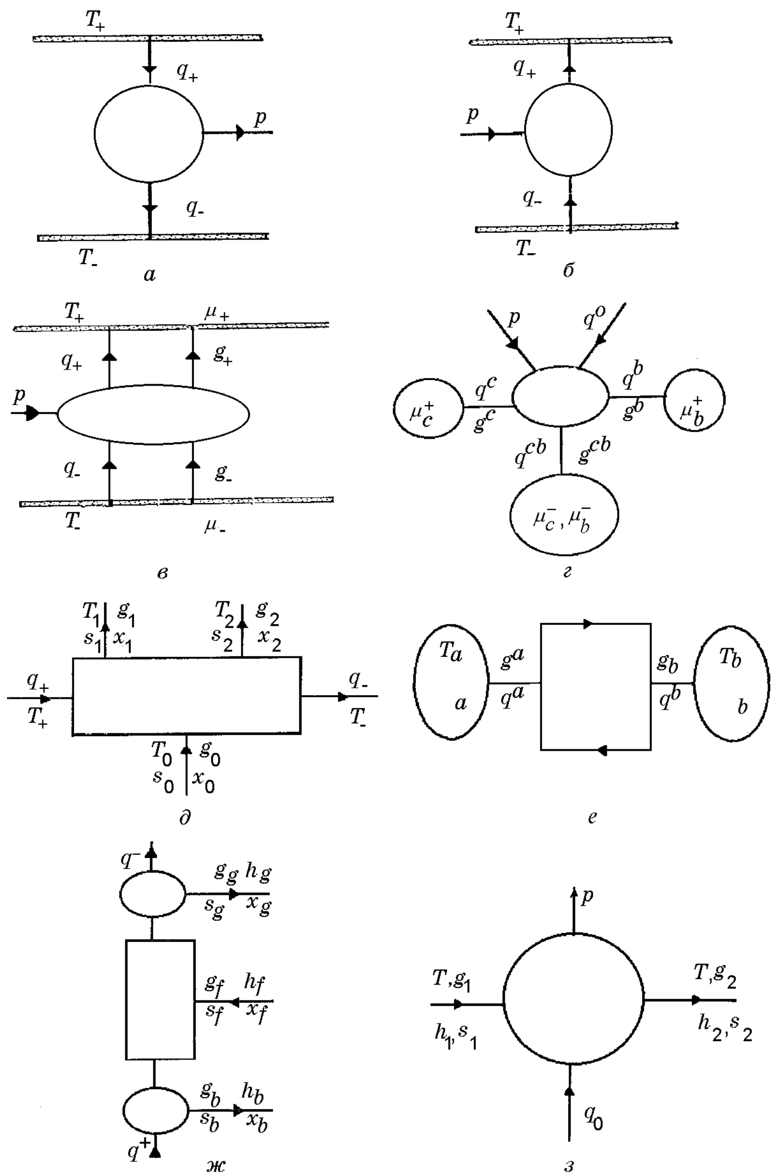


Рис. 1.2. Структуры потоков для систем из табл. 1.1

Таким образом,

$$\eta = \left(1 - \frac{T_-}{T_+}\right) - \sigma\frac{T_-}{q_+} = \frac{1 - T_-/T_+}{1 + \sigma T_-/N}. \tag{1.70}$$

При отсутствии необратимости ($\sigma = 0$) термический КПД равен КПД Карно:

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_-}{T_+}.$$

Если же есть возможность как-то оценить производство энтропии, т.е. найти σ_0 такое, что реальное $\sigma > \sigma_0 > 0$, то, подставив σ_0 в формулу (1.70), можно найти более точную оценку для η. В гл. 4 показано, как при заданной мощности p и кинетике теплопереноса такая оценка может быть найдена.

Стационарный теплообмен. Рассмотрим термодинамическую систему (рис. 1.3), состоящую из двух потоков, обменивающихся друг с другом теплом. Будем предполагать, что изменением давления потоков можно пренебречь. Обозначим через g_i, C_i, T_{i0}, $T_{i\text{в}}$, s_{i0}, $s_{i\text{в}}$ — расход, теплоемкость, температуру и энтропию i-го потока на входе и выходе соответственно ($i = 1, 2$), $W_i = C_i g_i$ водяной эквивалент i-го потока.

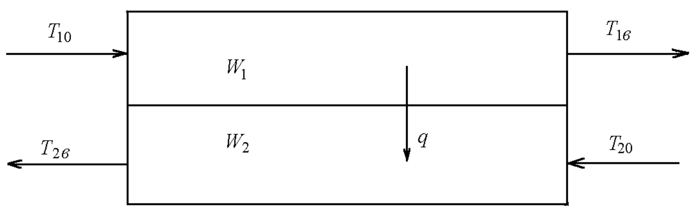


Рис. 1.3. Схема организации стационарного теплообмена

Уравнения баланса энергии и энтропии имеют форму

$$\begin{aligned} &W_1(T_{10} - T_{1\text{в}}) + W_2(T_{20} - T_{2\text{в}}) = 0, \\ &g_1(s_{10} - s_{1\text{в}}) + g_2(s_{20} - s_{2\text{в}}) = \sigma. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Здесь σ — производство энтропии за счет необратимости процессов теплопереноса.

Пусть нагрузка теплообменника $q = W_1(T_{10} - T_{1\text{в}})$ задана, тогда из (1.71) следуют равенства

$$g_1 = \frac{q}{C_1(T_{10} - T_{1\text{в}})}, \quad g_2 = -\frac{q}{C_2(T_{20} - T_{2\text{в}})}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение баланса энтропии получим

$$\frac{s_{1\text{в}} - s_{10}}{C_1(T_{10} - T_{1\text{в}})} - \frac{s_{2\text{в}} - s_{20}}{C_2(T_{20} - T_{2\text{в}})} - \frac{\sigma}{q} = 0.$$

Если потоки по своим свойствам близки к идеальным газам, то при изохорическом теплообмене приросты энтропии потоков равны

$$s_{1\text{в}} - s_{10} = C_1 \ln\left(\frac{T_{1\text{в}}}{T_{10}}\right), \quad s_{2\text{в}} - s_{20} = C_2 \ln\left(\frac{T_{2\text{в}}}{T_{20}}\right).$$

Так что уравнение (1.71) примет форму

$$\frac{\ln(T_{20}/T_{20})}{T_{20} - T_{2\text{в}}} - \frac{\ln(T_{10}/T_{1\text{в}})}{T_{10} - T_{1\text{в}}} = \frac{\sigma}{q}. \tag{1.72}$$

Отношение $\Theta_i = \dfrac{T_{i0} - T_{i\text{в}}}{\ln(T_{i0}/T_{i\text{в}})}$ имеет размерность температуры, оно монотонно зависит от средней температуры i-го потока, а при малой разности температур сколь угодно близко к этой средней температуре ($\Theta_i \approx 0,5(T_{i0} + T_{i\text{в}})$. Будем называть Θ_i эффективной температурой i-го потока. Из (1.72) следует, что с уменьшением необратимости процесса эффективная температура нагреваемого потока возрастает. Действительно,

$$\frac{1}{\Theta_2} - \frac{1}{\Theta_1} = \frac{\sigma}{q}.$$

При заданной тепловой нагрузке и температуре T_{10} величина Θ_1 фиксирована. Минимизация производства энтропии σ за счет выбора W_1, W_2 и за счет организации теплообмена позволяет при фиксированной поверхности теплообменника увеличить эффективную температуру второго потока, а значит, при заданной T_{20} повысить $T_{2\text{в}}$.

Процесс термического разделения двухкомпонентной смеси. Рассмотрим процесс разделения смеси, состоящей из двух компонент. Обозначим через $q_i, T_i, s_i, p_i, h_i, x_i, \mu_i$ — расход, температуру, энтропию, давление, концентрацию ключевого компонента и его химический потенциал в i-м потоке. Примем индекс $i = 0$ для разделяемого потока, $i = 1$ для потока, обогащенного ключевым веществом (так что $x_1 > x_0$), индекс $i = 2$ для потока, очищенного от ключевого вещества ($x_2 < x_0$). К схеме разделения подводится тепловой поток q_+, от источника с температурой T_+ и отводится тепло q_- источнику с температурой T_-. Производство энтропии обозначим через σ.

Запишем первоначально уравнения материального, энергетического и энтропийного балансов для схемы разделения в целом, а затем рассмотрим балансовые соотношения только для рабочего тела. В последнем случае масса рабочего тела за цикл остается постоянной и производство энтропии связано только с диссипативными потоками тепло- и массопереноса.

Термодинамические балансы схемы:

$$\begin{gathered} g_0 = g_1 + g_2,\ g_0 x_0 - g_1 x_1 - g_2 x_2 = 0, \\ q_+ - q_- + g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0, \\ \frac{q_+}{t_+} - \frac{q_-}{t_-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0. \end{gathered} \tag{1.73}$$

Два последних равенства удобно переписать так, чтобы в них вошли не абсолютные значения, а приращения энтальпии и энтропии. С учетом (1.73), выразив g_0 через g_1 и g_2, получим

$$q_+ - q_- + g_1 \Delta h_{01} + g_2 \Delta h_{02} = 0, \tag{1.74}$$

$$g_2 \Delta s_{02} + g_1 \Delta s_{01} + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{t_-} + \sigma = 0. \tag{1.75}$$

Здесь $\Delta s_{01} = s_0 - s_1$, $\Delta s_{02} = s_0 - s_2$ — приросты энтропий, а $\Delta h_{01} = h_0 - h_1$, $\Delta h_{02} = h_0 - h_2$ — приросты энтальпий соответствующих потоков.

Как правило, концентрации ключевого вещества в потоках заданы, а в качестве термического КПД процесса разделения может быть принято отношение расходов целевого потока g_1 и потока тепла q_+:

$$\eta = \frac{g_1}{q_+}. \tag{1.76}$$

Из уравнений материального баланса (1.73) выразим g_2 через g_1. Обозначим $a = (x_1 - x_0)/(x_0 - x_2)$. Тогда расход второго потока $g_2 = a g_1$. Уравнения (1.74), (1.75) перепишутся в форме

$$q_+ - q_- + g_1(\Delta h_{01} + a \Delta h_{02}) = 0, \tag{1.77}$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_1(\Delta s_{01} + a \Delta s_{02}) + \sigma = 0. \tag{1.78}$$

Исключим из (1.77) q_-, получим $q_- = q_+ + g_1(\Delta h_{01} + a\Delta h_{02})$ и подставим это выражение в (1.78). Приходим к равенству

$$q_+ \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{t_+} \right) = g_1 \left(\Delta s_{01} + a \Delta s_{02} - \frac{\Delta h_{01} + a \Delta h_{02}}{T_-} \right) + \sigma,$$

из которого следует, что

$$\eta = \frac{g_1}{q_+} = \frac{1}{F} \left(1 - \frac{T_-}{T_+} \right) - \sigma \frac{T_-}{F q_+}. \tag{1.79}$$

Здесь $F = T - (\Delta s_{01} + a\Delta s_{02}) - \Delta h_{01} - a h_{02}$. Приращения энтальпии и энтропии, входящие в F, имеют вид

$$\Delta h_{0i} = C_p (T_0 - T_i), \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta s_{0i} = C_p \ln \frac{T_0}{T_i} - R \ln \frac{P_0}{P_i} + \Delta s_{\text{см}0} - \Delta s_{\text{см}i}, \quad i = 1, 2,$$

Энтропия смешения одного моля смеси i-го потока:

$$\Delta s_{\text{см}i} = R[(1 - x_i) \ln(1 - x_i) + x_i \ln x_i], \quad i = 0, \ldots, 2.$$

Первое слагаемое в выражении (1.79), как и отношение T_-/F, зависят только от параметров внешних потоков. В обратимом процессе производство энтропии σ равно нулю, и величина термического КПД достигает максимума, равного первому слагаемому в (1.79). Оценив снизу тем или иным способом необратимость процесса, т.е. найдя минимально возможную при данной производительности в кинетике тепло- и массопереноса величину σ, можно уточнить обратимую оценку термического КПД процесса разделения.

В том случае, когда разделение осуществляется за счет циркуляции рабочего тела с поочередным поглощением им примеси в первом полуцикле (абсорбция или адсорбция) и выделением во втором полуцикле (десорбция), выражение для термического КПД, близкое к (1.79), но включающее химические потенциалы потоков, можно получить из термодинамических балансов для рабочего тела.

Так как параметры рабочего тела меняются периодически, то изменение его массы ΔM, внутренней энергии ΔE и энтропии ΔS за цикл равны нулю. Из этих условий следует, что расход вещества, поглощенного из смеси в первом полуцикле, равен g_1. Уравнения термодинамических балансов примут форму

$$q_+ - q_1 + g_1 \Delta h_{01} = \frac{\Delta E}{\tau} = 0, \tag{1.80}$$

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_1 \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0} \right) + \sigma = \frac{\Delta S}{\tau} = 0. \tag{1.81}$$

Исключая из (1.80) $q_1 = q_+ + g_1 \Delta h_{01}$ и подставляя в (1.81), получим термический КПД цикла разделения в форме

$$\eta = \frac{g_1}{q_+} = \frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{T_-}{T_+} \right) - \sigma \frac{T_-}{q_+ \varphi}. \tag{1.82}$$

Функция φ зависит, как и F в выражении (1.79), от параметров входного потока и потока, обогащенного целевым компонентом

$$\varphi = T_- \left(\frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_0}{T_0} \right) - \Delta h_{01}.$$

В том частном случае, когда температуры разделяемого потока и первого потока одинаковы ($T_0 = T_1 = T$), приращение энтальпии $\Delta h_{01} = 0$ и функция φ примет вид

$$\varphi = \frac{T_-}{T} (\mu_1 - \mu_0).$$

Для оценки производства энтропии σ весь процесс можно разбить на стадии. Например, абсорбционно-десорбционный цикл можно условно разбить на стадии тепло- и массопереноса. Оценив снизу производство энтропии σ_+ на стадии теплообмена, когда горячий раствор, выходящий из десорбера, отдает свое тепло раствору, поступающему в десорбер, производство энтропии σ_2 на стадии абсорбции, σ_3 на стадии нагрева раствора в десорбере внешним источником и σ_4 на стадии выделения примеси в десорбере, можно найти $\sigma = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i$. Эта величина после подстановки в (1.82) позволяет найти необратимую верхнюю оценку для термического КПД цикла.

Диффузионно-механический и термо-диффузионный циклы. Механическая работа может быть получена не только за счет передачи тепла от более горячего к более холодному резервуару, как это происходит в цикле тепловой машины, но и за счет передачи вещества от тела с большим к телу с меньшим химическим потенциалом. Рассмотрим систему, состоящую из двух источников, в одном из которых химический потенциал некоторого вещества равен μ_+, а в другом μ_- (для определенности $\mu_+ > \mu_-$) и рабочего тела, параметры которого циклически изменяются. Как и ранее, запишем балансы вещества, энергии и энтропии, учтя, что в среднем за цикл внутренняя энергия, энтропия и количество молей N вещества для рабочего тела не изменяются.

Получим:

а) для энергии

$$q_+ - q_- - P = \dot{E} = 0; \tag{1.83}$$

б) для вещества

$$g_+ - g_- = \dot{N} = 0; \tag{1.84}$$

в) для энтропии

$$\frac{1}{T}(q_+ - q_- - \mu_+ g_+ + \mu_- g_-) + \sigma = \dot{S} = 0. \tag{1.85}$$

Здесь принято, что температуры потоков g_+ и g_- одинаковы.

В качестве критерия эффективности цикла может быть принято отношение средней мощности к потоку g_+:

$$\eta = \frac{P}{g_+}.$$

Из условий (1.83)–(1.85), исключая g_-, g_+ и q_-, получим

$$\eta = \mu_+ - \mu_- - \sigma\frac{T}{g} = \frac{\mu_+ - \mu_-}{1 + \sigma T/P}. \tag{1.86}$$

Обратимая оценка показателя эффективности диффузионно-механического цикла равна разности химических потенциалов $\mu_+ - \mu_-$. Этого следовало ожидать по смыслу химического потенциала как величины свободной энергии Гиббса, отнесенной к одному молю вещества. Исследуя необратимость массопереноса и оценив величину σ, можно с использованием (1.86) существенно улучшить обратимую оценку и связать показатель эффективности с коэффициентами массопередачи и другими факторами, определяющими необратимость.

Читателю предлагается проделать аналогичные выкладки в том случае, когда температуры резервуаров различны, а показатель эффективности цикла равен отношению механической мощности к суммарному потоку энергии, отбираемой от одного из источников:

$$\eta = \frac{P}{g_+\mu_+ + q_+}.$$

В целом ряде процессов происходит затрата высокопотенциального тепла с температурой T_+ с целью передачи потока g от источников с низким потенциалом μ_- к источнику с высоким потенциалом μ_+ [48]. Из полученных выше выражений (1.48)–(1.50) следует, что коэффициент эффективности таких термо-диффузионных циклов равен

$$\eta = \frac{g}{q} = \frac{1/T_- - 1/T_+}{\mu_+/\tilde{T}_+ - \mu_-/\tilde{T}_-} - \frac{\sigma}{q(\mu_+/\tilde{T}_+ - \mu_-/\tilde{T}_-)}. \tag{1.87}$$

Использование уравнений балансов для выделения области реализуемых значений параметров. Рассмотрим стационарный процесс, в котором $\dot{E} = \dot{N} = \dot{S} = 0$. В этом случае из уравнений термодинамических балансов (1.45)–(1.47) и неравенства $\sigma \geq \sigma_{\min}$ вытекают условия, которым должны удовлетворять реализуемые значения переменных в стационарном режиме термодинамического процесса:

$$\sum_j g_j h_j + \sum_j q_{dj} + \sum_j q_j - N_a = 0, \tag{1.88}$$

$$\sum_j g_j x_{ij} + \sum_j g_{dj} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu = 0, \tag{1.89}$$

$$\sum_j g_j s_j + \sum_j \frac{q_{dj} - \sum\limits_i g_{dj}\mu_{dij}}{T_d j} + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} \leq -\sigma_{\min}. \tag{1.90}$$

При этом нужно учесть, что величина $\sigma_{\min}$ в свою очередь зависит от интенсивности потоков, коэффициентов кинетики и других переменных.

1.5. Последовательность решения оптимизационных задач термодинамики

Как было видно для всех рассмотренных примеров, из уравнений термодинамических балансов следует, что показатель эффективности использования энергии в термодинамических системах (технический КПД) монотонно уменьшался с ростом производства энтропии σ, т.е. с ростом необратимых потерь энергии. Величина σ зависит от кинетики тепло- и массообменных процессов, а также кинетики химических реакций. Уравнения кинетики связывают диссипативные потоки энергии и вещества с интенсивными переменными взаимодействующих подсистем. Связь показателя эффективности с производством энтропии дана в табл. 1.1.

Задача оптимальной в термодинамическом смысле организации процесса состоит в том, чтобы выбором температур, давлений, химических потенциалов взаимодействующих подсистем, а также коэффициентов в уравнениях кинетики добиться минимума производства энтропии при заданной интенсивности потоков. В распределенных стационарных системах (трубчатых теплообменниках, реакторах, колонных аппаратах и пр.) интенсивные переменные меняются по длине, и требуется найти оптимальный закон изменения этих переменных вдоль аппарата. В нестационарных процессах требуется найти закон изменения интенсивных переменных во времени.

Важным свойством производства энтропии в системе является ее аддитивность, что позволяет на первом этапе разбить сложную систему на отдельные подсистемы, оптимизировать каждую из подсистем при тех или иных параметрах поступающих и выходящих из нее потоков. На следующем этапе требуется так согласовать средние интенсивности потоков, чтобы удовлетворить системным связям и минимизировать суммарное производство энтропии.

Как правило, для реализации найденных законов изменения температур, давлений, химических потенциалов мы можем изменять объемы подсистем, коэффициенты тепло- и массообмена. Самым простым и самым распространенным способом изменения коэффициентов тепло- и массообмена является установление и разрыв контактов между подсистемами. В тех случаях, когда перечисленные способы управления не позволяют реализовать оптимальное решение, величина σ^*, соответствующая этому решению, дает оценку снизу для производства энтропии. Таким образом, при заданной интенсивности процесса нельзя получить производство энтропии, меньшее, чем σ^*. Подстановка σ^* в выражение для термического КПД или другого показателя эффективности, монотонно зависящего от σ, позволяет получить верхнюю оценку, которую при заданной интенсивности нельзя превзойти.

Естественно, что эта оценка ниже обратимой, она зависит от производительности, коэффициентов тепло- и массообмена, т.е. от конструкции и размеров аппарата, что позволяет сопоставить термодинамические показатели со стоимостными и найти компромиссное решение. Подстановка в условия (1.88)–(1.90) позволяет выделить область реализуемости необратимых процессов.

Глава 2

ПРОЦЕССЫ МИНИМАЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ И НЕОБРАТИМЫЕ ОЦЕНКИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СИСТЕМ

Из примеров, приведенных в п. 1.5, видно, что предельные возможности термодинамических систем ограничены необратимостью протекающих в них процессов. Показателем этой необратимости является диссипация (производство энтропии).

В данной главе рассмотрены процессы, которые при заданной средней интенсивности (средней величине движущих сил) имеют минимальную диссипацию. Таким образом, ставится задача о таком распределении движущих сил во времени или в пространстве, при котором необратимость процесса, оцениваемая производством энтропии, была бы минимальна. В ряде случаев точный минимум найти не удается или для его определения требуется слишком много исходных данных. В этом случае стремятся получить оценку диссипации снизу.

Так как в сложной системе производство энтропии аддитивно связано с производством энтропии в каждом из ее элементов, то при проектировании такой системы достаточно оптимально распределить между подсистемами значение средней интенсивности процессов. Каждому значению средней интенсивности соответствует минимально возможная величина диссипации энергии. При проектировании сложных систем необходимо знать предельные возможности входящих в них подсистем.

Первоначально рассмотрим задачу о минимальной диссипации в общем виде. Затем полученные соотношения конкретизируем для целого ряда процессов (тепло- и массопереноса, дросселирования химических превращений и пр.).

Процессы минимальной диссипации тесно связаны с одной из центральных в термодинамике задач о максимальной работе. В этой главе задача о максимальной работе решена в классе необратимых процессов и получены необратимые оценки работоспособности для некоторых типов систем. Класс процессов минимальной диссипации столь же важен, как и класс обратимых процессов. Он сужает границы наших возможностей настолько, что иногда эти границы оказываются реализуемыми и расширить их можно лишь за счет добавочных вложений (увеличение поверхностей контакта) либо за счет уменьшения интенсивности процесса.

Заключительный параграф посвящен результату И. Пригожина, согласно которому стационарному состоянию открытой системы соответствует минимум производства энтропии.

2.1. Условия минимальной диссипации

Постановка задачи. Термодинамический процесс характеризуют два типа переменных — интенсивные (температура, давление, концентрация и пр.) и экстенсивные (объем, внутренняя энергия, число молей некоторого вещества в системе, энтропия и др.). При делении однородной системы на две подсистемы интенсивные переменные для каждой из них оказываются неизменными, а экстенсивные переменные уменьшаются во столько раз, во сколько обьем подсистемы меньше исходного суммарного объема.

Будем обозначать интенсивные переменные для i-й системы через u_i, а экстенсивные через x_i. В общем случае эти переменные векторные. Когда две подсиситемы контактируют друг с другом, различие между u_1 и u_2 приводит к возникновению потока $J(u_1, u_2)$. Функция J для скалярных u_1 и u_2 непрерывна, дифференцируема по совокупности аргументов и обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\frac{\partial J}{\partial u_1} > 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_2} < 0,\\ J(u_1, u_2) = 0, \quad u_2 = u_1.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Поток при этом иногда записывают как

$$J(u_1(l), u_2(l)) = a(l)\tilde{J}(u_1(l), u_2(l)), \tag{2.2}$$

где $a(l) > 0$ — коэффициент, характеризующий распределение поверхности переноса по l. Когда общий коэффициент переноса A задан, то

$$\int\limits_0^L a(l)dl = A. \tag{2.3}$$

Если a постоянно, то $a(l) = A/L$. Аргумент l может иметь смысл времени или поверхности контактирования.

В более общем случае $J = (J_1, \ldots, J_j, \ldots, J_m)$ — вектор потоков, $u_\nu = (u_{\nu 1}, \ldots, u_{\nu j}, \ldots, u_{\nu m})$ — вектор интенсивных переменных ν-й подсистемы ($\nu = 1, 2$). Первое из условий (2.1) примет вид

$$\frac{\partial J_j}{\partial u_{1k}} > 0, \quad \frac{\partial J_j}{\partial u_{2k}} < 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.4}$$

Второе условие не изменится.

Различие между векторами u_1 и u_2 приводит к появлению движущих сил X_j, каждая из которых определяется только u_{1j} и u_{2j}, удовлетворяет условиям, аналогичным (2.1), и имеет тот же знак, что и поток J_j. Производство энтропии, характеризующее необратимость процесса, равно среднему значению скалярного произведения вектора потоков на вектор движущих сил:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \sum_{j=1}^{m} J_j(u_1, u_2) X_j(u_{1j}, u_{2j})dl \tag{2.5}$$

Отмеченные выше условия, которым удовлетворяют функции J_j и X_j, приводят к тому, что сумма, стоящая под знаком интеграла, положительно определенная.

Будем предполагать, что в нашем распоряжении находится одна из интенсивных переменных (для определенности $u_2(l)$), которая может принимать значения из некоторого множества V. Вторая же переменная в силу изменения X_1 изменяется так, что

$$\frac{du_{1j}}{dl} = \varphi_j(u_1, u_2), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.6}$$

Кроме того, средние значения всех или части потоков заданы:

$$\frac{1}{L}\int\limits_0^L J_j(u_1, u_2)dl = \overline{J_j}, \quad j = 1, \ldots, k_1, \quad k_1 \le m. \tag{2.7}$$

В этих условиях требуется найти минимальное производство энтропии $\overline{\sigma}$.

Скалярный случай. Получим условия оптимальности задачи (2.5)–(2.7) первоначально для скалярного случая ($m = 1$), а затем для векторного. В скалярном случае задача запишется в форме

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{L}\int\limits_0^L J(u_1, u_2) X(u_1, u_2)dl \to \min_{u_2 \in V} \tag{2.8}$$

при условиях

$$\frac{du_1}{dl} = \varphi(u_1, u_2), \quad u_1(0) = u_{10}, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{L}\int\limits_0^L J(u_1, u_2)dl = \overline{J}. \tag{2.10}$$

Величина L может быть как фиксированной, так и подлежать оптимальному выбору.

Сделаем допущение, что в оптимальном процессе $\varphi(u_1, u_2) \neq 0$; это позволяет провести замену переменной

$$dl = \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)}. \tag{2.11}$$

После этой замены задача (2.8)–(2.10) примет вид (считаем первоначально L заданной)

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{L} \int\limits_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{J(u_1, u_2) X(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)} du_1 \to \min_{u_2 \in V} \tag{2.12}$$

при условиях

$$\frac{1}{L} \int\limits_{u_{10}}^{u_1(L)} \frac{J(u_1, u_2)}{\varphi(u_1, u_2)} du_1 = \overline{J}, \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{L} \int\limits_{u_{10}}^{u_{1L}} \frac{du_1}{\varphi(u_1, u_2)} = 1, \tag{2.14}$$

и фиксированном значении u_{10}.

Эта задача существенно проще исходной задачи (2.8)–(2.10), так как не содержит дифференциальной связи (2.9). Ее решение u_2^* получается не как функция l, а как функция u_1, что во многих случаях гораздо полезнее. Функция Лагранжа для задачи (2.12)–(2.14) запишется как

$$R = \frac{1}{\varphi(u_1, u_2)} [J(u_1, u_2)(X(u_1, u_2) + \lambda_1) + \lambda_2], \tag{2.15}$$

условия оптимальности в форме принципа максимума (см. гл.9) имеют вид

$$u_2^*(u_1, \lambda) = \arg \max_{u_2 \in V} R(u_1, u_2, \lambda). \tag{2.16}$$

При отсутствии ограничений или внутри допустимой области V условие стационарности R по u_2 примет форму

$$(X + \lambda_1)(\varphi J'_{u_2} - \varphi'_{u_2} J) + \varphi J X'_{u_2} - \lambda_2 \varphi'_{u_2} = 0. \tag{2.17}$$

Условие (2.17) совместно с равенствами (2.13), (2.14), а также с требованием

$$R(u_{1L}, u_2(u_{1L}), \lambda) = 0 \tag{2.18}$$

позволяет найти $u_2^*(u_1)$, u_{1L}, λ_1, λ_2.

Задача сильно упрощается в одном распространенном случае, когда скорость изменения переменной u_1 пропорциональна потоку:

$$\varphi(u_1, u_2) = c(u_1) J(u_1, u_2). \tag{2.19}$$

В этом случае первое слагаемое в условии (2.17) обращается в нуль, и оно примет форму

$$J^2(u_1,u_2)=\lambda_2\left(\frac{\partial J(u_1,u_2)}{\partial u_2}:\frac{\partial X(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right), \tag{2.20}$$

а условие (2.13) в этом случае перепишется как

$$\int\limits_{u_{10}}^{u_{1L}}\frac{du_1}{c(u_1)}=\overline{J}\cdot L, \tag{2.21}$$

что определяет u_{1L} независимо от оптимального решения $u_2^*(u_1)$.

Распределение поверхности. В том случае, когда коэффициент переноса a не постоянен, поток задан в форме (2.2) и удовлетворяет ограничению (2.3), функция $a(l)$ подлежит оптимальному выбору. Условие стационарности по $a(u_1)$ функции Лагранжа

$$R_1=R(u_1,u_2,\lambda)-\lambda_3\frac{a(u_1)}{\varphi(u_1,u_2)},$$

где R определяется выражением (2.15), приводит к равенству

$$\tilde{J}(u_1,u_2)(X(u_1,u_2)+\lambda_1)=\lambda_3, \tag{2.22}$$

которое нужно добавить к условиям (2.17), (2.18) вместе с ограничением (2.3) и условием неотрицательности $a(u_1)\geq 0$.

Векторный случай. Условия оптимальности для задачи (2.5)–(2.7) в общем случае имеют форму принципа максимума Понтрягина (см. гл. 9):

$$H=\sum_{j=1}^{k}[\psi_0 J_j(u_1,u_2)X_j(u_{1j},u_{2j})+\psi_j\varphi_j(u_1,u_2)+\lambda_j J_j(u_1,u_2)],$$

$$\frac{d\psi_j}{dl}=-\frac{\partial H}{\partial u_{1j}},\quad j=1,\ldots,k,\quad \psi_j(L)=0, \tag{2.23}$$

$$u_{2j}^*(l)=\operatorname*{argmax}_{u_{2j}\in V}H(u_1^*(l),\psi(l),\lambda),\quad j=1,\ldots,k,\quad \lambda_j=0\quad \text{при}\quad j>k_1. \tag{2.24}$$

В невырожденном случае $\psi_0=-1$.

Линейная зависимость потоков от движущих сил. Аналитическое решение уравнений (2.23), (2.24) совместно с уравнениями (2.6) и условиями (2.7) возможно лишь в редких случаях. При малом отклонении от термодинамического равновесия, когда потоки J и силы X связаны соотношениями Онзагера

$$J=AX^T, \tag{2.25}$$

в которых матрица феноменологических коэффициентов A положительно определенная, выражение, стоящее под знаком интеграла в (2.5), положительно определенная квадратичная форма от термодинамических сил. В этом случае решение задачи кардинально упрощается, а именно, на первом ее этапе можно отбросить условия (2.6) и перейти к задаче о минимуме среднего значения квадратичной формы

$$\overline{\sigma} = \overline{(XAX^T)} \to \min \tag{2.26}$$

при условиях

$$\sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu j}\overline{X_\nu} = \overline{J_j}, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad (k_1 \leq k). \tag{2.27}$$

Переменными в этой усредненной задаче является вектор движущих сил X. Так как задача (2.26), (2.27) выпуклая, то ее решение соответствует постоянству искомых переменных (см. гл.9), а значит, определение X_ν^* сводится к решению простой задачи квадратичного программирования.

На втором этапе находят значения вектора $u_2 \in V$, удовлетворяющие условиям

$$X_j(u_{1j}, u_{2j}) = X_j^*, \quad j = 1, \dots, k, \tag{2.28}$$

и уравнениям (2.6). Для этого можно рассматривать условия (2.28) как уравнения, определяющие зависимость $u_2(u_1)$. После подстановки этой зависимости в (2.6) и решения уравнений получим $u_1^*(l)$, а значит, и $u_2^*(u_1^*(l)) = u_2^*(l)$. Если найденное решение удовлетворяет ограничениям, то задача (2.26), (2.27) эквивалентна исходной, и мы нашли процесс минимальной диссипации. Если $u_2^*(l) \notin V$, то решение задачи (2.26), (2.27) дает оценку снизу для минимального производства энтропии.

Потоки не связаны друг с другом. Второй случай, когда решение многомерной задачи кардинально упрощается, это случай независимости взаимодействий, когда каждый из потоков зависит только от своих переменных

$$J_j = J_j(u_{1j}, u_{2j}), \quad j = 1, \dots, k,$$

то же относится и к силам X_j, причем

$$\frac{du_{1j}}{dl} = \varphi_j(u_{1j}, u_{2j}), \quad u_1(0) = u_{10}, \quad u_1(L) = \overline{u_1}, \quad j = 1, \dots, k. \tag{2.29}$$

В этом случае задача о минимуме диссипации распадается на k одномерных задач вида

$$\overline{\sigma}_j = \frac{1}{L}\int_0^L J_j(u_{1j}, u_{2j})X_j(u_{1j}, u_{2j})dl \to \min \tag{2.30}$$

при условии (2.29) и

$$\frac{1}{L}\int_0^L \varphi_j(u_{1j}, u_{2j})dl = \frac{u_1(L) - u_1(0)}{L}. \tag{2.31}$$

Аналогично одномерному случаю для выбора каждой из переменных u_{2j} можно записать требование

$$u_{2j}^* = \arg\max_{u_{2j}\in V_j}\left[\frac{1}{\varphi_j}(J_jX_j + \lambda_j)\right], \tag{2.32}$$

или, в более слабой форме,

$$\frac{J_j(u_{1j}, u_{2j})}{dJ_j/\partial u_{2j}}\frac{d}{du_{2j}}(J_jX_j) - J_jX_j = \text{const} = \lambda_j. \tag{2.33}$$

Величины λ_j определяются из условий

$$\int_{u_{1j}(0)}^{\overline{u_{1j}}} \frac{du_{1j}}{\varphi_j(u_{1j}, u_{2j}^*(\lambda_j, u_{1j}))} = L, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2.34}$$

Может оказаться, что значения $\overline{u}_{1j}$ заданы не для всех j, а только для $j = \underline{1, \ldots, k_1,}\ k_1 < k$. Тогда для определения λ_j совместно с u_{1j} при $j = \overline{k_1+1, k}$ имеем дополнительно условия равенства нулю выражения, стоящего под знаком $\arg\max$ в (2.32), причем в функциях φ_j, g_j, f_j вместо u_{1j} стоит искомое $\overline{u}_{1j}$, а вместо u_{2j} стоит $u_{2j}^*(\lambda_j, \overline{u}_{1j})$. Эти требования следуют из принципа максимума Потрягина.

Выбор значения L. Введение множителя $1/L$ в критерий (2.5) и условия (2.7) при фиксированном значении L никак не влияет на оптимальное решение, однако оно делает задачу осмысленной и при стремлении L к бесконечности. Кроме того, само значение L может подлежать оптимальному выбору.

При таком выборе функционал Лагранжа для соответствующей экстремальной задачи должен быть стационарен по L (см. гл. 9).

Например, в задаче (2.12)–(2.14) функционал Лагранжа

$$\overline{R} = \frac{1}{L}\int_{u_{10}}^{u_{1L}} R(u_1, u_2, \lambda)du_1,$$

где функция R определяется равенством (2.15). Условие стационарности $\overline{R}$ по L приводит к уравнению

$$R(u_1(L), u_2(L), \lambda) = \frac{1}{L}\int_{u_{10}}^{u_1(L)} R(u_1, u_2, \lambda)du_1.$$

В общей задаче (2.5)–(2.7) для выбора L к условиям (2.23), (2.24) добавятся условия

$$\sum_{j=1}^{k} J_j(u_1(L), u_2(L))[X_j(u_1(L), u_2(L)) + \lambda_j] =$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^4 \sum_{j=1}^{k} J_j(u_1, u_2)(X_j(u_1, u_2) + \lambda_j)\, dl, \quad (2.35)$$

вытекающие из требования стационарности по L интеграла от функции H, в которую добавлены множители $1/L$ перед первым и третьим слагаемыми под знаком суммы.

2.2. Условия минимальной диссипации для конкретных процессов

Продемонстрируем использование условий минимальной диссипации на конкретных процессах.

Теплоперенос. Термодинамическая сила X в задаче о минимальной диссипации процесса теплопереноса равна

$$X(T_1, T_2) = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right), \quad (2.36)$$

а поток J равен $q(T_1, T_2)$. Функция φ в условиях (2.9), определяет скорость изменения температуры T_1. В большинстве случаев можно считать, что

$$\frac{dT_1}{dl} = -\frac{1}{c_1(T_1)} q(T_1, T_2), \quad T_1(0) = T_{10}, \quad (2.37)$$

где $c_1(T_1)$ — теплоемкость горячего источника. В соответствии с условиями (2.20), (2.21), (2.14) минимальной диссипации при заданной средней интенсивности теплового потока $\bar{q}$ для процесса теплообмена получим

$$q^2(T_1, T_2) = -\lambda_2 \frac{\partial q}{\partial T_2} \cdot T_2^2, \quad (2.38)$$

$$\int_{T_{1L}}^{T_{10}} c_1(T_1) dT_1 = \bar{q} \cdot L, \quad (2.39)$$

$$\int_{T_{1L}}^{T_{10}} \frac{c_1(T_1) dT_1}{q(T_1, T_2)} = L. \quad (2.40)$$

Первое из этих условий определяет $T_2^*(T_1, \lambda_2)$, второе — T_{1L}, а третье определяет константу λ_2.

Для линейного закона теплопереноса

$$q = \alpha(T_1 - T_2) \tag{2.41}$$

с постоянной теплоемкостью c из условий (2.37)–(2.39) получим

$$\alpha^2(T_1 - T_2)^2 = -\lambda_2(-\alpha)T_2^2 \Rightarrow \alpha\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)^2 = \lambda_2. \tag{2.42}$$

Таким образом, для любого l отношение $\dfrac{T_1}{T_2}$ постоянно и равно

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}}. \tag{2.43}$$

Из (2.40) следует, что $T_{1L} = T_{10} - \bar{q}L/C$; наконец, из условия (2.39) следует, что

$$\sqrt{\frac{\lambda_2}{\alpha}} = -\frac{c}{\alpha L}.\ln\left(1 - \frac{\bar{q}L}{cT_{10}}\right). \tag{2.44}$$

Минимальное производство энтропии, получаемое после подстановки (2.43), (2.44) в выражение

$$\sigma = \frac{c}{L}\int\limits_{T_{1L}}^{T_{10}}\left(\frac{1}{T_2(T_1)} - \frac{1}{T_1}\right)dT_1,$$

равно

$$\sigma^* = \frac{c^2\ln^2\left(1 - \dfrac{\bar{q}L}{cT_{10}}\right)}{\alpha L - c\,\ln\left(1 - \dfrac{\bar{q}L}{cT_{10}}\right)}.$$

Для закона теплопереноса вида

$$q(T_1, T_2) = \alpha(T_1^n - T_2^n) \tag{2.45}$$

условия (2.38) примут форму

$$\alpha(T_1^n - T_2^n)^2 = \lambda_2 n T_2^{n+1},$$

или

$$\frac{q(T_1, T_2)}{\alpha T_2^{(n+1)/2}} = \left(\frac{T_1^n}{T_2^{(n+1)/2}} - T_2^{(n-1)/2}\right) = \sqrt{\frac{\lambda_2 n}{\alpha}} = \mathrm{const}. \tag{2.46}$$

При $n > -1$ тепловой поток с ростом температуры T_2 растет, а при $n < -1$ — падает. При $n = -1$ тепловой поток, соответствующий минимальной диссипации, постоянен и равен $\bar{q}$, а само минимальное производство энтропии в соответствии с (2.8) равно

$$\sigma^* = \frac{\bar{q}^2}{\alpha} \tag{2.47}$$

Изотермический массоперенос. Интенсивными переменными подсистем в этом случае являются векторы концентраций C_i $(i = 1, 2)$ с составляющими C_{ik}, характеризующими состав подсистем. Как потоки веществ, так и химические потенциалы зависят от концентраций. В выражении (2.5) потоки и движущие силы имеют вид

$$\begin{gathered} J_j(u_1, u_2) = J_j(C_1, C_2), \\ X_j(u_{1j}, u_{2j}) = \frac{1}{T(C_1, C_2)}\Big(\mu_{1j}(C_{2j}, T) - \mu_{2j}(C_{1j}, T)\Big). \end{gathered} \tag{2.48}$$

Остановимся на случае, когда из одной подсистемы в другую переходит только один ключевой компонент. При этом давление в подсистеме вследствие диффузии не меняется. Концентрацию ключевого компонента в первой подсистеме обозначим через C_1, а во второй — через C_2. Начальный состав каждой подсистемы задан, а так как задана интенсивность массопереноса

$$\int\limits_0^L g(C_1, C_2)dl = \bar{g}L, \tag{2.49}$$

то и конечный состав фиксирован. Минимизация диссипации сводится к минимизации производства энтропии, возникающего вследствие диффузии

$$\bar{\sigma_g} = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \frac{g(C_1, C_2)}{T(C_1, C_2)}\Big(\mu_1(C_1, T) - \mu_2(C_2, T)\Big)dl \to \min. \tag{2.50}$$

Чтобы получить зависимость от C_1 и C_2 скорости изменения концентрации C_1, необходимо учесть, что поток g меняет как состав первой подсистемы, так и общее количество вещества G_1 в ней, так как это поток лишь ключевого компонента

$$\frac{d(G_1C_1)}{dl} = \frac{dG_1}{dl} = -g(C_1, C_2). \tag{2.51}$$

Из условий (2.51) следует, что

$$\frac{dC_1}{dl} = -\frac{1 - C_1}{G_1}g(C_1, C_2), \quad C_1(0) = C_{10}, \tag{2.52}$$

а

$$\frac{dG_1}{dC_1} = \frac{G_1}{1 - C_1},$$

откуда

$$G_1(C_1) = \frac{G_1(0)(1 - C_{10})}{1 - C_1} = \frac{\tilde{G}}{1 - C_1},$$

где $\tilde{G}$ — количество инертного компонента в первой подсистеме. После подстановки $G_1(C_1)$ в (2.52) получим

$$\frac{dC_1}{dl} = -\frac{1}{\tilde{G}}(1-C_1)^2 g(C_1, C_2), \quad C_1(0) = C_{10}. \tag{2.53}$$

Вид правой части этого уравнения позволяет использовать условия оптимальности (2.20), (2.21), которые примут форму

$$\frac{\partial T}{\partial C_2}\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T} - \frac{\partial \mu_2}{\partial T} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{T}\right) - \frac{\partial \mu_2}{\partial C_2} = \lambda_2 \left(\frac{\partial g}{\partial C_2}\right)\frac{T}{g^2(C_1, C_2)}, \tag{2.54}$$

$$C_{1L} = \frac{C_{10}G_{10} - \bar{g}L}{G_{10} - \bar{g}L}. \tag{2.55}$$

Для химических потенциалов в форме

$$\mu_i = \mu_0(P,T) + RT\ln C_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.56}$$

производная $\dfrac{\partial \mu_2}{\partial C_2} = \dfrac{RT}{C_2}$, так что условия (2.54) примут вид

$$-\frac{R}{C_2} = \lambda_2 (\frac{\partial g}{\partial C_2})\frac{1}{g^2}. \tag{2.57}$$

Константу λ_2 находят из условия

$$\int\limits_{C_{1L}}^{C_{10}} \frac{\tilde{G}}{T(C_1, C_2)(1-C_1)^2} dC_1 = L$$

после подстановки в него $C_2^*(C_1, \lambda_2)$.

Особенно простое решение соответствует случаю, когда поток диффузии пропорционален разности химических потенциалов и температура T постоянна:

$$g = \alpha\Big(\mu_1(C_1) - \mu_2(C_2)\Big).$$

В этом случае из (2.54) следует, что

$$g^* = \text{const} = \bar{g},$$

$$\frac{dC_1}{dl} = \frac{\bar{g}(1-C_1)}{G_{10} - \bar{g}l} \Rightarrow C_1(l) = 1 - (1 - C_{10})\frac{G_{10}}{G_{10} - \bar{g}l}.$$

Для химических потенциалов в форме (2.56) постоянству потока соответствует постоянство отношения

$$\frac{C_1}{C_2} = \exp\left(\frac{\bar{g}}{2T}\right).$$

Минимальное поизводство энтропии при этом

$$\overline{\sigma}^* = \frac{\overline{g^2}}{\alpha T}.$$

Другие законы массопереноса рассмотрены в [47].

Деформационное взаимодействие. В данном случае функция $g(u_1, u_2)$ соответствует зависимости скорости перемещения поршня v от давлений P_1 и P_2. В большинстве случаев скорость зависит только от разности $P_1 - P_2$, так что производство энтропии можно записать как

$$\sigma(P_1 - P_2) = \frac{v(P_1 - P_2)}{T}(P_1 - P_2) \to \min; \tag{2.58}$$

среднее значение этой величины минимизируют при заданном среднем значении скорости $\overline{v}$

$$\frac{1}{L}\int_0^L v(P_1(l) - P_2(l))dl = \overline{v}. \tag{2.59}$$

Выражая $\Delta P = P_1 - P_2$ через v как $\Delta P(v)$, можно записать усредненную задачу о минимуме диссипации как

$$\overline{\sigma}(v) = \overline{\frac{1}{T}v\Delta P(v)} \to \min / \overline{v} = v_0\ . \tag{2.60}$$

Если $\sigma(v)$ выпукла вниз, то оптимальная скорость должна быть постоянна и равна $\overline{v}$. В противном случае решению усредненной задачи нелинейного программирования (2.60) соответствует ордината выпуклой оболочки функции $\sigma(v)$ для $v = \overline{v}$. Скорость принимает не более двух значений v^1 и v^2, определяющихся условиями

$$L(\lambda^*, v^i) = \max_\lambda \min_v [\sigma(v) + \lambda(v - \overline{v})]. \tag{2.61}$$

Значения функции L в точках $v^i \quad (i = 1, 2)$ одинаковы. Доля γ периода L, в течение которой $v^*(l) = v^1$, находится из условия

$$\gamma v^1 + v^2(1 - \gamma) = \overline{v}, \quad \gamma \geq 0.$$

Дросселирование. Обозначим через P_1 и P_2 давление до и после сужающего устройства, а через $g(P_1, P_2)$ — расход через него. Будем предполагать, что процесс происходит изотермически, т.е. температура не изменяется. Производство энтропии

$$\sigma = g(P_1, P_2)\frac{\mu_1(P_1, T) - \mu_2(P_2, T)}{T}. \tag{2.62}$$

Для идеального газа выражение (2.62) примет форму

$$\sigma = g(P_1, P_2) \ln \frac{P_1}{P_2}. \tag{2.63}$$

Пусть P_1 — давление в замкнутой емкости объема V, оно снижается при истечении газа через сужающее устройство. Задана продолжительность процесса τ и средняя интенсивность потока $\overline{g}$. Требуется минимизировать диссипацию:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(P_1, P_2)\frac{\mu_1(P_1, T) - \mu_2(P_2, T)}{T}dt \to \min, \tag{2.64}$$

при условиях

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(P_1, P_2)dt = \bar{g}, \tag{2.65}$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{RTg(P_1, P_2)}{V}, \quad P_1(0) = P_{10}. \tag{2.66}$$

Условия оптимальности этой задачи в соответствии с равенствами (2.20), (2.21) имеют форму

$$Tg^2(P_1, P_2) = -\lambda_2\left(\frac{\partial g}{\partial P_2} : \frac{\partial \mu_2}{\partial P_2}\right), \tag{2.67}$$

$$P_1(\tau) = P_{10} - \frac{RT}{V}\bar{g}\tau. \tag{2.68}$$

Для идеального газа и зависимости

$$g(P_1, P_2) = \alpha(P_1 - P_2)^{1/2}$$

условие (2.67) приводит к соотношению

$$\frac{(P_1 - P_2)^3}{P_2^2} = \mathrm{const} = \eta. \tag{2.69}$$

Подстановка условия (2.69) в уравнения (2.64) и (2.66) позволяет найти оптимальный закон изменения $P_2^*(t)$ и минимальное производство энтропии $\bar{\sigma}^*$. Оптимальный закон изменения давления определяется после решения уравнений (2.66), (2.69) с точностью до константы η

$$P_2^*(t, \eta) = \left\{\sqrt{\frac{4}{3}\eta^{2/3} - \frac{2}{3}\eta^{1/6}\left[\frac{\gamma RT}{V}t - f(P_{20}, \eta)\right]} - \frac{2}{3}\eta^{1/3}\right\}^3, \tag{2.70}$$

где

$$f(P_{20}, \eta) = \frac{3}{2}\eta^{-1/6}P_{20}^{2/3} + 2\eta^{1/6}P_{20}^{1/3}. \tag{2.71}$$

Величина P_{20} находится из (2.69) как решение уравнения

$$P_{20} + \eta^{1/3}P_{20}^{2/3} = P_{10}, \tag{2.72}$$

$$\bar{\sigma}^* = \frac{V}{RT\tau}\Big[P_{10}(\ln P_{10} - 1) - P_1(\tau)(\ln P_1(\tau) - 1) - r(P_{20}) - r(P_2(\tau))\Big].$$

Здесь

$$r(P_2) = P_2(\ln P_2 - 1) + \eta^{1/3}P_2^{2/3}\left(\ln P_2 - \frac{3}{2}\right).$$

Кристаллизация. Производство энтропии в процессе кристаллизации, как в любом процессе массопереноса, выражается формулой

$$\sigma = g(C_1, C_2)\frac{\mu_1(C_1) - \mu_2(C_2)}{T}. \tag{2.73}$$

Для идеальных растворов химический потенциал кристаллизирующегося вещества в растворе при постоянных температуре и давлении зависит от его мольной доли или в первом приближении от концентрации C_1,

$$\mu_1 = \mu^0(T, P) + RT \ln C_1.$$

Потенциал μ_2 определяется равновесной концентрацией $C_2 = C_P$:

$$\mu_2 = \mu^0(T, P) + RT \ln C_P,$$

так что

$$\sigma = g(C_1, C_P) R \ln \frac{C_1}{C_P}. \tag{2.74}$$

Поток g зависит от поверхности кристаллов F, которая в свою очередь определяется массой кристаллов M. Масса изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dM}{dt} = \alpha F(C_1 - C_P),$$

$$M(0) = M_0, \quad M(\tau) = \bar{M}.$$

Если размеры и форма кристаллов при $t = 0$ одинаковы, то

$$\dot{M} = K M^{2/3}(C_1 - C_P). \tag{2.75}$$

Коэффициент K зависит как от коэффициента массопередачи так и от формы кристалла.

Задача о минимуме диссипации в процессе кристаллизации примет форму

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau K M^{2/3}(C_1 - C_P) R \ln \frac{C_1}{C_P} dt \to \min_{C_1}, \tag{2.76}$$

$$\int_0^\tau K M^{2/3}(C_1 - C_P) dt = (\overline{M} - M_0). \tag{2.77}$$

Условия оптимальности этой задачи вытекают из требований (2.20), (2.21) и имеют вид

$$\frac{M^{2/3}(C_1 - C_P)^2}{C_1} = \frac{\lambda_2}{KR} = \text{const} = \eta. \tag{2.78}$$

Из условий (2.78) и уравнения (2.75) получим дифференциальное уравнение, которое с точностью до константы $\tilde{\eta} = \eta$ определяет $C^*(t)$. Для этого заменим $\dot{M}$ и M через $\dot{C}_1$ и C_1:

$$\dot{C}_1^* = -\sqrt{\tilde{\eta}}\frac{\sqrt{C_1^*}(C_1^* - C_P)^3}{C_1^* + C_P}, \quad C_1(0) = C_{10}. \tag{2.79}$$

Нетрудно видеть, что для случая, когда начальные массы кристаллов различны, использование уравнения (2.75) для средней начальной массы дает (в силу выпуклости вверх зависимости поверхности от M), оценку снизу для производства энтропии.

Химические превращения. Рассмотрим изотермический реактор идеального смешения периодического действия, в котором протекает реакция вида

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 \underset{\mathrm{k}_2}{\overset{\mathrm{k}_1}{\rightleftharpoons}} \alpha_3 B_3,$$

где B_i — реагенты, α_i — стехиометрические коэффициенты. Далее будем считать,что $\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 < 0, \quad \alpha_3 > 0$. Скорость реакции определяется законом действующих масс

$$W(X) = W_1 - W_2 = k_1 X_1^{-\alpha_1} X_2^{-\alpha_2} - k_2 X_3^{\alpha_3}, \tag{2.80}$$

где $X_i = \dfrac{N_i(t)}{N(t)}$ — мольная доля i-го компонента, n_i — число молей i-го компонента в аппарате, $N(t) = \sum\limits_i n_i(t)$.

Производство энтропии

$$\sigma = \frac{W}{T} A, \tag{2.81}$$

где

$$A = -\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mu_i$$

— химическое сродство реакций.

Для идеальных растворов

$$\mu_i = \mu_i^0(T, P) + RT \ln X_i,$$

откуда

$$A = -\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mu_i^0(T, P) - RT \sum_i \alpha_i \ln X_i.$$

Первое слагаемое в этом выражении равно [10]

$$-\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mu_i^0 = RT \ln k_p(T, P).$$

Константа равновесия k_p равна отношению констант скоростей прямой и обратной реакций:

$$k_p(T,P) = \frac{k_1(T,P)}{k_2(T,P)}.$$

Таким образом,

$$A = RT\left(\ln\frac{k_1}{k_2} - \sum_i \ln X_i^{\alpha_i}\right) = RT\ln\frac{k_1 X_1^{-\alpha_1} X_2^{-\alpha_2}}{k_2 X_3^{\alpha_3}} = RT\ln\frac{W_1}{W_2}.$$

Пусть задана средняя скорость реакции

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau W(t)dt = \overline{W}, \tag{2.82}$$

а скорость реакции $W(t)$ является управлением. Она определяет изменение степени превращения $\xi(t)$

$$\frac{d\xi}{dt} = W \tag{2.83}$$

и числа молей компонентов в ходе реакции

$$\frac{dN_i}{dt} = \alpha_i W, \quad i = \overline{1,3}.$$

Отсюда

$$N_3(t) = N_{30} + \alpha_3\xi(t),$$

а общее число молей —

$$N(t) = N_0 + \xi(t)\sum_{i=1}^3 \alpha_i.$$

Скорость обратной реакции —

$$W_2 = k_2\frac{N_3(\alpha)}{\sum\limits_i N_i(t)} = k_2\frac{N_{30}+\alpha_3\xi(t)}{N_0 + \xi(t)\sum\limits_{i=1}^3\alpha_i}.$$

С учетом сказанного, задача о минимуме диссипации примет вид

$$\sigma = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau RW\ln\frac{W + W_2(\xi)}{W_2(\xi)}dt \to \min$$

при условиях

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau W(t)dt = \overline{W},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = W, \quad \xi(0) = 0,$$

$$W_2(\xi) = k_2\frac{N_{30}+\alpha_3\xi}{N_0 + \xi\sum\limits_i\alpha_i}. \tag{2.84}$$

Т а б л и ц а 2.1

Условия минимальной диссипации термодинамических процессов

Процесс	Условия минимальной диссипации	Минимальное производство энтропии
Теплообмен двух потоков $q = \alpha(T_2 - T_1)$	$\dfrac{T_1(f)}{T_2(f)} = 1 - \dfrac{\beta}{\alpha F}$	$\sigma^* = \dfrac{\beta^2}{\alpha F - \beta}$ $\beta = W \ln(1 - \dfrac{\overline{q}}{WT_1(0)})$
Векторный поток $J = LX$	$X = \text{const.}$ $J = \overline{J}$	$\sigma^* = \overline{J} L^{-1} \overline{J}$
Односторонний изотермический массоперенос $g(c_1, c_2) = k(c_1(f) - c_2(f))$	$c_2(f) = c_1(f) + \dfrac{m}{2} - \sqrt{c_1(f)m + \dfrac{m}{4}}$ $\displaystyle\int\limits_{c_1(F)}^{c_1(0)} \frac{G}{(1 - c_1^2)k\sqrt{c_1 m + \frac{m}{4}} - \frac{m}{2}} = F$	$\sigma^* = \displaystyle\int\limits_{c_1(F)}^{c_1(0)} \frac{RG}{(1 - c_1)^2} \ln \frac{c_1 dc_1}{c_1 + \frac{m}{2} - \sqrt{c_1 m + \frac{m^2}{4}}}$
Двусторонний изотермический эквимолярный массоперенос (бинарная ректификация)	$\dfrac{\partial g}{\partial c_1} / \dfrac{\partial g}{\partial c_2} = m \dfrac{c_2(f)(1 - c_2(f))}{c_1(f)(1 - c_1(f))}$ $\dfrac{dc_1}{df} = -\dfrac{g(c_1, c_2)}{G_1}$ $c_1(0) = C_{10}, c_1(F) = c_{1F}$	$\sigma^* = R \displaystyle\int\limits_0^F g(c_1, c_2) \ln[\frac{c_1(1 - c_2)}{c_2(1 - c_1)}] df$

Используя замену переменных $dt = \frac{d\xi}{W}$, запишем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{R}{\tau} \ln \frac{W + W_2(\xi)}{W_2(\xi)} + \frac{\lambda}{W}.$$

Из условия стационарности L по W получим

$$\frac{W^2}{W + W_2(\xi)} = \frac{\lambda \tau}{R} = \text{const}. \tag{2.85}$$

Это требование вместе с уравнением (2.83) и условием на среднее значение W позволяют найти $W^*(t)$, $\xi^*(t)$ и оценку для производства энтропии.

Условия минимальной диссипации и минимальное производство энтропии для некоторых процессов приведены в табл. 2.1.

2.3. Эксергия и работоспособность термодинамических систем

При термодинамическом анализе технологических систем широко используют эксергетический подход. При этом под *эксергией* понимают максимальное количество работы, которое может быть получено при переходе системы из исходного состояния в состояние равновесия с окружающей средой [12]. Так как продолжительность процесса или его интенсивность не оговорены, то максимальной работе соответствует обратимый процесс.

Найдем работу, которую может произвести система в обратимом процессе, если она находится в среде с температурой T^0 и давлением p^0. Для простоты считаем, что химические процессы отсутствуют. Обратимый процесс должен состоять из двух участков: изменения температуры T в адиобатическом процессе от начальной температуры до температуры окружения и изменения давления в изотермическом процессе при $T = T^0$ от начального давления в системе до p^0. Работа на каждом участке процесса есть

$$A^0 = -\Delta E - T^0 \Delta S + p^0 \Delta V,$$

где $\Delta E, \Delta S, \Delta V$ — изменения внутренней энергии, энтропии и объема системы.

На адиабатическом участке энтропия системы не меняется и работа

$$A_a = -\Delta E_a + p^0 \Delta V_a = \Delta I_a$$

равна изменению энтальпии системы. На изотермическом участке неизменна внутренняя энергия, так что изменение энтальпии равно

$\Delta I_t = p^0 \Delta V_t$, а работа $A_t = \Delta I_t - T^0 \Delta S$. Общая работа

$$A = A_a + A_t = \Delta I - T^0 \Delta S.$$

Если ввести обозначение $L = I - TS$ и учесть, что при совпадении начального состояния системы с состоянием окружающей среды никакой работы получить нельзя, то максимальная работа, которую может совершить система при выравнивании своих параметров с параметрами окружения, есть $A = \Delta L$.

Эксергия зависит не только от состояния системы, но и от состояния окружающей среды. Так как процесс при подсчете A предполагался обратимым, то она не учитывает значений кинетических коэффициентов (тепло- и массообмена, скоростей реакций и пр.). При эксергетическом анализе термодинамическое совершенство процесса или его отдельной стадии определяется потерями эксергии. Такие потери равны нулю в обратимых процессах.

Эксергетический метод имеет два недостатка.

1. Сравнение с обратимым процессом не учитывает объективной необратимости, связанной с интенсивностью потоков, конечными коэффициентами тепло- и массопередачи.

2. Рассматриваются только системы с резервуаром, интенсивные переменные которого совпадают с интенсивными переменными окружающей среды (температуры, концентрации и пр.). Они изменяются и не всегда могут быть точно найдены. Кроме того, многие системы вообще не содержат резервуара.

В необратимом процессе изменяется суммарная энтропия системы и окружения на величину ΔS_Σ. При этом работа системы в необратимом процессе может быть выражена через обратимую работу и прирост энтропии как

$$L_n = L - T^0 \Delta S_\Sigma.$$

Второе слагаемое учитывает потери от диссипации, которые всегда положительны. Записанное равенство называют *уравнением Гюи–Стодола*. Оно справедливо только для систем, содержащих резервуар с $T = T^0$, $p = p^0$ и пр.

В термодинамике при конечном времени решают задачи о максимуме извлеченной работы для систем, как содержащих, так и не содержащих резервуара, при ограниченной продолжительности процесса или при заданной интенсивности потоков. Максимальную работу (работоспособность), найденную при этих ограничениях, будем обозначать через L_τ или L_p соответственно.

Расчет работоспособности для некоторых систем

Системы с одним источником. Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из источника бесконечной емкости с температурой $T_0(t)$ и рабочего тела с температурой $T(t)$, взаимодействующих конечное время τ. Время τ может стремиться к бесконечности, однако при этом фиксируем среднюю интенсивность процесса. И в том, и в другом случае процессы необратимы.

Рабочее тело (тепловая машина), получая от источника тепло в количестве Q, производит работу A со средней мощностью $\overline{p} = A/\tau$. Обозначим через E и S соответственно внутреннюю энергию и энтропию рабочего тела; те же обозначения с индексом 0 относятся к источнику. Закон теплопередачи обозначим через $q(T_0, T)$ и будем конкретизировать полученные результаты для закона

$$q = \alpha(T_0^n - T^n), \tag{2.86}$$

где α и n имеют одинаковые знаки.

В этих обозначениях запишем уравнения термодинамических балансов для источника и рабочего тела в предположении отсутствия между ними механического контакта.

$$\begin{cases} \dot{E} = q(T_0, T) - p(t), \\ \dot{E}_0 = -q(T_0, T), \\ \dot{S} = \dfrac{q(T_0, T)}{T}, \\ \dot{S}_0 = -\dfrac{q(T_0, T)}{T_0}. \end{cases} \tag{2.87}$$

Здесь $p(t)$ — мощность, отбираемая от рабочего тела в момент t.

Из (2.87) следуют выражения для мощности и работы

$$p(t) = q(T_0, T) - \dot{E}, \tag{2.88}$$

$$A = \int\limits_0^\tau p(t)dt = \int\limits_0^\tau q(T_0, T)dt - \\ - [E(S(\tau), V(\tau)) - E(S(0), V(0))] = Q - \Delta E. \tag{2.89}$$

Зависимость внутренней энергии от энтропии и объема $E(S, V)$ определяется уравнением состояния рабочего тела.

Изучение предельных возможностей тепломеханических систем сводится к задаче о получении предельной работы при фиксированном количестве полученного тепла:

$$Q = \int_0^\tau q(T_0, T)dt = Q_0. \qquad (2.90)$$

Задача имеет форму

$$A \to \max_{T(t)} \Big/ \begin{array}{l} \tau = \text{fix}, \\ Q = Q_0. \end{array} \qquad (2.91)$$

Из формулы (2.89) следует, что максимальная работа соответствует минимуму внутренней энергии рабочего тела в конце процесса:

$$E(S(\tau), V(\tau)) \to \min_{T(t)} \Big/ \int_0^\tau q(T_0, T)dt = Q_0. \qquad (2.92)$$

Объем рабочего тела в момент τ не влияет на $S(\tau)$ и выбирается из условия

$$V^*(\tau) = \arg\min_{V(\tau)} \quad E(S^*(\tau), V(\tau)), \qquad (2.93)$$

где $S^*(\tau)$ — оптимальное решение задачи (2.92) по S.

Зависимость E от S для любого уравнения состояния монотонно возрастает при всех V, так как

$$\frac{\partial E}{\partial S} = T\ > 0,$$

так что минимуму $E(\tau)$ соответствует минимум $S(\tau)$, и на оптимальном решении задачи (2.92) имеем

$$\Delta S = \int_0^\tau \dot{S}dt = \int_0^\tau \frac{q(T_0, T)}{T}dt \to \min \Big/ Q = Q_0. \qquad (2.94)$$

Управляющей переменной в задаче о минимуме ΔS при фиксированном значении Q является объем рабочего тела, изменения которого в силу уравнения состояния меняют его температуру T. Но так как зависимость $T(V)$ монотонна и при изменении V от 0 до ∞ температура изменяется от бесконечности до нуля и объем не входит непосредственно в условия задачи (2.94), то удобно выбрать в качестве управления температуру рабочего тела, оптимальная форма изменения которой $T^*(t)$ не зависит от уравнения состояния. Зная же $T^*(t)$, из уравнения состояния для конкретного рабочего тела можно найти зависимость $V^*(t)$ для изменения объема.

В силу сказанного общая структура оптимального процесса в резервуарной системе такова.

1. При заданных начальной температуре и начальном объеме рабочего тела $T(0)$ и $V(0)$ объем мгновенно меняется таким образом,

чтобы температура оказалась равной значению $T^*(0)$, найденному в результате решения задачи (2.94) (первый адиабатический участок).

2. Объем изменяется по закону $V^*(t)$, соответствующему найденному при решении задачи (2.94) значению температуры $T^*(t)$.

3. В момент $t = \tau$ обьем изменяетсяв соответствии с условием (2.93) (второй адиабатический участок).

В силу фиксированности τ задачу (2.94) перепишем в усредненной форме как

$$\overline{\sigma} = \overline{\dot{S}} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{S}dt = \int_0^\tau \frac{q(T_0,T)}{T}dt \to \min_{T(t)} \Bigg/ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau q(T_0,T)dt = \bar{q} = \frac{Q_0}{\tau}. \tag{2.95}$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что задача получения предельной работы при фиксированном количестве тепла имеет на интервале $(0,\tau)$ то же оптимальное решение, что и задача минимизации средней скорости производства энтропии. Зная минимальную величину энтропии $S^*(\tau)$, можно найти предельную работу A^* как

$$A^* = Q_0 + E(S(0),V(0)) - E(S^*(\tau),V^*(\tau)). \tag{2.96}$$

Выбор объема по формуле (2.93) приводит к тому, что часть работы получается за счет уменьшения внутренней энергии рабочего тела по отношению к начальному ее значению. Чтобы охарактеризавать предельные возможности рассматриваемой системы, целесообразно принять

$$V(\tau) = V(0) = V_0,$$

где величина V_0 либо фиксирована, либо подлежит оптимальному выбору. В последнем случае она должна выбираться из условия минимума по V_0 приращения внутренней энергии рабочего тела $\Delta E = E(S^*(\tau),V_0) - E(S(0),V_0)$, так что

$$\frac{\partial E(\tau)}{\partial V_0} = \frac{\partial E(0)}{\partial V_0} \Rightarrow P(\tau) = P(0),$$

где P — давление рабочего тела.

Между величиной минимально возможного прироста энтропии ΔS^* и количеством тепла Q_0, переданного рабочему телу, существует монотонная зависимость. Чем больше Q_0, тем больше ΔS^*. Ввиду этого задаче (2.95) можно сопоставить эквивалентную задачу

$$\overline{q} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau q(T_0,T)dt \to \max \Bigg/ \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{q(T_0,T)}{T}dt = \overline{\sigma}. \tag{2.97}$$

Постановка (2.97) для $\overline{\sigma} = 0$ и с условием равенства давлений рабочего тела в начале и в конце процесса имеет смысл и для случая, когда $T_0(t)$ — периодический или стационарный случайный процесс, в этом последнем случае усреднение в (2.97) проводится на сколь угодно большом интервале времени.

Если изменение температуры источника T_0 не зависит от T, то обе задачи являются усредненными и к ним могут быть применены методы, изложенные в гл. 9. Однако и в том случае, когда $T_0(t)$ зависит от $T(t)$, методы усредненной оптимизации позволяют судить о характере связи T^* и T_0 в зависимости от закона теплопередачи q.

Так как время явно не входит в условия задачи (2.97), то условия оптимальности определяют связь между T^* и T_0. Причем (см. гл. 9) каждому значению T_0 могут соответствовать не более двух значений T^* (базовых). Число базовых значений (одно либо два) определяется (видом) функции q. Ниже этот вопрос рассмотрен подробнее.

Температура T_0 *фиксирована* (*источник бесконечной емкости*). При фиксированной температуре T_0 условие

$$\overline{q(T,T_0)} = \frac{Q_0}{\tau} \tag{2.98}$$

соответствует заданию средней скорости изменения энтропии источника

$$\overline{\sigma}_0 = \frac{\overline{q(T,T_0)}}{T_0} = -\frac{Q_0}{\tau T_0}, \tag{2.99}$$

а минимум прироста энтропии рабочего тела — минимуму производства энтропии в системе, т.е. процессу минимальной диссипации.

Оптимальное решение задачи (2.97) определяется (см. гл. 9) условием

$$L = \sigma + \lambda\left(\sigma_0 + \frac{Q_0}{\tau T_0}\right) = \frac{q(T,T_0)}{T} + \lambda\left(\frac{q(T,T_0)}{T_0} + \frac{Q_0}{\tau T_0}\right) \to \max_{\lambda}\min_{T}.$$

Исследуем зависимость $\sigma(T_0,\sigma_0)$ для закона теплопередачи (2.86). Эта зависимость имеет вид

$$\sigma = -\frac{\sigma_0 T_0}{\left(T_0^n + \dfrac{\sigma_0 T_0}{\alpha}\right)^{1/n}} = \frac{q}{\left(T_0^n - \dfrac{q}{2}\right)^{1/n}}. \tag{2.100}$$

Характер этой функции для различнах n показан на рис. 2.1. Область допустимых значений σ_0 определяется условием неотрицательности температуры T

$$\sigma_0 > -\frac{T_0^{n-1}}{\alpha} = \sigma_0^{\min}.$$

Значение $\sigma_0^{\max}$ определяется величиной предельно допустимой температуры рабочего тела. Исследование второй производной зависимости $\sigma(\sigma_0)$ показывает, что эта функция выпукла вниз, значит, базовое

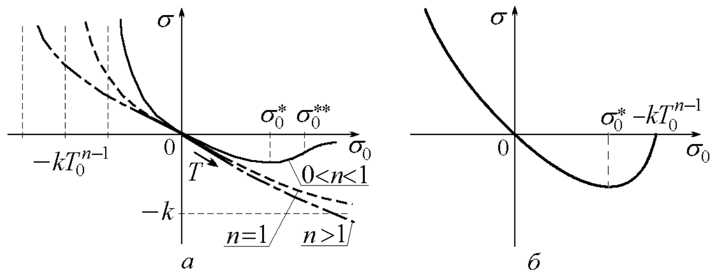


Рис. 2.1. Зависимость скорости изменения энтропии рабочего тела от скорости изменения энтропии источника для $n > 0$ (*а*) и $n < 0$ (*б*)

решение единственно для всех $n \leq 0$ и $n \geq 1$, причем минимум этой зависимости достигается в точке

$$\sigma_0^* = \alpha \frac{n}{1-n}\, T_0^{n-1}.$$

Лишь при $0 < n < 1$ происходит изменение знака второй производной в точке

$$\sigma_0^{**} = 2\sigma_0^*.$$

Из сказанного следует утверждение: *оптимальный режим взаимодействия с резервуаром для закона теплопереноса* (2.86) *соответствует переключению температуры рабочего тела между двумя значениями лишь тогда, когда*:

а) $0 < n < 1$;

б) *происходит охлаждение рабочего тела со средней интенсивностью*

$$-\frac{Q_0}{\tau} > T_0\sigma_0^{**} = \frac{2\alpha n}{1-n}\, T_0^n.$$

При этом одно из базовых значений T^* соответствует предельно возможной температуре рабочего тела $T = T_{\max}$, а второе вместе с множителем λ находится из условия стационарности по T функции Лагранжа L и равенства значения L в точке стационарности значению в точке $T_{\max}$.

Для всех остальных n, когда базовое значение температуры единственно, оно, как следует из (2.98) и (2.86), равно

$$T^* = \left(T_0^n - \frac{Q_0}{\tau\alpha}\right)^{1/n}. \qquad (2.101)$$

Когда базовое решение единственно и определяется равенством (2.101), оптимальный процесс состоит из двух адиабатических и одного изотермического участка с $T = T^*$. Для случая, когда базовых решений два, оптимальный процесс состоит из трех адиабатических участков и двух изотермических участков. Каждый из изотермических участков соответствует базовой температуре рабочего тела. Продолжительность их такова, чтобы среднее на интервале τ приращение энтропии источника $\overline{\sigma}_0$ удовлетворяло условию (2.99). Переход же с одной изотермы на другую происходит адиабатически. Так как в этом последнем случае существенны лишь значения температур изотерм и доли времени пребывания на каждой из них, то оптимальное решение не единственно.

Тот факт, что оптимальный процесс теплового контакта с источником постоянной температуры может иметь больше чем один изотермический участок, обнаружен В.Н.Орловым [157] для весьма экзотического закона теплопереноса

$$q(T_0, T) = \alpha_1 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)^9 .$$

Максимальная работа A^* вычисляется по формуле (2.89):

$$A^* = Q_0 + E(0) - E(S^*(\tau), V^*(\tau)), \tag{2.102}$$

где

$$S^*(\tau) = S(0) + \tau \cdot \overline{\sigma(T_0, T^*)}.$$

Если рабочее тело — идеальный газ, то, используя его уравнение состояния (см гл. 1), можно конкретизировать формулу (2.102):

$$A^*(\tau^*) = Q_0 - E(0) \cdot \left[\left(\frac{V^*(\tau)}{V(0)}\right)^{-R/C_v} \exp\left(\frac{\Delta S^*(\tau)}{C_v}\right) - 1\right], \tag{2.103}$$

где $\Delta S^*(\tau) = Q_0/T^*(\tau)$, R — универсальная газовая постоянная, C_v — теплоемкость газа при постоянном объеме.

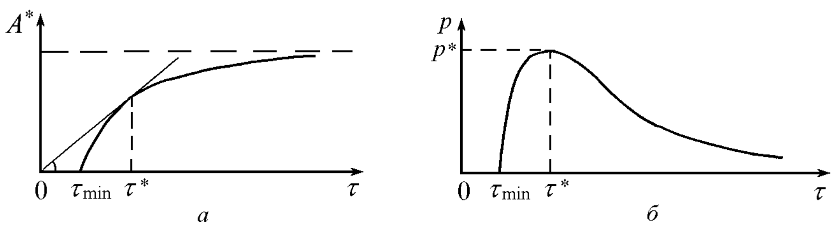


Рис. 2.2. Максимальная работа (*а*) и средняя мощность (*б*) в зависимости от продолжительности процесса

Функция $A^*(\tau)$, подсчитанная согласно равенству (2.103), показана на рис. 2.2. Она определена при $\tau > \tau_{\min} = \dfrac{Q_0}{\alpha T_0^n}$, что соответствует положительности температуры T^*. Предельная мощность процесса, имеющего продолжительность τ:

$$p(\tau) = \frac{A^*(\tau)}{\tau};$$

равна тангенсу угла наклона прямой, соединяющей начало координат с точкой графика $A^*(\tau)$. Значение $p(\tau)$ достигает максимума в точке τ^*, для которой

$$\left(\frac{dA^*}{d\tau}\right)_{\tau^*} = \frac{A^*(\tau^*)}{\tau^*}.$$

При $\tau \longrightarrow \infty$ работа A^* стремится к своему значению в обратимом процессе, а $p(\tau)$ стремится к нулю.

Источник конечной емкости. Рассмотрим случай, когда температура источника изменяется, причем скорость ее изменения зависит от теплового потока q:

$$\dot{T}_0 = -\frac{1}{C}\, q(T_0, T), \quad T_0(0) = T_0^0; \tag{2.104}$$

здесь C — теплоемкость источника.

Будем искать оптимальный закон изменения температуры рабочего тела для извлечения максимальной работы A при фиксированном времени процесса τ и количестве тепла Q_0, переданного (отданного) источником рабочему телу. При этом уравнение (2.104) нужно добавить к ограничениям задачи (2.95). Задача в такой постановке рассмотрена в п. 2.1, ее решение — процесс минимальной диссипации. Условия оптимальности решения имеют вид (2.38)

$$\left(\frac{T}{q(T_0, T)}\right)^2 \frac{\partial q}{\partial T} = \mathrm{const} = \frac{1}{\lambda} \quad \forall t. \tag{2.105}$$

Решение T^*, удовлетворяющее соотношению (2.105), зависит от T_0 и λ. Для того чтобы исключить λ и найти $T^*(T_0)$, следует решить (2.104) совместно с интегральным условием, соответствующим ограничению на продолжительность процесса.

Применим этот алгоритм для закона теплопередачи (2.86), считая теплоемкость источника C не зависящей от T_0. Условие (2.105) и ограничение на продолжительность примут вид

$$T^{n+1} = \frac{\alpha}{n\lambda}\left(T_0^n - T^n\right)^2, \tag{2.106}$$

$$\int\limits_{T_0^\circ - Q_0/C}^{T_0^\circ} \frac{dT_0}{\alpha(T_0^n - T^n)} = \frac{\tau}{C}. \tag{2.107}$$

Уравнение (2.106) решается аналитически относительно $T(T_0, \lambda)$ лишь при некоторых $n (n = \pm 1)$, для других n возможно численное решение.

П р и м е р: Решение для случая $n = 1$.

Уравнение (2.106) примет вид
$$T^2 = \frac{\alpha}{\lambda}(T_0 - T)^2,$$
откуда с учетом того, что $T_0 > T^*$, получим
$$T^* = mT_0 \quad \forall t,$$
где m — некоторая константа.

Исключая m с использованием (2.107), получим
$$T^*(T_0) = T_0 \cdot \frac{\left(\alpha\tau - C\ln\dfrac{T_0^o}{T_0^o - \frac{Q_0}{C}}\right)}{\alpha\tau}.$$
После подстановки $T^*(T_0)$ в уравнение (2.104) можно также найти зависимость $T^*(t)$:
$$T^*(t) = \left(T_0^o - \frac{Q_0}{C}\right) \cdot \frac{\alpha\tau - C\ln\dfrac{T_0^o}{T_0^o - \frac{Q_0}{C}}}{\alpha\tau} \cdot \exp\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad t \in (0, \tau).$$

Найдем связь между продолжительностью процесса τ, приращением энтропии системы D и приращением энтропии источника ΔS_0. На оптимальном процессе скорости изменения D и ΔS_0 постоянны, так что
$$\Delta S_0 = \alpha(m-1)\tau, \quad D = \Delta S + \Delta S_0 = \frac{\alpha(1-m)^2}{m}\tau.$$
Исключив m из этих равенств, получим
$$D = \frac{\Delta S_0^2}{\Delta S_0 + \alpha\tau}.$$

Таким образом, для любого процесса с линейным законом теплопереноса в системе, состоящей из источника и рабочего тела, справедливо неравенство
$$\frac{1}{D} - \frac{\alpha\tau}{\Delta S_0^2} - \frac{1}{\Delta S_0} \le 0. \tag{2.108}$$
В свою очередь ΔS_0 зависит от количества переданного тепла Q_0, емкости источника C и его начальной температуры T_0^0 как
$$\Delta S_0 = C\ln\left(1 - \frac{Q_0}{CT_0}\right).$$

Неравенство (2.108) задает области достижимых значений параметров состояния в плоскости с координатами $(D, \Delta S_0)$ при каждом τ (линии изохрон), показанные на рис. 2.3. Оптимальные траектории — прямые линии, выходящие из начала координат, так как $\dfrac{dD}{d\Delta S_0} = 1 - \dfrac{1}{m}$.

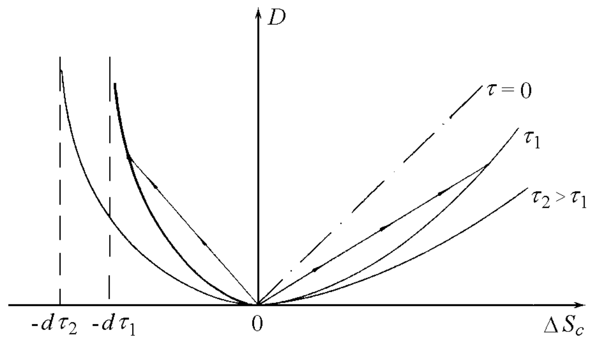


Рис. 2.3. Зависимость минимальной диссипации от прироста энтропии источника и продолжительности процесса

В том случае, когда рабочее тело — идеальный газ, максимальная работа A^* определяется, как нетрудно показать, выражением

$$A^* = Q_0 - E(V(0), T_0^0)\left[\left(\frac{V^*(\tau)}{V(0)}\right)^{R/C} \exp\frac{\Delta S}{C} - 1\right],$$

где C — объемная теплоемкость рабочего тела, ΔS — прирост его энтропии, равный

$$\Delta S = \frac{\alpha\tau C \ln\left(1 + \dfrac{Q_0}{CT_0^0 - Q_0}\right)}{\alpha\tau - C\ln\left(1 + \dfrac{Q_0}{CT_0^0 - Q_0}\right)}.$$

Источник с переменной температурой. Рассмотрим систему, в которой температура источника изменяется во времени. Это может быть заданная функция времени $T_0(t)$ или случайный стационарный процесс. К системам с одним нестационарным источником относятся тепловые машины, нагрев и охлаждение рабочего тела в которых осуществляется потоком жидкости или газа с переменной температурой, а также системы, в которых рабочее тело нагревается днем и охлаждается ночью в горных районах с интенсивной солнечной радиацией.

Применительно к рассматриваемой системе будем решать задачу о максимальной средней мощности $\bar{p}$, которой эквивалентна постановка о максимальной интенсивности теплового потока при средней интенсивности изменения энтропии рабочего тела, равной нулю. Оптимальное решение этой задачи удовлетворяет (см. гл. 9) условию

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \max_T\left[q(T_0,T)+\lambda\left(\frac{q(T_0,T)}{T}-\bar\sigma\right)\right]dt\to\min_\lambda. \qquad (2.109)$$

Достигается максимум подынтегрального выражения в (2.109) в одном или двух базовых значенияхб зависит от тогоб выпукла ли вверх зависимость $q(T_0,T)$ от $\sigma=\dfrac{q(T_0,T)}{T}$, полученная после исключения из этих выражений T. Нетрудно видеть, что, как и в случае постоянной температуры источника для законов теплопереноса вида (2.86) неединственность базового значения возможна лишь при $0<n<1$. В остальных случаях оптимальное решение соответствует стационарности по T подынтегрального выражения в (2.109). Отсюда следует, что для любого значения t температуры $T^*(t)$ и $T_0(t)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{T^2}\cdot\frac{q(T_0,T)}{\dfrac{\partial q(T_0,T)}{\partial T}}-\frac{1}{T}=\text{const}. \qquad (2.110)$$

Для законов теплопереноса вида (2.86) получим равенство

$$\frac{T_0^n}{T^{n+1}}+\frac{n-1}{T}=\text{const}. \qquad (2.111)$$

В частности, для линейного закона ($n=1$) имеем

$$T^*(T_0)=m\sqrt{T_0}. \qquad (2.112)$$

В задаче с переменной температурой источника в постановке (2.97) целесообразно перейти от усреднения по времени к усреднению по множеству (см. п. 9.6) значений T_0. Как регулярной, так и случайной функции $T_0(t)$ может быть сопоставлена вероятностная мера $f(T_0)\geq 0$, а задача (2.97) переписана в форме (см. гл. 9)

$$\bar q=\int\limits_0^\infty f(T_0)q(T_0,T)\,dT_0\to\max\Bigg/\int\limits_0^\infty f(T_0)\frac{q(T_0,T)}{T}\,dT_0=\bar\sigma=0. \qquad (2.113)$$

Для случайной функции $T_0(t) f_0$ — это плотность распределения вероятности ее значений.

Величина m определяется после подстановки в условие задачи (2.113) зависимости $T_0^*(T,\text{const})$, найденной из (2.110). Для линейного закона, подставляя (2.112) в (2.113), получим

$$\int\limits_0^\infty f(T_0)\sqrt{T_0}\,dT_0=m.$$

Так что m представляет собой среднее значение квадратного корня температуры источника, а

$$T^*(t) = \overline{\sqrt{T_0}}\sqrt{T_0(t)}. \tag{2.114}$$

Для закона (2.86) и $n = -1$ условия оптимальности (2.111) приводят к выражениям

$$T^*(T_0) = 2\lambda\frac{T_0}{T_0 + \lambda},$$

где

$$\lambda = \sqrt{\overline{T_0^2}}.$$

Здесь черта соответствует усреднению квадрата функции $T_0(t)$ по времени либо по множеству.

Пусть, например, $f(T_0)$ — равномерное распределение значений T_0, определенное на (T_{01}, T_{02}), что соответствует линейному изменению температуры источника вида

$$T_{01} = T_{01} + \frac{t}{\tau}(T_{02} - T_{01}).$$

Тогда для $n = 1$ по формуле (2.114) получим

$$T^*(T_0) = \frac{2\left(T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}\right)}{3\,(T_{02} - T_{01})}\sqrt{T_0}.$$

Для $n = -1$

$$T^*(T_0) = \frac{2T_0(T_{02}^3 - T_{01}^3)}{3T_0(T_{02} - T_{01}) + (T_{02}^3 - T_{01}^3)}.$$

При $\bar{\sigma} = 0$ предельная средняя мощность $\bar{p}$ для $n = 1$

$$\bar{p}_{\max} = \alpha\left[\frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{4}{9}\left(\frac{\left(T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}\right)}{(T_{02} - T_{01})}\right)^2\right].$$

Система со стационарным резервуаром и источниками конечной емкости.

Продолжительность процесса не ограничена. Пусть система содержит резервуар с температурой T_-, k подсистем конечной емкости с начальными температурами T_{i0} и теплоемкостями $c_i (i = 1, ..., k)$ и рабочее тело, которое может вступать с подсистемами в тепловой, но не механический, как предполагалось выше, контакт. Будем далее предполагать, что объёмы подсистем постоянны, работа может быть получена за счёт изменения объёма, а значит и температуры рабочего тела при контакте с подсистемами.

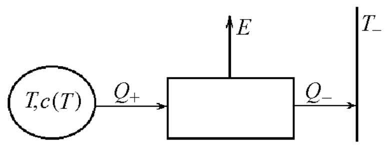


Рис. 2.4. Система, состоящая из подсистемы конечной емкости, рабочего тела и резервуара

Найдем A_∞ для одной подсистемы. Для этого запишем уравнения баланса по энергии и энтропии для обратимой тепловой машины, работающей за счет обмена энергией подсистемы и резервуара (рис. 2.4):

$$dQ_+ - dQ_- - dE = 0, \quad \frac{dQ_+}{T} - \frac{dQ_-}{T_-} = 0 \Rightarrow dQ_- = dQ_+ \frac{T_-}{T}. \quad (2.115)$$

Второе уравнение соответствует тому, что прирост энтропии рабочего тела равен нулю. Из уравнений (2.115) следует, что

$$dE = dQ_+ \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) = -c(T) \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) dT,$$

так что

$$A_\infty = \int\limits_{T_-}^{T_0} c(T) \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) dT. \quad (2.116)$$

При постоянной теплоемкости

$$A_\infty = c\left(T_0 - T_-\left(1 + \ln \frac{T_0}{T_-}\right)\right).$$

Эта функция неотрицательна и равна нулю в точке $T_0 = T_-$ (рис. 2.5).

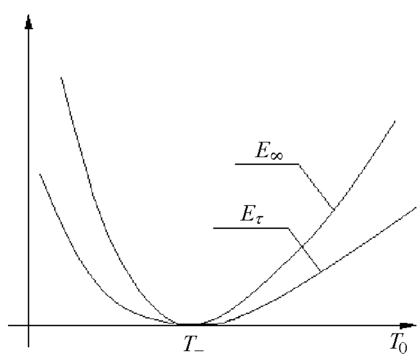


Рис. 2.5. Работоспособность системы (рис. 2.4) при ограниченной и неограниченной продолжительности процесса

Для k подсистем $A_\infty = \sum_{i=1}^{n} A_{i\infty}$. При $c_i = \mathrm{const}$

$$A_\infty = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(T_{0i} - T_- \left(1 + \ln \frac{T_{i0}}{T_-} \right) \right). \tag{2.117}$$

Продолжительность процесса задана. В этом случае для каждой подсистемы (индекс i опускаем) нужно решить задачу о выборе таких температур рабочего тела $T_1(t)$ и $T_2(t)$, чтобы извлеченная работа была максимальна:

$$A_\tau = \int_0^\tau (q_+(T, T_1) - q_-(T_2, T_-))dt \to \max_{T_1, T_2}, \tag{2.118}$$

при условии неизменности в среднем энтропии и других параметров состояния рабочего тела:

$$\int_0^\tau \left(\frac{q_+(T, T_1)}{T_1} - \frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2} \right) dt = 0, \tag{2.119}$$

и изменения температуры подсистемы при отборе тепла в соответствии с уравнением

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{q_+(T, T_1)}{c(T)}, T(0) = T_0. \tag{2.120}$$

Здесь выражение (2.118) следует из энергетического, а условие (2.119) — из энтропийного баланса рабочего тела, через q_+ и q_- обозначены тепловые потоки от подсистемы к машине и от машины к резервуару.

Обозначим прирост энтропии рабочего тела при получении тепла через ΔS, тогда задачу (2.118)–(2.120) можно разбить на две подзадачи:

$$Q_+ = \int_0^\tau q_+(T, T_1)dt \to \max_{T_1(t)} \tag{2.121}$$

при условиях (2.120) и условии

$$\int_0^\tau \frac{q_+(T, T_1)}{T_1} dt = \Delta S. \tag{2.122}$$

Вторая подзадача в силу постоянства T_-, а значит, и T_2, примет вид

$$Q_- = q_-(T_2, T_-)\tau \to \min_{T_2} \tag{2.123}$$

при условии

$$\frac{q_-(T_2, T_-)}{T_2} = \frac{\Delta S}{\tau}. \tag{2.124}$$

Условие (2.124) связывает T_2 и ΔS, так что Q_- зависит от ΔS, как и максимум Q_+. Величину ΔS надо выбрать так, чтобы

$$A_\tau(\Delta S) = [Q_+^*(\Delta S) - Q_-^*(\Delta S)] \to \max_{\Delta S > 0} . \tag{2.125}$$

Задача (2.120), (2.121), (2.122) рассмотрена выше. Условия оптимальности этой задачи с точностью до обозначений совпадают с условиями минимальной диссипации (2.38),(2.105)

$$\frac{\partial q_+}{\partial T_1}\left(\frac{T_1^*(T)}{q_+(T,T_1^*(T))}\right)^2 = \text{const} \quad \forall T. \tag{2.126}$$

Они определяют $T_1(T)$ с точностью до константы k.

Величину константы k находят после подстановки найденной из (2.126) зависимости $T_1^*(T,k)$ в (2.120),(2.122). Она зависит от ΔS, что и приводит к зависимости Q_+^* от ΔS, или, что то же самое, от k.

Для ньютоновских законов теплообмена

$$q_- = \alpha_-(T_2 - T_-), \quad q_+ = \alpha_+(T - T_1) \tag{2.127}$$

и постоянной теплоемкости c равенство (2.126) примет форму

$$\frac{T_1^2}{\alpha_+(T-T_1)^2} = \text{const} \Rightarrow T_1 = kT,$$

где k — некоторая константа $(0 < k < 1)$.

Условия (2.120), (2.122) после подстановки в них $T_1(T,k)$ приводят к уравнениям, связывающим $k, \Delta S$ и $\overline{T}$:

$$\Delta S = \frac{c}{k}\ln\frac{T_0}{\overline{T}}, \quad \tau = \frac{c}{\alpha_+(1-k)}\ln\frac{T_0}{\overline{T}}, \tag{2.128}$$

или

$$\overline{T} = T_0 \exp\left(-\frac{\tau\alpha_+(1-k)}{c}\right). \tag{2.129}$$

После подстановки $\overline{T}$ в условие (2.128) получим

$$\Delta S = \frac{\tau\alpha_+(1-k)}{k}, \tag{2.130}$$

а после подстановки $T_1 = kT$ и $\overline{T}$ в (2.121) найдем

$$Q_+^*(k) = T_0 c\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau\alpha_+(1-k)}{c}\right)\right). \tag{2.131}$$

Из условия (2.124)

$$\alpha_-(T_2 - T_-) = \frac{\Delta S T_2}{\tau} = \frac{\alpha_+(1-k)}{k}T_2$$

следует, что

$$T_2 = T_- \frac{\alpha_- k}{\alpha_- k - \alpha_+(1-k)}.$$

Так как $T_2 > 0$, то $\alpha_- k - \alpha_+(1-k) > 0$, откуда $k > \dfrac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+}$. Величина

$$Q_-^*(k) = \frac{\tau T_- \alpha_+ \alpha_-(1-k)}{\alpha_- k - \alpha_+(1-k)}. \tag{2.132}$$

По условию (2.125) получим уравнение для k

$$\frac{\partial Q_+^*}{\partial k} = \frac{\partial Q_-}{\partial k} \Rightarrow T_0 \exp\Big(-\frac{\alpha_+ \tau}{c}(1-k)\Big) = \frac{T_- \alpha_-^2}{(\alpha_- k - \alpha_+(1-k))^2}. \tag{2.133}$$

Левая часть этого уравнения монотонно растет с изменением k от нуля до единицы, а правая испытывает разрыв при $k^0 = \dfrac{\alpha_+}{\alpha_- + \alpha_+}$. При $k < k^0$ правая часть уравнения отрицательна, а при $k > k^0$ она монотонно уменьшается от бесконечности до T_-. Решение уравнения (2.133) существует, единственно и при $T_0 > T_-$, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\alpha_+}{\alpha_+ + \alpha_-} < k \le 1.$$

После того, как для каждой подсистемы найдено значение k_i, доставляющее максимум $A_{i\tau}(\Delta S_i(k_i))$, работоспособность системы имеет вид

$$A_\tau = \sum_i A_{i\tau}^*.$$

Системы без резервуара.

Продолжительность процесса не ограничена. При отсутствии ограничения на продолжительность процесса максимальной работе, извлеченной из системы (см. рис. 2.6), соответствует обратимый процесс, в котором температуры всех подсистем выравниваются и в пределе становятся равными некоторому значению Θ.

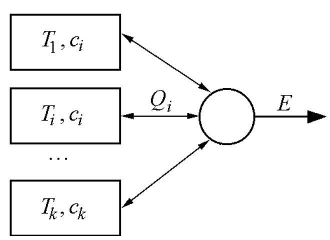


Рис. 2.6. Термодинамическая система с идеальной тепловой машиной, не содержащая резервуара

Энтропия системы при этом не возрастает, так как рабочее тело получает и отдает тепло при температуре, сколь угодно близкой к температуре подсистемы. Работоспособность системы A_∞ равна уменьшению ее внутренней энергии

$$A_\infty = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Theta}^{T_{i0}} c_i(T)\, dT.$$

Значение Θ определяется из условия постоянства энтропии рабочего тела

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Theta}^{T_{i0}} \frac{c_i(T)}{T}\, dT = 0. \tag{2.134}$$

В частности, для постоянных теплоемкостей из равенства (2.134) следует, что конечная температура

$$\Theta = \prod_{i=1}^{k} T_{i0}^{\gamma_i}, \quad \gamma_i = \frac{c_i}{\sum\limits_{\nu=1}^{k} c_\nu},$$

так что

$$A_\infty = \sum_{i=1}^{k} c_i(T_{i0} - \Theta) = (\overline{T} - \Theta) \sum_{i=1}^{k} c_i. \tag{2.135}$$

Связь потерь работоспособности с изменением энтропии системы. При определении эксергии как потенциальной работоспособности энергии в системе с резервуаром потери эксергии в необратимом процессе пропорциональны приросту энтропии системы. Так, для тепловой системы, содержащей резервуар с температурой T_-, и подсистемы с теплоемкостями c_i и начальными температурами T_{i0} при необратимом выравнивании температур потеря работоспособности (она в данном случае равна потере эксергии) есть

$$A_\infty = T_- \Delta S,$$

где прирост энтропии

$$\Delta S = \sum_i c_i \left(\frac{T_{i0}}{T_-} - \ln \frac{T_{i0}}{T_-} - 1 \right).$$

Найдем аналогичную зависимость для системы, состоящей из подсистем с теплоемкостями c_i и начальными температурами T_{i0} и не содержащей резервуара. Работоспособность такой системы определяется выражением (2.135), в котором $\overline{T} = \sum\limits_i T_{i0}\gamma_i$ — средняя начальная температура подсистем, а $\gamma_i = \dfrac{c_i}{\sum\limits_\nu c_\nu}$ — относительная теплоемкость i-й подсистемы.

Прирост энтропии системы в необратимом процессе выравнивания температур подсистем от T_{i0} до $\overline{T}$ равен

$$\Delta S = \sum_i \Delta S_i = \sum_i c_i ln \frac{\overline{T}}{T_{i0}} = \ln \frac{\overline{T}}{\Theta} \sum_i c_i,$$

откуда

$$\frac{\overline{T}}{\Theta} = \exp \frac{\Delta S}{\sum\limits_i c_i}.$$

После подстановки в выражение (2.135) получим работоспособность системы в форме

$$A_\infty = \sum_i c_i \overline{T} \left(1 - \frac{\Theta}{\overline{\overline{T}}}\right) = \sum_i c_i T_{i0} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta S}{\sum\limits_i c_i}\right)\right]. \tag{2.136}$$

Эта зависимость монотонна, а ее наклон при $\Delta S = 0$ есть

$$\left(\frac{dA_\infty}{d\Delta S}\right)_{\Delta S = 0} = \overline{T}.$$

Продолжительность процесса задана. Рассмотрим ту же задачу при фиксированной продолжительности процесса τ. Она отличается от рассмотренной выше тем, что температуры каждой подсистемы в конце процесса $\overline{T_i}$ различны и прирост энтропии системы положителен. Нулю равны приращения внутренней энергии и энтропии рабочего тела. Формально задача примет вид

$$A_\tau = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\overline{T_i}}^{T_{i0}} c_i(T) dT \to \max_{\overline{T_i}, T_{pi}(T)} \tag{2.137}$$

при условиях

$$\Delta S_p = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\overline{T_i}}^{T_{i0}} \frac{c_i(T)}{T_{pi}(T)} dT = 0, \tag{2.138}$$

$$\int\limits_{\overline{T_i}}^{T_{i0}} \frac{c_i(T) dT}{q_i(T, T_p)} = \tau, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{2.139}$$

Здесь T_{pi} — температура рабочего тела при контакте с i-й подсистемой, условие (2.137) соответствует максимальному уменьшению внутренней энергии системы, условие (2.138) — равенству нулю прироста энтропии рабочего тела, а (2.139) — ограничению на продолжительность процесса.

Задача (2.137)–(2.139) сепарабельна и может быть разбита на k подзадач об оптимальном контакте рабочего тела с каждой из подсистем.

При этом первоначально считаем прирост энтропии рабочего тела при контакте с i-й подсистемой ΔS_i фиксированным.

Задача об оптимальном контакте примет форму (индекс i опускаем)

$$A_\tau = \int\limits_{\overline{T}}^{T_0} c(T)\,dT \to \max_{\overline{T}, T_p(T)} \tag{2.140}$$

при условиях

$$\int\limits_{\overline{T}}^{T_0} \frac{c(T)}{T_p(T)}\,dT = \Delta S, \tag{2.141}$$

$$\int\limits_{\overline{T}}^{T_0} \frac{c(T)\,dT}{q(T, T_p)} = \tau. \tag{2.142}$$

Задача (2.140)–(2.142) с точностью до обозначений совпадает с задачей (2.120)–(2.122), поэтому температура рабочего тела при контакте с i-й подсистемой удовлетворяет условию (2.126), определяющему $T_{pi}(T_i, k_i)$. После подстановки этой зависимости в (2.141), (2.142) получим систему из двух уравнений с тремя неизвестными $\overline{T_i}$, ΔS_i, k_i.

На втором этапе нужно решать задачу о таком выборе этих переменных, чтобы

$$A_\tau = \sum_{i=0}^{m} A_{\tau i}(\Delta S_i, k_i, \overline{T_i}) \to \max_{\Delta S_i, \overline{T_i}, k_i} \tag{2.143}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta S_i(k_i, \overline{T_i}) = \Delta S_p = 0, \tag{2.144}$$

$$\varphi_i(\Delta S_i, k_i, \overline{T_i}) = \tau, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.145}$$

Здесь через φ_i обозначена функция, которая получается в результате взятия интеграла в (2.142) при подстановке туда зависимости $T_{pi}(T, k)$, найденой по условию (2.126).

В частности, для ньютоновских законов теплообмена

$$q_i = \alpha_i(T_i - T_{pi}), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.146}$$

условия (2.126), как было показано, приводят к зависимости

$$T_{pi}(T_i) = k_i T_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.147}$$

После подстановки этого выражения в (2.141) и (2.142) получим для постоянных теплоемкостей зависимости $\overline{T_i}(k_i)$ и $\Delta S_i(k_i)$ в форме (2.129), (2.130).

Задача (2.143)–(2.145) состоит в таком выборе k_i, ΔS_i, $\overline{T_i}$, чтобы достичь максимума

$$A_\tau = \sum_{i=1}^{m} c_i(T_{i0} - \overline{T_i}) \to \max_{\overline{T_i}, \Delta S_i, k_i} \tag{2.148}$$

при условиях (2.144), (2.129), (2.130), которые после исключения ΔS_i можно привести к виду

$$\overline{T_i}(k_i) = T_{i0} \exp\left(-\frac{\tau\alpha_i(1-k_i)}{c_i}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.149}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i(1-k_i)}{k_i} = 0. \tag{2.150}$$

Подставляя $\overline{T_i}(k_i)$ в (2.148), получим сепарабельную задачу (2.148), (2.150) с m неизвестными k_i. Условия стационарности i-го слагаемого функции Лагранжа этой задачи

$$R_i = c_i(T_{i0} - \overline{T_i}(k_i)) - \lambda\frac{\alpha_i(1-k_i)}{k_i}$$

по k_i приводят к системе уравнений

$$k_i^2\overline{T_i}(k_i) = \text{const} = \frac{\lambda}{\tau}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.151}$$

определяющих $k_i(\lambda)$. Значение λ находят после подстановки этих зависимостей в (2.150).

2.4. Структура оптимального решения в задаче о максимальной работе

Выше были рассмотрены различные частные случаи задачи об извлечении максимальной работы в термодинамических системах. Здесь мы рассмотрим общую структуру оптимальных решений в подобных задачах. Отметим, что значительный интерес представляет и обратная задача: какую минимальную работу нужно затратить, чтобы равновесную систему разделить на несколько подсистем с заданными значениями интенсивных переменных. В обратимом случае при отсутствии в прямой задаче равновесных необратимых процессов (смешение, прямой тепловой контакт) ее решение очевидно: нужно затратить ровно ту же работу, которая получена в прямой задаче $A_3^0 = A_n^0$. В более общем случае $A_3^0 = A_n^0 + A_p^0$, где A_p^0 — обратимая работа разделения. В дальнейшем будем называть эту задачу *задачей о минимальной затраченной работе*.

В термодинамике конечного времени задача о максимальной работе имеет ту же постановку, что и в обратимой термодинамике с той разницей, что продолжительность процессов τ ограничена. При этом каждая подсистема считается внутренне равновесной, а источником необратимости являются процессы, протекающие на границах контактирующих подсистем. Решение задачи при конечном времени дает оценку $A_n^*(\tau)$, существенно более близкую к реальности и учитывающую, в отличие от A_n^0, кинетические факторы — законы тепло- и массообмена, кинетику химических превращений и пр. При этом возникает и задача о максимальной мощности, т.е. о выборе такого значения τ, для которого средняя мощность процесса

$$n = \frac{A_n^*(\tau)}{\tau}$$

максимальна. В обратимом случае значение n сколь угодно близко к нулю. Аналогичным образом обобщается задача о минимальной работе при конечном времени τ, при этом задача о минимальной затраченной мощности смысла не имеет, так как мощность монотонно уменьшается с ростом τ и стремится к нулю при стремлении продолжительности процесса к бесконечности.

Извлечь работу из термодинамической системы или перевести систему из однородного в неоднородное состояние можно лишь при условии, если в ее состав входит управляющая система (рабочее тело), которая устанавливает и прерывает контакты с другими подсистемами, выбирая при этих контактах значения своих интенсивных переменных — температур, давлений, химических потенциалов. Эти величины, как и функции контакта, равные единице при наличии и нулю при отсутствии контакта, являются управляющими воздействиями.

Задача о максимальной работе в термодинамике конечного времени при тех или иных условиях контакта для тепломеханических подсистем с одним резервуаром сформулирована Л. И. Розоноэром [57] как задача оптимального управления, там же показано, что она сводится к усредненной задаче нелинейного программирования, и получены условия оптимальности управления.

Рассмотрим задачи о максимальной и минимальной работе в постановке, позволяющей включиить в рассмотрение не только тепломеханические системы, и исследуем характер оптимального решения как в задаче о максимуме полученной, так и в задаче о минимуме затраченой работы, а также в задаче о максимальной мощности. Покажем, что в оптимальном процессе для широкого класса систем независимо от законов тепло- и массообмена энтропия системы возрастает линейно либо кусочно линейно. Общие условия оптимальности конкретизируем для нескольких структур систем.

Формальная постановка и характер оптимального решения. Разобъем все подсистемы, входящие в рассматриваемую термодинамическую систему, на три категории:

1) источники бесконечной емкости (резервуары);

2) источники конечной емкости (пассивные подсистемы);

3) подсистемы с управляемыми интенсивными переменными (рабочие тела).

Векторы интенсивных переменных подсистем каждого типа будем обозначать соответственно как z_n, z_e, z_p. Составляющими этих векторов являются температуры, давления и химические потенциалы подсистем. Вектор экстенсивных переменных каждой i-й подсистемы характеризуется внутренней энергией E_i, энтропией S_i и количеством каждого из веществ N_{ij} $(j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n)$. При наличии контакта между подсистемами возникают энергетические и материальные потоки $q_{i\nu}(z_i, z_\nu)$ и $g_{i\nu}(z_i, z_\nu)$. Здесь индексы означают, что поток направлен от i-й подсистемы к ν-й. При этом поток $g_{i\nu}$ векторный и содержит m составляющих — по числу веществ, содержащихся в системе. Функции $q_{i\nu}$ и $g_{i\nu}$ равны нулю при $z_i = z_\nu$. В силу законов сохранения вещества и энергии

$$\begin{aligned} q_{i\nu}(z_i, z_\nu) &= -q_{\nu i}(z_\nu, z_i) \\ g_{i\nu}(z_i, z_\nu) &= -g_{i\nu}(z_\nu, z_i) \quad \forall i, \nu. \end{aligned} \tag{2.152}$$

Интенсивные переменные резервуаров z_n предполагаются заданными и неизменными; интенсивные переменные рабочего тела z_p для каждого момента t принадлежат некоторому множеству D_z и являются в задаче управляющими воздействиями; наконец, интенсивные переменные пассивных подсистем являются функциями их экстенсивных переменных

$$z_e = f(E_e, S_e, N_e). \tag{2.153}$$

Наряду с вектором $z_p(t)$ управляющими воздействиями являются и функции контакта $U^q_{i\nu}(t)$ и $U^g_{i\nu}(t)$, принимающие значения нуль или единица. Если функция контакта равна единице, то соответствующий поток возможен, если она равна нулю, поток отсутствует.

Экстенсивные переменные каждой из подсистем удовлетворяют уравнениям термодинамических балансов:

Условию энергетического баланса:

$$\dot{A}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \left[U^q_{i\nu} q_{i\nu}(z_i, z_\nu) + U^g_{i\nu} \mu_{i\nu} g_{i\nu}(z_i, z_\nu) \right] - r_\nu(t), \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{2.154}$$

Здесь суммирование производится по всем i, включая $i = \nu$, с учетом того, что $q_{\nu\nu} = g_{\nu\nu} = 0$; $r_\nu(t)$ — получаемая от ν-й подсистемы механическая работа, если $r > 0$, и затрачиваемая, если $r < 0$; второе слагаемое в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение, т.е. сумму по индексу j от единицы до m для каждого сочетания i и ν.

Условиям материального баланса по каждому из веществ:

$$\dot{N}_j = \sum_{i=1}^{n} U_{ij}^g g_{ij}(z_i, z_j) = n_j(u, z). \tag{2.155}$$

Балансу по энтропии:

$$\dot{S}_\nu = \frac{1}{T_\nu} \sum_{i=1}^{n} \Big[U_{i\nu}^q q_{i\nu}(z_i, z_\nu) + U_{i\nu}^g \mu_{i\nu} g_{i\nu}(z_i, z_\nu) \Big] = \sigma_\nu(u, z), \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{2.156}$$

На функции контакта кроме упомянутых условий могут быть наложены дополнительные требования, так что будем предполагать, что $U \in D_u$, где множество D_u представляет собой подмножество вершин куба с единичными гранями, расположенного в положительном квадранте с одной из вершин в начале координат.

Критерием оптимальности задачи является работа A, полученная от системы,

$$A_n = \int_0^\tau \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu(t) dt \to \max,$$

или, через приращение внутренней энергии,

$$E_n = \sum_{\nu=1}^{n} (E_\nu(0) - E_\nu(\tau)) \to \max. \tag{2.157}$$

Начальное состояние системы задано, поэтому критерий (2.157) соответствует условию

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(\tau) \to \min.$$

Так как внутренняя энергия каждой из подсистем зависит от S_ν, V_ν, N_ν, то приходим к требованию

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu \Big[(S_{\nu 0} + \tau \overline{\sigma_\nu(u, z)}), (N_{\nu 0} + \tau \overline{n_\nu(u, z)}), V_\nu(\tau) \Big] \to \min_{u, z_p, V}. \tag{2.158}$$

Здесь черта означает усреднение соответствующей функции на интервале $(0, \tau)$. Так,

$$\overline{n_\nu(u, z)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau n_\nu(u(t), z(t))\, dt.$$

Минимум внутренней энергии нужно искать при заданном начальном состоянии системы с учетом уравнений (2.155), (2.156), связей (2.153) для пассивных подсистем, ограничений, наложенных на объем подсистем,

$$V(t) \in D_V, \tag{2.159}$$

на переменные U и z_p —

$$U(t) \in D_u, \quad z_p(t) \in D_z \tag{2.160}$$

и на конечные значения энтропии и состава для некоторых подсистем —

$$\begin{gathered} S_\nu(\tau) = S_\nu^k, \quad \nu = 1, 2, ..., x \le n, \\ N_{\nu j}(\tau) = N_{\nu j}^k, \quad (j, \nu) \in \Omega. \end{gathered} \tag{2.161}$$

Здесь Ω — множество сочетаний индексов j, ν, для которых содержание j-го компонента в ν-й подсистеме фиксировано.

Пусть общее число условий типа (2.161) равно m. При этом справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial E_\nu}{\partial S_\nu}\right)_{t=\tau} = T_\nu(\tau), \quad -\left(\frac{\partial E_\nu}{\partial V_\nu}\right)_{t=\tau} = P_\nu(\tau), \quad \left(\frac{\partial E_\nu}{\partial N_{\nu j}}\right)_{t=\tau} = \mu_{\nu j}(\tau), \tag{2.162}$$

где P_ν — давление, а $\mu_{\nu j}$ — химический потенциал j-го вещества в ν-й подсистеме.

Остановимся на математических особенностях задачи, позволяющих в ряде случаев существенно упростить ее решение.

1. Объемы $V_\nu(\tau)$ входят только в критерий оптимальности (2.158) и ограничения (2.159) и никак не влияют на $S(\tau)$ и $N(\tau)$, поэтому для их оптимального выбора достаточно решить задачу

$$E(\tau) = \sum_{\nu=1}^n E_\nu(S_\nu^*(\tau), N_\nu^*(\tau), V_\nu) \to \min_{V \in D_V}. \tag{2.163}$$

В частности, если задан суммарный объем системы в конце процесса

$$\sum_{\nu=1}^{n} V_\nu(\tau) = V_0 \tag{2.164}$$

и E_ν выпукла вниз по V_ν, то требование (2.163), (2.164) приводит к условиям

$$\left(\frac{\partial E_\nu}{\partial V_\nu}\right)_\tau = -P_\nu(\tau) = \text{const} \quad \forall \nu. \tag{2.165}$$

Таким образом, в конечный момент объемы подсистем при оптимальных либо заданных значениях $S_\nu(\tau)$ и $N_\nu(\tau)$ должны выбираться из условия равенства давлений. Если среди подсистем имеется резервуар, давление в котором неизменно, то из условия (2.165) следует, что в момент τ давления всех подсистем, объемы которых можно менять, должны совпадать с давлением этого резервуара P_n.

2. Если среди подсистем отсутствуют пассивные подсистемы, то задача (2.158), (2.155), (2.156) оказывается не задачей оптимального управления, а усредненной задачей нелинейного программирования [86]. Действительно, в этом случае уравнения (2.155), (2.156) не содержат в своих правых частях переменных состояния N и S. Эти уравнения могут быть отброшены и заменены условиями (2.161), которые можно записать в форме m равенств

$$\begin{gathered}\overline{\sigma_\nu(u,z)} = \frac{1}{\tau}(S_\nu^k - S_{\nu 0}) = \overline{\sigma_\nu}, \quad \nu = 1, 2, ..., x \le n,\\ \overline{n_{\nu j}(u,z)} = \frac{1}{\tau}(N_{\nu j}^k - N_{\nu j0}), \quad (j,\nu) \in \Omega.\end{gathered} \tag{2.166}$$

Оптимальное решение $W^*(t) = (U^*(t), z^*(t))$ задачи (2.158), (2.166) (см. гл. 9) представляет собой кусочно постоянную вектор-функцию, принимающую на $(0,\tau)$ не более $(m+1)$-го значения W^l. Каждое из этих базовых значений управление $W^*(t)$ принимает в течение доли γ_l интервала $(0,\tau)$ $\left(\gamma_l \ge 0, \sum_{l=0}^{m} \gamma_l = 1\right)$, причем последовательность, в которой следуют значения W^l, роли не играет. Каждое из базовых решений удовлетворяет условию

$$\begin{gathered}L = \left\{\left[\sum_{\nu=x+1}^{n} T_\nu(\tau)\sigma_\nu(u,z) + \sum_{\nu,j\notin\Omega} \mu_{\nu j}(\tau) n_{\nu j}(u,z) + \right.\right.\\ \left.\left. + \sum_{\nu=1}^{x} \lambda\nu(\sigma_\nu(u,z) - \overline{\sigma_\nu}) + \sum_{\nu,j\in\Omega} \lambda_{\nu j}(n_{\nu j}(u,z) - \bar{n}_{\nu j})\right]\right\} \to \min_{u,z}, \max_{\lambda}.\end{gathered} \tag{2.167}$$

Здесь множетели $T_\nu(\tau)$ и $\mu_{\nu j}(\tau)$ обязаны своим появлением свойству (2.162) уравнения состояния.

Для определения значений этих переменных, которые в общем случае отличаются от оптимальных значений $T_\nu(t)$ и $\mu_{\nu j}(t)$ на интервале $(0, \tau)$, условие (2.167) нужно дополнить равенствами

$$S_\nu(T_\nu(\tau), V_\nu^*, \mu_\nu(\tau), N_\nu(\tau)) = S_\nu(0) + \tau\sigma_\nu(u, z), \quad \nu = x+1, \ldots, n,$$
$$N_{\nu,j}(\tau) = N_{\nu,j}(0) + \tau n_{\nu j}(u, z), \quad \nu, j \notin \Omega. \qquad (2.168)$$

В задачах о предельной мощности время τ^* определяется по условию

$$r(\tau) = \frac{A_n^*(\tau)}{\tau} \to \max_{\tau > 0},$$

что для дифференцируемой и выпуклой вверх зависимости полученной работы от продолжительности процесса приводит к уравнению для τ^*

$$\left(\frac{dA_n^*}{d\tau}\right)_{\tau^*} = \frac{A_n^*(\tau^*)}{\tau^*}. \qquad (2.169)$$

Если условия (2.156) отсутствуют ($m = 0$), то решение $W^*(t)$ определяется из условия

$$\sum_{\nu=1}^{n} T_\nu(\tau)\sigma_\nu(u, z) + \sum_{\nu,j} \mu_{\nu j}(\tau) n_{\nu j}(u, z) \to \min_{u \in D_u, z \in D_z} \qquad (2.170)$$

совместно с равенствами (2.168). Оно постоянно во времени для любых кинетических зависимостей, определяющих σ_ν и $n_{\nu j}$.

Если функция L в (2.167) при всех значениях λ выпукла вниз по W, то базовое значение единственно; если, наконец, множество $D_w = D_u \times D_z$ можно разбить на несколько подмножеств, число которых M^0 меньше $m + 1$ и на каждом из которых L выпукла вниз, то число базовых решений не превосходит числа M^0. Справедливость этого утверждения следует из (2.167).

Доли γ_l определяют из условий (2.166), которые после подстановки в них базовых решений примут форму

$$\begin{gathered}\sum_l \gamma_l \sigma_\nu(W^l) = \overline{\sigma_\nu}, \quad \nu = 1, 2, ..., x, \\ \sum_l \gamma_l n_{\nu j}(W^l) = \overline{n_{\nu j}}, \quad (j, \nu) \in \Omega, \\ \gamma_l \geq 0, \quad \sum_l \gamma_l = 1.\end{gathered} \qquad (2.171)$$

В качестве вывода из вышеизложенного сформулируем следующее у т в е р ж д е н и е, определяющее структуру оптимального решения в задаче о максимальной работе.

Для любых законов тепло- и массопереноса в термодинамической системе, состоящей из резервуаров и рабочих тел с заданным начальным состоянием, максимальная полученная работа за время τ, если внутренняя энергия системы уменьшается, или минимальная затраченная, если внутренняя энергия увеличивается, достигаются в процессе, для которого:

— вектор интенсивных переменных и функций контакта на интервале $(0, \tau)$ кусочно постоянен, причем число значений, которые он принимает, не превосходит $m + 1$, где m — число фиксированных значений энтропии и количества вещества для рабочих тел в момент τ;

— в начале и в конце процесса интенсивные переменные рабочих тел изменяются скачком до некоторых оптимальных значений;

— энтропия системы растет на интервале $(0, \tau)$ как кусочно линейная функция.

Следствие. *Когда на состав и энтропию рабочих тел при $t = \tau$ ограничений не наложено $(m = 0)$, энтропия системы в оптимальном процессе при любых законах тепло- и массопереноса растет с постоянной скоростью, а каждое из рабочих тел на протяжении всего процесса контактирует только с одним из резервуаров.*

При наличии пассивных подсистем задача о максимальной работе оказывается задачей оптимального управления с целочисленными переменными $U(t)$ и может быть решена аналитически лишь в редких случаях.

Очевидно, что задача о минимальной затраченной работе A_3^* в точности совпадает по постановке с задачей о максимальной полученной работе A_n^*. Разница заключается лишь в знаке полученного решения и в том, что задано не только начальное, но и конечное состояние. Однако все выводы, касающиеся структуры оптимального решения, справедливы и в этом случае. Если работа A_n на оптимальном решении положительна, то $A_3^* = A_n^* + A_p^0$, если же она отрицательна, то $|A_n^*| + A_p^0 = A_3^*$.

Примеры задач. Примеры решения задач о максимальной работе в тепломеханических системах с одним рабочим телом (тепловой машиной) были даны в предыдущем параграфе. Ниже рассмотрим тепломеханические системы с несколькими рабочими телами и системы, в которых протекают процессы массопереноса, покажем связь задач о минимальной затраченной и о максимальной полученной работе.

Тепломеханические системы. Для тепломеханических систем, где интенсивной переменной является температура, а экстенсивными — объем, энтропия и внутренняя энергия, из сформулированной в предыдущем разделе теоремы следует, что оптимальные процессы в задаче о максимальной работе состоят из изотермических и адиабатических участков. Число изотермических участков не более $M+1$, а адиабатических скачков температур не более $M+2$, причем два из них приходятся на начало и конец процесса.

Скорость изменения энтропии в тепломеханических системах

$$\dot{S}_\nu = \sigma_\nu(u,T) = \frac{1}{T_\nu}\sum_{i=1}^{n} U_{i\nu} q_{i\nu}(T_i, T_\nu). \qquad (2.172)$$

Для резервуара энтропия, объем и внутренняя энергия связаны друг с другом как

$$E_0 = T_0 S_0 - P_0 V_0.$$

В системе, состоящей из резервуара и $(n-1)$-й подсистемы, как показано выше, работу можно выразить через производство энтропии в форме

$$A = \sum_{\nu=1}^{n-1}(T_0 \Delta S_\nu - \Delta A_\nu) - T_0 \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\sigma_\nu(u,T)}. \qquad (2.173)$$

В последнее слагаемое включена и средняя скорость изменения энтропии резервуара. Таким образом, при заданных начальных и конечных состояниях подсистем максимуму полученной (минимуму затраченной) работы соответствует минимум производства энтропии в системе. В силу этого в системе с резервуаром оптимальными оказываются процессы минимальной диссипации.

Рассмотрим конкретизацию записанных условий для некоторых структур тепломеханических систем.

Независимые подсистемы, контактирующие с резервуаром. Рассмотрим систему, показанную на рис. 2.7, когда n рабочих тел, изолированных друг от друга, контактируют с источником, имеющим температуру T_0 и давление P_0. Считаем заданными начальные состояния всех подсистем и параметры источника, суммарный объем всей системы неизменен.

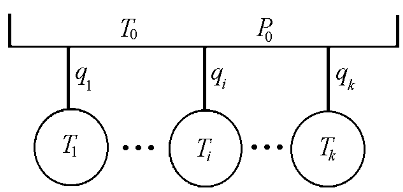


Рис. 2.7. Структура термодинамической системы, состоящей из изолированных подсистем и резервуара

Каждый из тепловых потоков $q_\nu(T_0, T_\nu)$, как и $\sigma_\nu(T_\nu) = \dfrac{1}{T_\nu} q_\nu(T_0, T_\nu)$, зависит только от одного управляющего воздействия T_ν, причем для рабочего тела выбором $T_\nu = T_0$ этот поток можно сделать равным нулю, поэтому вводить функции контакта U_ν для рабочего тела не имеет смысла.

Задача о максимальной работе в рассматриваемой системе распадается на n подзадач оптимального контакта каждой из подсистем с резервуаром. При этом в силу условий (2.165) давления всех подсистем в момент τ равно P_0. Задача о максимальной мощности требует учета характеристик всех подсистем.

Рассмотрим первоначально первую из них для контакта резервуара с рабочим телом. Индекс ν опускаем. Если энтропия рабочего тела $S(\tau)$ в конце процесса задана, а объем V^* определен условием $P = P_0$, то внутренняя энергия рабочего тела $E(\tau)$ фиксирована и минимуму внутренней энергии системы соответствует минимум E_0. Мы приходим к постановке

$$\overline{q(T_0,T)} \to \max_T \Big/ \overline{\left(\frac{q(T_0,T)}{T}\right)} = \frac{\Delta S}{\tau}. \qquad (2.174)$$

Эта подзадача для линейного закона теплопереноса

$$q(T_0,T) = \alpha(T_0,T) \qquad (2.175)$$

рассмотрены выше, как и для более общего закона

$$q(T_0,T) = \alpha(T_0^k - T^k), \qquad (2.176)$$

в котором α и k имеют одинаковый знак.

Для линейного закона теплопереноса задача (2.174) выпукла, оптимальное решение единственно

$$T^* = \frac{T_0}{1 + \Delta S/\alpha\tau}, \quad \alpha\tau + \Delta S > 0.$$

Оптимальная работа имеет вид

$$A^*(\tau) = \frac{T_n \Delta S \alpha\tau}{\alpha\tau + \Delta S} - \Delta E. \qquad (2.177)$$

Здесь $\Delta E = E(S(\tau), V^*(\tau)) - E(S(0), V(0))$.

Работа, найденная по формуле (2.177), соответствует максимальной полученной работе $A_n^*(\tau)$, если она положительна, и соответствует минимальной затраченной работе $A_3^*(\tau) = |A_i^*(\tau)|$, если она отрицательна.

Для того чтобы конкретизировать зависимость (2.177), будем предполагать, что каждая из подсистем близка к идеальному газу, при этом

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T(\tau)}{T(0)} - R \ln \frac{P_0}{P(0)}. \qquad (2.178)$$

Здесь учтены условия равенства давлений подсистем в момент τ давлению источника.

Равенство (2.178) позволяет найти $T(\tau)$ через ΔS и выразить $\Delta E = C_\nu(T(\tau) - T(0))$:

$$\Delta E(\Delta S) = C_\nu T(0) \left[\left(\frac{P_0}{P(0)} \right)^{R/C_p} \exp\left(\frac{\Delta S}{C_p} \right) - 1 \right]. \tag{2.179}$$

После подстановки (2.179) в (2.177) получим зависимость $A^*(\tau, \Delta S)$.

Характер зависимости минимальной затраченной и максимальной полученной работы от τ показан на рис. 2.8.

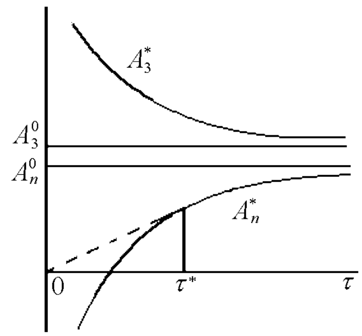


Рис. 2.8. Характер зависимостей предельных значений затраченной и полученной работы от продолжительности контакта

Когда величина ΔE, подсчитанная по формуле (2.179), положительна, то существует такое τ_0, что за время, меньшее τ_0, никакой работы получить в системе нельзя.

Если энтропия $S(\tau)$ не задана, то вместо задачи (2.174) имеем задачу о минимуме суммарной внутренней энергии системы, что в соответствии с (2.170) приводит к требованию

$$\left(\frac{T(\tau)}{T} - 1 \right) q(T_0, T) \to \min_{T>0} \tag{2.180}$$

совместно с равенством

$$\Delta S = S(\tau) - S(0) = \tau \frac{q(T_0, T^*)}{T^*}.$$

Это равенство для идеального газа и линейного закона теплообмена с учетом (2.178) перепишется как

$$C_p \ln \frac{T(\tau)}{T(0)} - R \ln \frac{P_0}{P(0)} = \tau\alpha \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right). \tag{2.181}$$

По условию (2.180) для $q = \alpha(T_0 - T)$ имеем

$$\frac{T(\tau)}{T} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow T(\tau) = \frac{T^2}{T_0}, \tag{2.182}$$

что после подстановки в (2.181) приводит к уравнению для T^*

$$2C_p \ln \frac{T^*}{T_0 T(0)} - R \ln \frac{P_0}{P(0)} = \tau\alpha \left(\frac{T_0}{T^*} - 1 \right). \tag{2.183}$$

Правая часть этого равенства монотонно возрастает, а левая убывает с ростом T^*, так что решение единственно и определяет предельную работу:

$$A_n^*(\tau) = -\Delta E_{\min} = C_\nu \left(T(0) - \frac{(T^*)^2}{T_0} \right) + \alpha\tau(T_0 - T^*). \tag{2.184}$$

При контакте резервуара с пассивной подсистемой, температура которой является функцией внутренней энергии, как упоминалось выше, при любой функции контакта $U(t)$, полученная работа равна нулю.

В задаче о максимальной мощности

$$n(\tau) = \frac{\sum\limits_i A_i(\tau)}{\tau} \to \max_{\tau > 0}$$

условие оптимальности для выпуклых вверх дважды дифференцируемых функций $n(\tau)$, т.е. для функций $A_i(\tau)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_i \left(\frac{d^2 A_i}{d\tau^2} \tau^2 - 2A_i(\tau) \right) < 2\tau \sum_i \frac{dA_i(\tau)}{d\tau},$$

примет вид

$$\sum_i \left(\frac{dA_i}{d\tau} - \frac{A_i(\tau)}{\tau} \right) = 0.$$

С учетом (2.179), (2.180) для рассмотренных выше законов теплопереноса и характеристик рабочего тела получим уравнение для τ^*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \Delta S_i}{\alpha_i \tau + \Delta S_i} \left(\frac{\Delta S_i}{\alpha_i \tau + \Delta S_i} - 1 \right) = \frac{T_0}{\tau} \sum_{i=1}^n \Delta E_i(\Delta S_i).$$

Мощность, которую можно получить в процессе конечного времени, ограничена, затрачиваемая же мощность может быть сколь угодно велика.

Рабочие тела могут контактировать друг с другом. Рассмотрим первоначально систему, изображенную на рис. 2.9.

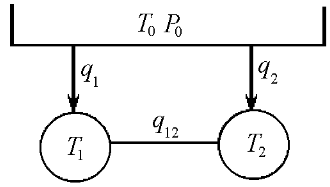


Рис. 2.9. Подсистемы, контактирующие с резервуаром и друг с другом

Для простоты будем предполагать объемы подсистем в момент τ фиксированными, а $S_i(\tau)$ заданными. Задача о минимуме внутренней энергии системы в момент τ приводит к условиям (2.167), которые примут форму

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[U_i q_i(T_0, T_i) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_i \left(\frac{U_i q_i(T_0, T_i) + U_{21} q_{21}(T_2, T_1)(-1)^i}{T_i} - \Delta S_i \right) \right] \to \max_{U,T} \right\} \to \min_{\lambda},$$

где $\Delta S_i = S_i(\tau) - S_i(0)$.

Предельная работа в системе, показанной на рис. 2.9, заведомо не меньше, чем предельная работа в системе, изображенной на рис. 2.7, так как при $U_1 = U_2 = 1, U_{21} = 0$ эти системы совпадают. Множители λ_i по физическому смыслу задачи положительны, так как предельная работа A_n^* монотонно уменьшается с ростом ΔS_i, а $\lambda_i = -\dfrac{\partial A_n^*}{\partial \Delta S_i}$.

Для линейных законов теплопереноса

$$q_i = \alpha_i(T_0 - T_i), \quad q_{21} = \alpha_{21}(T_2 - T_1)$$

функция L выпукла вверх по T_1 и T_2, базовое значение вектора T единственно. Функция контакта $U_i^* = 1$, если $q_i(T_0, T_i)(1 + \lambda_i/T_i) > 0$, т.е. если $T_0 > T_i$. С учетом этого оптимальные значения T_1 и T_2 определяются как

$$T_i^* = \frac{\alpha_i T_0 - \tilde{q}_{21}(-1)^i}{\alpha_i + \Delta S_i}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\tilde{q}_{21} = U_{21} q_{21}(T_2, T_1)$. Полученная работа

$$A_n = \tau(q_1(T_0, T_1^*) + q_2(T_0, T_2^*)) = \tau \left\{ T_0 \left[\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \Delta S_1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \Delta S_2} \right] + U_{21} \alpha_{21}(T_2 - T_1) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \Delta S_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \Delta S_1} \right) \right\}. \quad (2.185)$$

Нетрудно показать, что при любом знаке q_{21} множитель при U_{21} в (2.185) положителен, и, следовательно, $U_{21}^* = 1$. Температуры T_1^* и T_2^* на интервале $(0, \tau)$ постоянны и определяются из системы

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{T_1^2}(T_1^2 - T_1(\tau)T_0) = \alpha_{21}\left(\frac{T_2T_1(\tau)}{T_1^2} - \frac{T_2(\tau)}{T_2}\right),\\
&\frac{\alpha_2}{T_2^2}(T_2^2 - T_2(\tau)T_0) = \alpha_{21}\left(\frac{T_1T_2(\tau)}{T_2^2} - \frac{T_1(\tau)}{T_1}\right).
\end{aligned} \tag{2.186}$$

Для подсистем, близким к идеальным газам, и для $V_i(\tau) > V_{i0}$ условия (2.186) нужно дополнить соотношениями

$$\Delta S_i = C_{vi} \ln \frac{T_i(\tau)}{T_i(0)} = \frac{1}{T_i}(\alpha_i(T_n - T_i) - \alpha_{12}(-1)^i(T_2 - T_1)), \quad i = 1, 2, \tag{2.187}$$

что определяет T_i^* и $T_i^*(\tau)$.

Максимальная работа A_n^* или минимальная работа A_3^* определяются как сумма приращений внутренней энергии подсистем и источника

$$A^* = |(E_0(0) - E_0(\tau)) + \sum_i (E_i(0) - E_i(\tau))|_{T=T^*, T(\tau)=T^*(\tau)}.$$

Случай, когда резервуар отсутствует, соответствует тому, что $U_1 = U_2 = 0$. Из условий (2.186) следует, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{T_1(\tau)}{T_2(\tau)}} = \omega. \tag{2.188}$$

Условия (2.187) перепишутся как

$$\begin{aligned}
&C_{v1} \ln \frac{T_1(\tau)}{T_{10}} = \frac{\alpha_{21}}{T_1}(T_2 - T_1) = \alpha_{21}\left(\frac{1}{\omega} - 1\right),\\
&C_{v2} \ln \frac{T_2(\tau)}{T_{20}} = -\frac{\alpha_{21}}{T_2}(T_2 - T_1) = \alpha_{21}(\omega - 1).
\end{aligned} \tag{2.189}$$

Условия (2.188)–(2.189) определяют $T_1^*(\tau), T_2^*(\tau)$ и ω_*. Значения температур T_1^* и T_2^* на интервале $(0, \tau)$ при этом однозначно не определены, а значит, на систему может быть наложено дополнительное условие, которое доопределит T_1^* и T_2^*. Таким условием может быть, например, задание средней интенсивности теплового потока $\bar{q}$. В этом случае

$$T_1^* = \frac{\bar{q}\omega^*}{\alpha_{21}(1 - \omega^*)}, \quad T_2^* = \frac{\bar{q}}{\alpha_{21}(1 - \omega^*)}.$$

Процессы массопереноса. Рассмотрим системы, характеризующиеся не только температурой, объемом, давлением, но и составом. Последний для ν-й подсистемы определяет вектор концентраций

$C_\nu = (C_{i1}, ..., C_{ik})$ или вектор химических потенциалов $\mu_\nu(T_i, P_i, C_i) = (\mu_{i1}, ..., \mu_{ik})$.

Если в качестве управляющих переменных принять химические потенциалы подсистем μ_ν и функции контакта $U_{\nu j}$, то задача о минимальной затраченной работе, потребной для перевода системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние, оказывается такой же, как и для тепловой системы, в которой управлениями служили температуры подсистем. Решение такой задачи позволит оценить снизу минимальную затраченную работу. Оно для естественных законов массопереноса $g_{i\nu}$ состоит из трех участков: мгновенного изменения вектора μ химических потенциалов от $\mu(0)$ до некоторого оптимального уровня μ^*; поддержания его на этом уровне на интервале $(0, \tau)$; скачка в момент τ до некоторого значения $\mu^*(\tau)$. Значения μ^* и $\mu^*(\tau)$ определяются ограничениями задачи и уравнениями состояния подсистем, связывающими внутреннюю энергию, энтропию и химический потенциал в момент τ. При этом энтропия $S(\tau)$ зависит от $S(0)$ и μ^*.

Однако полученная таким образом оценка может оказаться довольно грубой (хотя она и точнее, чем обратимая). Дело заключается в том, что для тепловых систем по найденным оптимальным законам изменения температур подсистем $T^*(t)$ можно через уравнения состояния восстановить соответствующие им законы изменения объемов $V^*(t)$, которые являются фактическими управлениями. Иное дело для химических потенциалов. Изменение объема или давления в каждой из подсистем влияет на химические потенциалы всех веществ, составляющих эту подсистему. Поэтому в общем случае по оптимальным законам изменения химических потенциалов нескольких веществ, составляющих подсистему, нельзя найти функцию $V^*(t)$,обеспечивающую найденное решение. Для систем, близких по своим свойствам к идеальным газам, химический потенциал i-го компонента [53] есть

$$\mu_i(T, P) = \mu_{i0}(T) + RT \ln P_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

где P_i — порциальное давление i-го компонента. Обозначая через V объем подсистемы и предполагая, что в каждый момент времени объем и давление связаны друг с другом уравнением Бойля–Мариотта

$$PV = NRT,$$

где N — число молей в подсистеме, а

$$P_i = PC_i = P\frac{N_i}{N}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

выразим μ_i через V:

$$\mu_i(T,V) = \mu_{i1}(T) + RT\ln\frac{N_i}{V}, \quad i = 1,\ldots,k. \tag{2.190}$$

Здесь $\mu_{i1}(T) = \mu_{i0}(T) + RT\ln RT$.

В свою очередь для ν-й подсистемы

$$\dot{N}_{\nu i} = \sum_j g_{ij\nu}(\mu_\nu,\mu_j)U_{j\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,n, \quad i = 1,\ldots,k, \tag{2.191}$$

$$\dot{S}_\nu = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} U_{j\nu}\mu_{i\nu}g_{j\nu i}(\mu_\nu,\mu_j). \tag{2.192}$$

Число молей N_ν входит в правую часть уравнения (2.191), так как от него зависят μ_ν. Таким образом, уравнения (2.191) не являются ляпуновскими, и задача выбора функций $V_\nu(t)$, максимизирующих полученную (минимизирующих затраченную) работу, является задачей оптимального управления общего вида. Здесь для простоты принято, что процесс массопереноса изотермический, температуры всех подсистем равны T и теплообмен отсутствует.

Резервуарный процесс. Пусть система состоит из резервуара с температурой T, давлением P^0 и химическим потенциалом μ^0 и рабочего тела с той же температурой, объемом $V > 0$ и химическим потенциалом μ.

Задано начальное состояние рабочего тела E_0, S_0, N_0, V_0. Для простоты будем предполагать, что число веществ $k = 1$. Перечисленные выше переменные связаны друг с другом уравнением состояния

$$E(0) = E(S(0), N(0), V(0)).$$

В конечный момент времени задана $S(\tau)$. Суммарный объем источника и рабочего тела неизменен.

В задаче о максимальной работе требуется достичь минимума внутренней энергии системы в момент τ:

$$A = \Delta E = [E(0) - E(\tau) + E_0(0) - E_0(\tau)] \to \max. \tag{2.193}$$

Здесь E_0 и E — внутренние энергии источника и рабочего тела соответственно. Максимум ищется по $V(\tau)$ и по $\mu(t)$ на интервале $(0,\tau)$. Условие максимума по $V(\tau)$ приводит к тому, что в момент τ давление рабочего тела должно стать равным давлению источника. Из условия

$$[\Delta E_0 + E(S(\tau), N(\tau), V^*(\tau))] \to \min, \tag{2.194}$$

где

$$\Delta E_0 = \int\limits_0^\tau (h_0 + \mu_0) g(\mu_0, \mu) dt,$$

и требования

$$\int\limits_0^\tau \mu(t) g(\mu_0, \mu) dt = T \Delta S \tag{2.195}$$

получим в соответствии с (2.167) для расчета базовых значений μ

$$L = \left\{ g(\mu_0, \mu)(\lambda_1 (h_0 + \mu_0) - \lambda \mu) + \lambda \frac{\Delta S T}{\tau} \right\} \to \min_\mu \max_\lambda . \tag{2.196}$$

Найдя из (2.196) одно или два базовых значения μ^*, нужно найти $N^*(\tau)$ и по условию

$$S(\mu(\tau), N^*(\tau), V^*(\tau)) = S(\tau) \tag{2.197}$$

определить $\mu(\tau)$.

Решение единственно, если функция Лагранжа L выпукла вниз по μ, т.е. если

$$\frac{d^2 g}{d\mu^2} > 2\lambda \frac{dg}{d\mu} .$$

Можно показать, что по смыслу задачи $\lambda > 0$, а $dg/d\mu < 0$, так что для большинства зависимостей $g(\mu)$ условие выпуклости L выполнено и μ^* определяется равенством

$$\mu g(\mu_0, \mu) = \frac{(S(\tau) - S(0))T}{\tau},$$

$$N^*(\tau) = N_0 + g(\mu_0, \mu^*),$$

$$\Delta E_0 = (h_0 + \mu_0) g(\mu_0, \mu^*) \tau.$$

После подстановки этих выражений в (2.193) получим $A_{\max}$.

Цикл с двумя резервуарами. Рассмотрим систему с двумя резервуарами, в одном из которых химический потенциал ключевого компонента равен μ_+, а в другом μ_- (для определенности $\mu_+ > \mu_-$), и рабочего тела, которое может контактировать с каждым из резервуаров (рис. 2.10.).

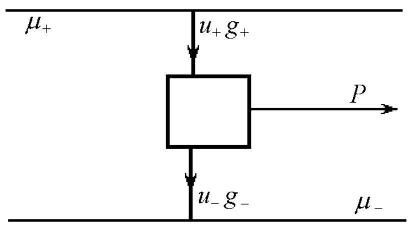


Рис. 2.10. Структура диффузионно-механического цикла с источниками бесконечной емкости

Процесс циклический, так что прирост энтропии, внутренней энергии и массы ключевого компонента рабочего тела за цикл равен нулю. Температуры всех подсистем одинаковы.

Изменение внутренней энергии системы равно изменению внутренней энергии резервуаров. Обозначим через μ_0 химический потенциал источника, который может принимать значения μ_+ и μ_-, а через μ — химический потенциал рабочего тела. Работа

$$A = E_0(0) - E_0(\tau) = \int_0^\tau h(\mu_0)g(\mu_0, \mu)dt \to \max_{\mu_0, \mu} \tag{2.198}$$

при ограничениях на прирост энтропии и количества вещества рабочего тела

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_0^\tau g(\mu_0, \mu)(h(\mu_0) - \mu)dt = 0, \tag{2.199}$$

$$\Delta N = \int_0^\tau g(\mu_0, \mu)dt = 0. \tag{2.200}$$

Из (2.199) следует, что максимуму работы соответствует максимум критерия

$$A = \int_0^\tau \mu g(\mu_0, \mu)dt \to \max \tag{2.201}$$

при условии (2.200).

Для расчета базовых значений μ и μ_0 в задаче (2.200), (2.201) запишем функцию Лагранжа и потребуем ее минимума по μ_0, μ и максимума по λ:

$$L = \left\{ g(\mu_0, \mu)(\mu - \lambda) \to \max_{\mu_0, \mu} \right\} \to \min_\lambda .$$

Число базовых значений равно двум, одно из них соответствует $\mu_0 = \mu_+$, другое $\mu_0 = \mu_-$. Для строго выпуклой по μ функции L базовые значения μ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \mu}(\mu - \lambda) + g(\mu_0, \mu) = 0,$$

или

$$\frac{g(\mu_0, \mu)}{\mu - \lambda} = -\frac{\partial g}{\partial \mu}.$$

Корень этого уравнения для $\mu_0 = \mu_-$ обозначим через μ_1, а для $\mu_0 = \mu_+$ через μ_2. Так как в базовых точках L максимальна, то

$$L(\mu_+, \mu_1, \lambda) = L(\mu_-, \mu_2, \lambda), \tag{2.202}$$

что и определяет величину λ.

Конкретизируем полученные зависимости для

$$g(\mu_0, \mu) = \alpha(\mu_0)(\mu_0 - \mu). \tag{2.203}$$

Из условия (2.202) имеем

$$\mu_1 = \frac{\mu_+ + \lambda}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\mu_- + \lambda}{2}. \tag{2.204}$$

Подставляя μ_1 и μ_2 в функцию L, найдем ее зависимость от λ для каждого из базовых решений

$$L_+ = L(\mu_+, \mu_1) = \frac{\alpha_+}{4}(\mu_+ - \lambda)^2,$$

$$L_- = L(\mu_-, \mu_2) = \frac{\alpha_-}{4}(\mu_- - \lambda)^2.$$

Минимум по λ из максимума L по μ_0, μ достигается (см. рис. 2.11), когда

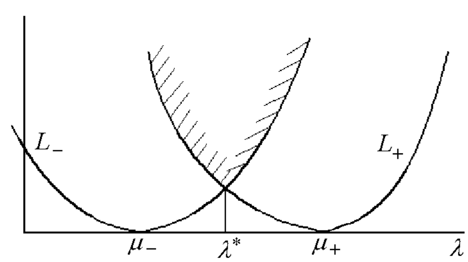


Рис. 2.11. Характер зависимости от λ максимума функции Лагранжа по μ для $\mu_0 = \mu_+$ и $\mu_0 = \mu_-$

$$L_+(\lambda) = L_-(\lambda) \Rightarrow \lambda^* = \frac{\sqrt{\alpha_+}\mu_+ + \sqrt{\alpha_-}\mu_-}{\sqrt{\alpha_+} + \sqrt{\alpha_-}}. \tag{2.205}$$

Доли времени контакта с резервуарами определяются требованием (2.200) и равны

$$\gamma_+ = \frac{\alpha_-\sqrt{\alpha_+}}{\alpha_-\sqrt{\alpha_+} + \alpha_+\sqrt{\alpha_-}},$$

$$\gamma_- = \frac{\alpha_+\sqrt{\alpha_-}}{\alpha_-\sqrt{\alpha_+} + \alpha_+\sqrt{\alpha_-}}.$$

Предельная работа за время τ

$$A^*(\tau) = \tau[\gamma_+\mu_1\alpha_+(\mu_+ - \mu_1) + \gamma_-\mu_2\alpha_-(\mu_1 - \mu_2)],$$

где μ_1 и μ_2 находят из (2.205) после подстановки в это выражение значения λ из (2.206).

Заключение. В задаче о максимальной работе, которую можно извлечь из термодинамической системы при отсутствии ограничения на продолжительность процесса, решение не зависит от уравнения состояния системы и кинетики потоков и достигается в обратимом процессе варавнивания интенсивных переменных подсистем при их контакте через рабочее тело. Сама же максимальная работа равна разнице суммарной внутренней энергии в начале и в предельном равновесном состоянии. В обратной задаче о минимальной работе, потребной для приведения системы из равновесного в заданное состояние, решение также соответствует равновесному процессу, а работа превосходит максимальную полученную на величину, компенсирующую необратимость, возникающую в необратимых равновесных процессах подобных процессам смешения.

При ограничении на продолжительность процесса задача о максимальной работе сводится к задаче оптимального управления, особенности которой во многих практически важных случаях делают структуру оптимального решения независимой от уравнений состояния подсистем и кинетики потоков, причем минимальная работа разделения равновесной системы на подсистемы при фиксированной продолжительности однозначно определяется через максимальную работу в прямом процессе и обратимую работу разделения.

Приведенные выше результаты показывают и то, в каком случае задача об оптимальной (минимальной либо максимальной) работе сводится к задаче о процессе минимальной диссипации, т.е. о минимуме прироста энтропии системы. Максимальная работа соответствует минимуму суммарной внутренней энергии системы в конце процесса. Для реальных уравнений состояния внутренняя энергия каждой подсистемы монотонно падает с уменьшением ее энтропии. Однако эта зависимость нелинейна, так что минимум суммы внутренних энергий не эквивалентен минимуму суммарной энтропии. При этом во многих частных случаях, когда, например, состояния всех подсистем кроме одной в конце процесса заданы, задача сводится к минимуму внутренней энергии, а значит, и к минимуму прироста энтропии только для одной подсистемы.

Во многих практически важных случаях структура оптимального решения не зависит от кинетических характеристик процессов, а энтропия системы в оптимальном процессе растет с постоянной либо кусочно постоянной скоростью. Задача о максимальной мощности имеет ту же структуру оптимального решения, что и задача о максимальной работе, так как отличается от последней лишь тем, что продолжительность τ не фиксирована, а выбирается из условия максимума отношения $A_n^*(\tau)/(\tau)$.

2.5. Равновесие в открытых термодинамических системах. Теорема Пригожина

Рассмотрим открытую термодинамическую систему, состоящую из двух резервуаров со значениями интенсивных переменных u_+ и u_- и промежуточной подсистемы, имеющей вектор интенсивных переменных u и экстенсивных переменных v. Поток J_+, поступающий в систему, зависит от u_+ и u, а выходящий — от u и u_-. Аналогичным образом движущие силы: x_+ зависит от u_+ и u, а x_- от u и u_-. Среднее производство энтропии в такой системе за время τ

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \sum_j \Big[J_{+j}(u_+, u)x_{+j}(u_+, u)+ + J_{-j}(u, u_-)x_{-j}(u, u_-) + J_{pj}(u)x_{pj}(u)\Big]dt. \quad (2.206)$$

Промежуточная система может быть неоднородна, в этом случае векторы интесивных переменных для входящего и выходящего потоков различны. Этой неоднордности в выражении (2.206) соответствует слагаемое $J_p x_p$.

Так как для любой равновесной подсистемы справедливы соотношения

$$\dot{v}_k = \sum_j J_{kj}(u_j, u_k), \quad k = 1, 2, ..., \quad (2.207)$$

а состояния подсистем в среднем неизменны, то среднее значение правой части равенства (2.207) равно нулю:

$$\int\limits_0^\tau \sum_j J_{kj}(u_j, u_k)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ... \quad (2.208)$$

В том случае, когда усредненная задача о минимуме σ при условии (2.208) выпукла вниз, она имеет стационарное решение u^*, на котором подынтегральное выражение в (2.208) равно нулю.

При малом отклонении от состояния равновесия предполагают, что потоки линейно зависят от движущих сил, т.е. могут быть записаны в форме Онзагера

$$J_j = \sum_{\nu} \gamma_{j\nu} x_\nu, \quad j = 1, 2, \dots \tag{2.209}$$

Причем справедливы условия взаимности

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji},$$

а матрица коэффициентов $||\gamma_{ij}||$ положительно-определенная. Под интегралом в (2.206) в этом случае оказывается положительно-определенная квадратичная форма. Условия ее минимума по составляющим вектора u при фиксированных значениях u_+, u_- совпадают с условиями стационарности состояний подсистем

$$\sum_{j\nu} \gamma_{\nu j} x_\nu(u_\nu, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.210}$$

Так, для теплового потока и одной промежуточной подсистемы поток тепла пропорционален разности температурных потенциалов $u_+ = 1/T_+$, $u_- = 1/T_-$, $u = 1/T$:

$$q_+ = \alpha_+(u - u_+), \quad q_- = -\alpha_(u_- - u).$$

Производство энтропии:

$$\sigma = q_+ \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_+}\right) - q_- \left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T}\right) = \alpha_+(u - u_+)^2 + \alpha_-(u_- - u)^2. \tag{2.211}$$

Условие стационарности состояния промежуточной системы:

$$q_+ + q_- = \alpha_+(u - u_+) - \alpha_-(u_- - u) = 0. \tag{2.212}$$

Требование минимума σ по u в силу выпуклости вниз этой функции

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 2\alpha_+(u - u_+) - 2\alpha_-(u_- - u) = 0$$

совпадает с условием стационарности системы (2.212).

Утверждение о том, что в стационарном состоянии открытой системы, близкой к равновесию, производство энтропии минимально, называют теоремой Пригожина. Ее доказательство для систем с распределенными параметрами приведено, например, в [20].

Глава 3

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ НЕОБРАТИМЫХ ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫХ СИСТЕМ

Большая часть технологических процессов являются термодинамическими. Тепловые и холодильные машины, процессы разделения, сушки, кристализации, химические реакторы и другие характеризуются такими переменными, как внутренняя энергия, концентрации тех или иных компонент, температура и энтропия.

Параметры входных и выходных потоков в таких системах связаны друг с другом уравнениями энергетического, материального и энтропийного балансов [49]. Как было сказано в гл. 1, из этих уравнений следуют соотношения, выделяющие область реализуемости необратимых термодинамических систем. Эти соотношения в несколько упрощенной форме для открытой стационарной системы имеют вид

$$\sum_j g_j h_j + \sum_i q_i - p = 0,$$
$$\sum_j g_j x_{kj} + \sum_\nu \alpha_{k\nu} W_\nu = 0 \quad \forall_k,$$
$$\sum_j g_j s_j + \sum_i \frac{q_i}{T_i} + \sigma \leq \sigma_{\min}.$$

Здесь обозначено: g_j — интенсивность j-го материального потока; h_j — удельная энтальпия, x_{kj} — концентрация в нем k-го вещества; q_i — интенсивность i-го потока тепла, T_i — температура этого потока на контрольной границе системы; W_ν — скорость ν-й химической реакции, $\alpha_{k\nu}$ — стихиометрический коэффициент, с которым k-я компонента входит в уравнение ν-й реакции ($\alpha_{k\nu} > 0$ для образующихся и $\alpha_{k\nu} < 0$ для расходующихся веществ); σ — производство энтропии (диссипация) в системе.

Переменные, входящие в условия термодинамических балансов, как и значение $\sigma_{\min}$, в свою очередь могут зависеть от внешних факторов и от параметров самой системы (поверхности контакта, характер гидродинамики потоков и пр.). Таким образом, эти уравнения выделяют в плоскости параметров некоторую область, которую будем называть областью реализуемых значений параметров или *областью реализуемости*. Будем обозначать область реализуемости для $\sigma \geq 0$ через D^0, а для случая $\sigma \geq \sigma_{\min}$ через $D^* \subset D_0$ и покажем на примере некоторых систем последовательность построения этих областей.

Технологическая система может быть разбита на отдельные подсистемы, для которых построены области реализуемости. Область реализуемости системы предполагает реализуемость каждой из подсистем, т.е. является пересечением этих областей. Оптимизацию системы следует производить с учетом области ее реализуемости.

3.1. Предельные возможности проточных теплообменных систем

Оценить степень совершенства теплообмена с использованием методов термодинамики обратимых процессов нельзя, так как теплообмен с нулевой интенсивностью потоков тепла не имеет смысла. Иное дело — термодинамика при конечном времени. Здесь можно ставить вопрос о степени термодинамического совершенства теплообмена при заданном коэффициенте теплопереноса, заданной продолжительности процесса и количестве переданного тепла.

Постановка задачи и условие минимальной диссипации. Будем рассматривать теплообменник как систему, состоящую из источника с температурой T_0, энтропией S_0, теплоемкостью c и рабочего тела с энтропией S и температурой T (рис. 3.1).

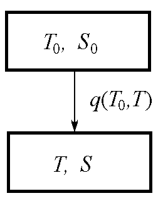


Рис. 3.1. Структура теплообменной системы, состоящей из источника с конечной емкостью и рабочего тела.

При контакте двух элементов системы возникает поток тепла $q(T_0, T)$. Если теплообмен протекает во времени, то температура источника изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dT_0}{dt} = -\frac{q(T_0, T)}{c}, \quad T_0(0) = T_{0b}. \tag{3.1}$$

Когда процесс теплообмена стационарен и распределен по длине теплообменника l, температура источника (горячего потока) изменяется так, что

$$\frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(T_0, T)}{W}, \quad T_0(0) = T_{0b}. \tag{3.2}$$

Здесь для определенности принято, что $T_0 > T$, а через W обозначен водяной эквивалент горячего потока (произведение расхода на теплоемкость). В первом случае считаем заданной продолжительность процесса τ, во втором — длину аппарата L. Так как уравнения (3.1) и (3.2) не отличаются друг от друга ничем, кроме обозначений, то будем рассматривать только первое из них. При замене c на W и τ на L во всех результирующих соотношениях они оказываются справедливыми для непрерывного теплообмена.

Рассмотрим задачу о таком законе изменения отбора тепла q от времени, для которого прирост энтропии системы минимален:

$$\Delta S_{\Sigma} = D = \int_0^{\tau} q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) dt \to \min, \tag{3.3}$$

при условиях заданной интенсивности теплопереноса

$$\int_0^{\tau} q(T_0, T) dt = Q \tag{3.4}$$

и при изменении температуры источника во времени по (3.1). Задача (3.1), (3.3), (3.4) представляет собой задачу оптимального управления. Функция Гамильтона для этой задачи имеет вид

$$H = q(T_0, T) \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{c}\right). \tag{3.5}$$

Условия оптимальности можно записать следующим образом:

$$H(T_0, T, \lambda, \psi) = \text{const} = m, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial T} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{c}\right) - \frac{q(T_0, T)}{T^2} = 0. \tag{3.7}$$

При записи этих соотношений принято, что управлением является температура T рабочего тела. Фактически управлением может быть другая переменная, например, объем рабочего тела V. Но если состояние рабочего тела удовлетворяет условию внутреннего равновесия, то объем и температура в каждый момент времени связаны уравнением состояния. Поскольку эта связь монотонная, можно сначала найти оптимальный закон изменения температуры $T^*(t)$, а уже затем — соответствующую ему функцию $V^*(t)$. Способ реализации найденного оптимального закона охлаждения источника определяется конструкцией теплообменника, и от нее зависит, насколько мы приблизимся к найденному пределу.

Для решения задачи запишем равенство, вытекающее из условий оптимальности (3.6), (3.7):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} + \lambda - \frac{\psi}{c} = \frac{m}{q(T_0, T)}, \tag{3.8}$$

что позволяет упростить условие (3.7). Если функция H выпукла вверх по T, то, переписав (3.7) в виде

$$\frac{\partial q}{\partial T}\frac{m}{q(T_0,T)} - \frac{q(T_0,T)}{T^2} = 0,$$

получим, что в оптимальном процессе для любого момента t (в любом сечении теплообменника l) должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{q(T_0,T)}{T}\right)^2 : \frac{\partial q}{\partial T} = m. \tag{3.9}$$

Полученное условие (3.9) термодинамического совершенства процесса необратимого теплообмена позволяет найти связь между минимальной диссипацией и интенсивностью теплообмена $\overline{q} = Q/\tau$. Однако, поскольку выражения для минимальной диссипации оказываются компактнее, если использовать в качестве аргумента не $\overline{q}$, а прирост энтропии источника ΔS_0, найдем связь между $\overline{q}$ и ΔS_0. Для любого закона теплопереноса

$$\Delta S_0 = -\int\limits_0^\tau \frac{q(T_0,T)}{T_0}\,dt.$$

В свою очередь для источника с постоянной теплоемкостью c справедливо уравнение (3.1). Проведя замену $dt = -c\big(dT_0/q(T_0,T)\big)$, получим

$$\Delta S_0 = \int\limits_{T_{0b}}^{T_{0b}-Q/c} c\frac{dT_0}{T_0} = c\ln\left(1-\frac{Q}{cT_{0b}}\right) = c\ln\left(1-\frac{\overline{q}\tau}{cT_{0b}}\right). \tag{3.10}$$

Связь, аналогичную равенству (3.10), нетрудно получить и для любой заданной зависимости $c(T_0)$ теплоемкости от температуры источника.

Области достижимости для конкретных законов теплопередачи.

Для линейного закона $q(T_0,T) = k(T_0-T)$ условие (3.9), как нетрудно видеть, приводит к постоянству отношения температур [33]:

$$\frac{T}{T_0} = 1-\sqrt{\frac{m}{k}} = \text{const}. \tag{3.11}$$

Обозначим это отношение $\tilde{m}$. Тогда $q(T_0) = kT_0(1-\tilde{m})$; скорость изменения энтропии источника постоянна во времени:

$$\dot{S}_0 = -\frac{q(T_0)}{T_0} = k(\tilde{m}-1),$$

следовательно, ее приращение за время τ

$$\Delta S_0 = k(\tilde{m}-1)\tau. \tag{3.12}$$

Диссипация в этом случае рассчитывается следующим образом:

$$D = \int\limits_0^\tau q(T_0)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)dt = \frac{q(T_0)}{T_0}\frac{1-\tilde{m}}{\tilde{m}}\tau = \frac{k(1-\tilde{m})^2}{\tilde{m}}\tau. \qquad (3.13)$$

После исключения константы $\tilde{m}$ из равенств (3.12), (3.13) получим выражение для минимальной диссипации

$$D_{\min} = \frac{\Delta S_0^2}{\Delta S_0 + k\tau},$$

откуда следует, что для произвольного процесса теплопереноса с линейным законом теплопередачи между двумя внутренне обратимыми системами справедливо неравенство

$$\frac{1}{D} - \frac{k\tau}{\Delta S_0^2} - \frac{1}{\Delta S_0} \leq 0, \qquad (3.14)$$

определяющее области достижимости на плоскости с координатами D и ΔS_0 (рис. 3.2, *а*). Из условия неотрицательности $D_{\min}$ следует, что $\Delta S_0 \geq -k\tau$.

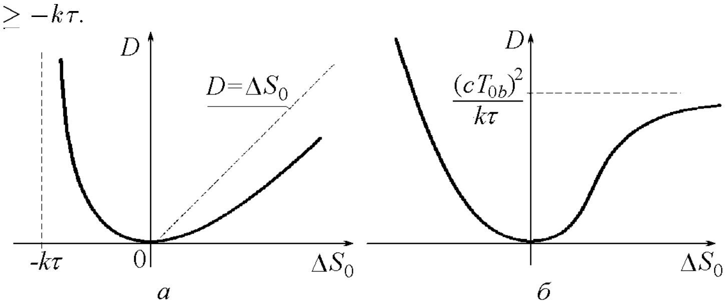


Рис. 3.2. Области достижимости для произвольного процесса теплообмена с линейным законом теплопередачи (*а*) и законом теплопередачи Фурье (*б*)

Для закона теплопередачи Фурье, линейного относительно термодинамических потенциалов,

$$q(T_0, T) = k\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$$

проделаем аналогичные выкладки. В этом случае из условия минимальной диссипации (3.9) следует, что для любого момента времени тепловой поток q постоянен. Обозначим его величину через $\overline{q}$. Температура источника подчиняется уравнению

$$\dot{T}_0 = -\frac{\overline{q}}{c} \Rightarrow T_0(t) = T_{0b} - \frac{\overline{q}}{c}\,t,$$

так что

$$\dot{S}_0 = -\frac{\overline{q}}{T_0} = -\frac{\overline{q}}{T_{0b} - \dfrac{t\overline{q}}{c}},$$

а

$$\Delta S_0 = -\int\limits_0^\tau \frac{\overline{q}\ dt}{T_{0b} - \dfrac{t\overline{q}}{c}} = -c\ln\frac{T_{0b} - \dfrac{\tau\overline{q}}{c}}{T_{0b}}.$$

Прирост энтропии системы:

$$D = \int\limits_0^\tau q(T_0, T)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\ dt = \int\limits_0^\tau \frac{\overline{q}^2}{k}dt = \frac{\overline{q}^2}{k}\ \tau.$$

Исключим константу $\overline{q}$ из двух последних соотношений. Получим

$$\sqrt{D_{\min}k\tau} = cT_{0b}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta S_0}{c}\right)\right].$$

Области достижимых режимов теплообмена в пространстве с координатами $(\Delta S_0, D)$ определяются границами неравенства

$$\frac{\sqrt{Dk\tau}}{cT_{0b}} + \exp\left(-\frac{\Delta S_0}{c}\right) \geq 1. \qquad (3.15)$$

Вид этих линий для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2 \geq \tau_1$ показан на рис. 3.2, *б*.

Для источника бесконечной емкости при любом законе теплопередачи зависимость минимальной диссипации от ΔS_0 квадратичная $(T_0 = T_{0b})$:

$$D_{\min} = \frac{T_0^2}{k\tau}\Delta S_0^2.$$

Источнику бесконечной емкости соответствует бесконечно большой поток горячего теплоносителя.

Таким образом, для оценки степени термодинамического совершенства теплообменника необходимо по заданному среднему тепловому потоку $\overline{q}$, продолжительности процесса τ (длине аппарата L), теплоемкости источника c (водяному эквиваленту охлажденного потока W) рассчитать ΔS_0 по формуле (3.10), а также фактическую диссипацию D как разность между энтропией системы в начале и в конце процесса (разность суммарной энтропии входящих и выходящих потоков). Полученные данные соответствуют точке на плоскости с координатами $(\Delta S_0, D)$. Она лежит заведомо выше границы, определяемой неравенствами типа (3.14) или (3.15). Разность ординат изображающей точки и соответствующей точки границы области позволяет утверждать, есть ли резервы для улучшения термодинамической организации процесса.

Отметим, что найденные оценки не являются грубыми, так как для линейного закона теплообмена в трубчатом противоточном теплообменнике оценка (3.14) может быть достигнута (неравенство становится равенством) за счет подбора водяных эквивалентов потоков.

3.2. Регенеративный теплообмен

В процессе регенеративного теплообмена горячий и холодный потоки поочередно контактируют с насадкой. Состояние насадки циклически изменяется, а тепло передается от горячего к холодному потоку. *При заданных теплоемкостях насадки и потоков и заданном коэффициенте теплопередачи требуется определить то отношение длительности контакта насадки с горячим и холодным потоками, при котором количество передаваемого за цикл тепла будет максимально.* Кроме того, рассмотрена задача, возникающая в случае, когда количество тепла, передаваемого за цикл, фиксировано, но можно менять температуры потоков в течение цикла при ограниченной температуре насадки. Требуется нагреть холодный поток до максимально возможной температуры. Покажем, что требование максимума выходной температуры холодного потока соответствует требованию минимума прироста энтропии за цикл работы системы. Задачи рассмотрим на примере линейного закона теплопередачи.

Определение предельной тепловой нагрузки регенеративного теплообменника. Схематично регенеративный теплообменник изображен на рис. 3.3. В полуцикле нагрева $t \in [0, t_1]$ горячий поток при открытых заслонках *1*, *2* и закрытых заслонках *3*, *4* проходит через насадку, отдавая ей тепло. Температуры насадки и горячего потока при этом изменяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{T} = \frac{k_1(T_1 - T)}{c}, \quad T(0) = T_b, \tag{3.16}$$

$$\dot{T}_1 = -\frac{k_1(T_1 - T)}{c_1}, \quad T_1(0) = T_{1b}, \tag{3.17}$$

где c и c_1 — теплоемкости насадки и горячего потока; k — коэффициент теплопередачи между ними.

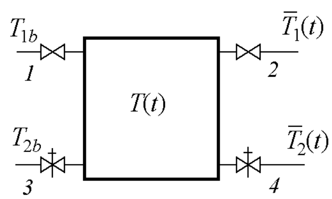


Рис. 3.3. Схема регенеративного теплообменника

В полуцикле охлаждения $t \in [t_1, \tau]$ закрыты заслонки *1*, *2*, открыты заслонки *3*, *4*, и холодный поток охлаждает насадку, забирая от нее тепло. Температуры насадки и холодного потока изменяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{T} = -\frac{k_2(T - T_2)}{c}, \quad T(t_1) = \overline{T}_b, \tag{3.18}$$

$$\dot{T}_2 = \frac{k_2(T - T_2)}{c_2}, \quad T_2(t_1) = T_{2b}, \tag{3.19}$$

где c_2 — теплоемкость холодного потока; k_2 — коэффициент теплопередачи между насадкой и холодным потоком.

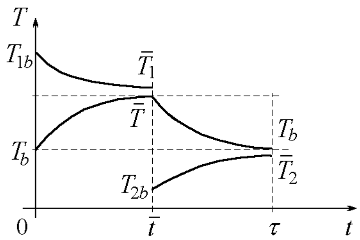


Рис. 3.4. Характер изменения температур в регенеративном теплообменнике

Характер изменения температур показан на рис. 3.4. Требуется при заданном времени цикла τ выбрать продолжительности полуциклов нагрева и охлаждения t_1 и $t_2 = \tau - t_1$ таким образом, чтобы общее количество переданного тепла было максимально:

$$Q = c(\overline{T}_b - T_b) \to \max, \tag{3.20}$$

при условии, что температура насадки в конце цикла $T(\tau)$ равна ее температуре в начале цикла $T(0)$. Следует подчеркнуть, что ни величина $T(0)$, ни величина $\overline{T}_b$ не заданы и определяются вместе с t_1, t_2 в процессе решения.

Вначале найдем, как связаны температуры горячего потока и насадки. Из уравнений (3.16), (3.17) следует, что $dT_1/dT = -c/c_1 = a$. Тогда

$$T_1(t) = T_{1b} + aT_b - aT(t).$$

Подставив это выражение в уравнение (3.17), запишем решение полученного уравнения, описывающее изменение температуры насадки в полуцикле нагрева:

$$T(t) = \frac{1}{1+a}\left[T_{1b} + aT_b + (T_b - T_{1b})\exp\left(-\frac{(1+a)k_1 t}{c}\right)\right], \quad 0 \le t < t_1. \tag{3.21}$$

Аналогичным образом получим, что в полуцикле охлаждения

$$T(t) = \frac{1}{1+b}\left[T_{2b} + b\overline{T}_b + (\overline{T}_b - T_{2b})\exp\left(-\frac{(1+b)k_2(t - t_1)}{c}\right)\right], \quad t_1 \le t < \tau, \tag{3.22}$$

где $b = c/c_2$.

Выражения (3.21), (3.22) при подстановке в них конечных значений времени t_1, τ позволяют найти зависимости граничных значений температуры насадки T_b и $\overline{T_b}$ от характеристик теплообмена и времени полуциклов:

$$T_b = \frac{T_{2b}(1+A)(1+a) + T_{1b}(b+A)(1-MA^r)}{(1+a)(1+b) - (b-A)(MA^r + a)}, \tag{3.23}$$

$$\overline{T}_b = \frac{T_{1b}(1+b)(1-MA^r) + T_{2b}(1-A)(a+MA^r)}{(1+a)(1+b) - (b-A)(MA^r + a)}, \tag{3.24}$$

где

$$\frac{k_1(1+a)}{c} = n_1, \quad \frac{k_2(1+b)}{c} = n_2, \quad -\frac{n_1}{n_2} = r,$$

$$e^{-n_1\tau} = M, \quad e^{-n_2 t_2} = A.$$

Подстановка (3.23), (3.24) в (3.20) и максимизация полученного выражения по A приводит к уравнению

$$(1+b) + rM(1+a)A^{r-1} - 2M[1+b+r(1+a)]A^r +$$
$$+ (1+a)rMA^{r+1} + (1+b)M^2A^{2r} = 0. \tag{3.25}$$

Численное решение уравнения (3.25) позволяет найти оптимальное значение A и по нему t_2^*. Например, при расчете по уравнению (3.25) для исходных данных: $c = 887$ кДж/К, $c_1 = 337$ кДж/К, $c_2 = 419$ кДж/К, $k_1 = 1{,}047 \cdot 10^{-6}$ Вт/К, $k_2 = 1{,}57 \cdot 10^{-6}$ Вт/К, $\tau = 30$ с — оптимальное значение времени полуциклов $t_2^* = 18{,}4$с, $t_1^* = 11{,}6$с, значение $Q^* = 2400$ кДж.

Отметим, что при больших расходах газа можно принять, что $c_1 = c_2 = \infty$; в этом случае $a = b = 0$, и уравнение (3.25) упрощается.

Определение цикла с минимальным приростом энтропии. Рассмотрим задачу о выборе характеристик цикла регенеративного теплообмена, которые при заданных тепловой нагрузке Q, времени цикла τ и предельной температуре насадки обеспечат минимальный прирост энтропии системы ΔS_Σ. При этом будем считать искомыми законы изменения температур потоков $T_1(t)$ и $T_2(t)$.

Прежде чем формализовать постановку задачи, рассмотрим физическую интерпретацию энтропийного критерия. Так как процесс происходит циклически, то общее приращение энтропии системы определится изменением энтропии потоков. Пусть температура горячего потока изменяется от T_{1b} до $\overline{T}_1(t)$, а холодного — от T_{2b} до $\overline{T}_2(t)$. Если

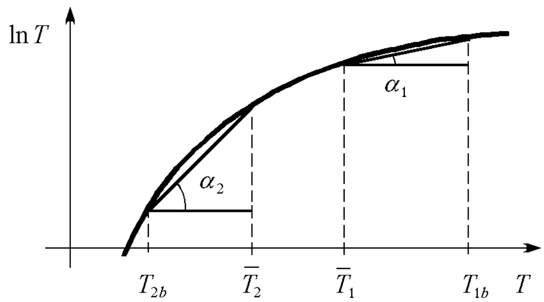


Рис. 3.5. Зависимость $\ln T_i$; уменьшение угла α соответствует уменьшению производства энтропии σ

потоками являются идеальные газы, теплоемкость которых не зависит от температуры, то изменение энтропии одного моля i-го потока равно

$$\Delta s_i = c_{pi} \ln \frac{\overline{T}_i}{T_{ib}}, \quad i = 1, 2.$$

Производство энтропии в системе составит

$$\sigma = \Delta S_{\Sigma} = G_1 \Delta s_1 + G_2 \Delta s_2, \tag{3.26}$$

где G_i — мольный расход i-го потока. Тепловой поток за тот же период времени связан с расходами теплоносителей как

$$q = c_{p1}[T_{1b} - \overline{T}_1]G_1 = c_{p2}[\overline{T}_2 - T_{2b}]G_2.$$

Выражая из последней зависимости значения расходов и подставляя их в уравнение энтропийного баланса (3.26), получаем

$$\sigma = q\left(\frac{\ln \overline{T}_2 - \ln T_{2b}}{\overline{T}_2 - T_{2b}} - \frac{\ln T_{1b} - \ln \overline{T}_1}{T_{1b} - \overline{T}_1}\right).$$

Для каждого значения теплового потока q минимизация ΔS_{Σ} означает минимизацию выражения, стоящего в скобках. Как видно из рис. 3.5, каждая дробь в круглых скобках равна тангенсу угла α_i наклона отрезка, соединяющего точки с абсциссами $T_{ib}, \overline{T}_i$ на кривой $\ln T_i$. Характер логарифмической функции таков, что с ростом T ее наклон уменьшается, $\alpha_1 < \alpha_2$, и значение σ всегда больше нуля. Уменьшению σ при заданных начальных температурах потоков T_{1b}, T_{2b} соответствует сближение конечных температур потоков. Таким образом, при заданных начальной и конечной температурах холодного потока минимизация $\Delta S_{\Sigma} = \sigma\tau$ означает, что его нагрев осуществляется потоком с минимально возможной температурой. При заданных же начальной и конечной температурах горячего потока максимизируется среднее значение конечной температуры холодного.

Задача о поиске термодинамически совершенного режима регенеративного теплообмена может быть сформулирована следующим образом: *определить такие законы изменения температур потоков* $T_1(t)$

и $T_2(t)$ и такое отношение длительности полуциклов $\gamma = t_2/t_1$, для которых при заданных тепловой нагрузке Q, времени цикла τ и максимальной температуре насадки $\overline{T}_b$ прирост энтропии системы (необратимые потери работоспособной тепловой энергии) минимален.

При изменяющихся температурах потоков и насадки прирост энтропии в предположении, что в каждый момент времени потоки и насадка находятся в состоянии внутреннего равновесия (система же в целом неравновесна — температуры насадки и потока различаются на конечную величину), составляет

$$\Delta S = \int\limits_0^{t_1} q_1(T_1, T)\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right) dt + \int\limits_{t_1}^{\tau} q_2(T_2, T)\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T}\right) dt \to \min. \tag{3.27}$$

Условие заданной тепловой нагрузки:

$$\int\limits_0^{t_1} q_1(T_1, T)dt = \int\limits_{t_1}^{\tau} q_2(T_2, T)dt = Q. \tag{3.28}$$

Температура насадки изменяется в соответствии с уравнениями

$$\dot{T} = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\, q_1(T_1, T), & 0 \le t < t_1, \\ -\dfrac{1}{c}\, q_2(T_2, T), & t_1 \le t < \tau. \end{cases} \tag{3.29}$$

Выделим три этапа в решении поставленной задачи.

Первый этап. Определяется оптимальный режим полуцикла нагрева. При этом находится такой закон изменения температуры горячего потока $T_1(t)$, при котором минимизируется прирост энтропии системы в этом полуцикле (заданы количество передаваемого тепла Q и закон изменения температуры рабочего тела (3.29)). При решении этой задачи t_1 и T_b рассматриваются как параметры.

Второй этап. Определяется оптимальный режим полуцикла охлаждения. При этом решается аналогичная задача определения закона изменения температуры холодного потока $T_2(t)$.

Третий этап. Проводится стыковка полуциклов — определение оставшихся неизвестными параметров, в частности, длительностей полуциклов с учетом связей, общих для полуциклов.

Задачи, решаемые на первых двух этапах, являются задачами об оптимальном тепловом контакте двух тел. В п. 3.1 было показано (см. формулу (3.9)), что их решения должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\partial q_1}{\partial T_1} = m_1\left(\frac{q_1}{T_1}\right)^2, \quad \frac{\partial q_2}{\partial T_2} = m_2\left(\frac{q_2}{T_2}\right)^2, \tag{3.30}$$

где m_1, m_2 — константы. Отсюда находятся оптимальные законы изменения температур потоков. Использование этих зависимостей существенно упрощает решение всей задачи, сводя ее к решению задачи нелинейного программирования. Дальнейшую процедуру поиска решения будем описывать применительно к конкретному закону теплопередачи.

Пусть закон теплопередачи линеен относительно температур:

$$q_1 = k_1(T_1 - T), \quad q_2 = k_2(T - T_2). \tag{3.31}$$

В этом случае из условия (3.30) следует, что оптимальные законы изменения температур должны быть такими, чтобы для любого момента времени отношение температур было постоянным (см. (3.11)):

$$\frac{T_1(t)}{T(t)} = \overline{m_1} = \text{const}, \quad \frac{T_2(t)}{T(t)} = \overline{m_2} = \text{const}, \tag{3.32}$$
$$\overline{m_1} > 1, \quad \overline{m_2} < 1.$$

Уравнения (3.29) в этом случае имеют решения

$$T = \begin{cases} T_b \exp \dfrac{k_1(\overline{m_1} - 1)t}{c}, & 0 \le t < t_1, \\[2ex] T_b \exp \dfrac{k_2(\overline{m_2} - 1)(t - t_1)}{c}, & t_1 \le t \le \tau. \end{cases}$$

Эти соотношения описывают изменение температуры насадки в течение цикла. Таким образом, задача сводится к задаче нелинейного программирования

$$\Delta S_{\Sigma} = \frac{k_1(\overline{m_1} - 1)^2}{\overline{m_1}} t_1 + \frac{k_2(1 - \overline{m_2})^2}{\overline{m_2}} t_2 \to \min_{t_1, t_2} \tag{3.33}$$

при условиях

$$t_1 + t_2 = \tau, \tag{3.34}$$
$$c(\overline{T_b} - T_b) = Q, \tag{3.35}$$
$$\frac{\exp[k_1(\overline{m_1} - 1)t_1]}{c} = \frac{\overline{T_b}}{T_b}, \tag{3.36}$$
$$\frac{\exp[-k_2(\overline{m_2} - 1)t_2]}{c} = \frac{\overline{T_b}}{T_b}. \tag{3.37}$$

Выразив $\overline{m_1}$ и $\overline{m_2}$ из соотношений (3.36), (3.37), T_b из условия (3.35), а t_2 — из условия (3.34) и подставив в критерий оптимальности (3.33), получим задачу безусловной минимизации

$$\Delta S_{\Sigma} = \tau \left(\frac{1}{\dfrac{1}{cx} - \dfrac{1+\gamma}{k_2}} - \frac{1}{\dfrac{1}{cx} + \dfrac{1+\gamma}{\gamma k_2}} \right) \to \min_{\gamma},$$

где

$$x = \frac{1}{\tau}\ln\frac{\overline{T}_b}{T_b} = \frac{1}{\tau}\ln\frac{\overline{T}_b c}{\overline{T}_b c - Q}, \quad \gamma = \frac{t_1}{t_2}$$

Так как $\overline{T}_b$ и τ фиксированы, то x — заданная величина, и производство энтропии $\sigma = \Delta S_\Sigma/\tau$ зависит только от γ. Из условия минимума σ по γ получим

$$\gamma^* = \frac{k_2\sqrt{k_1} - cx(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})}{k_1\sqrt{k_2} + cx(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})} = \frac{\sqrt{k_0 k_2} - cx}{\sqrt{k_0 k_1} + cx},$$

где

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})^2}.$$

Минимальное значение производства энтропии при линейном законе теплопередачи составляет

$$\sigma^* = \frac{[cx(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})]^2}{k_1 k_2 + cx(k_2 - k_1)}. \tag{3.38}$$

Для определения оптимальных законов изменения температуры потоков вначале находят

$$\overline{m_1^*} = \frac{k_1 k_2 + (k_2 - k_1)cx}{k_1 k_2 - \sqrt{k_1}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})cx},$$

$$\overline{m_2^*} = \frac{k_1 k_2 + (k_2 - k_1)cx}{k_1 k_2 + \sqrt{k_2}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})cx},$$

а затем T_1^*, T_2^* по соотношениям (3.32), (3.36), (3.37). Полученные соотношения использовались для расчета оптимального режима работы регенеративного теплообменника при следующих исходных данных: $k_1 \cdot 10^{-6} = 1{,}047$ Вт/К, $k_2 \cdot 10^{-6} = 1{,}57$ Вт/К, $c = 837{,}4$ кДж/К, $\overline{T}_b = 500$ К, $\tau = 30$ с, $Q \cdot 10^{-6} = 1{,}256$ кДж/К.

В результате расчета получено: $x = 0{,}0119$ с$^{-1}$, $\gamma^* = 1{,}187$, $\sigma^* = 256{,}46$ Вт/К, $T_b = 350$ К. Соответствующие оптимальному режиму законы изменения температур показаны на рис. 3.6.

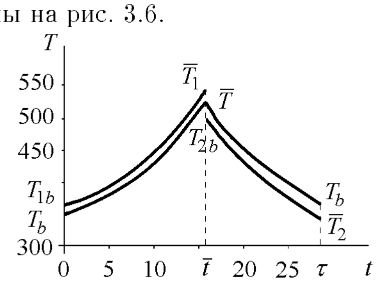


Рис. 3.6. Законы изменения температур, соответствующие оптимальному режиму работы регенеративного теплообменника

Естественно, что подобные законы изменения температур нереализуемы, если расходы потоков постоянны во времени, так как температура горячего потока должна расти по мере отдачи им тепла, а температура холодного уменьшаться, несмотря на получение им тепла от насадки. Следовательно, расходы потоков должны изменяться в течение цикла. Закон изменения расходов легко определяется из уравнений теплового баланса для потоков. Найденное минимально возможное значение производства энтропии σ^* может служить показателем термодинамического совершенства организации регенеративного теплообмена. Величина отношения $\eta = \sigma^*/\sigma$ всегда меньше единицы, если σ — производство энтропии в реальном теплообменнике при фиксированных параметрах цикла τ, Q, $\overline{T}_b$, c. Значение σ находится с использованием формулы (4.46).

3.3. Изотермический массоперенос

Процесс массопереноса можно представить той же схемой, что и теплоперенос. Различие заключается в том, что движущей силой является разница химических потенциалов перераспределяемого (активного) компонента смеси в потоках, а также то, что обмен активным компонентом меняет не только концентрацию этого компонента, но и массовые расходы потоков.

Введем обозначения: $G_i(l), x_i(l), \mu_i(x_i)$ — расход, концентрации активного компонента и его химический потенциал в i-м потоке, $g(\mu_1, \mu_2)$ — поток обмена активного компонента.

Производство энтропии:

$$\sigma = \frac{1}{T}\int_0^L g(\mu_1, \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)dl. \tag{3.39}$$

Расход перераспределяемого компонента:

$$G_0 = \int_0^L g(\mu_1, \mu_2)dl. \tag{3.40}$$

Изменения расходов G_i и концентраций C_i определяются условиями

$$\frac{d(G_1x_1)}{dl} = -\frac{d(G_2x_2)}{dl} = \frac{dG_1}{dl} = -\frac{dG_2}{dl} = -g(\mu_1, \mu_2). \tag{3.41}$$

Нетрудно показать, что из условий (3.41) следуют зависимости потоков $G_i(x_i)$ вида

$$G_i = \frac{\tilde{G}_i}{1 - x_i(l)}, \quad i = 1, 2, \tag{3.42}$$

где $\tilde{G}_i$ — расход инертного компонента в i-м потоке,

$$\tilde{G}_i = G_i(0)(1 - x_i(0)).$$

После подстановки выражений (3.42) в уравнения (3.41) они примут форму

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dl} &= -\frac{1}{\tilde{G}_1}(1 - x_1)^2 g(\mu_1, \mu_2), \\ \frac{dx_2}{dl} &= \frac{1}{\tilde{G}_2}(1 - x_2)^2 g(\mu_1, \mu_2). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Уравнения термодинамических балансов процесса массообмена запишутся как:

— материальный баланс по активному компоненту и общему потоку

$$\begin{aligned} &(G_{10}x_{10} - G_{1L}x_{1L}) + (G_{20}x_{20} - G_{2L}x_{2L}) = 0, \\ &G_{10} - G_{1L} = G_{2L} - G5_{20} = G_0; \end{aligned} \tag{3.44}$$

— энтропийный баланс

$$(G_{10}s_{10} - G_{1L}s_{1L}) + (G_{20}s_{20} - G_{2L}s_{2L}) + \sigma = 0. \tag{3.45}$$

Здесь удельная энтропия i-го потока

$$s_i = \frac{1}{T}(h_i - \sum_k \mu_{ki}x_{ki}).$$

Для смеси из двух компонент и химических потенциалов, имеющих форму

$$\mu_{ki} = \mu_k^0(T, P) + RT_i \ln x_{ki}, \tag{3.46}$$

уравнение (3.45) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{2}(G_{i0}h_{i0} - G_{iL}h_{iL}) - R\sum_{i=1}^{2}\{G_{i0}[x_{i0}\ln x_{i0} + (1 - x_{i0})\ln(1 - x_{i0})] - \\ - G_{iL}[x_{iL}\ln x_{iL} + (1 - x_{iL})\ln(1 - x_{iL})]\} + \sigma = 0. \end{aligned} \tag{3.47}$$

По условиям энергетического баланса первое слагаемое в левой части этого равенства равно нулю. При некотором минимально возможном значении $\sigma = \sigma_{\min}$ из (3.47) следует неравенство, определяющее наряду с (3.44) область возможных значений параметров массообменной системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2}\{G_{i)}(x_{i0}\ln x_{i0} + (1 - x_{i0})\ln(1 - x_{i0})) - \\ - G_{iL} + (1 - x_{iL})\ln(1 - x_{iL})\} \geq \frac{\sigma_{\min}}{R}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Условие минимальной диссипации для процесса массообмена имеет форму (см. гл. 2)

$$\frac{\partial g(\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2} = \lambda \frac{g^2(\mu_1,\mu_2)}{T} \quad \forall l, \tag{3.49}$$

где λ — некоторая константа, определяющаяся величиной G_0;

$$\sigma_{\min} = \frac{G_0^2}{T\alpha L}. \tag{3.50}$$

В том случае, когда $\dfrac{\partial g}{\partial \mu_2} = \mathrm{const}$, из (3.49) следует, что поток диффузии g^* должен быть постоянным, так что

$$g^*(\mu_1,\mu_2) = \frac{G_0}{L} \quad \forall l. \tag{3.51}$$

Это равенство связывает μ_1 и μ_2. Минимум производства энтропии определяется решением задачи нелинейного программирования

$$f_0 = \mu_1 - \mu_2 \to \min \Big/ g(\mu_1,\mu_2) - \frac{G_0}{L} = 0. \tag{3.52}$$

После подстановки решения μ_1^*, μ_2^* задачи (3.52) в выражение (3.39) получим

$$\sigma_{\min} = \frac{G_0}{T}(\mu_1^* - \mu_2^*).$$

Пусть $g(\mu_1,\mu_2) = \alpha(\mu_1 - \mu_2)$. Для этого случая введем обозначения:

$$A_0 = -RT\sum_{i=1}^{2} G_{i0}(x_{i0}\ln x_{i0} - (1-x_{i0})\ln(1-x_{i0})),$$

$$A_L = -RT\sum_{i=1}^{2} G_{iL}(x_{iL}\ln x_{iL} - (1-x_{iL})\ln(1-x_{iL}));$$

A_0 и A_L представляют собой обратимые работы разделения смеси на чистые компоненты в начальном и конечном сечении соответственно.

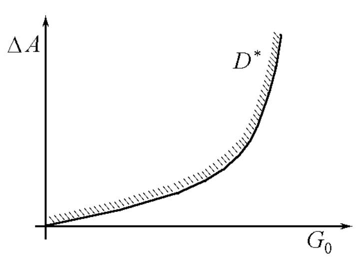


Рис. 3.7. Вид области реализуемости процесса необратимого массопереноса

Так как массоперенос сопровождается смешением потоков, то $A_L > A_0$. Неравенство (3.48) с учетом (3.50) можно переписать как

$$\Delta A = A_L - A_0 \geq \frac{G_0^2}{\alpha L T^2}, \tag{3.53}$$

учтя при этом, что

$$G_{1L} = G_{10} - G_0, \quad G_{2L} = G_{10} + G_0.$$

Область реализуемости процесса изотермического массопереноса показана на рис. 3.7.

3.4. Диссипация в слое и применение активной изоляции

Для поддержания в изолированной камере потенциалов (температур, концентраций, давлений, электрических потенциалов), отличающихся от внешней среды, необходимы затраты энергии. Поток, проходящий через изоляцию, тем больше, чем больше разность потенциалов и коэффициенты проницаемости изоляции. В некоторых случаях оказывается целесообразным создание промежуточных камер между слоями изоляции, в которых поддерживаются определенные значения потенциалов. Такую многослойную изоляцию называют активной [40, 63, 179]. Структуры систем с пассивной и активной изоляцией показаны на рис. 3.8. Ниже проведем сравнение этих систем

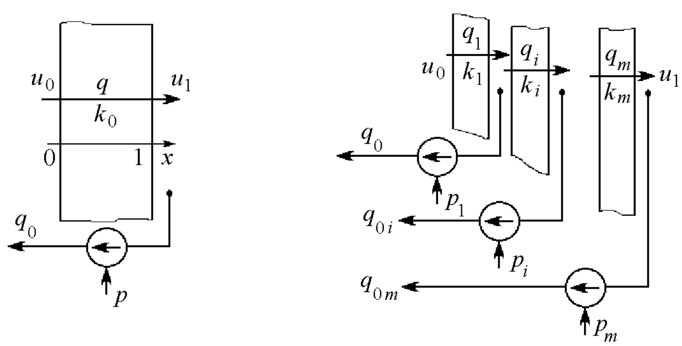


Рис. 3.8. Структуры систем с пассивной (*а*) и активной (*б*) изоляцией

и оценим предельные затраты энергии на поддержание потенциала в камере. При этом первоначально рассмотрим случай теплоизоляции, а затем обобщим полученный результат на случай потока произвольной природы.

Теплоизоляция. При использовании теплоизоляции потенциалами являются температуры внешней среды T_0 и в изолированной камере $T_к$, разность температур обусловливает тепловой поток $q(T_0, T_к)$. Для определенности будем предполагать, что температура внешней среды T_0 больше, чем температура в камере. Найдем затраты энергии на поддержание температуры $T_к$ в системе с пассивной изоляцией, имеющей коэффициент теплопроводности k_0. Будем считать, что тепловой поток пропорционален коэффициенту теплопроводности:

$$q(T_0, T_к) = k_0 \hat{q}(T_0, T_к). \tag{3.54}$$

Для этого случая запишем энергетический и энтропийный балансы системы:

$$\begin{gathered} q(T_0, T_к) + p - q_0 = 0, \\ \frac{q(T_0, T_к)}{T_0} - \frac{q_0}{T_0} + \sigma = 0. \end{gathered} \tag{3.55}$$

Здесь σ — производство энтропии, связанное с потоком тепла q, p — мощность, затрачиваемая на поддержание температуры в камере, q_0 — поток отводимого тепла. Из условий (4.62) следует, что затрачиваемая мощность p пропорциональна производству энтропии:

$$p = \sigma T_0.$$

Аналогично выглядят уравнения термодинамических балансов для активной теплоизоляции с той разницей, что вместо q_0 фигурирует $\sum\limits_i q_{0i}$, а вместо p — сумма p_i. Получим

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = \sigma T_0.$$

Таким образом, минимуму затрачиваемой мощности холодильных циклов соответствует минимум производства энтропии в системе.

Найдем производство энтропии в системе с пассивной изоляцией для теплового потока вида

$$\hat{q}(T_0, T_к) = (T_0^n - T_к^n),$$

приняв толщину стенки за единицу. В этом случае для производства энтропии получим

$$\sigma = -k \int_0^1 \left[\frac{d}{dx} \left[T^n(x) \right] \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{T(x)} \right] \right] dx = k_0 |n| \int_0^1 T^{n-3}(x) \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx. \tag{3.56}$$

Здесь $-k\dfrac{d(T^n(x))}{dx}$ — тепловой поток, $\dfrac{d(1/T(x))}{dx}$ — движущая сила процесса теплопереноса в сечении x.

Распределение температур по координате x найдем из условия постоянства теплового потока

$$-\frac{d}{dx}\Big(T^n(x)\Big) = T_0^n - T_\text{к}^n,$$

откуда с учетом краевых условий имеем

$$T^n(x) = T_0^n(1-x) + T_\text{к}^n x. \qquad (3.57)$$

После подстановки (4.64) в (4.63) получим производство энтропии в слое теплоизоляции σ_n.

Отбросим теперь условие постоянства теплового потока и попытаемся найти такой закон изменения температуры по координате x, для которого производство энтропии σ оказалось бы минимальным при соблюдении условий на границах. Задача оценки минимальной диссипации в стенке примет форму

$$\frac{\sigma}{k_0} = I = \int\limits_0^1 T^{n-3}(x)\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx \to \min, \quad T(0) = T_0, \quad T(1) = T_\text{к}.$$

Решение существенно упрощается, если воспользоваться переходом от переменной x к переменной T. Обозначим производную $dT/dx = T_x(T)$, так что $dx = dT/T_x$. Поскольку толщина стенки задана, должно выполняться равенство

$$\int\limits_0^1 dx = \int\limits_{T_0}^{T_\text{к}} \frac{dT}{T_x} = 1, \qquad (3.58)$$

а функционал I примет вид

$$I = \int\limits_{T_0}^{T_\text{к}} T^{n-3} T_x(T) dT \to \min_{T_x(T)} \qquad (3.59)$$

при условии (4.65). Функция Лагранжа для задачи (4.65), (4.66):

$$L = T_x T^{n-3} + \frac{\lambda}{T_x}.$$

Условия ее стационарности позволяют выразить искомое управление T_x через T и λ:

$$T_x^*(T) = \sqrt{\lambda} T^{(3-n)/2} = \frac{n-1}{2}\ T^{(3-n)/2}\left(T_0^{(n-1)/2} - T_\text{к}^{(n-1)/2}\right)^{-1}. \qquad (3.60)$$

Для определения $T^*(x)$ имеем уравнение

$$\frac{dT}{T_x^*(T)} = dx, \quad T(0) = T_0.$$

Нетрудно видеть, что для линейного закона теплопередачи ($n=1$)

$$T^*(x) = T_0 \mathrm{e}^{-rx}, \tag{3.61}$$

где $r = \ln(T_0/T_{\text{к}})$, а оценка минимальной диссипации

$$\sigma^* = k_0 \left(\ln \frac{T_0}{T_{\text{к}}} \right)^2 . \tag{3.62}$$

Соответствующая минимальной диссипации зависимость теплового потока q от температуры в сечении x с учетом (4.51) имеет вид

$$q^*\big(T(x)\big) = k_0 |n| T^{n-1} T_x^*(T) =$$
$$= k_0 |n| \frac{n-1}{2}\ T(x)^{(n+1)/2} \left(T_0^{(n-1)/2} - T_{\text{к}}^{(n-1)/2} \right)^{-1} . \tag{3.63}$$

При $n=1$ после раскрытия неопределенности в (4.70) получим, что оптимальный тепловой поток пропорционален абсолютной температуре в каждом сечении. Добиться его постоянства можно, если коэффициент теплопроводности будет обратно пропорциональным температуре: $k(T) = \beta/T$. При этом величина β такова, что

$$\int\limits_{T_{\text{к}}}^{T_0} \frac{\lambda T}{\beta} dT = \frac{1}{k_0}.$$

В отличие от этого для закона теплопереноса Фурье ($n = -1$) оптимальный тепловой поток q^* не зависит от температуры. Он постоянен для постоянного коэффициента теплопередачи k. Это означает, что для закона теплопереноса, соответствующего $n=-1$, пассивная изоляция по схеме рис. 3.8*а* оптимальна. При $n > -1$ производство энтропии может быть уменьшено, если перейти к активной изоляции, расположив промежуточные камеры и производя отбор тепла из этих камер так, чтобы зависимость теплового потока от температуры соответствовала условию (4.70).

Покажем, какого выигрыша можно ожидать от использования активной изоляции при $n=1$. Диссипация в системе с пассивной изоляцией равна

$$\sigma_n = q \left(\frac{1}{T_{\text{к}}} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{k_0 (T_0 - T_{\text{к}})^2}{T_0 T_{\text{к}}} = k_0 \left(\frac{T_0}{T_{\text{к}}} + \frac{T_{\text{к}}}{T_0} - 2 \right). \tag{3.64}$$

Отношение σ к σ_n в функции от $T_0/T_{\text{к}}$ показано на рис 3.9. Выигрыш тем больше, чем больше отношение температур. Значительный выигрыш дает введение уже одной промежуточной камеры в точке с некоторой температурой T_1 \quad ($T_0 > T_1 > T_{\text{к}}$). Эту температуру несложно найти из решения следующей экстремальной задачи:

$$\sigma = k_1 \frac{(T_0 - T_1)^2}{T_0 T_1} + k_2 \frac{(T_1 - T_{\text{к}})^2}{T_1 T_{\text{к}}} \to \min_{T_1, k_1, k_2} \Big/ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_0}. \tag{3.65}$$

Ее решение очевидно уже в силу симметрии по искомым переменным

$$T_1^* = \sqrt{T_0 T_\text{к}}, \quad k_1^* = k_2^* = 2k_0. \tag{3.66}$$

Производство энтропии в системе с одной промежуточной камерой при таком выборе есть

$$\sigma_1^* = 4k_0 \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_\text{к}})^2}{\sqrt{T_0 T_\text{к}}}. \tag{3.67}$$

Отношение σ^*/σ_1^* показано на рис. 3.9. Видно, что активная изоляция с одной промежуточной камерой снижает избыток диссипации по сравнению с минимально возможным примерно втрое.

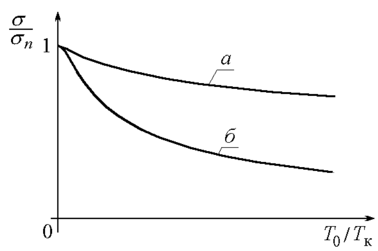


Рис. 3.9. Отношение σ/σ_n для схем с пассивной изоляцией (a) и активной изоляцией с одной промежуточной камерой ($б$)

Мощности холодильных машин для схемы с одной промежуточной камерой равны

$$p_1 = 2k_0 \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_\text{к}})^2 (T_0 - \sqrt{T_0 T_\text{к}})}{\sqrt{T_0 T_\text{к}}};$$

$$p_2 = 2k_0 \frac{(T_0 - T_\text{к})(\sqrt{T_0 T_\text{к}} - T_\text{к})}{T_\text{к}}.$$

При дальнейшем увеличении числа камер каждый слой изоляции делится в соответствии с формулами (4.73).

В приведенных выше результатах не учитывалась необратимость холодильных циклов. Эта необратимость зависит от величины поверхностей контакта рабочего тела с газом в охлаждаемой камере и с внешней средой и от мощности p_i. Оценки такой необратимости приведены в гл. 4.

Отметим в заключение, что с ростом степени n в законе теплопереноса выигрыш от использования активной изоляции возрастает.

Потенциалостатирование. Очевидно, что использование многослойной активной изоляции с промежуточными камерами может дать эффект при поддержании не только заданного поля температур, но и глубокого вакуума, или при сохранении положительного или отрицательного заряда и пр. Во всех этих случаях термодинамические балансы, подобные (4.62), показывают, что суммарные затраты энергии на потенциалостатирование пропорциональны производству энтропии. Обозначим интенсивную переменную, определяющую движущую силу потока, проникающего через изоляцию, через U. Поток g в сечении x можно задать в форме

$$g = k_0 r(U)\frac{dU}{dx}. \tag{3.68}$$

Потенциал μ также зависит от U. Например, тепловой потенциал есть обратная величина температуры, химический потенциал пропорционален логарифму концентрации и пр. Производство энтропии:

$$\sigma = k_0 \int\limits_0^1 r(U)\frac{d\mu}{dU}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx. \tag{3.69}$$

Значения U_0 и $U_{\text{к}}$ фиксированы.

Перейдем от переменной x к переменной U, введя обозначения для производных

$$U_x = \frac{dU}{dx}, \quad \mu_U = \frac{d\mu}{dU}.$$

Получим задачу о выборе оптимальной зависимости $U_x(U)$

$$\sigma = k_0 \int\limits_{U_0}^{U_{\text{к}}} r(U)\mu_U(U)U_x dU \to \min_{U_x} \tag{3.70}$$

при условии

$$\int\limits_0^1 dx = \int\limits_{U_0}^{U_{\text{к}}} \frac{dU}{U_x} = 1. \tag{3.71}$$

Из условий стационарности функции Лагранжа для этой задачи

$$\frac{\partial}{\partial U_x}\left[r(U)\mu_U(U)U_x + \frac{\lambda}{U_x}\right] = 0$$

следует

$$U_x^*(U) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{r(U)\mu_U(U)}}.$$

С учетом (4.62)

$$\sqrt{\lambda} = \int\limits_{U_0}^{U_{\text{к}}} \sqrt{r(U)\mu_U(U)}dU.$$

Поток, минимизирующий диссипацию, с учетом принятых обозначений запишется в виде

$$g^*(U) = k_0 r(U) U_x^*(U) = k_0 \left(\int\limits_{U_0}^{U_\text{К}} \sqrt{r(U)\left(\frac{d\mu}{dU}\right)} dU \right) \sqrt{\frac{r(U)}{d\mu/dU}}. \quad (3.72)$$

Зависимость (3.72) позволяет сделать общий вывод о целесообразности использования активного потенциалостатирования: *если*

$$\frac{r(U_\text{К})}{\Big(d\mu/dU\Big)_{U_\text{К}}} < \frac{r(U_0)}{\Big(d\mu/dU\Big)_{U_0}}, \quad (3.73)$$

то активное потенциалостатирование позволяет уменьшить затраты энергии. В противном случае оно нецелесообразно.

В частности, для рассмотренного выше случая тепловой изоляции интенсивной переменной U является температура T,

$$r(T) = -|n|T^{n-1}, \quad \mu(T) = \frac{1}{T}, \quad \frac{d\mu}{dT} = -\frac{1}{T^2}.$$

Подставляя эти зависимости в условие (3.73) целесообразности использования активной изоляции, получим $T_\text{К}^{n+1} < T_0^{n+1}$. Так как по условию $T_0 > T_\text{К}$, то из этого неравенства следует, что $n \geq -1$.

Неравенство (3.73) соответствует тому факту, что оптимальный поток, поступающий в камеру, должен быть меньше потока на границе изоляции с внешней средой, т.е. его надо «откачивать» из промежуточных камер. Чем больше разность между правой и левой частями неравенства, тем большего эффекта можно ожидать от активного потенциалостатирования.

Задача поддержания заданного поля потенциалов. В задаче об оптимальной изоляции камеры последовательно соеденены друг с другом и задан потенциал только в одной, центральной камере. Естественным обобщением этой задачи является задача о поддержании заданного распределения потенциалов в произвольной системе камер с минимальным расходом энергии. Примером может служить задача поддержания заданных температур в части комнат здания (активных камерах), если температуры в остальных помещениях (пассивных камерах) могут быть произвольны. Коэффициенты теплопередачи между камерами известны. Требуется найти оптимальное распределение потоков энергии, подаваемых в каждую из камер. Когда в этой задаче внешняя температура меньше, чем любая из температур активных камер (задача отопления), то нетрудно показать, что всю энергию нужно подавать в активные камеры. Если же температуры в некоторых активных камерах выше температуры окружающей среды (задача кондиционирования), то целесообразно часть энергии подавать (отбирать) в пассивные камеры, поддерживая профиль температурного поля, минимизирующий диссипацию энергии.

Глава 4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ТЕПЛОВЫХ И ХОЛОДИЛЬНЫХ МАШИН

Тепловая машина — центральный объект изучения как в обратимой термодинамике, так и в термодинамике при конечном времени. Задача Карно о предельном КПД тепловой машины положила начало развитию термодинамики. Исходной для термодинамики при конечном времени стала задача Новикова [153] о предельной мощности тепловой машины. Естественно, она не была столь общей, как задача Карно. Ведь нужно было оговорить не только конфигурацию системы (два резервуара и рабочее тело тепловой машины), но и кинетику процесов теплообмена. Однако важно, что решение как той, так и другой задачи не зависит от уравнения состояния рабочего тела, что для всех реальных законов теплообмена оптимальный цикл состоит из двух изотерм и двух адиабат.

Предельным возможностям тепловых машин посвящено огромное число работ (см. обзоры [48, 60]). В этой главе мы рассмотрим общие свойства оптимальных процессов в таких системах и характерные постановки задач. При этом выделим два типа машин. В первом случае рабочее тело предполагается однородным и значения его интенсивных переменных меняются только во времени. Рабочее тело может поочередно вступать в контакт или прерывать контакт с другими элементами системы. Такую машину называют *машиной с сосредоточенными параметрами*.

Для второго типа машин характерна распределенность параметров в пространстве и наличие конвективного потока (турбина). Их называют *машинами с распределенными параметрами*. В этом случае рабочее тело может одновременно вступать в контакт с несколькими элементами системы, причем параметры его при контакте с каждым из них различны.

Прямые и обратные циклы в необратимом случае имеют то существенное различие, что в прямых циклах предельное значение целевого потока (мощности) ограничено. С увеличением потока подводимого тепла мощность первоначально возрастает до своего максимального значения, а затем из-за роста необратимых потерь уменьшается. В обратных же циклах, интенсивность целевого потока (тепла) монотонно растет с ростом затрачиваемой мощности.

4.1. Предельная мощность тепловой машины

Открытая система, машина с распределенными параметрами. Рассмотрим открытую термодинамическую систему, состоящую из нескольких резервуаров с постоянными температурами и подсистем, температуры которых определяются запасом их внутренней энергии. Тепловая машина контактирует с термодинамическими подсистемами, получая от них или отдавая им потоки тепла и вырабатывая работу. Требуется найти такие температуры контакта u_i тепловой машины с каждой из подсистем, при которых получаемая в единицу времени работа, т.е. мощность тепловой машины N, максимальна. При этом общее число термодинамических подсистем равно n, из них не менее двух представляют собой резервуары (рис. 4.1). Система с одним резервуаром не может функционировать в стационарном режиме.

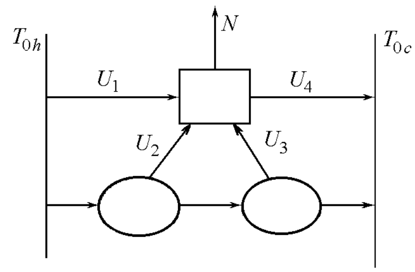


Рис. 4.1 Структура открытой системы с тепловой машиной

Задача о предельной мощности для системы, состоящей только из двух резервуаров с температурами T_{0h} и T_{0c}, рассмотрена Новиковым [152], позднее Курзоном, Альбурном [121] и другими исследователями. Рассматриваемая постановка обобщает эту задачу на системы произвольной структуры.

Обозначим через T_i температуру i-й подсистемы, через $q_{ji}(T_j, T_i)$ — тепловой поток между i-й и j-й подсистемами, через $q_i(T_i, u_i)$ — тепловой поток между i-й подсистемой и рабочим телом тепловой машины. Тепловую машину будем предполагать внутренне обратимой, так что производство энтропии в ней равно нулю. Задача о предельной мощности запишется в форме

$$N = \sum_{i=m}^{n} q_i(T_i, u_i) \to \max_{u_i} \tag{4.1}$$

при условиях

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{q_i(T_i, u_i)}{u_i} = 0, \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ji}(T_j, T_i) = q_i(T_i, u_i), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{4.3}$$

Условия (4.1), (4.2) следуют из энергетического и энтропийного балансов рабочего тела, а условие (4.3) — энергетический баланс для i-й подсистемы, число которых $m \le n-2$. Температуры резервуаров T_i $(i = m+1, \ldots, n)$ заданы и неизменны.

Условия, определяющие u_i и T_i для $i \le m$, следуют из требований стационарности функции Лагранжа задачи (4.1)–(4.3)

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ q_i(T_i, u_i) \left(1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i\right) + \lambda_i \sum_{j=1}^{n} q_{ji}(T_j, T_i) \right\}$$

по u_i, T_i, причем $\lambda_i = 0$ для $i > m$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial u_i}\left(1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i\right) = \Lambda \frac{q_i(T_i, u_i)}{u_i^2}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial T_i}\left(1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i\right) + \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_{ji}}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Уравнения (4.2)–(4.5) позволяют найти $n+m$ переменных u_i и T_i и $(m+1)$-н множитель Лагранжа.

Чаще всего форму зависимости теплового потока от температур контактирующих тел задают в форме Ньютона

$$q = \alpha(T_1 - T_2)$$

либо в форме Фурье

$$q = \beta\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

В том случае, когда потоки ньютоновские, $q_i = \alpha_i(T_i - u_i)$, $q_{ji} = \alpha_{ji}(T_j - T_i)$, уравнения (4.2)–(4.5) перепишутся как

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i \frac{T_i}{u_i} = 1, \quad \text{где} \quad \tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}, \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(T_j - T_i) = \alpha_i(T_i - u_i), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.7}$$

$$u_i^2(1 - \lambda_i) = \Lambda T_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.8}$$

$$\alpha_i\left(1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i\right) = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4.9}$$

Из этих условий в том частном случае, когда $n = 2$, $m = 0$, $T_1 = T_{0h}$, $T_2 = T_{0c}$, вытекают упомянутые выше результаты о предельной мощности тепловой машины. Действительно, в этом случае $\lambda_i = 0$, $u_1^* =$

$= \sqrt{\Lambda T_{0h}}$, $u_2^* = \sqrt{\Lambda T_{0c}}$, и из уравнений (4.6)–(4.9) следует, что КПД тепловой машины

$$\eta = 1 - \frac{u_2^*}{u_1^*} = 1 - \sqrt{\frac{T_{0c}}{T_{0h}}},$$

а максимальная мощность

$$N_{\max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}(\sqrt{T_{0h}} - \sqrt{T_{0c}})^2.$$

В табл. 4.1 приведены значения предельной мощности и соответствующего ей КПД для машины с распределенными параметрами в системе с двумя резервуарами, имеющими температуры T_{0h} и T_{0c}.

Таблица 4.1. **Максимальная мощность и соответствующий ей КПД тепловых машин с распределенными параметрами рабочего тела**

Закон теплопереноса	Максимальная мощность	КПД
Ньютоновский (линейный)	$\frac{k_h k_c}{k_h + k_c}\left[\sqrt{T_{0h}} - \sqrt{T_{0c}}\right]^2$	$1 - \sqrt{\frac{T_{0c}}{T_{0h}}}$
Фурье	$\frac{1}{2}\left[\xi(k_h + k_c) - \left(\frac{k_h}{T_{0h}} - \frac{k_c}{T_{0c}}\right)\right]$	$1 - \frac{1/T_{0h} + \xi}{1/T_{0c} + \xi}$, $\xi = \sqrt{\frac{\frac{k_h}{T_{0h}^2} + \frac{k_c}{T_{0c}^2}}{k_h + k_c}}$

Ниже мы подробнее остановимся на выводе этих соотношений.

Максимальная мощность тепловой машины с сосредоточенными параметрами в системе с двумя резервуарами. Состояние рабочего тела будем характеризовать энтропией S и внутренней энергией E. Их изменение во времени для рабочего тела с сосредоточенными параметрами определяется уравнениями

$$\dot{S} = \frac{1}{T} q\left(T_0(t), T(t)\right), \quad \dot{E} = q\left(T_0(t), T(t)\right) - p(t). \tag{4.10}$$

Здесь $q(T_0(t), T(t))$ — тепловой поток между источником и рабочим телом, $T_0(t)$ и $T(t)$ — температуры источника и рабочего тела соответственно, $p(t)$ — мощность тепловой машины. Температура источника может принимать два фиксированных значения ($T_0(t) \in \in \{T_{0c}, T_{0h}\}$), а на температуру рабочего тела не наложено никаких ограничений, кроме требования $T(t) > 0$.

Условия цикличности состояния рабочего тела можно записать как

$$S(\tau) = S(0) \Rightarrow \int_0^\tau \frac{q(T_0, T)}{T}\, dt = 0, \; E(\tau) = E(0) \Rightarrow \int_0^\tau q(T_0, T)\, dt = A, \quad (4.11)$$

где A — работа, полученная за цикл. В дальнейшем будем записывать соотношения (4.11) в сокращенном виде:

$$\overline{\left(\frac{q(T_0, T)}{T}\right)} = 0, \quad \overline{q(T_0, T)} = \overline{p},$$

где $\overline{p} = A/\tau$ — средняя мощность, а черта означает операцию усреднения по времени.

Задача о предельной мощности. С учетом (4.10) и (4.11) задача о предельной средней за цикл мощности $\overline{p}$ тепловой машины примет форму

$$\overline{q(T_0, T)} \to \max_{T_0(t), T(t)} \quad (4.12)$$

при условиях

$$\overline{\left(\frac{q(T_0, T)}{T}\right)} = 0, \quad T(t) > 0, \quad T_0 \in \{T_{0c}, T_{0h}\}. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.10) являются уравнениями ляпуновского типа (см. гл. 9), поэтому в постановке задачи учтены только вытекающие из этих уравнений условия (4.11).

Задача (4.12), (4.13) представляет собой усредненную задачу с одним условием, следовательно, вектор управлений $u = (T_0, T)$ принимает на оптимальном решении не более двух базовых значений u_1 и u_2, на каждом из которых функция Лагранжа этой задачи

$$L = q(T_0, T)\left(1 - \frac{\lambda}{T}\right)$$

достигает максимума (см. гл. 9), величина же λ определяется из условия равенства этих максимумов. Приходим к системе уравнений

$$u_i = \arg\max_u L(u, \lambda), \quad i \in \{1, 2\}, \quad L(u_1, \lambda) = L(u_2, \lambda). \quad (4.14)$$

Проиллюстрируем последовательность решения на примере линейного закона теплопереноса

$$q_i = k_i(T_{0i} - T), \quad i \in \{h, c\}.$$

Максимум L по T соответствует условию

$$\frac{\partial L}{\partial T} = 0 \implies \frac{\partial q}{\partial T}\left(1 - \frac{\lambda}{T}\right) + q_i(T_0, T)\frac{\lambda}{T^2} = 0, \quad (4.15)$$

которое для линейного закона теплопереноса примет форму

$$T = \sqrt{\lambda T_0}. \tag{4.16}$$

Одному из базовых значений управления соответствует $T_0 = T_{0h}$, другому — $T_0 = T_{0c}$. Отметим, что при $T_0 = T_{0h}$ значение $L(T_{0h}, T^*, \lambda)$

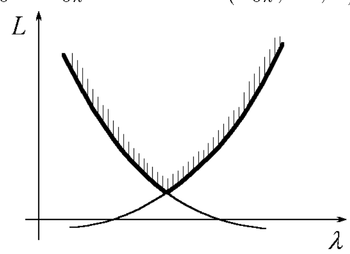


Рис. 4.2. Характер изменения функции Лагранжа на каждом из базовых значений управления

с ростом λ уменьшается, а при $T_0 = T_{0c}$ значение $L(T_{0c}, T^*, \lambda)$ с ростом λ растет. Характер изменения функции Лагранжа на каждом из базовых значений управления показан на рис. 4.2. Максимум L по u, отмеченный штриховкой, достигает минимума по λ в точке равенства $L(u_1, \lambda)$ и $L(u_2, \lambda)$. Зависимость, вытекающая из уравнений (4.15), между оптимальной температурой рабочего тела и температурой резервуара, с которым оно контактирует, для различных законов теплопереноса приведена в табл. 4.2. Решение уравнений (4.15) определяет базовые значения температур. Условие цикличности по энтропии позволяет найти доли γ_h, γ_c от продолжительности цикла, в течение которых управление — вектор температур источника и рабочего тела — принимает базовые значения u_1 и u_2 соответственно.

Таблица 4.2. **Связь оптимальной температуры рабочего тела с температурой источника для различных законов теплопереноса**

Закон теплопереноса	Выражение для потока тепла	Зависимость T от T_0
Ньютоновский (линейный)	$q(T_0, T) = k(T_0 - T)$	$T = \sqrt{\lambda T_0}$
Фурье	$q(T_0, T) = k\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$	$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{\lambda}\right)$
Обобщенный	$q(T_0, T) = k(T_0^n - T^n)$	$nT^{n+1} + \lambda(1-n)T^n = \lambda T_0^n$

Таким образом, оптимальный циклический процесс содержит четыре участка:

1) изотермический, на котором вектор управления принимает значение $u_1 = (T_{0h}, T_h)$ продолжительностью $t_h = \gamma_h \tau$ (рабочее тело при этом находится в контакте с горячим источником);

2) изотермический, на котором вектор управления принимает значение $u_1 = (T_{0c}, T_c)$ продолжительностью $t_c = \gamma_c \tau$ (контакт с холодным источником);

3) и 4) «мгновенные» адиабатические процессы, в которых температура рабочего тела изменяется от T_h до T_c и от T_c до T_h. Как вытекает из общих свойств усредненных задач (см. гл. 2), оптимальный процесс не единствен и может содержать любое число изотермических участков с температурами T_h и T_c, лишь бы их общая продолжительность составляла t_h и t_c соответственно, а переключение производилось мгновенно.

Для линейного закона теплопереноса легко получить значение КПД, соответствующее максимальной мощности тепловой машины:

$$\eta = \frac{p}{\gamma_h q_h(T_h, T_{0h})} = 1 - \frac{\gamma_c q_c(T_c, T_{0c})}{\gamma_h q_h(T_h, T_{0h})}. \tag{4.17}$$

Подставив в (4.17) отношение потоков тепла, найденных из (4.12), (4.13), и учитывая (4.16), получаем формулу для КПД Новикова–Курзона–Альборна:

$$\eta_{KA} = 1 - \sqrt{\frac{T_{0c}}{T_{0h}}}. \tag{4.18}$$

Выражения для максимальной мощности тепловой машины и соответствующего ей КПД для законов теплопереноса Ньютона и Фурье приведены в табл. 4.3.

Т а б л и ц а 4.3. **Максимальная мощность и соответствующий ей КПД тепловых машин с сосредоточенными параметрами рабочего тела**

Закон теплопереноса	Максимальная мощность	КПД
Ньютоновский (линейный)	$\dfrac{k_h k_c}{(\sqrt{k_h} + \sqrt{k_c})^2} (\sqrt{T_{0h}} - \sqrt{T_{0c}})^2$	$1 - \sqrt{\dfrac{T_{0c}}{T_{0h}}}$
Фурье	$\dfrac{k_h k_c}{4(\sqrt{k_h} + \sqrt{k_c})} \dfrac{\left(\dfrac{1}{T_{0h}} - \dfrac{1}{T_{0c}}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{k_h}}{T_{0h}} + \dfrac{\sqrt{k_c}}{T_{0c}}}$	$1 - \dfrac{1/T_{0h} + \xi}{1/T_{0c} + \xi}$, $\xi = \dfrac{T_{0h} T_{0c}}{\sqrt{k_h} + \sqrt{k_c}}$

Система с несколькими резервуарами и машиной с сосредоточенными параметрами. В этом пункте рассмотрим систему с несколькими источниками тепла, структура которой показана на рис. 4.3. Первоначально рассмотрены источники с постоянной температурой, затем — с температурой, зависящей от времени.

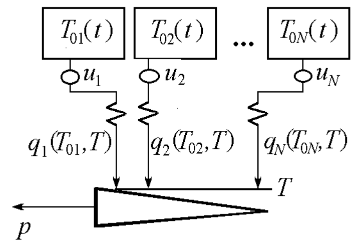


Рис. 4.3. Структура тепломеханической системы с несколькими источниками тепла

Для систем, близких к обратимым, рассматривать возможности контакта рабочего тела с несколькими горячими или холодными источниками бессмысленно, так как наилучшие показатели соответствуют использованию только источников с минимальной и максимальной температурами. Иное дело — для необратимых процессов. Ниже получены условия оптимального контакта рабочего тела при получении и отдаче тепла для машины максимальной мощности.

Отметим, что в циклах, где рабочее тело отбирает тепло одновременно от нескольких источников с разными температурами, неправомерно использовать понятие КПД как отношения полученной работы к отобранному теплу. Связано это с тем, что тепло имеет различный потенциал, зависящий от температуры источника.

Температуры источников постоянны. Обозначим температуры источников через T_{0i}, а тепловой поток от i-го источника к рабочему телу — через $u_i q_i(T_{0i}, T)$. Функции контакта $u_i(t)$, как и температура $T(t)$, подлежат оптимальному выбору в задаче

$$\overline{p} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sum_{i=1}^N u_i q_i(T_{0i}, T)dt \to \max_{T,u_i} \Bigg/ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau \frac{1}{T}\sum_{i=1}^N q_i(T_{0i}, T)dt = \overline{\sigma}, \\ u_i \in \{0,1\}, \quad T > 0. \end{array} \tag{4.19}$$

Здесь $\overline{\sigma}$ — средняя скорость прироста энтропии рабочего тела. В циклическом процессе τ — длительность цикла, а прирост его энтропии за цикл равен нулю ($\overline{\sigma} = 0$).

Задача (4.20) является усредненной задачей нелинейного программирования, условия ее оптимальности (см. гл. 9) имеют форму

$$L = \sum_{i=1}^N u_i q_i(T_{0i}, T)\left(1 - \frac{\lambda}{T}\right) \to \max_{u_i,T}\min_{\lambda}. \tag{4.20}$$

С учетом того, что функции контакта u_i входят в L линейно, а вектор управления в задаче (4.19) принимает два значения, получим

$$u_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \operatorname{sign} q_i = \operatorname{sign}(1 - \lambda/T), \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{sign} q_i = -\operatorname{sign}(1 - \lambda/T). \end{cases} \tag{4.21}$$

Таким образом, с учетом свойств функций q_i рабочее тело должно контактировать со всеми источниками, у которых $T_{0i} > T$, пока $T > \lambda$, получая тепло от «горячих» источников, и контактировать со всеми источниками, у которых $T_{0i} < T$, отдавая тепло «холодным» источникам, когда $T < \lambda$. Если в некоторый момент времени рабочее тело контактирует с i-м источником и $T_{0i} > T$, то оно контактирует с любым j-м источником, у которого $T_{j0} > T_{0i}$. То же касается отдачи тепла. Далее будем полагать, что $T_{j0} > T_{0i}$, если $j > i$.

Условия (4.21) разбивают множество источников на два подмножества «горячих» и «холодных». Границей между ними служит вели-

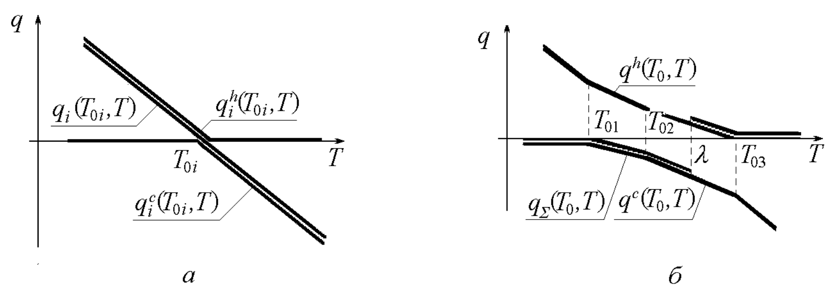


Рис. 4.4. Функции подвода и отвода тепла: *а* — для i-го источника, *б* — суммарные

чина λ, зависящая от $\overline{\sigma}$.

Обозначим через $q^h(T)$ суммарный тепловой поток при подводе тепла, через $q^c(T)$ — то же при отводе тепла от рабочего тела:

$$q^h(T) = \sum_i q_i^h(T_{0i}, T), \qquad q^c(T) = \sum_i q_i^c(T_{0i}, T).$$

В свою очередь функции подвода и отвода тепла для i-го источника имеют вид

$$q_i^h = \frac{1}{2}(q_i + |q_i|), \qquad q_i^c = \frac{1}{2}(q_i - |q_i|)$$

(рис. 4.4). Оптимальные значения температуры рабочего тела при подводе и отводе тепла обозначим через $T_h > \lambda$ и $T_c < \lambda$ соответственно. Так как эти значения являются базовыми в усредненной задаче оптимизации (4.19), то для каждого из них функция Лагранжа (4.20) достигает максимума. Следовательно, в предположении гладкости функций

q^h и q^c имеем

$$\frac{\partial L^h}{\partial T_h} = 0 \Rightarrow \frac{dq^h}{dT_h} - \frac{\lambda}{T_h}\left(\frac{dq^h}{dT_h} - \frac{q^h}{T_h}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L^c}{\partial T_c} = 0 \Rightarrow \frac{dq^c}{dT_c} - \frac{\lambda}{T_c}\left(\frac{dq^c}{dT_c} - \frac{q^c}{T_c}\right) = 0. \qquad (4.22)$$

Условие равенства значений функции Лагранжа:

$$L^h(\lambda, T_h) = L^c(\lambda, T_c) \Rightarrow q^h(T_h)\left(1 - \frac{\lambda}{T_h}\right) = q^c(T_c)\left(1 - \frac{\lambda}{T_c}\right).$$

Условия (4.22) определяют λ, T_h и T_c; ограничение на среднюю интенсивность изменения энтропии рабочего тела позволяет найти доли времени τ, в течение которых происходит его нагрев и охлаждение:

$$\gamma_h \frac{q^h(T_h)}{T_h} + \gamma_c \frac{q^c(T_c)}{T_c} = \overline{\sigma},$$
$$\gamma_h + \gamma_c = 1, \quad \gamma_h \geq 0, \quad \gamma_c \geq 0. \qquad (4.23)$$

Для ньютоновских законов теплообмена функции $q^h(T)$ и $q^c(T)$ испытывают изломы в точках T_{0i}, поэтому если T_h^* или T_c^* совпадают с температурой одного из источников, то уравнения (4.22) неприменимы. В этом случае левая часть соответствующего уравнения имеет разрыв при $T = T^*$, причем меняет знак в этой точке.

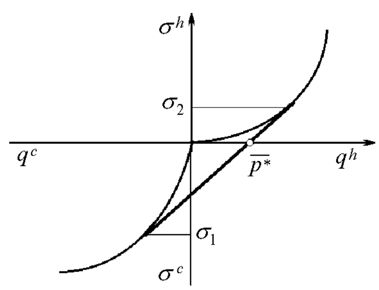


Рис. 4.5. Зависимости скорости изменеия энтропии рабочего тела от потоков подводимого тепла q^h и отводимого тепла q^c

Чтобы исследовать зависимость оптимального решения задачи (4.19) от изменения $\overline{\sigma}$, перепишем ее с учетом обозначений (4.21) как

$$\overline{p} = \gamma_h q^h(T_h) + \gamma_c q^c(T_c) \to \max \Bigg/ \gamma_h \frac{q^h(T_h)}{T_h} + \gamma_c \frac{q^c(T_c)}{T_c} = \overline{\sigma} \qquad (4.24)$$

и, исключая T_h и T_c, построим зависимости $\sigma^h(q^h)$ и $\sigma^c(q^c)$, где $\sigma^h = q^h/T^h$ и $\sigma^c = q^c/T^c$. Первая из этих функций определена при $q^h > 0$, а вторая — при $q^c < 0$ (рис. 4.5). Зависимость предельного значения среднего потока тепла $\overline{p^*}$ (мощности тепловой машины) от среднего приращения энтропии рабочего тела представляет собой выпуклую оболочку функции $\sigma(q)$, равной σ^h при $q > 0$ и σ^c — при $q < 0$. В точках, где выпуклая оболочка совпадает с этой функцией, базовое решение единственно. В случае, когда $\overline{\sigma} \in (\sigma_1, \sigma_2)$, базовых значений температуры рабочего тела два: одно из них T_h соответствует $\overline{\sigma} = \sigma_2$, другое T_c соответствует $\overline{\sigma} = \sigma_1$. При $\sigma_1 < \overline{\sigma} < \sigma_2$ базовые значения температуры не меняются, а меняются лишь γ_h и γ_c (доли времени нагрева и охлаждения рабочего тела).

Для случая, когда $\overline{\sigma} = 0$, что соответствует циклическому изменению состояния рабочего тела в тепловой машине, из условий (4.22), (4.23) следует, что для любых законов теплопередачи

$$\gamma_h(\lambda - T_c) = \gamma_c(T_h - \lambda),$$

причем отношение температур рабочего тела в полуциклах нагрева и охлаждения равно

$$\frac{T_c}{T_h} = \left[\frac{dq^h}{dT_h}\left(\frac{dq^c}{dT_c} - \frac{q^c}{T_c}\right)\right] : \left[\frac{dq^c}{dT_c}\left(\frac{dq^h}{dT_h} + \frac{q^h}{T_h}\right)\right]. \tag{4.25}$$

В свою очередь,

$$\frac{dq^h}{dT_h} : \frac{dq^c}{dT_c} = \frac{q^c(T)}{T_c^2} : \frac{q^h(T)}{T_h^2}. \tag{4.26}$$

Условия (4.25), (4.26) определяют базовые значения температуры рабочего тела в том случае, когда оно поочередно нагревается и охлаждается.

Температуры источников — функции времени. Для сокращения записи введем обозначения: $T_0(t)$ — вектор температур источников, $q_\Sigma(T_0, T, u)$ — суммарный тепловой поток от источников к рабочему телу

$$q_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} u_i q_i\Big(T_{0i}(t), T(t)\Big). \tag{4.27}$$

Вектор-функция $T_0(t)$ принимает значения из множества V; она может быть регулярной либо случайной функцией времени. В том и другом случаях ей можно сопоставить распределение (см. гл. 9) ее значений $f(T_0) \geq 0$, определенное на V и такое, что величина

$$\mu = \int\limits_{\delta V} f(T_0)dT_0$$

представляет собой долю времени τ, в течение которой вектор $T_0 \in \delta V$. С использованием этих обозначений задачу о максимуме средней мощности при заданной средней скорости изменения энтропии рабочего тела можно записать в форме

$$\overline{p} = \int\limits_V f(T_0) q_{\Sigma}(T_0, T, u) dT_0 \to \max_{T,u} \tag{4.28}$$

при условии

$$\int\limits_V f(T_0) \frac{q_{\Sigma}(T_0, T, u)}{T} dT_0 = \overline{\sigma}. \tag{4.29}$$

Задача (4.28), (4.29) представляет собой усредненную задачу с нестационарными параметрами, рассмотренную в п. 9.6. Условия ее оптимальности имеют вид

$$\min_{\lambda} \int\limits_V f(T_0) \cdot \max_{T,u} \left[q_{\Sigma}(T_0, T, u) \left(1 - \frac{\lambda}{T} \right) \right] dT_0. \tag{4.30}$$

Нетрудно видеть, что выражение в квадратных скобках в (4.30) совпадает с функцией Лагранжа (4.20) для задачи с источниками с постоянной температурой. Однако наличие усреднения с весовой функцией $f(T_0)$ и требование минимума по λ от среднего значения $L^*(\lambda, T_0)$ коренным образом меняют характер решения. А именно: если распределение $f(T_0)$ не содержит δ-составляющих (т.е. вектор-функция $T_0(t)$ не содержит участков постоянства), то оптимальное решение $\{T^*(T_0, \lambda), u^*(T_0, \lambda)\}$ единственно. Оно находится из условий стационарности по T функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial T} = 0 \Longrightarrow \frac{\dfrac{\partial q_{\Sigma}}{\partial T} T}{\dfrac{\partial q_{\Sigma}}{\partial T} - \dfrac{q_{\Sigma}}{T}} = \lambda. \tag{4.31}$$

Оптимальные значения функций контакта u_i определяются, как и ранее, условиями (4.21). Наконец, значение λ, которое входит как в (4.21), так и в (4.31), может быть найдено после подстановки в (4.29) зависимостей $T^*(T_0, \lambda), u^*(T_0, \lambda)$. Таким образом, оптимальное решение находится при совместном решении уравнений (4.31), (4.29) и (4.21) при каждом T_0.

При численном решении этой задачи направление коррекции λ определяется знаком производной

$$\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial q_{\Sigma}} : \frac{\partial \lambda}{\partial q_{\Sigma}}.$$

При этом

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_{\Sigma}} = \frac{1}{T^*} > 0.$$

Чтобы определить знак $\partial\lambda/\partial q_{\Sigma}$, продифференцируем по q_{Σ} обе части равенства (4.31). Получим

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q_{\Sigma}} = \frac{\dfrac{\partial q_{\Sigma}}{\partial T^*}}{\left(\dfrac{\partial q_{\Sigma}}{\partial T^*} - \dfrac{q_{\Sigma}}{T^*}\right)^2} < 0. \tag{4.32}$$

Таким образом, $\partial\overline{\sigma}/\partial\lambda < 0$, и в случае, когда в процессе численного расчета $\overline{\sigma}(\lambda_0)$ превышает $\overline{\sigma}$, λ нужно увеличивать.

В качестве примера рассмотрим систему с двумя источниками, распределение температур которых имеет вид

$$f(T_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\hat{T}_{01}-\check{T}_{01})(\hat{T}_{02}-\check{T}_{02})} & \text{при } T_{01}\in[\check{T}_{01},\hat{T}_{01}] \text{ и } T_{02}\in[\check{T}_{02},\hat{T}_{02}], \\ 0 & \text{при } T_{01}\notin[\check{T}_{01},\hat{T}_{01}] \text{ или } T_{02}\notin[\check{T}_{02},\hat{T}_{02}]. \end{cases}$$

Значения температур $\check{T}_{01}, \hat{T}_{01}, \check{T}_{02}, \hat{T}_{02}$ заданы. Законы теплопередачи линейны с одинаковыми коэффициентами $k_1 = k_2 = k$. Вид зависимости $T(T_{01}, T_{02})$ показан на рис. 4.6. На рис. 4.7 показаны области $V_j (j = 1, 2, 3)$, в которых значения функции контакта $u^*(T_0)$ постоянны. Границы областей пересекаются в точке, где $T_01 = T_02 = \lambda$. При температурах источников, бо́льших λ, реализуется подвод тепла, а при температурах, меньших λ, — отвод.

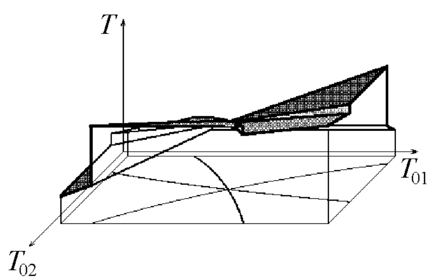


Рис. 4.6. Оптимальная зависимость температуры рабочего тела T от температур источников T_{01} и T_{02}

В том случае, когда функция $T_0(t)$ содержит участок постоянства, оптимальная температура T^* может на этом участке переключаться между двумя базовыми значениями, если функция Лагранжа при величине константы λ, определяемой условием (4.29), имеет два максимума.

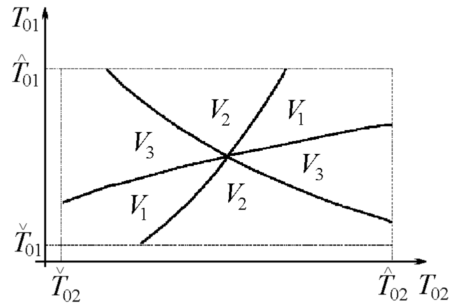


Рис. 4.7. Области постоянства функций контакта рабочего тела с источниками

Т е о р е м а: *Если $f(T_0)$ содержит δ-составляющие, сосредоточенные в точках $T_{0\nu}$ $(\nu = 1, M)$, то найдется такое оптимальное решение, для которого $T^*(T_0)$ может принимать два базовых значения лишь для одной из температур $T_{0\nu}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим множество значений вектора T_0, для которых $\min\limits_{\lambda}\max\limits_{T} L(T_0, T, \lambda)$ имеет два базовых решения, через V_0^* и назовем его множеством расщепления. Условия стационарности L по T позволяют выразить T^* через T_0, λ и перейти к функции $L^*(T_0, \lambda) = q_\Sigma^*(T_0, \lambda) + \lambda\sigma^*(T_0, \lambda)$. На множестве расщепления каждому из двух базовых значений T^* отвечает своя функция $L_1^*(T_0, \lambda)$ и $L_2^*(T_0, \lambda)$ соответственно, причем

$$L_1^*(T_0, \lambda) = L_2^*(T_0, \lambda). \tag{4.33}$$

В силу непрерывности и гладкости функций q_Σ и σ и их монотонности по T_0 и T корни уравнения (4.33) $T_{0\nu}$ дискретные. Если $f(T_0)$ не содержит в этих точках δ-составляющих, множество V_0^* имеет нулевую меру, и расщепление никак не влияет на критерий оптимальности и значение $\overline{\sigma}$.

Если $f(T_0)$ содержит δ-составляющие в точках $T_{0\nu}$ вида $\mu_\nu\delta(T_0 - -T_{0\nu})$ $(\nu = 1, M)$ и в этих точках температура T имеет два базовых значения $T_1(T_0, \lambda)$ и $T_2(T_0, \lambda)$, то конечная часть производства энтропии $\tilde{\sigma}$ приходится на долю множества V_0^*. С учетом (4.29) получим

$$\sum_{\nu=1}^{M} \mu_\nu \left[\gamma_\nu \sigma_1(T_{0\nu}) + (1 - \gamma_\nu)\sigma_2(T_{0\nu})\right] = \tilde{\sigma}. \tag{4.34}$$

Здесь $0 \le \gamma_\nu \le 1$.

Условие (4.34) выделяет плоскость в M-мерном пространстве переменных γ_ν. Наличие «расщепленного» решения говорит о том, что пересечение этой плоскости с единичным кубом со сторонами $[0,1]$ непусто. А значит, найдется ее пересечение и с одним из ребер куба. В точке этого пересечения все множители γ_ν, кроме одного, равны нулю или единице. Один же множитель γ_w принадлежит интервалу $(0,1)$. Это значит, что найдется такое оптимальное решение, для которого температура рабочего тела переключается между двумя базовыми значениями лишь на участке постоянства вектора $T_0 = T_{0w}$.

4.2. Предельный коэффициент полезного действия тепловых, холодильных машин и тепловых насосов заданной мощности

Прямой цикл. Задача о предельном термическом КПД тепловой машины при заданной мощности p_0 эквивалентна задаче о минимальном производстве энтропии в системе. Так как энтропия рабочего тела за цикл не изменяется, производство энтропии определяется ростом энтропии источников. Мы приходим к постановке

$$\sigma = -\overline{\left(\frac{q(T_0,T)}{T_0}\right)} \to \min \Bigg/ \begin{array}{l} \overline{q(T_0,T)} = p_0, \quad T_0 = \{T_{0h}, T_{0c}\}, \\ \overline{(q(T_0,T)/T)} = 0, \quad T > 0. \end{array} \tag{4.35}$$

В этой задаче два усредненных условия, а значит, в принципе возможно три базовых значения температуры T. Однако если для $T_0 = T_{0h}$ и для $T_0 = T_{0c}$ функция Лагранжа, соответствующая задаче (4.35) при любом значении T_0, имеет единственный максимум по T, то базовых значений только два. Одно из них, T_h, соответствует контакту с горячим источником ($T_0 = T_{0h}$), другое, T_c, — контакту с холодным источником ($T_0 = T_{0c}$). При этом

$$\begin{aligned} T_h &= \arg\max_T \left[q(T_{0h},T)\left(\frac{1}{T_{0h}} + \lambda + \frac{\mu}{T}\right) - \lambda p_0 \right], \\ T_c &= \arg\max_T \left[q(T_{0c},T)\left(\frac{1}{T_{0c}} + \lambda + \frac{\mu}{T}\right) - \lambda p_0 \right]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Значения функции Лагранжа в этих базовых точках одинаковы:

$$q(T_{0h},T_h)\left(\frac{1}{T_{0h}} + \lambda + \frac{\mu}{T_h}\right) = q(T_{0c},T_c)\left(\frac{1}{T_{0c}} + \lambda + \frac{\mu}{T_c}\right). \tag{4.37}$$

Кроме того, выполнены усредненные ограничения задачи (4.35)

$$\begin{aligned} &\gamma q(T_{0h},T_h) \;+\; (1 \;-\; \gamma) q(T_{0c},T_c) = p_0, \\ &\gamma \frac{q(T_{0h},T_h)}{T-1} \;+\; (1 \;-\; \gamma)\frac{q(T_{0c},T_c)}{T_c} = 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Уравнения (4.36)–(4.38) позволяют найти пять неизвестных: T_h, T_c, λ, μ и γ. Множитель γ соответствует доле времени контакта рабочего тела с горячим источником и удовлетворяет неравенству $0 < \gamma < 1$.

Для линейного закона теплопередачи решение задачи (4.35) приводит к следующему результату:

$$\eta_{\max} = \max \frac{p_0}{\gamma q(T_{0h}, T_h)} = 1 - \frac{1}{2T_{0h}} \Bigg[\left(T_{0h} \ + \ T_{0c} \right) \ - \ 4\frac{p_0}{k} - \\ - \sqrt{(T_{0h} \ - \ T_{0c})^2 \ + \ \left(4\frac{p_0}{k}\right)^2 \ - \ 8\frac{p_0}{k}\,(T_{0h} \ + \ T_{0c})} \Bigg]. \quad (4.39)$$

Эквивалентный коэффициент теплопередачи k рассчитывается как

$$k = \frac{4k_h k_c}{\left(\sqrt{k_h} + \sqrt{k_c}\right)^2}. \quad (4.40)$$

Выражение вида (4.39) получается и при решении задачи о максимальном КПД при фиксированной мощности для машин с распределенными параметрами рабочего тела. В этом случае

$$k = \frac{4k_h k_c}{k_h + k_c}. \quad (4.41)$$

Нетрудно проверить, что при $p_0 \to 0$ величина $\eta_{\max}$ стремится к КПД Карно, а при $p_0 \to p_{\max}$ она стремится к значению термического КПД Курзона–Альборна (4.40). Оптимальные продолжительности контакта с горячим и холодным источниками относятся друг к другу как

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \sqrt{\frac{k_{0c}}{k_{0h}}}.$$

Обратный цикл. В обратных циклах холодильников и тепловых насосов механическая работа подводится к системе, за счет чего тепло отбирается от холодного и передается горячему источнику. Отличие холодильного цикла от цикла теплового насоса заключается в том, что в первом случае оценкой экономичности служит *холодильный коэффициент* ϵ, равный отношению потока, отбираемого у холодного источника тепла, к затрачиваемой мощности:

$$\epsilon = \frac{q(T_{0c}, T)}{p_0}, \quad (4.42)$$

а во втором случае — *термический коэффициент* или *КПД теплового насоса*, равный отношению потока тепла, передаваемого горячему источнику, к затрачиваемой мощности:

$$\eta = \frac{q(T_{0h}, T)}{p_0}. \quad (4.43)$$

Из энергетического баланса следует, что $\eta = 1 + \epsilon$, поэтому достаточно найти предельное значение холодильного коэффициента. Для обратимого случая между коэффициентом η_k полезного действия тепловой машины, теплового насоса и холодильного цикла существует очевидная связь

$$\eta = \frac{1}{\eta_k}, \quad \epsilon = \frac{1}{\eta_k} - 1.$$

Нетрудно показать [57], что предельному значению холодильного коэффициента соответствует при заданной средней мощности p_0 минимальное значение производства энтропии в системе. Получим задачу, совпадающую с задачей (4.35), с той разницей, что температура рабочего тела не должна принадлежать отрезку $[T_{0c}, T_{0h}]$. При контакте с холодным источником $T < T_{0c}$, а при контакте с горячим $T > T_{0h}$. Последовательность решения этой задачи совершенно аналогична последовательности решения задачи (4.35), поэтому приведем результаты решения для линейного закона теплопереноса:

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2p_0}\left(\sqrt{p_0^2 + \frac{k(T_{0h}+T_{0c})}{2}p_0 + \frac{k^2(T_{0h}-T_{0c})^2}{16}} - p_0 - \frac{k(T_{0h}-T_{0c})}{4}\right), \quad (4.44)$$

Температуры рабочего тела при передаче тепла горячему источнику и при отборе тепла у холодного источника равны

$$\begin{aligned} T_h &= T_{0h} + \frac{T_{0h} - T_{0c}}{4}\left(\sqrt{(1+\xi)(1+\xi\delta^2)} - 1 - \xi\delta\right), \\ T_c &= T_{0c} - \frac{T_{0h} - T_{0c}}{4}\left(\sqrt{(1+\xi)(1+\xi\delta^2)} - 1 + \xi\delta\right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Здесь $\xi = p_0/p_{\max}$ — отношение затрачиваемой мощности к максимальной мощности тепловой машины,

$$\delta = \frac{\sqrt{T_{0h}} - \sqrt{T_{0c}}}{\sqrt{T_{0h}} + \sqrt{T_{0c}}},$$

а эквивалентный коэффициент теплопереноса k вычисляется так же, как и в задаче о предельном термическом КПД прямого цикла (4.40).

С ростом затрачиваемой мощности p_0 интенсивность отбора тепла в холодильном цикле и подачи тепла горячему источнику монотонно возрастает, т.е. у обратных необратимых циклов нет ограничения по затрачиваемой мощности, но их коэффициенты полезного действия монотонно падают, стремясь к нулю, когда мощность стремится к бесконечности.

В [57] рассмотрена та же задача для других законов теплопереноса.

4.3. Предельные возможности теплomеханических систем с источниками конечной емкости

Рассмотрим две задачи о предельных возможностях тепловой машины при ограниченной продолжительности цикла τ и конечных теплоемкостях горячего источника c_1 и холодного c_2. Такие циклы обычно называют *циклами Лоренца*. Будем предполагать известными температуры этих источников до начала их контакта с рабочим телом T_{01}^0 и T_{02}^0, а также законы теплопередачи от горячего и холодного источников к рабочему телу $q^h(T_{01}, T)$ и $q^c(T_{02}, T)$. Состояние рабочего тела будем характеризовать энтропией S и внутренней энергией E, которые изменяются в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\dot{S} = \frac{q(T_0, T)}{T}, \quad \dot{E} = q(T_0, T) - p(t). \tag{4.46}$$

Тепловой поток q в этих уравнениях равен q^h или q^c в зависимости от того, с каким источником — горячим или холодным — находится в контакте рабочее тело; $p(t)$ — мощность, отбираемая от рабочего тела.

На переменные состояния наложены условия цикличности:

$$S(\tau) - S(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\tau \frac{q(T_0, T)}{T} dt = 0, \tag{4.47}$$

$$E(\tau) - E(0) = 0 \Rightarrow \int_0^\tau q(T_0, T) dt = \int_0^\tau p dt = A. \tag{4.48}$$

Не имеет смысла считать параметром, подлежащим оптимальному выбору, продолжительность τ для циклов типа Лоренца, так как со временем температура горячего источника падает, а холодного — растет, и при оптимальном выборе величины τ продолжительности цикла оказалась бы сколь угодно близкой к нулю. Оптимальные показатели цикла стремились бы при этом к показателям необратимых циклов типа Карно, рассмотренных выше. Будем, таким образом, считать величину τ фиксированной.

Ниже решены две задачи, определяющие предельные возможности тепловых машин с источниками ограниченной емкости:

а) задача о максимальной работе, или, что то же самое, о максимальной средней мощности, так как $A_{\max} = \overline{p_{\max}}\tau$. Как следует из (4.70), максимальной работе соответствует критерий оптимальности вида

$$I = \int_0^\tau q(T_0, T)\, dt = Q^h - Q^c \to \max; \tag{4.49}$$

б) задача о предельном КПД при заданной работе

$$\eta = \frac{A}{Q^h} = 1 - \frac{Q^c}{Q^h} \to \max \tag{4.50}$$

при условии

$$Q^h - Q^c = A_0. \tag{4.51}$$

Требуется найти такой закон изменения температуры рабочего тела во времени $T^*(t)$, для которого функционалы (4.40) или (4.50) достигают максимума. В первой задаче — при условиях (4.46)–(4.48), во второй к перечисленным условиям следует добавить равенство (4.51).

Для обеих задач примем следующую последовательность решения:

— рассмотрим контакт рабочего тела с горячим источником (горячий полуцикл), считая его продолжительность, температуру источника в конце полуцикла и приращение энтропии рабочего тела неопределенными параметрами;

— аналогичным образом рассмотрим холодный полуцикл, в котором рабочее тело отдает тепло холодному источнику;

— состыкуем результаты оптимизации полуциклов, выбирая неопределенные параметры так, чтобы добиться оптимума выбранного критерия.

Получение максимальной работы. Так как на стадии оптимизации полуциклов начальные и конечные температуры источников предполагаются фиксированными, то максимальной работе соответствует в таких системах минимальная скорость роста энтропии.

Горячий полуцикл. Обозначим время горячего полуцикла через $\overline{t}_1$, а температуру горячего источника в конце полуцикла — через $\overline{T}_{01} = T_{01}(\overline{t}_1)$. Фиксация $\overline{T}_{01}$ при заданной начальной температуре T_{01}^0 эквивалентна заданию количества тепла Q^h, переданного рабочему телу. Задача имеет вид

$$\Delta S_1 = \int\limits_0^{\overline{t}_1} \frac{q^h(T_{01}, T)}{T}\, dt \to \min$$

при условиях

$$\int\limits_0^{\overline{t}_1} q^h(T_{01}, T)\, dt = Q^h, \quad \dot{T}_{01} = -\frac{q^h(T_{01}, T)}{c_1}, \quad T_{01}(0) = T_{01}^0. \tag{4.52}$$

Здесь вместо приращения энтропии системы минимизируется приращение энтропии рабочего тела, что не влияет на оптимальное решение.

Холодный полуцикл. Аналогично горячему полуциклу приходим к постановке задачи

$$\Delta S_2 = \int_0^{\overline{t}_2} \frac{q^c(T_{02}, T)}{T}\, dt \to \max$$

при условиях

$$\int_0^{\overline{t}_2} q^c(T_{02}, T)\, dt = Q^c, \quad \dot{T}_{02} = -\frac{q^c(T_{02}, T)}{c_2}, \quad T_{02}(0) = T_{02}^0. \tag{4.53}$$

В холодном полуцикле, в отличие от горячего, требуется максимизировать приращение энтропии рабочего тела, так как знак теплового потока отрицателен и минимуму прироста энтропии системы соответствует максимум ΔS_2.

Каждая из поставленных задач представляет собой задачу об оптимальном тепловом контакте, и для них справедливо условие минимальной диссипации теплообмена, которое для линейного закона теплопередачи приводит к равенству $T = T_{01}m_1$ в горячем полуцикле $(m_1 < 1)$, и $T = T_{02}m_2$ — в холодном полуцикле $(m_2 < 1)$. Ниже будем рассматривать линейный закон теплопередачи.

С учетом пропорциональности температур источника и рабочего тела получим для горячего полуцикла $q^h = k_1(1-m_1)T_{01} = M_1T_{01}$, для холодного полуцикла $q^c = k_2(1-m_2)T_{02} = -M_2T_{02}$.

Минимальное приращение энтропии рабочего тела в i-м полуцикле

$$\overline{S}_i^* = \overline{t}_i \frac{k_i}{m_i}(1 - m_i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Стыковка полуциклов. Перепишем задачу о максимальной работе, считая m_1 и m_2 наряду с $\overline{t}_1$ и $\overline{t}_2$ неизвестными параметрами. Получим

$$A = Q^h - Q^c = c_1(T_{01}^0 - \overline{T}_{01}) + c_2(T_{02}^0 - \overline{T}_{01}) \to \max_{m_i, \overline{t_i}} \tag{4.54}$$

при условиях

$$\overline{t}_1 + \overline{t}_2 = \tau, \quad \overline{t}_i > 0, \ \ i \in \{1, 2\},$$

$$\Delta\overline{S}_1^* + \Delta\overline{S}_2^* = \overline{t}_1 \frac{k_1}{m_1}(1 - m_1) + \overline{t}_2 \frac{k_2}{m_2}(1 - m_2) = 0. \tag{4.55}$$

Выразим из решения дифференциальных уравнений (4.52) и (4.53) температуры источников в конце полуциклов через их продолжительности:

$$\overline{T}_{01} = T_{01}^0 \exp\left(-\frac{M_1}{c_1}\overline{t}_1\right), \quad \overline{T_{02}} = T_{02}^0 \exp\left(\frac{M_2}{c_2}\overline{t}_2\right),$$

что позволяет переписать задачу (4.54), (4.55) как

$$I = c_1(T_{01}^0 - T_{01}) + c_2(T_{02}^0 - \overline{T}_{02}) \to \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 + \bar{t}_2 &= \frac{c_1}{M_1} \ln \frac{T_{01}^0}{\overline{T}_{01}} + \frac{c_2}{M_2} \ln \frac{\overline{T}_{02}}{T_{02}^0} = \tau, \\ \Delta\overline{S}_1 + \Delta\overline{S}_2 &= \frac{c_1 k_1}{k_1 - M_1} \ln \frac{T_{01}^0}{\overline{T}_{01}} - \frac{c_2 k_2}{k_2 + M_2} \ln \frac{\overline{T}_{02}}{T_{02}^0} = 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Для краткости обозначим относительные изменения температуры источников как $\Delta_1 = \overline{T}_{01}/T_{01}^0$, $\Delta_2 = \overline{T}_{02}/T_{02}^0$ $(\Delta_1 < 1,\ \Delta_2 > 1)$ и запишем функцию Лагранжа этой задачи, отбросив постоянные слагаемые:

$$L = c_1 T_{01}^0 \Delta_1 + c_2 T_{02}^0 \Delta_2 + \Lambda_1 \left(\frac{c_2}{M_2} \ln \Delta_2 - \frac{c_1}{M_1} \ln \Delta_1 \right) - \\ - \Lambda_2 \left(\frac{c_1 k_1}{k_1 - M_1} \ln \Delta_1 + \frac{c_2 k_2}{k_2 + M_2} \ln \Delta_2 \right).$$

Условия ее стационарности по искомым переменным Δ_1, Δ_2, M_1, M_2 приводят к уравнениям

$$T_{01}^0 - \frac{\Lambda_1}{M_1 \Delta_1} - \frac{\Lambda_2 k_1}{\Delta_1 (k_1 - M_1)} = 0, \quad T_{02}^0 + \frac{\Lambda_1}{M_2 \Delta_2} - \frac{\Lambda_2 k_2}{\Delta_2 (k_2 + M_2)} = 0,$$

$$\frac{\Lambda_1}{M_1^2} - \frac{\Lambda_2 k_1}{(k_1 - M_1)^2} = 0, \quad \frac{\Lambda_1}{M_2^2} - \frac{\Lambda_2 k_2}{(k_2 + M_2)^2} = 0.$$

Из двух последних равенств получаем

$$\frac{M_2}{M_1} = \pm \frac{\sqrt{k_1}(k_2 + M_2)}{\sqrt{k_2}(k_1 - M_1)} \Rightarrow M_1 = \pm \frac{M_2 k_1 \sqrt{k_2}}{k_2 \sqrt{k_1} + M_2 (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}, \tag{4.57}$$

а условие цикличности по энтропии (4.56) примет вид

$$c_1 k_1 (k_2 + M_2) \ln \Delta_1 = -c_2 k_2 (k_1 - M_1) \ln \Delta_2.$$

Так как в этом равенстве знак левой части отрицательный ($\ln \Delta_1 < 0$), то разность $k_1 - M_1$ положительна, а значит, положительна и правая часть в (4.57), так что

$$\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} = -\frac{M_1 r_2 \ln \Delta_2}{M_2 r_1 \ln \Delta_1} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}.$$

Суммарная продолжительность цикла $\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \tau$, поэтому

$$\bar{t}_1 = \tau \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}, \quad \bar{t}_2 = \tau \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}}.$$

Выразим Δ_1 и Δ_2 через $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$:

$$\Delta_1 = \exp\left(-\bar{t}_1 \frac{M_1}{c_1} \right), \ \Delta_2 = \exp\left(\bar{t}_2 \frac{M_2}{c_2} \right) \tag{4.58}$$

и подставим их в критерий оптимальности, учтя, что согласно (4.57) M_1 есть функция M_2. Получим

$$I = T_1^0 r_1 \left[1 - \exp\left(-\bar{t}_1 \frac{M_1(M_2)}{c_1}\right)\right] + T_2^0 r_2 \left[1 - \exp\left(\bar{t}_2 \frac{M_2}{c_2}\right)\right] \to \max .$$

Условия максимума этого выражения по M_2 с учетом (4.56) и (4.57) приводят к уравнению

$$\frac{T_{01}^0}{T_{02}^0} = \left[1 + \frac{M_2(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}{k_2\sqrt{k_1}}\right]^2 \times$$
$$\times \exp\left\{M_2\left[\frac{\bar{t}_2}{c_2} + \frac{\bar{t}_1}{c_1}\frac{k_1\sqrt{k_1}}{k_2\sqrt{k_1} + M_2(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})}\right]\right\}.$$

Так как правая часть этого уравнения при $M_2 > 0$ монотонно зависит от M_2, то оно имеет единственное решение M_2^*. Из (4.57) определяем M_1^*, из (4.58) — Δ_1^* и Δ_2^*, а по ним $\overline{T}_i^* = \Delta_i^* T_i^0$, $i = 1, 2$. Максимальная работа подсчитывается согласно (4.54), а соответствующий ей КПД —

$$\eta(A_{\max}) = \frac{A_{\max}(\bar{t})}{c_1(T_1^0 - \overline{T}_1^*)}.$$

Предельный КПД при заданной работе. Используем для решения этой задачи тот же подход, что и в задаче о максимальной работе. При этом подзадачи оптимизации горячего и холодного полуциклов не изменяются, так как Q^h и Q^c в них считаются фиксированными. Условие же (4.51) необходимо учесть на стадии стыковки полуциклов. Ввиду этого в каждом из полуциклов температуры источника и рабочего тела пропорциональны, и, как следствие, $q^h = M_1 T_{01}$, $q^c = -M_2 T_{02}$. Коэффициенты пропорциональности M_1 и M_2, естественно, иные, чем в задаче о максимальной работе.

С учетом заданной работы максимуму КПД соответствует минимум тепла Q^h, отданного горячим источником, и задача стыковки полуциклов запишется как

$$Q^h = c_1 T_{01}^0 k_1 \to \min_{M_i, T_{0i}}, \quad i = 1, 2,$$

при условиях

$$\begin{gathered}
\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = -\frac{c_1}{M_1}\ln\Delta_1 + \frac{c_2}{M_2}\ln\Delta_2 = \bar{t}, \\
\overline{S}_1 + \overline{S}_2 = \frac{c_1 k_1}{k_1 - M_1}\ln\Delta_2 + \frac{c_2 k_2}{k_2 + M_2}\ln\Delta_2 = 0, \\
Q^h - Q^c = c_1 T_{01}^0(1 - \Delta_1) + c_2 T_{02}^0(1 - \Delta_2) = A_0.
\end{gathered} \tag{4.59}$$

Здесь, как и выше, $\Delta_1 = \overline{T}_{01}/T_{01}^0$, $\Delta_2 = \overline{T}_{02}/T_{02}^0$. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L_1 = c_1 T_{01}^0 \Delta_1 + \Lambda_1 \left(\frac{c_2}{M_2} \ln \Delta_2 - \frac{c_1}{M_1} \ln \Delta_1 \right) - \\ - \Lambda_2 \left(\frac{c_1 k_1 \ln \Delta_1}{k_1 - M_1} + \frac{c_2 k_2 \ln \Delta_2}{k_2 + M_2} \right) + \Lambda_3 [c_1 T_{01}^0 (1 - \Delta_1) + c_2 T_{02}^0 (1 - \Delta_2)].$$

Сравнение этой функции с функцией L в задаче о максимальной работе показывает, что

$$\frac{\partial L_1}{\partial M_1} = \frac{\partial L}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial L_1}{\partial M_2} = \frac{\partial L}{\partial M_2} = 0.$$

А так как из этих условий и из равенства (4.56), которое также остается без изменений в нашей задаче, следуют формулы (4.58), то продолжительности полуциклов такие же, как и в задаче о максимальной работе. Оптимальные значения M_1 и M_2 определяются в данном случае из совместного решения уравнения (4.57), которое остается справедливым, и последнего из условий (4.59), которое после исключения Δ_1 и Δ_2 примет вид

$$c_1 T_{01}^0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\overline{t}_1 M_1}{c_1} \right) \right] + c_2 T_{01}^0 \left[1 - \exp\left(\frac{\overline{t}_2 M_2}{c_2} \right) \right] = A_0;$$

M_1 и M_2 оказываются несколько меньше, чем в задаче о максимальной работе.

Тепловая машина с несколькими источниками конечной емкости. При решении этой задачи мы предполагаем, что рабочее тело имеет одну и ту же температуру при контакте со всеми источниками, у которых тепло отбирается, и другую, но также одинаковую при контакте с источниками, которым тепло передается. Если это условие снять, то максимальная работа, которую можно извлечь из системы, возрастет. Задача об оценке максимально возможной работоспособности системы рассмотрена в последнем пункте этой главы.

Задача о предельных возможностях термодинамических систем с несколькими источниками конечной емкости существенно сложнее рассмотренных выше задач с одним или двумя источниками, так как для каждого полуцикла замена независимой переменной времени на температуру одного из источников не упрощает задачи. Условия ее оптимальности могут быть записаны в форме принципа максимума Понтрягина.

Постановка задачи для фиксированной длительности τ примет вид

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau} u_i q_i (T_{0i}, T) dt \to \max_{u_i, T} \tag{4.60}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{0}^{\tau} \frac{1}{T} u_i q_i(T_{0i}, T) dt = \Delta S, \tag{4.61}$$

$$\dot{T}_{0i} = -\frac{u_i}{c_i} q_i(T_{0i}, T), \quad T_{0i}(0) = T_{0i}^0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.62}$$

Функция Гамильтона для этой задачи

$$H = \sum_{i=1}^{N} u_i q_i(T_{0i}, T) \left[\psi_0 - \frac{\lambda}{T} - \frac{\psi_i}{c_i} \right].$$

В предположении невырожденного решения будем считать $\psi_0 = 1$. Уравнения для сопряженных переменных:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial T_{0i}} = -u_i \frac{\partial q_i}{\partial T_{0i}} - \left(1 - \frac{\lambda}{T} - \frac{\psi_i}{c_i} \right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.63}$$

В силу того, что граничные условия для температур источников свободны,

$$\psi_i(\tau) = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.64}$$

Из условия максимума H по функциям контакта u_i имеем

$$u_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \operatorname{sign} q_i = \operatorname{sign} \left(1 - \dfrac{\lambda}{T} - \dfrac{\psi_i}{c_i} \right), \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{sign} q_i = -\operatorname{sign} \left(1 - \dfrac{\lambda}{T} - \dfrac{\psi_i}{c_i} \right). \end{cases} \tag{4.65}$$

Таким образом, множество всех источников, с которыми контактирует рабочее тело, можно разделить на «горячие», передающие тепло рабочему телу, и «холодные», отводящие тепло от рабочего тела. Рабочее тело контактирует с i-м «горячим» источником, когда его температура меньше $T_{0i}(t)$ и больше, чем $\lambda/(1 - \psi_i/c_i)$. Аналогично, оно отдает тепло j-му «холодному» источнику, когда его температура больше $T_{0j}(t)$ и меньше $\lambda/(1 - \psi_i/c_i)$. С учетом условий (4.54) эти требования в момент τ совпадают с условиями оптимального контакта для источников бесконечной емкости (4.21). Условия оптимальности приводят к соотношениям

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \left[\frac{\partial q_i}{\partial T} \left(1 - \frac{\lambda}{T} - \frac{\psi_i}{c_i} \right) + q_i(T_{0i}, T) \frac{\lambda}{T^2} \right] = 0; \tag{4.66}$$

для ньютоновского (линейного) закона теплопередачи $q_i(T_{0i}, T) = k_i(T_{0i} - T)$ это уравнение имеет вид

$$T^2 = \lambda \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} u_i k_i T_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} u_i k_i (1 - \psi_i/c_i)}.$$

Так же, как и для случая двух источников, задача о максимальной работе тепловой машины с несколькими источниками решается посредством разбиения интервала $(0, \tau)$ на два подынтервала, на каждом из которых рабочее тело контактирует только с «горячими» или только с «холодными» источниками. Оптимальные температуры рабочего тела и функции контакта на этих подынтервалах рассчитываются путем решения системы уравнений (4.61)–(4.66).

4.4. Теплотрансформаторы

Наряду с классическими задачами о предельных термодинамических характеристиках прямых и обратных циклов, использующих два источника тепла, важной задачей технической термодинамики является исследование схем с тремя источниками, имеющими температуры T_{01}, T_{02}, T_{03}, связанные неравенствами $T_{01} < T_{02} < T_{03}$. Такие схемы названы в [40] *теплотрансформаторами*. Если средняя из температур источников T_{02} совпадает с температурой окружающей среды, то между источниками с температурами T_{03} и T_{02} реализуется прямой цикл, а между источниками с температурами T_{01} и T_{02} — обратный (рис. 4.8),

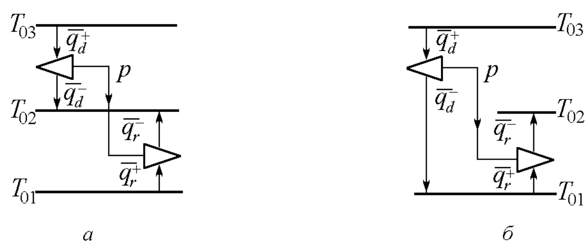


Рис. 4.8. Схемы теплоиспользующих холодильных машин с малым (*а*) и большим (*б*) перепадами температур в прямом цикле

причем мощность p, получаемая в прямом цикле, используется для отбора потока тепла $\overline{q}_r^+$ в обратном холодильном цикле. Коэффициентом трансформации тепла в этом случае является отношение потока тепла $\overline{q}_r^+$, отобранного у холодильника, к потоку тепла $\overline{q}_d^+$ (индексы: direct — прямой, reverse — обратный), отбираемому у горячего источника в прямом цикле:

$$K_{\text{тх}} = \frac{\overline{q}_r^+}{\overline{q}_d^+}. \tag{4.67}$$

Иногда это отношение называют коэффициентом трансформации тепла теплоиспользующей холодильной машины или коэффициентом тепло–холод.

В том случае, когда интенсивность тепловых потоков, как и мощность p прямого цикла, сколь угодно малы или коэффициенты теплопередачи в прямом и обратном циклах бесконечно велики, передача тепла от источников к рабочему телу в каждом цикле протекает обратимо, и коэффициент трансформации принимает значение, равное произведению термического КПД Карно $\eta_{\text{к}}$ прямого цикла на холодильный коэффициент ϵ обратного:

$$K_{\text{тх}} = \eta_{\text{к}}\,\epsilon = \frac{T_{03} - T_{02}}{T_{03}} \frac{T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{T_{03}/T_{02} - 1}{T_{03}/T_{02}} \frac{T_{01}/T_{02}}{1 - T_{01}/T_{02}}. \qquad (4.68)$$

Выражение (4.68) характеризует относительную ценность тепла, отбираемого от источника с температурой T_{03}, и тепла, отбираемого от холодильника с температурой T_{01}, в зависимости от отношений этих температур к температуре окружающей среды.

Однако обратимое значение коэффициента $K_{\text{тх}}$ может оказаться сильно завышенным, если задана интенсивность тепловых потоков, или, что то же самое, мощность p, а коэффициенты теплопереноса в прямом и обратном циклах ограничены. Кроме того, важно получить зависимость $K_{\text{тх}}$ от кинетики теплопереноса.

Теплоиспользующая холодильная машина может иметь и структуру, показанную на рис. 4.8, *б*. При этом прямой цикл реализуется между источниками с температурами T_{03} и T_{01}, а обратный, как и ранее, — между источниками с температурами T_{01} и T_{02}. Коэффициент трансформации такой машины имеет вид

$$K_{\text{тх}} = \frac{\overline{q}_r^+ - \overline{q}_d^-}{\overline{q}_d^+} = \frac{\overline{q}_r^+}{\overline{q}_d^+} - \frac{\overline{q}_d^-}{\overline{q}_d^+}. \qquad (4.69)$$

В обратимом случае первое из слагаемых в правой части равенства (4.69) для схемы, приведенной на рис. 4.8, *б*, равно

$$\frac{\overline{q}_r^+}{\overline{q}_d^+} = \frac{1 - T_{02}/T_{03}}{T_{02}/T_{01} - 1},$$

а второе

$$\frac{\overline{q}_d^-}{\overline{q}_d^+} = \frac{T_{01}}{T_{03}}.$$

После подстановки этих выражений в (4.69) получим то же значение обратимого коэффициента трансформации, что и для схемы, показанной на рис. 4.8, *а*.

Однако нетрудно показать, что при учете необратимости процессов предельный коэффициент трансформации тепла в схеме, изображенной на рис. 4.8, *а*, выше. Поэтому далее рассмотрена только такая схема теплоиспользующей холодильной машины.

Задача оценки коэффициентов трансформации тепла возникает и применительно к тепловым насосам. В этом случае температура окружающей среды равна T_{01}. Прямой цикл организуется между источниками с температурами T_{03} и T_{02}, а обратный цикл — между источниками с температурами T_{01} и T_{02}. При этом *коэффициент трансформации тепла в тепло* есть

$$K_{\text{тт}} = \frac{\overline{q}_d^- + \overline{q}_r^-}{\overline{q}_d^+} = \frac{\overline{q}_d^-}{\overline{q}_d^+} + \frac{\overline{q}_r^-}{\overline{q}_d^+}.$$

Для обратимого случая получаем оценку

$$K_{\text{тт}} = \eta_{\text{к}}\,\varphi = \left(1 - \frac{T_{01}}{T_{03}}\right)\left(1 - \frac{T_{01}}{T_{02}}\right), \tag{4.70}$$

где φ — термический коэффициент теплового насоса. Действительно, в обратимом случае

$$\frac{\overline{q}_d^-}{\overline{q}_d^+} = \frac{T_{02}}{T_{03}}, \qquad \frac{\overline{q}_r^-}{\overline{q}_d^+} = \frac{1 - T_{02}/T_{03}}{1 - T_{01}/T_{02}}.$$

При суммировании этих равенств получим формулу (4.70). Между коэффициентами $K_{\text{тх}}$ и $K_{\text{тт}}$ существует связь

$$K_{\text{тт}} = 1 + K_{\text{тх}},$$

поэтому оптимальному выбору структуры и параметров схем с холодильными машинами соответствуют оптимальные характеристики и для схем с тепловыми насосами.

Учесть такие факторы необратимости, как законы теплопередачи, заданная интенсивность процессов, и получить более реалистические, чем (4.68) и (4.70), оценки коэффициентов трансформации тепла позволяют результаты работ по термодинамике при конечном времени.

Постановки задач и характеристики оптимальных необратимых циклов. Приведем точные постановки упомянутых выше задач. Будем предполагать, что теплообмен между источниками и рабочими телами как в прямом, так и в обратном циклах совершается необратимо в соответствии с линейными законами теплопереноса:

$$\begin{aligned} &q_d^+(T_{03}, T_{\text{р}d}^+) = k_d^+(T_{03} - T_{\text{р}d}^+), \quad q_d^-(T_{02}, T_{\text{р}d}^-) = k_d^-(T_{\text{р}d}^- - T_{02}),\\ &q_r^-(T_{02}, T_{\text{р}r}^-) = k_r^-(T_{\text{р}r}^- - T_{02}), \quad q_r^+(T_{01}, T_{\text{р}r}^+) = k_r^+(T_{01} - T_{\text{р}r}^+). \end{aligned} \tag{4.71}$$

В формулах (4.71) фигурируют потоки тепла q_d^+, q_d^-, q_r^+, q_r^- в момент контакта рабочего тела с источниками. Они отличаются от средних потоков тепла $\overline{q}_d^+$, $\overline{q}_d^-$, $\overline{q}_r^+$ и $\overline{q}_r^-$ учетом доли времени контакта γ с соответствующим источником. Так,

$$\overline{q}_d^+ = q_d^+\gamma_d^+, \quad \overline{q}_r^- = q_r^-\gamma_r^- \quad \text{и т.д.},$$

T_{pd} и T_{pr} — температуры рабочих тел в прямом и обратном циклах соответственно при контакте с тем или иным источником. Величины коэффициентов теплопередачи в законах теплопереноса (4.71) определяются свойствами и величиной поверхностей контакта, а также свойствами рабочих тел. Косвенно эти коэффициенты отражают размеры машины.

Выше показано, что в оптимальных необратимых циклах, т.е. в циклах, соответствующих предельным значениям термического КПД при заданной величине мощности p, температуры рабочего тела должны быть постоянными в течение всего времени контакта с источником.

Так как температуры источников T_{01}, T_{02} и T_{03} считаем заданными, как и коэффициенты теплопередачи k, то оптимальные температуры рабочего тела определяются условиями (4.71) через тепловые потоки q, которые для оптимальных необратимых циклов равны (см. п. 4.2):

а) в прямом цикле

$$\begin{aligned} q_d^+ &= \frac{k_d(T_{03}-T_{02})}{4}\left[1+\xi_d\delta_d-\sqrt{(1-\xi_d)(1-\xi_d\delta_d^2)}\right], \\ q_d^- &= \frac{k_d(T_{03}-T_{02})}{4}\left[1-\xi_d\delta_d-\sqrt{(1-\xi_d)(1-\xi_d\delta_d^2)}\right]. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Здесь k_d — эквивалентный коэффициент теплопередачи прямого цикла

$$k_d = \frac{k_d^+ k_d^-}{\left(\sqrt{k_d^+}+\sqrt{k_d^-}\right)^2};$$

ξ_d — коэффициент, характеризующий интенсивность процессов,

$$\xi_d = \frac{4p}{k_d\left(\sqrt{T_{03}}-\sqrt{T_{02}}\right)^2},$$

$$\delta_d = \frac{\sqrt{T_{03}}-\sqrt{T_{02}}}{\sqrt{T_{03}}+\sqrt{T_{02}}}.$$

С учетом значений долей времени контакта рабочего тела с источниками (см. п. 4.2) предельное значение термического КПД необратимого цикла

$$\eta = \frac{p}{q_d^+} = 1-\sqrt{\frac{k_d^+}{k_d^-}\,\frac{q_d^-}{q_d^+}}, \tag{4.73}$$

где q_d^+ и q_d^- имеют вид (4.72);

б) в обратном цикле

$$q_r^+ = \frac{k_r(T_{02}-T_{01})}{4}\left[\sqrt{(1-\xi_r)(1+\xi_r\delta_r^2)}-1-\xi_r\delta_r\right],$$
$$q_r^- = \frac{k_r(T_{02}-T_{01})}{4}\left[\sqrt{(1-\xi_r)(1+\xi_r\delta_r^2)}-1+\xi_r\delta_r\right]. \tag{4.74}$$

Здесь эквивалентный коэффициент теплопередачи обратного цикла

$$k_r = \frac{k_r^+k_r^-}{\left(\sqrt{k_r^+}+\sqrt{k_r^-}\right)^2},$$

$$\xi_r = \frac{4p}{k_r\left(\sqrt{T_{02}}-\sqrt{T_{01}}\right)^2},$$

$$\delta_r = \frac{\sqrt{T_{02}}-\sqrt{T_{01}}}{\sqrt{T_{02}}+\sqrt{T_{01}}}.$$

Предельное значение холодильного коэффициента в необратимом цикле, потребляющем мощность p:

$$\epsilon = \frac{\overline{q_r^+}}{p} = \frac{q_r^+\sqrt{k_r^-}}{q_r^-\sqrt{k_r^+}-q_r^+\sqrt{k_r^-}}. \tag{4.75}$$

Параметры оптимального необратимого цикла для теплового насоса те же, что и для холодильной машины, а соответствующий предельный термический коэффициент теплового насоса

$$\varphi = 1+\epsilon = \frac{\overline{q_r^-}}{p} = \frac{q_r^-\sqrt{k_r^+}}{q_r^-\sqrt{k_r^+}-q_r^+\sqrt{k_r^-}}.$$

Отметим, что величина p в прямом цикле (см. табл. 4.3) не может превышать некоторого предельного значения $p_{\max}$, причем при $p = p_{\max}$ коэффициент ξ_d в формулах (4.72) оказывается равным единице, а коэффициент ξ_r в формулах (4.74) определяется выражением

$$\xi_r = \frac{k_d}{k_r}\left[\frac{\sqrt{T_{03}}-\sqrt{T_{02}}}{\sqrt{T_{02}}-\sqrt{T_{01}}}\right]^2.$$

Ограничение на мощность прямого цикла определяет и ограничение на производительность теплоиспользующих обратных циклов.

Приведенные выше соотношения позволяют рассчитать предельные возможности установок и соответствующие предельные значения коэффициентов трансформации тепла.

Предельные коэффициенты трансформации тепла в необратимых термодинамических процессах. Коэффициент трансформации тепло–холод, как следует из (4.73), (4.75), равен

$$K_{\text{тх}} = \eta\epsilon = \frac{q_d^+\sqrt{k_d^-} - q_d^-\sqrt{k_d^+}}{q_d^+\sqrt{k_d^-}}\;\frac{q_r^+\sqrt{k_r^-}}{q_r^-\sqrt{k_r^+} - q_r^+\sqrt{k_r^-}}. \qquad (4.76)$$

Это выражение после подстановки в него тепловых потоков прямого и обратного циклов определяет предельные возможности превращения тепловой энергии источника с температурой T_{02} в энергию, отбираемую у холодильника с температурой T_{01}. При этом заданием мощности p учитывается хладопроизводительность установки, как и влияние

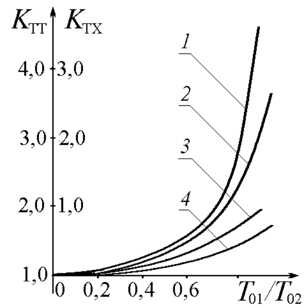


Рис. 4.9. Коэффициенты трансформации тепла в тепло $K_{\text{тт}}$ и тепла в холод $K_{\text{тх}}$ в зависимости от отношения температур T_{01}/T_{02} для значений ξ_d: *1* — 0; *2* — 0,2; *3* — 0,6; *4* — 1,0

коэффициентов теплопередачи. На рис. 4.9 показаны результаты расчетов коэффициента $K_{\text{тх}}$ по формуле (4.76). При этом оказалось удобным перейти к безразмерным переменным T_{03}/T_{02}, T_{01}/T_{02} и k_d/k_r. Величины коэффициентов k_d^+ и k_d^- были приняты при расчетах одинаковыми, как и k_r^+ и k_r^-. Коэффициент трансформации высокопотенциального тепла в низкопотенциальное $K_{\text{тт}}$ показан на тех же графиках. Его шкала в соответствии с приведенным выше соотношением сдвинута на единицу. Увеличение отношения T_{03}/T_{02} при постоянной относительной мощности прямого цикла ξ_d ведет к росту мощности p и, как следствие, к росту необратимости в обратных циклах, что уменьшает коэффициенты трансформации.

Глава 5

ПРОЦЕССЫ РАЗДЕЛЕНИЯ

Процессы разделения являются едва ли не самыми энергоемкими и очень разнообразными по своему конструктивному исполнению: мембранные, абсорбционно- и адсорбционно-десорбционные процессы, ректификация, центрифугирование, выпарка, вымораживание и пр. Оценка минимальной энергии, потребной для разделения смеси того или иного состава, представляет большой интерес. Такую оценку работы разделения дают методы обратимой термодинамики, однако обратимые оценки очень грубы, поэтому важно приблизить оценки к реальности за счет учета конечной продолжительности процессов или заданния их интенсивности, что позволит учесть значения коэффициентов тепло- и массопереноса и связанные с их увеличением затраты.

В предисловии ко второму тому своего курса технической термодинамики [10] Ф. Бошнякович писал: «Оценка тепловой энергии, ежегодно теряемой вследствие необратимости в химической и металлургической промышленности, должна была бы дать ужасающий результат. Задачу будущего для этих видов промышленности можно хорошо выразить предупреждением: борьба с необратимостью».

Как сам Бошнякович, так и его последователи, развивавшие эксергетический анализ процессов [12], оценивали необратимость через потери эксергии по известным параметрам входных и выходных потоков, не выделяя среди этих потерь тех, которые неизбежно возникают при данной производительности установки и при фиксированных ее размерах (коэффициентах переноса). Методы термодинамики при конечном времени позволяют разбить потери от необратимости на две категории: неизбежные и избыточные. Первые можно уменьшить, только увеличив коэффициенты переноса или уменьшив производительность, вторые же связаны с несовершенной термодинамической организацией процесса. Именно их следует избегать при проектировании установки.

Оценки затрат энергии на процессы разделения с учетом неизбежных необратимых потерь не только количественно отличаются от обратимых, но имеют и качественное отличие. Они, например, не стремятся к нулю, когда концентрация одного из компонентов в разделяемой смеси стремится к единице (бедные смеси).

5.1. Термодинамические балансы процесса разделения и связь затрат энергии с производством энтропии

Рассмотрим систему разделения потока смеси с интенсивностью g_0, составом x_0, температурой T_0 и давлением P_0 на два потока с параметрами g_i, x_i, T_i, P_i $(i = 1, 2)$, показанную на рис. 5.1. К установке может подводиться поток тепла q_+ при температуре T_+, отводиться поток тепла q_- при температуре T_-, а также затрачиваться механическая работа с интенсивностью p.

В установках центрифугирования, мембранного разделения, в циклах адсорбции-десорбции, работающих за счет изменения давления, затрачивается только работа (механическое разделение), в процессах абсорбционно-десорбционных, ректификации и др. — только тепло (термическое разделение). В некоторых случаях число отводимых и подводимых потоков может быть больше, однако в этих случаях можно, как правило, представить систему разделения как соединение

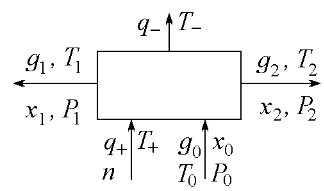


Рис. 5.1. Расчетная структура, соответствующая термодинамическим балансам процесса разделения

отдельных блоков, каждый из которых имеет структуру, представленную на рис. 5.1.

Термическое разделение. Запишем уравнения термодинамических балансов для системы термического разделения $(p = 0)$, считая, что каждый из векторов $x_i = (x_{i1}, ..., x_{ij}, ..., x_{ik})$, $i = 0, 1, 2$, состоит из k компонент, каждая из которых представляет собой мольную долю j-го вещества в i-м потоке. Термодинамические балансы примут вид:

материальный баланс

$$g_0 x_{0j} - g_1 x_{1j} - g_2 x_{2j} = 0, \quad j = 1, k, \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, 2; \tag{5.2}$$

энергетический баланс

$$q_+ - q_- + g_0 h_0 - g_1 h_1 - g_2 h_2 = 0, \tag{5.3}$$

где h_i — энтальпия i-го потока;

энтропийный баланс

$$\frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + g_0 s_0 - g_1 s_1 - g_2 s_2 + \sigma = 0. \tag{5.4}$$

Из (5.1), (5.2) следует, что $g_0 = g_1 + g_2$. Исключив g_0 из равенств (5.3), (5.4), можно перейти к приращениям энтальпии Δh и энтропии Δs:

$$q_+ - q_- + g_1 \Delta h_{01} + g_2 \Delta h_{02} = 0, \tag{5.5}$$

$$g_2 \Delta s_{02} + g_1 \Delta s_{01} + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0. \tag{5.6}$$

Здесь $\Delta h_{0i} = h_0 - h_i, \quad \Delta s_{0i} = s_0 - s_i \ (i = 1, 2)$.

Исключим из уравнения (5.5) q_- и подставим полученное выражение в (5.6). Получим

$$\sum_{i=1}^{2} g_i \left(\Delta s_{0i} - \frac{\Delta h_{0i}}{T_-} \right) + q_+ \left(\frac{1}{T_+} - \frac{1}{T_-} \right) + \sigma = 0,$$

откуда поток затрачиваемого тепла при термическом разделении

$$q_+ = \frac{T_+}{T_+ - T_-} \left[\sum_{i=1}^{2} g_i (\Delta s_{0i} T_- - \Delta h_{0i}) + \sigma T_- \right]. \tag{5.7}$$

Первое из слагаемых в квадратных скобках зависит только от параметров входных и выходных потоков и представляет собой обратимые затраты работы разделения в единицу времени (обратимую мощность разделения), а второе отражает кинетику процесса и связанную с ней диссипацию энергии.

Для смесей, близких к идеальным газам и идеальным растворам, мольные энтальпии и энтропии h_i и s_i, входящие в уравнения (5.3), (5.4), могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered} h_i(T_i, P_i, x_i) = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} h_j(T_i, P_i), \\ s_i(T_i, P_i, x_i) = \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \left[s_j^0(T_i, P_i) - R \ln x_{ij} \right], \quad i = 0, 2, \end{gathered} \tag{5.8}$$

где R — универсальная газовая постоянная. В этом случае обратимые затраты тепла равны

$$\begin{aligned} q_+^0 = \frac{1}{\eta_K} \sum_{i=1}^{2} g_i \sum_{j=1}^{k} [[x_{0j} s_j^0(T_0, P_0) - x_{ij} s_j^0(T_i, P_i) - \\ - R(x_{0j} \ln x_{0j} - x_{ij} \ln x_{ij})] T_- + x_{ij} h_j(T_i, P_i) - x_{0j} h_j(T_0, P_0)]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Здесь использовано обозначение для КПД Карно идеального цикла тепловой машины
$$\eta_{\text{К}} = \frac{T_+ - T_-}{T_+}.$$

Условие (5.7) можно переписать как
$$q_+ = \frac{1}{\eta_{\text{К}}}(p^0 + \sigma T_-). \tag{5.10}$$

Здесь p^0 — обратимая мощность разделения, равная обратимому потоку тепла (см. (5.9)), умноженному на КПД Карно, а σ — производство энтропии.

Для тех или иных допущений (постоянство теплоемкостей, бинарная смесь и др.) выражения (5.9), (5.10) и уравнение (5.7) могут быть конкретизированы, как это сделано ниже для механического разделения и бинарной ректификации.

Механическое разделение. Рассмотрим систему разделения, использующую работу с интенсивностью p без подвода и отвода тепла ($q^+ = q^- = 0$), при этом входные и выходные потоки имеют одинаковые температуры T и давления. Умножим уравнение (5.6) на T и вычтем полученное выражение из уравнения энергетического баланса (5.5), в котором вместо разности $q_+ - q_-$ фигурирует подводимая мощность p. Получим
$$p = T\sigma + g_0 \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i (T\Delta s_{0i} - \Delta h_{0i}). \tag{5.11}$$

Здесь $\varepsilon_i = g_i/g_0$.

С учетом (5.9) и того факта, что при механическом разделении изменения энтальпии Δh_{0i} равны нулю, получим
$$p = g_0 RT \left[\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \ln x_{ij} - \sum_{j=1}^{k} x_{0j} \ln x_{0j} \right] + T\sigma = p^0 + T\sigma. \tag{5.12}$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой минимальную мощность, затрачиваемую на разделение, которая соответствует обратимому процессу ($\sigma = 0$). Эта мощность p^0 равна разности обратимой мощности при полном разделении исходного потока $p_0^0 = -g_0 RT \sum\limits_j x_{0j} \ln x_{0j}$ и суммарной обратимой мощности разделения выходных потоков p_1^0 и p_2^0.

Здесь
$$a_i^0(x_i) = -RT \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \ln x_{ij}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{5.13}$$

— обратимая работа разделения одного моля i-го потока на чистые компоненты, а $\varepsilon = g_1/g_0$ — доля отбора вещества в первый поток.

Для каждого из веществ имеем

$$\varepsilon x_{1j} + (1-\varepsilon)x_{2j} = x_{0j}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{5.14}$$

5.2. Необратимые оценки минимальной работы разделения газовой смеси

Системы механического разделения.

Постановка задачи. Для разделения N_0 молей смеси, близкой по свойствам к идеальным газам, в которой содержится k веществ с концентрациями $x_j (j = \overline{1, k})$, на чистые вещества нужно затратить работу не меньшую, чем обратимая работа:

$$A^0 = -N_0 RT \sum_{j=1}^{k} x_j \ln x_j. \tag{5.15}$$

Величина A^0 представляет собой разность свободных энергий Гиббса продуктов разделения и исходной смеси.

Одним из «способов» разделения смеси с затратой работы A^0 является процесс с использованием идеальных полупроводящих мемебран [22], схема которого показана на рис. 5.2. Два полупроводящих поршня

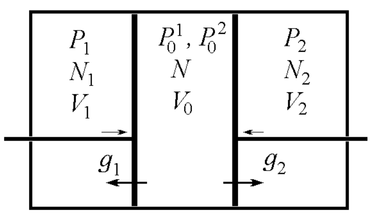


Рис. 5.2. Система разделения с подвижными полупроводящими мембранами

(мембраны) движутся навстречу друг другу. Левый из них пропускает только первое из веществ, а правый — второе. Когда поршни сомкнутся и давления в левой и правой камерах станут равными, смесь окажется разделенной. Нетрудно показать, что при бесконечно медленном движении поршней, когда потоки g_1 и g_2 через полупроводящие мембраны сколь угодно малы, затраченная работа будет равна обратимой работе разделения

$$A^0 = -NRT[x_1 \ln x_1 + (1-x_1)\ln(1-x_1)]. \tag{5.16}$$

Температура T остается постоянной, а коэффициенты массопереноса мембран не играют никакой роли, так как потоки через них сколь угодно малы.

Разделение смеси k веществ может быть проведено как $(k-1)$-кратное разделение бинарной смеси.

В более общем случае смесь с исходными концентрациями x_i^0 делится на две части с концентрациями x_i^1 и x_i^2 в каждой из них, т.е. не происходит полного разделения. В этом случае обратимая оценка работы разделения равна разности обратимой работы разделения исходной смеси и суммарной обратимой работы разделения каждого из продуктов с числом молей N_1 и $1-N_1$ на чистые компоненты:

$$A^0 = N_0 RT \left[\frac{N_1}{N_0} \sum_{j=1}^{k} x_j^1 \ln x_j^1 + \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right) \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \ln x_j^2 - \sum_{j=1}^{k} x_j^0 \ln x_j^0 \right]. \quad (5.17)$$

Обратимые оценки (5.15), (5.17) сильно занижены, реальная работа разделения может оказаться существенно большей. Поэтому важно приблизить оценки к реальности за счет учета конечной продолжительности процесса или заданной интенсивности потоков. При этом оценки должны включать коэффициенты массопереноса и зависеть от продолжительности процесса τ.

Для получения подобных оценок нужно выбрать такое изменение потоков массопереноса во времени или по длине аппарата, при котором работа разделения минимальна. Однако в большинстве аппаратов возможности изменения профиля концентраций ограничены. Изменять можно лишь краевые условия и расходы потоков. Схема Вант–Гоффа с полупроводящими подвижными мембранами обладает бо́льшими возможностями управления. Поэтому естественно использовать ее для получения оценки снизу работы разделения при конечном времени.

Минимальная работа полного разделения бинарной смеси. Рассмотрим простейшую систему (см. рис. 5.2) с идеальными полупроводящими мембранами, левая из которых пропускает только первый, а правая — только второй компонент исходной смеси. Потоки через мембраны g_i зависят от парциальных давлений соответствующего компонента смеси по обе стороны мембраны:

$$g_1 = g_1(P_0^1, P_1), \quad g_2 = g_2(P_0^2, P_2).$$

В свою очередь парциальные давления определяются числом молей в центральной (N), левой (N_1) и правой $(N_2 = N - N_1)$ камерах и объемами камер V, V_1, V_2.

В процессе полного разделения продолжительностью τ кроме обратимой работы разделения приходится затрачивать дополнительную энергию, пропорциональную приросту энтропии системы, которую желательно минимизировать:

$$\Delta A=\int\limits_0^\tau\left[g_1(P_0^1,P_1)\Delta\mu_1(P_0^1,P_1)+g_2(P_0^2,P_2)\Delta\mu_2(P_0^2,P_2)\right]dt\to\min. \quad (5.18)$$

Здесь $\Delta\mu_1$ и $\Delta\mu_2$ — разности химических потенциалов первого и второго компонента в центральной и боковых камерах. Задача о минимуме работы разделения на чистые компоненты сводится к задаче о минимуме ΔA при условии, что средние значения расходов через мембраны фиксированы, т.е.

$$\int\limits_0^\tau g_1(P_0^1,P_1)dt=N_0x_1(0),\quad \int\limits_0^\tau g_2(P_0^2,P_2)dt=N_0x_2(0). \quad (5.19)$$

Кроме того, в задаче (5.18), (5.19) нужно учесть условия, справедливые при каждом $t\in[0,\tau]$:

$$V_0(t)+V_1(t)+V_2(t)=1, \quad (5.20)$$

$$N(t)x_i(t)+N_i(t)=N_0x_i(0), \quad (5.21)$$

$$P_0^i(t)=\frac{RT}{V_0(t)}N(t)x_i(t),\quad P_i(t)=\frac{RT}{V_i(t)}N_i(t), \quad (5.22)$$

$$\frac{dN_i}{dt}=g_i(P_0^i,P_i),\quad N_i(0)=0,\quad N_i(\tau)=N_0x_i(0),\quad i=1,2. \quad (5.23)$$

Задача (5.18)–(5.23) в общем случае оказывается достаточно сложной задачей оптимального управления, в которой управляющими воздействиями являются $V_1(t)$ и $V_2(t)$ — неотрицательные и не превосходящие в сумме единицы (общего объема камеры). Однако важная особенность задачи состоит в том, что переменные состояния $N_i(t)$ не входят непосредственно в критерий оптимальности (5.18) и что g_i и $\Delta\mu_i$ зависят от одних и тех же переменных P_0^i и P_i, что позволяет в ряде случаев одну из этих функций выразить через другую.

Условия оптимальности и результаты решения. Если разности химических потенциалов выражены через потоки $\Delta\mu_i=\varphi(g_i)$ $(i\in\{1,2\})$, то потери энергии можно записать, как

$$\Delta A=\int\limits_0^\tau\left[g_1\varphi_1(g_1)+g_2\varphi_2(g_2)\right]dt\to\min. \quad (5.24)$$

Этот критерий можно минимизировать по $g_1\geq 0$ и $g_2\geq 0$ с учетом только условий (5.19). Найденные условия позволяют получить оценку ΔA снизу. Подстановка решения $g_1^*(t)$, $g_2^*(t)$ задачи (5.18), (5.19) в уравнения (5.21), (5.23) позволяет проверить реализуемость этого решения с учетом связей (5.20) и ограничений на $V_1(t)$ и $V_2(t)$. Отметим, что структура задачи (5.18), (5.19) такова, что она распадается на две подзадачи вида

$$\int_0^\tau g_i\varphi_i(g_i)dt \to \min_{g_i} \Big/ \int_0^\tau g_i dt = \hat{N}_i, \quad i = 1, 2, \tag{5.25}$$

где $\hat{N}_1 = N(0)x_1(0)$, $\hat{N}_2 = N(0)(1 - x_1(0))$. Эти задачи являются усредненнымм задачами нелинейного программирования ($\overline{\text{НП}}$) (см. гл. 9). Решения $g_i^*(t)$ этих задач являются кусочно постоянными функциями времени, принимающими не более двух базовых значений. Соответственно вектор $g^* = (g_1^*, g_2^*)$ решений исходной задачи может принимать не более трех базовых значений.

Для того чтобы оптимальное значение расхода g_i было единственно, достаточно, чтобы функция Лагранжа

$$L_i = g_i\varphi_i(g_i) - \lambda_i g_i$$

была строго выпукла. Если эта функция дважды дифференцируема, то условие постоянства оптимального потока имеет вид

$$\frac{d^2L_i}{dg_i^2} = 2\frac{d\varphi_i}{dg_i} + \frac{d^2\varphi_i}{dg_i^2}g_i > 0. \tag{5.26}$$

Отметим, что первое из слагаемых для реальных зависимостей потока от разности химических потенциалов положительно.

Рассмотрим решение поставленной задачи для некоторых частных случаев. Пусть процесс недалек от равновесия и подчиняется условиям Онзагера ($g_i = \alpha_i\Delta\mu_i$, $i = 1, 2$), где коэффициенты α_i зависят от проводимости мембран и температуры. Тогда

$$\Delta\mu_i = \frac{g_i}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2. \tag{5.27}$$

Отбросим условия (5.20), (5.23) и будем при минимизации ΔA учитывать только условия (5.19), вытекающие из (5.23). Задача (5.18), (5.19) является усредненной задачей нелинейного программирования. Ее функция Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^2 g_i\left(\frac{g_i}{\alpha_i} + \lambda_i\right)$$

выпукла вниз по g_i, а следовательно, оптимальные значения расходов g_1^* и g_2^* соответствуют стационарности L по g_i. Они постоянны и равны

$$g_i^* = N\frac{x_i(0)}{\tau},$$

а минимальная необратимая работа разделения [39]

$$A_{\min} = A^0 + \Delta A_{\min} = A^0 + \frac{N^2}{\tau}\left[\frac{x_1^2(0)}{\alpha_1} + \frac{x_2^2(0)}{\alpha_2}\right], \tag{5.28}$$

где A^0 соответствует выражению (5.16).

Зная $N_i^*(t) = g_i^* t, N$ и $x_i(0)$, можно теперь из уравнений (5.23) найти

$$x_i^*(t) = \frac{N x_i(0) - g_i^* t}{N - (g_1^* + g_2^*)t}. \tag{5.29}$$

Из равенств (5.22) имеем

$$P_0^i(t) V_0(t) = RT\big[N x_i(0) - g_i^* t\big],$$

$$P_i(t) V_i(t) = RT g_i^* t, \quad i = 1, 2. \tag{5.30}$$

Добавив к этим уравнениям условия

$$g_i\left(P_0^i(t), P_1(t)\right) = g_i^*, \quad i = 1, 2, \tag{5.31}$$

получим оптимальные законы изменения $P_i^*(t)$ и $V_i^*(t)$, обеспечивающие минимальную необратимую работу разделения (5.28).

Характер зависимости минимальной необратимой работы разделения от концентрации одного из компонентов в исходной смеси показан на рис. 5.3. При $x_1(0) = 0$ и $x_1(0) = 1$ необратимая оценка работы разделения терпит разрыв. Это обьясняет тот факт, что реальные затраты на разделение смесей, обедненных одним из компонентов, во много раз больше, чем их обратимая оценка. Так, для разделения изотопов урана реальная работа разделения превосходит обратимую оценку в миллионы раз.

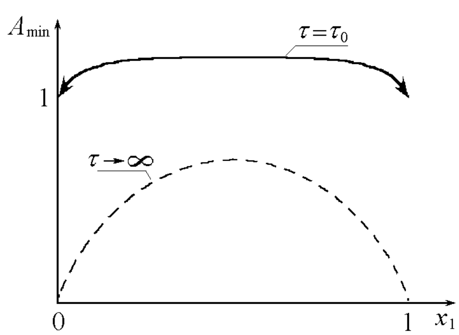


Рис. 5.3. Зависимость от концентрации ключевого компонента в исходной смеси обратимой и минимальной необратимой работы разделения

Обобщим этот подход на произвольные зависимости расходов g_i и разностей химических потенциалов $\Delta\mu_i$ от парциальных давлений компонентов. Для этого решим следующие две вспомогательные задачи нелинейного программирования:

$$\Delta\mu_i(P_0^i, P_i) \to \min_{P_0^i, P_i} \Big/ g_i(P_0^i, P_i) = g_i, \quad i = 1, 2. \tag{5.32}$$

Минимум в этих задачах ищется для различных значений константы $g_i > 0$ и неотрицательных P_0^i и P_i. Значения функции достижимости каждой из этих задач $\Delta\mu_i^{\min}(g_i)$ обозначим через $\Delta\mu_i^*$. Теперь можно разбить задачу (5.18), (5.19) на две усредненные задачи вида

$$\Delta A_i = \overline{g_i \Delta\mu_i^*(g_i)} \to \min_{g_i} \Big/ \overline{g}_i = \frac{N x_i(0)}{\tau} = g_i^0, \quad i = 1, 2. \tag{5.33}$$

Оптимальное решение каждой из этих задач либо единственно и равно g_i^0, либо имеет переключательный характер и меняется между двумя базовыми значениями. В первом случае выпуклая оболочка функции $\Delta A_i^*(g_i) = g_i \Delta\mu_i^*(g_i)$ на множестве неотрицательных значений g_i совпадает с графиком этой функции в точке g_i^0, а во втором — проходит ниже этого графика, касаясь его в базовых точках g_{ij}^* (рис. 5.4).

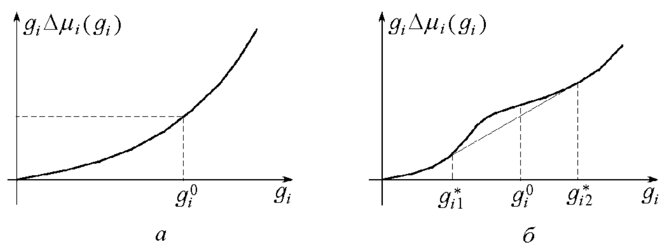


Рис. 5.4. Вид зависимости $g_i\Delta\mu_i(g_1)$ для случая постоянства оптимального значения потока (*а*) и его изменения между значениями g_{ij}^* (*б*)

Зная зависимости $g_i^*(t)$, можно, как это было сделано выше, найти соответствующие им законы перемещения поршней.

Условие выпуклости вниз функции $g_i \Delta\mu_i^*(g_i)$, гарантирующее единственность решения g_i^*, имеет вид

$$\frac{d^2\big[g_i \Delta\mu_i^*(g_i)\big]}{dg_i^2} = 2\frac{d\Delta\mu_i^*}{dg_i} + g_i \frac{d^2\Delta\mu_i^*}{dg_i^2} > 0.$$

Оно заведомо выполнено, если выпукла вниз функция $\Delta\mu_i^*(g_i)$.

Пример. Пусть $\Delta\mu = RT\ln(P_0/P)$, а $g(P_0, P) = (P_0 - P)/\alpha$, причем $0 < P < P_{\max}$. Выразим P_0 через g и P:

$$P_{0i} = \alpha_i g_i + P_i, \quad i = 1, 2.$$

При каждом g $\Delta\mu = RT\ln(\alpha g/P+1)$ достигает минимума при $P = P_{\max}$, так что $\Delta\mu_i^*(g_i) = RT\ln(\alpha_i g_i/P_{i\max}+1)$.

Критерий оптимальности (5.18) примет вид

$$\Delta A = \int\limits_0^\tau RT\Big[g_1\ln\Big(\alpha_1\frac{g_1}{P_{1\max}}+1\Big)+g_2\ln\Big(\alpha_2\frac{g_2}{P_{2\max}}+1\Big)\Big]dt \to \min_{g_1,g_2}.$$

Функция Лагранжа для этой задачи с условиями (5.19), как легко показать, выпукла вниз по g_1, g_2 и достигает минимума в единственной точке. Это значит, что оптимальные значения потоков g_1^* и g_2^* постоянны и определяются выражениями (5.19). Однако законы перемещения поршней, естественно, отличаются от тех, которые соответствуют соотношениям Онзагера (5.27).

Неполное разделение. Для оценки минимальных затрат энергии при неполном разделении будем считать, что в начальный момент за поршнями в левой и правой камерах находятся N_{10} и N_{20} молей исходной смеси с той же концентрацией ключевого компонента $x_1(0)$, что и в центральной камере. Тогда в конце процесса за левым поршнем останется $N_{10}(1-x_1(0))$ молей второго, а за правым $N_{20}x_1(0)$ молей первого компонента. Общее число молей разделяемой смеси равно по-прежнему

$$N = N^0 + N_1 + N_2.$$

При этом из балансовых соотношений следует, что при $t=0$ отношение числа молей смеси в центральной камере к общему количеству разделяемой смеси:

$$b(x,x_1,x_2) = \frac{N^0}{N} = \frac{(x-x_2(\tau))(x_1(\tau)-x)}{x(1-x)(x_1(\tau)-x_2(\tau))}. \tag{5.34}$$

Здесь $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ — концентрации ключевого компонента в левой и правой камерах в конце процесса ($N^0(\tau)=0$). Для постоянства оптимальных потоков g_i^* имеем

$$g_1^* = \frac{N^0x_1(0)}{\tau}, \quad g_2^* = \frac{N^0(1-x_1(0))}{\tau},$$

$$\Delta A^* = \int\limits_0^\tau\sum_{i=1}^2\frac{g_i^{*2}}{\alpha_i}dt = \Delta A_{\min}(\frac{N^0}{N})^2 = \Delta A_{\min}b^2(x,x_1,x_2). \tag{5.35}$$

Таким образом, минимальные затраты работы на разделение бинарной смеси из N молей газа с начальной концентрацией $x_1(0)$ на продукты с концентрациями x_{11} и x_{12} за время τ равны

$$A^* = A^0\frac{N^0}{N} + \Delta A_{\min}(\frac{N^0}{N})^2,$$

где A^0 и $\Delta A_{\min}$ определяется из (5.28), а отношение N^0/N — из (5.34).

Оценка затрат мощности. Мощность p, затрачиваемая на процесс разделения, равна затрачиваемой работе, отнесенной к продолжительности процесса:

$$p = \frac{A^*}{\tau} = [ga(x) + g^2 d(x) b(x, x_1, x_2)] b(x, x_1, x_2), \tag{5.36}$$

где $g = N/\tau$ — расход разделяемой смеси, x — концентрация ключевого компонента в исходной смеси,

$$a(x) = -RT(x \ln x + (1-x)\ln(1-x)),$$
$$d(x) = \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{(1-x)^2}{\alpha_2},$$

$b(x, x_1, x_2)$ определяется равенством (5.34) и характеризует полноту разделения. Значение $b = 1$ соответствует разделению на чистые компоненты, при $b = 0$ разделение отсутствует.

Рассмотрим частный случай, когда

$$x_1 = x + \Delta(1-x), \quad x_2 = (1-\Delta)x.$$

Величина Δ, меняющаяся от нуля до единицы, характеризует полноту разделения. Нетрудно видеть, что в этом случае расход выходного потока с концентрацией x_1 равен $g_1 = gx$, множитель b в выражении (5.36) постоянен и равен Δ, а мощность, затрачиваемая на разделение,

$$p = [ga(x) + g^2 d(x)\Delta]\Delta.$$

Отметим, что найденные таким образом оценки справедливы и для процесса разделения, в котором температура изменяется, если только начальная температура смеси и температура продуктов разделения одинаковы и свойства компонент близки к свойствам идеальных газов.

Оценка затрат тепловой энергии и предельная производительность термических процессов разделения. Во многих случаях в процессах разделения используют не механическую работу, а тепловую энергию, получая ее от источника с высокой температурой T_h и отдавая низкотемпературному резервуару с температурой T_c. Полученные выше оценки для необратимой работы разделения позволяют оценить и затраты тепла. Для этого обозначим через g_0 поток разделяемых продуктов

$$g_0 = \frac{N}{\tau}$$

и будем считать его заданным. От работы разделения перейдем к мощности p, затрачиваемой в единицу времени:

$$p = \frac{A}{\tau} = \frac{A^0}{\tau} + \frac{\Delta A_{\min}}{\tau} = p_0 + \Delta p.$$

Здесь $\Delta A_{\min}$ — оценка снизу необратимых потерь. В обратимых процессах Δp равна нулю, а тепловой поток, затрачиваемый на разделение, равен отношению p_0 к КПД Карно.

Необратимые термические процессы разделения отличаются от механических тем, что с ростом производительности, а значит, с ростом затрачиваемой мощности при заданных размерах установки (коэффициентах переноса) нужно увеличивать потоки тепла за счет увеличения разности температур между разделяемой смесью и источниками ее нагрева и охлаждения, а это в свою очередь ведет к росту производства энтропии. Именно это обстоятельство является причиной ограниченности мощности тепловой машины. То же имеет место и в отношении процессов термического разделения.

Пусть нам известны не только температуры источников T_h и T_c, но и коэффициенты теплопередачи β_h и β_c при подводе и отводе тепла соответственно. И.И. Новиковым получено выражение для предельной мощности, которая может быть получена в системе с двумя резервуарами в необратимом процессе. Она равна

$$p_{\max} = \frac{\beta_h \beta_c}{\left(\sqrt{\beta_h} + \sqrt{\beta_c}\right)^2} \left(\sqrt{T_h} - \sqrt{T_c}\right)^2. \tag{5.37}$$

Необратимый процесс с производительностью g_0 и фиксированными концентрациями исходного продукта и выходных потоков может быть реализован в теплоиспользующей схеме разделения только в том случае, когда мощность p, подсчитанная согласно (5.34), меньше значения $p_{\max}$. Если это условие выполняется, то затраты тепла могут быть оценены по формуле, полученной в [57] и определяющей предельный коэффициент η^* преобразования тепла в работу при фиксированной мощности и линейных законах теплопереноса (см. гл. 4). Получим

$$q_+ = \frac{n}{\eta^*} = \frac{(\tilde{A}^0 + \Delta A_{\min})}{\tau} = \frac{\left(\delta k + 1 - \sqrt{(1-k)(1-k\delta^2)}\right)}{2\delta k}. \tag{5.38}$$

Здесь $\delta = (\sqrt{T_h} - \sqrt{T_c})/(\sqrt{T_h} + \sqrt{T_c})$, $k = p/p_{\max}$. При $p \to p_{\max}$ коэффициент η^* стремится к пределу [152]

$$\eta_{KA} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}}.$$

При $p \to 0$ пределом η^* является КПД Карно. Формула (5.38) позволяет оценить минимальные затраты тепла в термических процессах разделения.

Пример. Найдем минимальные затраты тепла для процесса термического разделения газов, например, моноэтаноламиновой очистки, в которой один из компонентов газовой смеси поглощается холодным раствором, а затем при нагревании раствора выделяется. Смесь поступает с температурой $\overline{T}$=350 К, концентрацией ключевого компонента x=0,5 моль/(моль смеси), расход смеси g_0=5 моль/с. Температуры подвода тепла при при нагреве раствора равны соответственно T_h=400 К, T_c=300 К, а коэффициенты теплопередачи β_h=2 ккал/(с К) и β_c=4 ккал/(с К). Концентрации ключевого компонента в выходных потоках, один из которых соответствует газу, прошедшему через холодный раствор, а второй газу, вышедшему после нагрева: x_1=0,9; x_2=0,1; коэффициенты массопереноса по каждому из компонент для всей поверхности контакта с холодным и горячим раствором α_1=0,07 моль^2/(кгм с), α_2=0,03 моль^2/(кгм с).

Первоначально оценим реализуемость процесса с такой производительностью. По формуле (5.37) предельная мощность разделения в такой системе

$$p_{\max} = \frac{2\times 4}{(\sqrt{2}+2)^2}\left(\sqrt{400}-\sqrt{300}\right)^2 = 4,94\frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Требуемую мощность найдем по формуле (5.35), рассчитав предварительно отдельные слагаемые этого выражения:

$$p^0 = \frac{A_0}{\tau}b = 746\times 0,8 = 596\frac{\text{кгм}}{\text{с}} = \frac{596}{427} = 1,4\frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Здесь 427 кгм/ккал — механический эквивалент теплоты. Минимальные необратимые затраты работы для системы, подчиняющейся уравнениям Онзагера, определяются выражением (5.36):

$$\Delta p = \frac{\Delta A^*}{\tau} = g_0^2\left(\frac{0,25}{0,07}+\frac{0,25}{0,03}\right)\left(\frac{0,4\times 0,4}{0,5\times 0,5\times 0,8}\right)^2 =$$

$$= 190\frac{\text{кгм}}{\text{с}} = \frac{190}{427} = 0,44\frac{\text{ккал}}{\text{с}}.$$

Таким образом, $p = p^0 + \Delta p = 1,84$ ккал/с $< p_{\max}$. Затраты работы на разделение не превышают максимально возможных при данных коэффициентах массопереноса.

Найдем оценку для потока тепла, подводимого к установке. По формуле (5.38), предварительно посчитав

$$\delta = \frac{\sqrt{400}-\sqrt{300}}{\sqrt{400}+\sqrt{300}} = 0,072, \quad k = \frac{2,312}{4,94} = 0,47,$$

получим

$$\eta^* = \frac{2\times 0,072\times 0,47}{0,072\times 0,47 + 1\times\sqrt{0,53\times(1-0,47\times 0,072^2)}} = \frac{0,068}{0,307} = 0,22$$

(обратимый коэффициент $\eta_K = 0,25$). Минимальные затраты тепла

$$q_+ = \frac{p}{\eta^*} = \frac{1,84}{0,22} = 8,36 \text{ккал/с}.$$

Учет необратимости процесса теплообмена уточняет обратимую оценку затрат тела. Но во многих процессах необходимо учитывать производство энтропии и при массопереносе, как это сделано ниже для процесса ректификации.

Поскольку $p \le p_{\max}$, а в соответствии с равенством (5.36) p и g монотонно связаны друг с другом, то для каждого состава входного потока x и выходных потоков x_1 и x_2 найдется

$$g_{\max} = g_{\max}(p_{\max}, x, x_1, x_2).$$

При этом $p_{\max}$ зависит от температур горячего и холодного источника T_h и T_c и коэффициентов теплопередачи на «горячем» и «холодном» концах, β_h и β_c в соответствии с (5.37).

Предельную производительность термического разделения найдем, разрешив уравнение (5.36) относительно g и заменив p на $p_{\max}(T_h, T_c, \beta_h, \beta_c)$. Получим при $d > 0$

$$g_{\max} = \frac{1}{b(x, x_1, x_2)} \left[\sqrt{\frac{a^2(x)}{4d^2(x, \alpha_1, \alpha_2)} + \frac{p_{\max(T_h, T_c, \beta_h, \beta_c)}}{d(x, \alpha_1, \alpha_2)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{a(x)}{2d(x, \alpha_1, \alpha_2) b(x, x_1, x_2)} \right]. \quad (5.39)$$

Для полного разделения $(x_1 = 1, x_2 = 0)$ $b = 1$, при отсутствии разделения $(x_1 = x_2 = x)$ этот коэффициент равен нулю.

Если коэффициенты массопереноса α_1 и α_2 очень велики $(d \to 0)$, то

$$g_{\max} = \frac{p_{\max}(T_h, T_c, \beta_h, \beta_c)}{a(x) b(x, x_1, x_2)}.$$

В ряде случаев задана производительность системы по целевому потоку g_1 и концентрация ключевого компонента в нем x_1. Из балансовых соотношений следует, что потоки g и g_1 связаны друг с другом как

$$g = g_1 \frac{x_1 - x_2}{x - x_2}.$$

После подстановки этого равенства в (5.36) получим связь между мощностью, затрачиваемой на разделение, и целевым потком в форме

$$p = g_1 b_1(x, x_1)[a(x) + g_1 d(x, \alpha_1, \alpha_2) b_1(x, x_1)].$$

Здесь $a(x), d(x, \alpha_1, \alpha_2)$ — те же выражения, что и в равенстве (5.36), а

$$b_1(x, x_1) = \frac{x_1 - x}{x(1 - x)}.$$

Максимальная производительность по целевому потоку $g_{1\max}$ может быть подсчитана по формуле (5.39) с заменой b на b_1. Значение этого коэффициента меняется от нуля до $1/x$.

Выбор последовательности процессов разделения. Выражения (5.28), (5.35), которые для простейшего случая линейной зависимости потоков от движущих сил связывают минимальные необратимые потери работы $\Delta A_{\min}$ с коэффициентами массопереноса α_i $(i = 1, 2)$ продолжительностью процесса τ и составом смеси, позволяют поставить задачу о рациональном выборе последовательности разделения многокомпонентной смеси. Действительно, рассмотрим смесь, состоящую из трех компонентов с концентрациями C_1, C_2 и $C_3 = 1 - C_1 - C_2$.

Возможные варианты разделения этой смеси:

$$1 + (2+3) \to 2+3, \quad 2 + (1+3) \to 1+3, \quad 3 + (1+2) \to 1+2,$$

т.е. в первом варианте первоначально выделяется первый компонент, во втором — второй и так далее.

Число молей смеси N_0 для каждого из вариантов одинаково, обратимые затраты работы зависят от составов потоков на входе и выходе и также одинаковы, поэтому сравним необратимые потери в расчете на один моль смеси. Для этого с использованием (5.28) надо решить задачу распределения продолжительности стадий для первого варианта разделения

$$\Delta A_{\min}(\tau) = \Delta A^1_{\min}(\tau_1) + \Delta A^1_{\min}(\tau_2) = \frac{1}{\tau_1}\left[\frac{C_1^2}{\alpha_{11}} + \frac{(1-C_1)^2}{\alpha_{12}}\right] +$$
$$+ \frac{(1-C_1)^2}{\tau_2}\left[\frac{C_2^2}{\alpha_{21}(1-C_1)^2} + \frac{(1-C_1-C_2)^2}{\alpha_{22}(1-C_1)^2}\right] = \frac{B_1}{\tau_1} + \frac{B_2}{\tau_2} \to \min$$

при условии, что $\tau_1 + \tau_2 = \tau$. Решением этой задачи являются выражения

$$\tau_1^* = \tau\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}}, \quad \tau_2^* = \tau\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}}.$$

Минимальные необратимые потери

$$\Delta A^*_{\min} = \frac{1}{\tau}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})^2,$$

где

$$B_1 = \frac{C_1^2}{\alpha_{11}} + \frac{(1-C_1)^2}{\alpha_{12}}, \quad B_2 = \frac{C_2^2}{\alpha_{21}} + \frac{(1-C_1-C_2)^2}{\alpha_{22}}.$$

Порядок разделения определяется знаком производной $\Delta A^*_{\min}$ по концентрации C_1 компонента, выделяемого на первой стадии. Если эта производная отрицательна, то выгоднее сначала выделять компонент, имеющий бо́льшую концентрацию. Если зависимость $\Delta A^*_{\min}$ от C_1 не монотонна, то порядок разделения определяется расчетом $\Delta A^*_{\min}$ для каждого из вариантов разделения.

5.3. Оптимальная организация и предельная производительность бинарной ректификации

Процессы ректификации являются наиболее распространенными процессами разделения жидких смесей. В частности, они используются для получения нефтепродуктов. Так как затрачиваемая на проведение этих процессов энергия очень велика, представляется особенно актуальным исследование предельных возможностей таких процессов, выяснение способов их оптимальной организации.

Схема процесса ректификации изображена на рис. 5.5. Поток исходной смеси с расходом g_F и вектором концентраций x_F поступает в колонну. К кубу колонны подводится тепловой поток q_+, благодаря чему в кубе происходит испарение, и поток пара V поднимается вверх по колонне, контактируя с опускающимся вниз потоком жидкости (флегмы) L. При этом легколетучие компоненты переходят из жидкости в пар, а высококипящие — из пара в жидкость. Оставшаяся часть кубовой жидкости отбирается с потоком g_B.

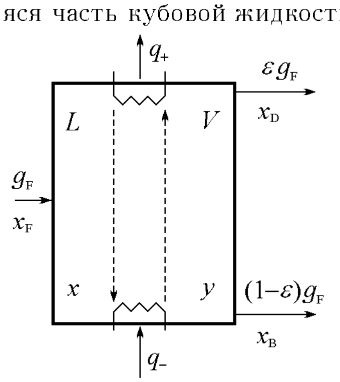


Рис. 5.5. Структура потоков процесса разделения жидкости в колонне ректификации

В дефлегматор поступает пар, насыщенный легколетучими компонентами. Там он конденсируется, отдавая охлаждающей жидкости тепло q_-. Часть конденсата $g_D = \varepsilon g_F$ отбирается, а оставшаяся часть $L = V - g_D$ в форме флегмы возвращается в колонну. Величина ε (доля отбора) для бинарной смеси полностью определяется составами входного и выходных потоков. Если же только один из выходных потоков является целевым и задана только его концентрация, то степень отбора, или, что то же самое, концентрацию нецелевого потока, выбирают по условию минимума затрат энергии на разделение.

Процесс ректификации основан на условиях равновесия между кипящей жидкостью и образующимся паром. Если предполагать, что жидкая фаза близка по своим свойствам к идеальным растворам, а паровая — к идеальным газам, то парциальное давление i-го компонента в паре равно произведению его концентрации на общее давление (закон Рауля):

$$P_i = Py_i = y_i \sum_{\nu} P_{\nu}. \tag{5.40}$$

С другой стороны, парциальное давление пара i-го компонента над раствором в условиях равновесия равно давлению насыщенного пара над чистым компонентом P_i^0, умноженному на мольную долю этого компонента в растворе:

$$P_i = P_i^0 x_i. \tag{5.41}$$

Здесь давление P_i^0 зависит от температуры. Для низкокипящих (легколетучих) компонентов при одной и той же температуре оно выше, чем для высококипящих.

Уравнения (5.40) и (5.41) при известных зависимостях $P_i^0(T)$ позволяют найти $y_i^0(x_i)$ — *кривую равновесия*. Для бинарной смеси давление паров в соответствии с (5.40) равно

$$P = P_1 + P_2 = P_1^0 x + P_2^0 (1 - x),$$

откуда в условиях равновесия концентрации компонентов в паре и в растворе связаны друг с другом соотношением

$$y^0(x) = \frac{P_1}{P} = \frac{P_1^0 x}{P_2^0 + (P_1^0 - P_2^0)x}.$$

Введя коэффициент относительной летучести

$$\alpha(T) = \frac{P_1^0(T)}{P_2^0(T)},$$

получим кривую равновесия в форме

$$y^0(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}. \tag{5.42}$$

Коэффициент $\alpha > 1$, так как через y обозначена концентрация низкокипящего (легколетучего) компонента. Характер кривой равновесия показан на рис. 5.6.

Важную роль играют зависимости равновесных концентраций компонентов в паре $y(T)$ и в жидкости $x(T)$ от температуры. Они показаны на рис. 5.7. На этом рисунке нижняя ветвь является кривой кипения, под ней расположена область жидкой фазы, а верхняя — кривой

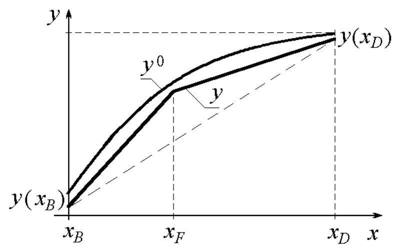


Рис. 5.6. Связь между концентрацией легколетучего компонента в жидкости x, равновесной концентрацией в паре y^0 и рабочей концентрацией y

конденсации, и выше нее — область перегретого пара. При температуре T_1 жидкость, имеющая концентрацию легколетучего компонента x, начинает кипеть, а при температуре T_2 пар с концентрацией легколетучего компонента y начинает конденсироваться. Между кривыми кипения и конденсации находится область, соответствующая двухфазной смеси, состав которой при каждой температуре в некоторой точке a

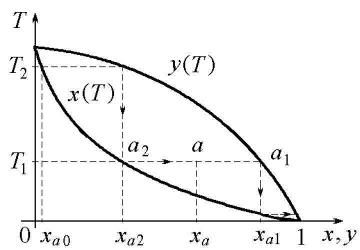


Рис. 5.7. Зависимость равновесных концентраций легколетучего компонента в паре y и в жидкости x от температуры

(рис. 5.7) определяется как средневзвешенное между составами в точках a_1 и a_2, т.е. число мольных долей жидкости n_2 в точке a относится к числу мольных долей пара $n_1 = 1 - n_2$ как разности соответствующих концентраций:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{y(T) - x_a}{x_a - x(T)}.$$

Как видно из рис. 5.7, концентрация легколетучего компонента в паровой фазе при фиксированной температуре больше, чем в жидкой фазе. Поэтому если эти фазы разделить и сконденсировать пар, то получившаяся смесь будет иметь бóльшую концентрацию легколетучего компонента. Так, для температуры T_2 такой конденсат будет иметь концентрацию, равную $x_{a2} > x_{a0}$. После испарения при температуре

T_1 и вторичной конденсации концентрация легколетучего компонента возрастает до $x_{a1} > x_{a2}$ и т.д.

В колонне ректификации происходит встречное движение пара и конденсата с многократным испарением и конденсацией. При этом исходная смесь разделяется на конденсат с большой концентрацией легколетучих компонентов и кубовый остаток с малой их концентрацией.

Термодинамические балансы ректификации и обратимая оценка затрат энергии. Запишем уравнения термодинамических балансов, используя следующие обозначения: T_- — температура в дефлегматоре, а q_- — тепловой поток. Индекс j соответствует j-му компоненту смеси. Через h_F, h_D и h_B обозначены мольные энтальпии соответствующих потоков, а через s_F, s_D и s_B — энтропии. Через σ обозначено производство энтропии. Будем предполагать, что смеси близки к идеальным растворам и теплотой смешения можно пренебречь:

$$g_F x_{jF} - g_D x_{jD} - g_B x_{jB} = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{5.43}$$

$$q_+ - q_- + g_F h_F - g_D h_D - g_B h_B = 0, \tag{5.44}$$

$$g_F s_F - g_D s_D - g_B s_B + \frac{q_+}{T_+} - \frac{q_-}{T_-} + \sigma = 0, \tag{5.45}$$

где k — число компонентов в смеси. Из условий (5.43)–(5.45) после исключения q_- получим

$$q_+ = \frac{T_+}{T_+ - T_-}\Big[g_F(s_F T_- - h_F) - g_D(s_D T_- - h_D) - \\ - g_B(s_B T_- - h_B)\Big] + \sigma\frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-} = q_+^0 + \sigma\frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-}. \tag{5.46}$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения, которое обозначим через q_+^0, представляет собой затраты тепла в обратимом процессе, оно зависит только от параметров входных и выходных потоков и от производительности, второе слагаемое соответствует диссипативным затратам энергии.

Проанализируем обратимые затраты тепла, считая, что величина потока из дифлегматора g_D и его состав фиксированы, давление в процессе ректификации мало меняется и может быть принято постоянным, а для мольных энтальпий и энтропий справедливы соотношения

$$h(T, P, x) = \sum_{j=1}^{k} x_j h_j(T, P),$$

$$s(T, P, x) = \sum_{j=1}^{k} x_j \Big(s_j^0(T, P) - R \ln x_j\Big).$$

Прирост мольной энтальпии и энтропии с изменением температуры определяется через теплоемкость $c_{pj}(T)$ как

$$\Delta h_j = h_j(T_2, P) - h_j(T_1, P) = \int\limits_{T_1}^{T_2} c_{pj}(T)\, dT,$$

$$\Delta s_j^0 = s_j^0(T_2, P) - s_j^0(T_1, P) = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{c_{pj}(T)}{T}\, dT.$$

Обратимую оценку для затрат тепла в процессе ректификации перепишем в форме

$$q_+^0 = \frac{RT_+T_-g_D}{(T_+ - T_-)\varepsilon} \sum_{j=1}^{k} \left[\varepsilon x_{j_D} \ln x_{j_D} + (1-\varepsilon) x_{j_B} \ln x_{j_B} - \right.$$
$$- x_{j_F} \ln x_{j_F} - \frac{\varepsilon x_{j_D}}{RT_-} \int\limits_{T_-}^{T_F} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T) dT +$$
$$\left. + \frac{(1-\varepsilon) x_{j_B}}{RT_-} \int\limits_{T_F}^{T_+} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T)\, dT \right]. \qquad (5.47)$$

Величина

$$p^0 = \frac{g_D}{\varepsilon} RT_- \sum_{j=1}^{k} \left[\varepsilon x_{j_D} \ln x_{j_D} + (1-\varepsilon) x_{j_B} \ln x_{j_B} - x_{j_F} \ln x_{j_F} \right] \qquad (5.48)$$

представляет собой обратимую изотермическую мощность разделения потока g_F с концентрацией x_F на потоки с концентрациями x_B и x_D при температуре T_-. Если учесть, что работа разделения одного моля потока, имеющего вектор концентраций x, равна $\left(-\sum\limits_{j=1}^{k} x_j \ln x_j\right)$, то p^0 с точностью до множителя, стоящего перед знаком суммы, представляет собой разность между обратимой мощностью разделения смеси на чистые компоненты и мощностью разделения на чистые компоненты выходных потоков.

Неизотермический характер разделения приводит к появлению дополнительного слагаемого

$$\Delta p^0 = \frac{g_D}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{k} \left[(1-\varepsilon) x_{j_B} \int\limits_{T_F}^{T_+} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T)\, dT - \right.$$

$$- \varepsilon x_{j_D} \int\limits_{T_-}^{T_F} \left(1 - \frac{T_-}{T}\right) c_{pj}(T)\, dT \Bigg]. \quad (5.49)$$

Если пренебречь зависимостью теплоемкости от температуры и ввести c_{pi}^- и c_{pi}^+ как постоянные теплоемкости в интервалах (T_-, T_F) и (T_F, T_+) соответственно, то дополнительная обратимая мощность перепишется как

$$\Delta p^0 = \frac{g_D}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{k} \Bigg[(1-\varepsilon)\, x_{j_B} c_{pj}^+ \left(T_+ - T_F - T_- \ln \frac{T_+}{T_F} \right) - \\ - \varepsilon x_{j_D} c_{pj}^- \left(T_F - T_- - T_- \ln \frac{T_F}{T_-} \right) \Bigg].$$

Обратимая оценка для потока подводимого тепла

$$q_+^0 = \frac{p^0 + \Delta p^0}{\eta_{\text{К}}}, \quad (5.50)$$

где $\eta_{\text{К}} = (1 - T_-/T_+)$ — КПД Карно.

В качестве обратимого КПД колонны ректификации может быть принято отношение изотермической обратимой работы разделения A^0 к затраченному теплу q_+. Как следует из (5.50), такой КПД равен

$$\frac{p^0}{q_+^0} = \eta_{\text{р}}^0 = \eta_{\text{К}} - \frac{\Delta p^0}{q_+^0}. \quad (5.51)$$

Выбор доли отбора из условия минимума обратимых затрат энергии. Обратимая оценка затрат тепла в расчете на один моль целевого потока

$$\frac{q_+^0}{g_D} = \frac{(p^0 + \Delta p^0)}{g_D \eta_K}$$

зависит только от составов входных и выходных потоков и температур в кубе и дифлегматоре. При заданных составах потоков значение доли отбора в (5.48), (5.49) равно

$$\varepsilon = \frac{x_F - x_B}{x_D - x_B}. \quad (5.52)$$

Когда состав одного из потоков, например, кубового продукта, не задан, значение доли отбора подлежит выбору.

При заданном составе верхнего продукта будем выбирать степень отбора ε из условия минимума обратимых затрат тепла q_+^0 (см. (5.47)) при условиях

$$\sum_j x_{Bj} = 1, \quad \varepsilon x_{Dj} + (1-\varepsilon) x_{Bj} = x_{Fj}, \quad 1 \geq x_{Bj} \geq 0. \quad (5.53)$$

В этом случае решение, как правило, оказывается в точке стационарности функции Лагранжа задачи (5.47), (5.53).

Для бинарной ректификации составы определяются только долей легкокипящего x_D, так как

$$x_B(\varepsilon) = \frac{x_F - \varepsilon x_D}{1-\varepsilon}. \tag{5.54}$$

Это выражение может быть подставлено в (5.47), а оптимальная доля отбора соответствует минимуму полученного выражения. Выпишем его и проанализируем характер зависимости обратимых затрат тепла от величины доли отбора:

$$q_+^0(\varepsilon) = \frac{p^0(\varepsilon) + \Delta p^0(\varepsilon)}{\eta_K(\varepsilon)}, \tag{5.55}$$

где

$$p^0(\varepsilon) = \frac{g_D}{\varepsilon} RT_- \Big[\varepsilon x_D \ln x_D + (1-\varepsilon) x_B(\varepsilon) \ln x_B(\varepsilon) - x_F \ln x_F + \\ + \varepsilon(1-x_D)\ln(1-x_D) + (1-\varepsilon)(1-x_B(\varepsilon))\ln(1-x_B(\varepsilon)) - \\ - (1-x_F)\ln(1-x_F)\Big],$$

$$\Delta p^0(\varepsilon) = \frac{g_D}{\varepsilon}\Bigg[(1-\varepsilon)x_B(\varepsilon)c_{p1}^+\left(T_+(\varepsilon) - T_F - T_- \ln\frac{T_+(\varepsilon)}{T_F}\right) - \\ - \varepsilon(x_D c_{p1}^- + (1-x_D)c_{p2}^-)\left(T_F - T_- - T_- \ln\frac{T_F}{T_-}\right) + \\ + (1-\varepsilon)(1-x_B(\varepsilon))c_{p2}^+\left(T_+(\varepsilon) - T_F - T_- \ln\frac{T_+(\varepsilon)}{T_F}\right)\Bigg],$$

$$\eta_K = 1 - \frac{T_-}{T_+(\varepsilon)}.$$

В отличие от фиксированного состава дистиллята, состав кубового продукта, а значит, и температура в кубе, зависит от степени отбора. Для бинарной ректификации эта зависимость достаточно точно может быть выражена формулой

$$T_+(\varepsilon) = T_1 + x_B(\varepsilon)\frac{T_F - T_k}{x_F}, \tag{5.56}$$

где T_k — температура кипения высококипящего компонента.

В силу условий (5.53) величина ε при минимизации выражения (5.55) должна для любого значения j удовлетворять неравенствам

$$\min\left[\frac{x_{Fj}}{x_{Dj}}; \frac{(1-x_{Fj})}{(1-x_{Dj})}\right] \ge \varepsilon \ge 0.$$

Зависимость $q_+^0(\varepsilon)$ выпукла вниз и имеет минимум при промежуточном значении ε. Результаты расчета этой зависимости для колонны разделения бензола и толуола приведены на рис. 5.8.

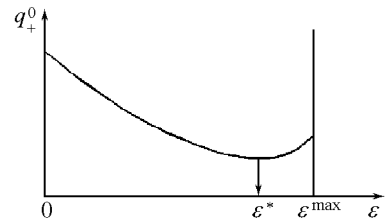


Рис. 5.8. Характер зависимости обратимых затрат энергии от доли отбора при заданном составе целевого потока g_D

В дальнейшем мы будем предполагать составы потоков, а значит, и степень отбора выбранными.

Минимизация затрат энергии с учетом необратимых потерь. Обратимая оценка энергетических затрат занижена и не учитывает кинетики тепло и массопереноса. Согласно (5.46) затраты энергии включают, кроме q_+^0, необратимую состовляющую, пропорциональную производству энтропии σ. Ниже задача о минимальных необратимых затратах энергии решена для бинарной ректификации в предположении эквимолярности массообмена и близости растворов к идеальным. Температура в каждом сечении колонны l для пара и жидкости предполагается одинаковой, а теплота смешения — пренебрежимо малой, как и потери тепла в окружающую среду, состав и температура потока сырья совпадают с составом и температурой жидкости в сечении l_F.

Концентрации легколетучего компонента в паровом и жидкостном потоках обозначим как $y(l)$ и $x(l)$ соответственно. При этом паровой и жидкостной потоки постоянны в каждой из частей колонны (до и после ввода питания). Высоту колонны обозначим через H $(0 \le l \le H)$.

Необратимость бинарной ректификации при подаче тепла в куб и отборе из дефлегматора. При традиционной организации процесса ректификации все потребное тепло подается в куб колонны, а отбирается из дифлегматора. В промежуточных точках в колонну поступает только поток сырья, причем его температуру и состав стремятся сделать равным составу смеси в колонне в точке ввода питания. Это обстоятельство помогает избежать необратимых потерь, связанных со смешением потоков в точке ввода. Такая организация накладывает жесткие условия на режим колонны и, как будет показано ниже, затраты тепла q_+ при заданных концентрациях потоков однозначно связаны в этом случае с производительностью колонны g_D.

Действительно, как следует из термодинамических балансов, поток q_+ (см. (5.46)) складывается из обратимых затрат, зависящих от температур в кубе и дефлегматоре, составов потоков, производительности и необратимых затрат, зависящих от тех же температур и производства энтропии σ. В свою очередж производство энтропии состоит из двух слагаемых:

$$\sigma = \sigma_q + \sigma_g,$$

первое из которых отражает необратимость процессов теплообмена в кубе и дефлегматоре, а второе — необратимость массообмена между паром и жидкостью по высоте колонны. Найдем связь каждого из них с потоком пара V, величина которого вследствии эквимолярности массопереноса не изменяется и связана с потоком жидкости L равенствами:

для верхней части колонны

$$L_D = V - g_D; \tag{5.57}$$

для нижней части колонны

$$L_B = V + g_B = V + g_D \frac{x_D - x_F}{x_F - x_B}. \tag{5.58}$$

Производство энтропии в кубе и дефлегматоре для линейных законов теплообмена равно

$$\sigma_q(V) = V\beta[\alpha_B(T_1 - T_+) + \alpha_D(T_- - T_2)], \tag{5.59}$$

где α_B и α_D — коэффициенты теплопередачи в кубе и дефлегматоре, β — теплота парообразования (конденсации), T_1 и T_2 — температуры греющего пара и воды, подаваемых в куб и дефлегматор (их предполагаем известными). Для простоты эти температуры считаем постоянными. Если это не так, оценки для σ_q могут быть найдены по формулам, приведенным в п. 3.1.

С учетом того, что для бинарной ректификации концентрации высококипящего компонента в жидкостном и паровом потоках равны $1-x$ и $1-y$ соответственно, а движущая сила процесса определяется различием текущей концентрации y и равновесной концентрации $y^0(x)$, производство энтропии, связанное с массопереносом, выражается через потоки и химические потенциалы как

$$\sigma_g = \int_0^H \frac{1}{T(l)}\{g_1(y, y^0)[\mu_1(T, y^0) - \\ - \mu_1(T, y)] + g_2(1-y, 1-y^0)[\mu_2(T, 1-y) - \mu_2(T, 1-y^0)]\}\, dl, \tag{5.60}$$

где g_i и μ_i — потоки массообмена и химические потенциалы компонентов.

Каждый из химических потенциалов имеет вид

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_{i0}(P, T) + RT \ln x_i, \quad i = 1, 2. \tag{5.61}$$

С учетом этого

$$\mu_1(T, y^0) - \mu_1(T, y) = RT \ln \frac{y^0}{y},$$

$$\mu_2(T, 1-y) - \mu_2(T, 1-y^0) = RT \ln \frac{1-y}{1-y^0},$$

и выражение (5.60) перепишется как

$$\sigma_g = R \int_0^H g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)}\, dl. \tag{5.62}$$

Здесь учтено условие эквимолярности массообмена

$$g(y, y^0) = -g(1-y, 1-y^0),$$

а также принято, что поток разделяемой смеси g_F подается при температуре питания в то сечение колонны, состав флегмы в котором одинаков с составом этого потока.

Таким образом, массообменная составляющая производства энтропии определяется формой равновесной и рабочей линий. Первая из них зависит от свойств разделяемой смеси (коэффициента относительной летучести α (см. (5.42))), а вторая зависит от V. Эту зависимость найдем из уравнений материального баланса по легколетучему для верха и низа колонны

$$Vy(x) - g_D x_D - xL_D = 0, \tag{5.63}$$

$$L_B x - Vy(x) - g_B x_B = 0. \tag{5.64}$$

С учетом (5.57), (5.58) имеем для верха и низа колонны

$$y^D(x, V, g_D) = \left(1 - \frac{g_D}{V}\right) x + \frac{x_D g_D}{V}, \tag{5.65}$$

$$y^B(x, V, g_D) = \left(1 + \frac{g_B}{V}\right) x - \frac{x_B g_B}{V}, \tag{5.66}$$

где $g_B(g_D) = g_D \dfrac{x_D - x_F}{x_F - x_B}$.

Так как в выражении (5.62) y и y^0 зависят от x, а концентрация легколетучего в паре монотонно растет по высоте колонны, то этот интеграл можно переписать как

$$\sigma_g = R \int_{x(0)}^{x(H)} g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)}\, dx. \tag{5.67}$$

Подстановка выражений (5.65), (5.66) в равенство (5.67) определяет для заданного закона массопереноса $\sigma_g(V, g_D)$. При этом интеграл нужно подсчитывать как сумму интегралов на интервалах от $x(0)$ до x_F, когда $y(x) = y^B(x, V)$, и от x_F до $x(H)$, когда $y(x) = y^D(x, V)$.

При переходе от l к другой независимой переменной, монотонно зависящей от l, нужно пересчитать коэффициент массопереноса, умножив k на H и разделив на диапазон изменения веденной переменной. Например, если от l произведен переход к x, то формула пересчета примет вид

$$\bar{k} = \frac{kH}{x(H) - x(0)}. \tag{5.68}$$

Найдем связь между потоком пара V и производительностью колонны. Для этого учтем, что общее количество легколетучего, перешедшего из жидкости в пар в верхней и нижней половине колонны, равно

$$\int\limits_{x_B}^{x_F} g(y^B(x, V, g_D), y^0(x))dx + \int\limits_{x_F}^{x_D} g(y^D(x, V, g_D), y^0(x))dx = V(x_D - x_B). \tag{5.69}$$

Условие (5.69) связывает поток пара V и производительность g_D. Обозначим эту зависимость как $V(g_D)$. При ее подстановке в (5.67) и (5.59) оказывается, что диссипативные затраты, как и обратимая составляющая q^+, полностью определяются параметрами потоков и производительностью колонны.

Из приведенных соотношений можно сделать следующий вывод:

для заданной конструкции колонны бинарной ректификации, определяющей коэффициенты тепло- и массопереноса, заданных составов потоков на входе и выходе и производительности колонны расход пара, флегмовое число и затраты тепла, подаваемого в куб, фиксированы и могут быть найдены по приведенным выше соотношениям. Если же заданы составы лишь входного потока, одного из потоков на выходе и производительность по целевому потоку, то может быть выбрана доля отбора (концентрация второго потока на выходе), минимизирующая затраты энергии на разделение.

Как для всякой системы термического разделения производительность колонны ректификации по целевому потоку ограничена.

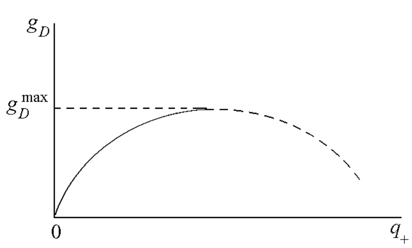


Рис. 5.9. Характер зависимости между производительностью колонны и затратами тепла при подаче тепла в куб и отборе из дефлегматора

Характер связи между затратами тепла и расходом целевого потока при фиксированных составах всех внешних потоков показан на рис.

5.9. Подсчитанная по приведенным выше формулам, предельная производительность учитывает необратимость и теплообмена, и массопереноса, поэтому она точнее оценки, которая найдена для произвольного процесса термического разделения (см. п. 5.1) с учетом только теплообмена.

Идеальная рабочая линия. Обратимая оценка энергетических затрат занижена и не учитывает кинетики массопереноса. Как показано выше, затраты энергии включают, кроме q_+^0, необратимую составляющую, пропорциональную производству энтропии σ. В отличие от производства энтропии σ_q, связанного с подачей и отбором тепла, производство энтропии при массопереносе зависит от формы равновесной и рабочей линий, так как движущая сила процесса массопереноса определяется различием текущей концентрации $y(x)$ и равновесной концентрации $y^0(x)$. Найдем идеальную, с точки зрения минимума диссипации при массопереносе, форму рабочей линии. Эта линия за счет выбора организации процесса (профиля подачи или отбора тепла по высоте колонны) может быть точно или приближеннно реализована. Соответствующее ей минимальное производство энтропии $\sigma_{g\,\min}$ (далее индекс g опускаем) дает нижнюю оценку для σ и показывает, целесообразно ли усложнение конструкции колонны.

Производство энтропии, связанное с массопереносом, имеет вид (5.62), (5.67). Функции y и y^0 зависят от x, но явно эта переменная не входит в выражение для σ. Так как y^0 — однозначная и монотонная функция x, а значит, и l, то для подсчета производства энтропии в колонне, когда l меняется от нуля до H, можно воспользоваться выражением

$$\sigma = R \int\limits_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y, y^0) \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)}\, dy^0. \tag{5.70}$$

Поток g зависит от концентрации $y(x)$, равновесной концентрации $y^0(x)$ и коэффициента массопереноса k, отнесенного к единице длины колонны. При интегрировании по y^0 в знаменателе выражения (5.68) фигурирует разность $y^0(H) - y^0(0)$.

Найдем форму рабочей линии, минимизирующую σ при заданном значении эквивалентного потока массопереноса g:

$$\int\limits_{y^0(0)}^{y^0(H)} g(y, y^0)\, dy^0 = C. \tag{5.71}$$

Величина C, характеризующая интенсивность массопереноса, зависит от концентраций входных и выходных потоков. Мы найдем ее значение ниже.

Для большинства реальных законов массопереноса задача (5.70), (5.71) выпукла вниз по y, и ее решение соответствует условию стационарности функции Лагранжа

$$L = g(y, y^0)\left(\ln\frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} - \gamma\right),$$

которое определяет оптимальную зависимость $y(y^0, \gamma)$ — идеальную рабочую линию. Запишем условие минимальной диссипации массопереноса в колонне бинарной ректификации (условие стационарности по y функции L), не предполагая, как это было сделано в [41], постоянства парового потока по высоте колонны:

$$\ln\frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} - \frac{g(y, y^0)}{\partial g/\partial y(1-y)y} = \gamma. \tag{5.72}$$

Таким образом, для каждого сечения колонны должно быть постоянно выражение, стоящее в левой части равенства (5.72). В частности, для линейного закона массопереноса

$$g(y, y^0) = \bar{k}(y^0 - y) \tag{5.73}$$

условие (5.72) примет форму

$$\ln\frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} + \frac{y^0 - y}{y(1-y)} = \gamma. \tag{5.74}$$

Условия минимальной диссипации (5.72), (5.74) позволяют для реальной колонны с известной равновесной и рабочей линиям $y^0(x)$ и $y(x)$, построить левую часть выражения (5.74), исключив x и найдя $y(y^0)$. Близость полученной зависимости к константе косвенно говорит о близости режима к термодинамически оптимальному.

Условия (5.72), (5.74) не позволяют выразить в аналитической форме $y(y^0, \gamma)$. Обозначим $\Delta = y^0 - y$ и будем предполагать эту разницу достаточно малой. Тогда в левой части (5.74) можно y заменить как $y = y^0 - \Delta$, разложить получившееся выражение в ряд Тэйлора по Δ и пренебречь слагаемыми, имеющими порядок малости Δ^2. После несложных выкладок получим приближенное равенство

$$\Delta(y^0, \gamma) = \frac{\gamma}{2}y^0(1-y^0),$$

откуда

$$y(y^0, \gamma) = y^0\left(1 - \frac{\gamma}{2}(1-y^0)\right). \tag{5.75}$$

Так как $y \le y^0$, то величина γ в этих равенствах положительна, ее находят из условия (5.71). Оценка сверху для γ может быть получена исходя из того, что для любого $x \in (0, 1)$ должно быть выполнено неравенство

$$y(y^0, \gamma) > x. \tag{5.76}$$

Нетрудно показать, что для $y^0(x)$ в форме (5.42) и $y(y^0, \gamma)$ в форме (5.75) неравенство (5.76) приводит к неравенству для γ вида

$$\gamma \le 2\frac{\alpha - 1}{\alpha}. \tag{5.77}$$

Условие (5.72) нетрудно разрешить относительно y в том случае, когда режим недалек от равновесного и эквивалентный поток пропорционален движущей силе

$$g(y, y^0) = \overline{k} \ln \frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)}. \tag{5.78}$$

Подстановка этой зависимости в (5.72) приводит к условию

$$\frac{y^0(1-y)}{y(1-y^0)} = \mathrm{const} = \gamma,$$

откуда

$$y(y^0) = \frac{y^0}{\gamma - (\gamma - 1)y^0}. \tag{5.79}$$

Для зависимости $y^0(x)$ в форме (5.42) получим

$$y(x) = \frac{\alpha x}{\gamma + (\alpha - \gamma)x}. \tag{5.80}$$

Так как $y(x) > x$, то

$$1 < \gamma < \alpha. \tag{5.81}$$

Связь интенсивности массопереноса с параметрами внешних потоков и термодинамический предел производительности колонны. Условие (5.72) и вытекающие из него зависимости (5.75), (5.79) определяют $y(y^0)$ с точностью до произвольной константы γ. Чтобы найти эту константу, нужно выразить величину C в выражении (5.71) через производительность колонны и концентрации внешних потоков.

Изменение расхода пара и флегмы по высоте колонны для всех $l \ne l_F$ происходит из-за массопереноса и подачи (отбора) тепла. Так как массоперенос эквимолярный, а при подаче тепла вся испаряющаяся жидкость переходит в пар, то для $l \ne l_F$

$$\frac{dV}{dL} = 1, \tag{5.82}$$

а значит, для нижней (исчерпывающей) и верхней (укрепляющей) частей колонны справедливы равенства

$$L_B = V_B + g_B, \quad L_D = V_D - g_D. \tag{5.83}$$

Характер изменения парового и жидкостного потока по высоте колонны без промежуточного подвода и с промежуточным подводом тепла показан на рис. 5.10.

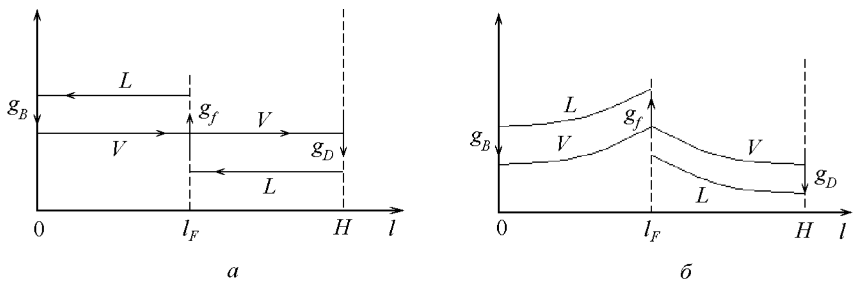


Рис. 5.10. Характер изменения расхода пара и флегмовой жидкости по высоте колонны без промежуточного (*а*) и с промежуточным (*б*) подводом (отводом) тепла

Равенства (5.83) справедливы, когда L и V зависят не только от l, но и от любой переменной, монотонно изменяющейся по высоте колонны $(x, y^0, y, ...)$.

Поток пара для любого сечения колонны, а значит, для любого значения x, соответствующего этому сечению, может быть найден из условия материального баланса по легколетучему компоненту для участка колонны, расположенного между текущим сечением и ее верхним (нижним) концом. Так, для верхней части колонны

$$V_D(x)y(x) - g_D x_D - xL_D(x) = 0.$$

Откуда, учитывая, что для любого $x \quad L_D = V_D - g_D$, получим

$$V_D(x) = g_D \frac{x_D - x}{y(x) - x}. \tag{5.84}$$

Совершенно аналогично для нижней части колонны

$$V_B(x) = g_B \frac{x - x_B}{y(x) - x}. \tag{5.85}$$

Оценим диапазон изменения переменной x, в котором справедливы равенства (5.84),(5.85). В дефлегматоре ($l = H$) происходит полная конденсация парового потока. Из материального баланса дефлегматора

$$V(H) - L(H) - g_D = 0, \quad V(H)y(H) - (L(H) + g_D)x_D = 0$$

следует, что $y(H) = x_D$. Соответственно $x(H) = x_d$ — корень уравнения

$$y(x_d) = x_D. \tag{5.86}$$

Для куба ($l = 0$) обозначим концентрацию легколетучего в потоке жидкости, поступающей в куб, $x(0) = x_b$. Из уравнений материального баланса

$$L(0) - V(0) - g_B = 0, \quad L(0)x_b - g_B x_B - V(0)y^0(0) = 0$$

следует, что

$$x_b = \frac{g_B x_B + V(x_b) y^0(x_B)}{g_B + V(x_b)}.$$

Выразив из этого равенства $V(x_b)$ и сравнивая с выражением (5.85), получим уравнение для определения x_b

$$y(x_b) = y^0(x_B). \tag{5.87}$$

Так что изменению l от нуля до H соответствует изменение x от x_b до x_d.

Поток леголетучего от жидкости к пару и высококипящего от пара к жидкости складывается из потока массопереноса $g(y, y^0)$ и потока, связанного с испарением жидкости или с конденсацией пара при подводе (отводе) тепла (обозначим его g_q). Последний в силу эквимолярности массопереноса пропорционален изменению парового потока. При испарении жидкости поток легколетучего, переходящего в пар, равен

$$g_q(y, x) = y\,\frac{dV}{dx}.$$

При конденсации пара поток высококипящего, переходящего в жидкость,

$$g_q(y, x) = -(1 - x)\frac{dV}{dx}.$$

Подсчитаем g_q для $V_D(x)$ и $V_B(x)$ в соответствии с (5.84) и (5.85), выразив поток g_B через g_D. Получим

$$\begin{aligned} g_q^D(y, x) &= -g_D(1 - x)\left[\frac{(1 - dy/dx)(x_D - x)}{(y - x)^2} - \frac{1}{y - x}\right] = \\ &= g_D f_D(x, \gamma), \quad x_F \le x \le x_d, \end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned} g_q^B(y, x) &= g_D y \frac{x_D - x_F}{x_F - x_B}\left[\frac{(1 - dy/dx)(x - x_B)}{(y - x)^2} + \frac{1}{y - x}\right] = \\ &= g_D f_B(x, \gamma), \quad x_b \le x < x_F. \end{aligned} \tag{5.89}$$

Здесь γ — неопределенный параметр, характеризующий интенсивность массопереноса и входящий в зависимость $y(x, \gamma)$.

Когда идеальная рабочая линия имеет вид (5.80), минимальное производство энропии при изменении γ от 1 до α меняется в соответствии с рис. 5.11.

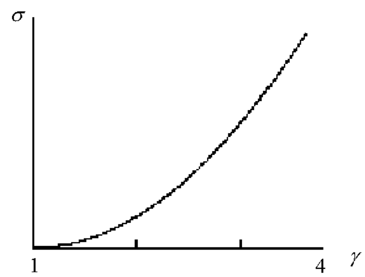


Рис. 5.11. Зависимость минимального производства энтропии в колонне от параметра γ, характеризующего среднюю интенсивность массопереноса

Общий поток массопереноса от жидкости к пару для нижней части колонны равен разности количества легколетучего, поступающего с флегмой и с потоком питания в сечение l_F, и выходящего из куба, так что

$$\int_{x_b}^{x_F} [g(y, y^0) + g_q^B(y, x)]dx = L(x_F)x_F + (g_B + g_D)x_F - g_B x_B. \qquad (5.90)$$

В силу (5.83) $L(x_F)$ можно выразить через паровой поток $V(x_F)$ в сечении l_F и переписать это равенство в форме

$$\int_{x_b}^{x_F} g(y, y^0)dx = g_B(x_F - x_B) + V(x_F)x_F - \int_{x_b}^{x_F} g_q^B(y, x)dx. \qquad (5.91)$$

Аналогично для верхней части колонны поток переноса высококипящего от пара к жидкости равен разности количества высококипящего компонента, поступающего с паром в сечение l_F и выходящего с потоком из дефлегматора

$$\int_{x_F}^{x_d} [g(y, y^0) + g_q^D(y, x)]dx = V(x_F)(1 - y(x_F)) - g_D(1 - x_D). \qquad (5.92)$$

Так что

$$\int_{x_F}^{x_d} g(y, y^0)dx = V(x_F)(1 - y(x_F)) - g_D(1 - x_D) - \int_{x_F}^{x_d} g_q^D(y, x)dx. \qquad (5.93)$$

Заменим $V(x_F)$ в соответствии с (5.84) и подсчитаем общий поток массопереноса:

$$\int\limits_{x_b}^{x_d} g(y, y^0)dx = g_D \left\{ \frac{x_D - x_F}{y(x_F) - x_F} - (1 - x_D) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{x_b}^{x_F} f_B(x, \gamma)dx - \int\limits_{x_F}^{x_d} f_D(x, \gamma)dx \right\}. \quad (5.94)$$

Так как $y, x_b, x_d, y(x_F)$ зависят от неопределенной константы γ, то уравнение (5.94) определяет эту константу для заданной величины продуктового потока g_D, составов исходного сырья и выходных потоков.

Конкретизируем это уравнение для случая, когда идеальная рабочая линия имеет вид (5.80). В этом случае

$$x_d = \frac{\gamma x_D}{\gamma x_D + \alpha(1 - x_D)},$$

$$x_b = \frac{\gamma y^0(x_B)}{\gamma y^0(x_B) + \alpha(1 - y^0(x_B))},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\gamma}{[\alpha x + \gamma(1 - x)]^2}.$$

Пример. Пусть $k = 87,6 \left[\frac{\text{моль}}{\text{с м}}\right]$, $x_D = 0,95$, $x_F = 0,5$, $x_B = 0,05$, $g_D = 530$[моль/с], $H = 11,4$ м; зависимость $y^0(x)$ имеет вид (5.42) с коэффициентом относительной летучести $\alpha = 4$, а зависимость $y(y^0)$ имеет вид (5.79). Найдем величину γ из условия (5.94), в котором левая часть с учетом равенства (5.68) при переходе от $\overline{k}$ к k равна $kH \ln \gamma$. Численно решая уравнение (5.94), получим $\gamma = 1,5$. На рис. 5.12 показана идеальная рабочая линия.

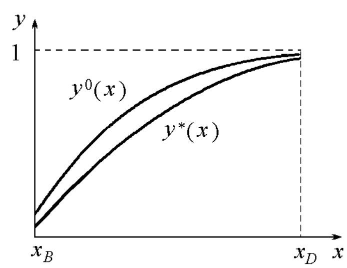


Рис. 5.12 Равновесная и идеальная рабочая линия в колонне бинарной ректификации

Минимальная диссипация массопереноса в колонне для процесса, мало отклоняющегося от равновесного, равна (см. рис. 5.11)

$$\sigma_{\min} = RkH \ln^2 \gamma. \quad (5.95)$$

Максимальная производительность колонны ректификации. Уравнение (5.94) позволяет найти термодинамический предел для максимальной производительности $g_D^{\max}$ колонны. Для этого нужно разрешить это уравнение относительно g_D и найти максимум полученного выражения по параметру γ.

Так, для тех данных, которые были использованы в примере, на рис. 5.13 показана зависимость производительности колонны от параметра γ. Каждому расходу, кроме $g_D^{\max} = 576,8$ [моль/с], отвечают два значения γ, причем меньшее из них в соответствии с (5.95) соответствует минимуму, а большее — максимуму производства энтропии σ. Например, $g_D = 530$ [моль/с] соответствуют $\gamma = 1,5$ и $\gamma = 2,25$.

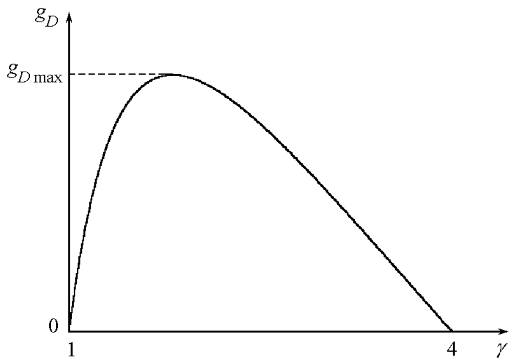


Рис. 5.13 Зависимость производительности колонны от параметра γ идеальной рабочей линии

Более точную оценку предельной производительности можно получить, учтя добавочное производство энтропии, связанное с подводом и отводом тепла при испарении и конденсации парового потока.

Возможности реализации идеальной рабочей линии. Для того чтобы выявить, как должны изменяться по высоте колонны потоки пара и флегмы, реализующие условия минимальной диссипации и вытекающую из них идеальную форму рабочей линии, учтем, что в каждом сечении выполнено равенство

$$V(x)\frac{dy}{dl} = g(y, y^0).$$

Так как $dy/dl = (dy/dx)(dx/dl)$, то изменение концентрации легколетучего в жидкости по высоте колонны отвечает дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dl} = \frac{g(y, y^0)}{V(x)\dfrac{dy}{dx}}, \quad x(0) = x_b, \quad x(H) = x_d. \tag{5.96}$$

Оптимальное с точки зрения минимума диссипации сечение l_F определяется по условию $x(l_F) = x_F$ составом разделяемой смеси.

Уравнения (5.96), (5.84), (5.85) позволяют найти законы изменения по высоте концентраций $x(l)$, $y(l) = y(x(l))$, парового и жидкостного потоков $V(l) = V(x(l))$ и в соответствии с условиями (5.83) найти $L(l)$.

Интенсивность подачи (отбора) тепла

$$q(l) = \beta \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dl},$$

где β — теплота парообразования.

Для укрепляющей и исчерпывающей частей колонны

$$\begin{aligned} q_D(l) &= \beta \frac{\left[V_D(x)\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right) - g_D\right]}{y(x) - x} \frac{g(y, y^0)}{V_D(x)\dfrac{dy}{dx}}, \\ q_B(l) &= \beta \frac{\left[V_B(x)\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right) + g_B\right]}{y(x) - x} \frac{g(y, y^0)}{V_B(x)\dfrac{dy}{dx}}. \end{aligned} \tag{5.97}$$

При этом в правые части этих равенств нужно вместо x подставить решение $x(l)$ уравнения (5.96).

Решение уравнений (5.97) позволяет перейти от $q(x)$ к $q(l)$ и найти тот профиль подачи тепла, который минимизирует необратимость процесса массопереноса в колонне ректификации заданной производительности.

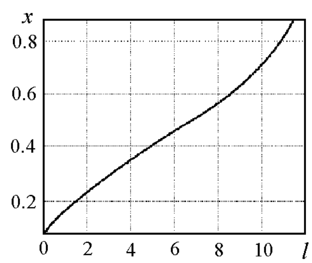


Рис. 5.14 Изменение концентрации легколетучего в жидкости по высоте колонны

П р и м е р. На рис. 5.14 для тех же данных, что и в предыдущем примере, изображены изменение концентрации легколетучего в жидкости по высоте колонны $x(l)$. Значению $x_F = 0,5$ соответствует высота ввода питания l_F=6,76 [м]. Зная зависимость парового потока от x и изменение x по длине, можно найти по формулам (5.97) закон изменения подачи (отбора) тепла по высоте колонны.

Расчет коэффициента массопереноса по результатам измерений на действующей колонне. Для расчета формы идеальной рабочей линии необходимо найти коэффициент массопереноса k. Фактическое значение k, как правило, не известно, однако можно оценить k по результатам работы действующей колонны. Если известны значения $V, \varepsilon, y_D, y_F, x_D$ и x_F, g_D, а также форма равновесной линии $y^0(x)$, то для закона массопереноса, линейного относительно разности $y^0 - y$, имеем

$$V(y_D - y_F) = kH_{FD} \int_{x_F}^{x_D} (y^0(x) - y(x))dx. \tag{5.98}$$

ЗдесьH_{FD} — высота укрепляющей части колонны. Интеграл от y в этом выражении с учетом линейности рабочей линии равен

$$\int_{x_F}^{x_D} y(x)\ dx = \frac{V}{V - g_D} \int_{y_F}^{y_D} y\ dy = \frac{V(y_D^2 - y_F^2)}{2(V - g_D)}.$$

После подстановки этого равенства в (5.98) получим

$$kH_{FD} = \frac{V(y_D - y_F)}{\int_{x_F}^{x_D} y^0(x)dx - \dfrac{V(y_D^2 - y_F^2)}{2(V - g_D)}}. \tag{5.99}$$

5.4. Абсорбционно-десорбционный цикл

Оценка КПД термодиффузионного цикла. В целом ряде технологических процессов происходит затрата высокопотенциального тепла с температурой T_+ с целью передачи потока вещества n от источника с низким потенциалом μ^- к источнику с высоким потенциалом μ^+. Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из двух источников тепла, двух источников вещества бесконечной емкости и рабочего тела (рис. 5.15).

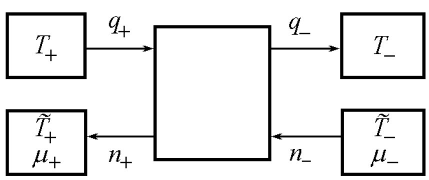


Рис. 5.15. Схема термодиффузионного цикла разделения газов

Введем следующие обозначения: T_+ — температура горячего источника тепла; T_- — температура холодного источника тепла; μ_+ — химический потенциал источника, принимающего вещество; μ_- — химический потенциал источника, отдающего вещество; $\tilde{T}_+$ — температура источника вещества с химическим потенциалом μ_+; $\tilde{T}_-$ — температура источника вещества с химическим потенциалом μ_-.

Считаем, что

$$T_+ > T_-, \quad \tilde{T}_+ > \tilde{T}_-, \quad \mu_+ > \mu_-.$$

Ввиду того, что источники тепла и вещества обладают бесконечной емкостью, параметры T, μ, характеризующие их состояние, во времени не меняются. Рабочее тело циклически меняет свое состояние, поочередно контактируя с каждым из источников, получая при этом от горячего источника некоторое количество тепла q_+, от источника вещества с химическим потенциалом μ_- — некоторое количество вещества n_- и отдавая холодному источнику количество тепла q_-, а источнику вещества с химическим потенциалом μ_+ — количество вещества n_+.

Запишем термодинамические балансы системы:

для энергии

$$q_+ - q_- = 0 \Rightarrow q_+ = q_- = q; \tag{5.100}$$

для вещества

$$n_+ - n_- = 0 \Rightarrow n_+ = n_- = n; \tag{5.101}$$

для энтропии

$$\left(\frac{1}{T_+} - \frac{1}{T_-}\right) q - \left(\frac{\mu_-}{\tilde{T}_-} - \frac{\mu_+}{\tilde{T}_+}\right) + \sigma = 0. \tag{5.102}$$

Здесь σ — производство энтропии системы.

Выразим КПД термодиффузионного цикла как отношение количества вещества, отдаваемого рабочим телом, к количеству затраченного тепла:

$$\eta = \frac{n}{q}.$$

Из уравнения баланса энтропии найдем

$$\eta = \frac{n}{q} = \frac{\dfrac{1}{T_-} - \dfrac{1}{T_+}}{\dfrac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \dfrac{\mu_-}{\tilde{T}_+}} - \frac{\sigma}{q\left(\dfrac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \dfrac{\mu_-}{\tilde{T}_-}\right)}. \tag{5.103}$$

Обратимая оценка КПД термодиффузионного цикла ($\sigma \to 0$) примет форму ($\sigma = 0$)

$$\eta_0 = \frac{\dfrac{1}{T_-} - \dfrac{1}{T_+}}{\dfrac{\mu_+}{\tilde{T}_+} - \dfrac{\mu_-}{\tilde{T}_-}}. \tag{5.104}$$

Предельные возможности абсорбционно - десорбционного цикла. Расчетная схема процесса однокомпонентной абсорбции-десорбции приведена на рис. 5.16.

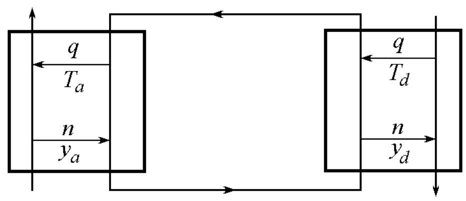


Рис. 5.16. Схема абсорбционно-десорбционного цикла с циркуляцией рабочего тела

Раствор абсорбента циркулирует по замкнутому контуру, контактируя с очищаемым газом, насыщаясь при этом абсорбтивом и регенерируя в десорбере, отдавая поглощенный газ в парогазовую смесь (ПГС). Далее ПГС подается в конденсатор, где пары воды конденсируются, и в газовой фазе остается почти чистый распределяемый компонент. Тепло для процесса подводится в десорбере с парогазовой смесью и передается раствору в основном путем конденсации части пара. В общем случае в десорбере происходит как выделение из раствора поглощаемого компонента, так и поглощение раствором паров воды. Будем считать, что тепло, вносимое при конденсации, является частью общего теплового потока от ПГС к раствору. Очищаемый газ в абсорбере и ПГС в десорбере будем называть *источниками*.

Состояние раствора при однокомпонентной абсорбции можно охарактеризовать следующими переменными: энтропией S, внутренней энергией E и концентрацией распределяемой компоненты x. Скорости изменения этих переменных связаны с тепловым потоком q, потоком вещества n, температурой T, химическим потенциалом μ раствора следующими соотношениями:

$$\dot{S} = \frac{q}{T} - \frac{\mu n}{T}, \tag{5.105}$$

$$\dot{E} = q, \tag{5.106}$$

$$\dot{x} = \beta n. \tag{5.107}$$

Здесь производная берется по времени пребывания элемента раствора в схеме; β — коэффициент пропорциональности. При записи уравнения (5.107) предполагается, что масса распределяемой компоненты значительно меньше массы раствора, и изменением последней можно пренебречь.

Если считать смесь идеальным раствором, то можно записать

$$\mu = \mu_0(T, P) + RT \ln x, \tag{5.108}$$

где $\mu_0(T, P)$ — стандартный химический потенциал чистого компонента; P — давление насыщенного пара компонента.

Потоки тепла q и вещества n, которыми обмениваются очищаемый газ и ПГС с раствором в абсорбере и десорбере, в общем случае изменяются как во времени, так и при переходе раствора из абсорбера в десорбер и обратно. Если предполагать, что тепломассообмен происходит вблизи равновесия, то законы, определяющие потоки тепла и вещества, можно задать соотношениями Онзагера

$$q = \lambda_n \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n}\right) + \alpha_n \left(\frac{\mu_n}{T_n} - \frac{\mu}{T}\right), \tag{5.109}$$

$$n = \alpha_n \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n}\right) + k_n \left(\frac{\mu_n}{T_n} - \frac{\mu}{T}\right), \tag{5.110}$$

где T_n, μ_n — температура и химический потенциал распределяемого компонента в источнике; T, μ — температура и химический потенциал распределяемого компонента в растворе; k_n — коэффициент массопередачи; λ_n — коэффициент теплопередачи; α_n — коэффициент, учитывающий термодиффузию. Ниже всюду индексом a будем отмечать переменные, относящиеся к абсорберу, а индексом d — к десорберу. Для абсорбера $T_n = T_a$, $\mu_n = \mu_a$; для десорбера $T_n = T_d$, $\mu_n = \mu_d$; феноменологические коэффициенты k_n, α_n, λ_n для абсорбера и десорбера различны.

Ввиду того, что параметры состояния раствора S, E и x периодически изменяются, на них накладывается условие цикличности

$$S(0) = S(\tau), \quad E(0) = E(\tau), \quad x(0) = x(\tau),$$

где τ — время цикла.

С учетом зависимостей (5.105)–(5.107) условия цикличности можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_0^\tau \left(\frac{q}{T} - \frac{\mu n}{T}\right) dt = 0, \quad \int\limits_0^\tau q\, dt = 0, \quad \int\limits_0^\tau n\, dt = 0.$$

Обозначая чертой операцию усреднения на интервале $(0, \tau)$, эти условия можно записать как

$$\overline{\left(\frac{q}{T}\right)} - \overline{\left(\frac{\mu n}{T}\right)} = 0, \quad \overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0.$$

Абсорбционно-десорбционный цикл (АДЦ) в такой постановке представляет собой частный случай термодиффузионного, при этом $T_+ \sim T_d$, $T_- \sim T_a$, $\mu_+ \sim \mu_a$, $\mu_- \sim \mu_d$. Поэтому из формулы (5.104) следует обратимая оценка для КПД АДЦ

$$\eta_0 = \frac{\overline{|n|}}{\overline{|q|}} = \frac{\dfrac{1}{T_a} - \dfrac{1}{T_d}}{\dfrac{\mu_d}{T_d} - \dfrac{\mu_a}{T_a}} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}. \tag{5.111}$$

В необратимых процессах

$$\eta = \frac{\overline{|n|}}{\overline{|q|}} = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} - \frac{\sigma}{q\Delta u_2}. \tag{5.112}$$

Здесь введены обозначения для движущих сил процесса

$$\Delta u_1 = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_d}, \qquad \Delta u_2 = \frac{\mu_d}{T_d} - \frac{\mu_a}{T_a}.$$

Будем в дальнейшем называть Δu_1 *тепловым напором*, а Δu_2 — *концентрационным напором.*

Из выражения (5.111) следует, что минимальное количество тепла, необходимое для выделения из газа одного моля вещества при заданных параметрах источников, определяется выражением

$$Q_0 = \frac{T_a\mu_a - T_d\mu_d}{T_d - T_a}, \tag{5.113}$$

где Q_0 — затраты тепла в обратимом процессе.

Эффективность использования тепла в АДЦ можно охарактеризовать отношением работы, потребной для обратимого разделения моля двухкомпонентной смеси, к количеству тепла, затрачиваемого для такого же разделения в АДЦ (термическим КПД). Если учесть, что обратимая работа разделения моля газа, поступающего в абсорбер,

$$A_0 = -T_a R[y_a \ln y_a + (1-y_a)\ln(1-y_a)],$$

то термический КПД

$$\eta = \frac{A_0}{Q_0} = R\left(1 - \frac{T_a}{T_d}\right) \frac{y_a \ln y_a + (1-y_a)\ln(1-y_a)}{\mu_a/T_a - \mu_d/T_d}. \tag{5.114}$$

Здесь y_a — концентрация отделяемого компонента в очищаемом газе.

Предельная производительность АДЦ. Под производительностью АДЦ будем понимать количество компонента, отобранного из раствора за время его пребывания в десорбере. Задача сводится к усредненной задаче условной оптимизации вида

$$\overline{|n|} \to \max \tag{5.115}$$

при условиях

$$\overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0, \quad \overline{\left(\frac{q}{T}\right)} - \overline{\left(\frac{n\mu}{T}\right)} = 0. \tag{5.116}$$

Задача о предельной производительности (5.115), (5.116) имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Изобразим в одной координатной системе σ, n, q, скорость изменения энтропии раствора $\sigma(n,q)$ и $|n|$. Для этого выразим σ через потоки n, q и параметры источников T_n и μ_n, которые не меняются в ходе процесса. С учетом (5.109) и (5.110) выражение (5.105) можно переписать в виде

$$\dot{S} = \frac{q^2}{\tilde{\lambda}_n} - \frac{n^2}{\tilde{k}_n} - nq\tilde{\alpha}_n + qu_{1n} - nu_{2n}, \tag{5.117}$$

где

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n - \frac{\alpha_n^2}{k_n}, \qquad \tilde{k}_n = k_n - \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n},$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{2\alpha_n}{k_n\lambda_n - \alpha_n^2}, \qquad u_{1n} = \frac{1}{T_n}, \qquad u_{2n} = \frac{\mu_n}{T_n}.$$

На рис. 5.17 изображена зависимость $\dot{S} = \sigma(q, n)$, причем $q \leq 0$ и $n \geq 0$ соответствуют, процессу абсорбции с параметрами $\tilde{\lambda}_a$, $\tilde{k}_a$,$\tilde{\alpha_a}$,u_{1a} u_{2a}, а $q > 0$ и $n < 0$ соответствуют процессу десорбции с параметрами $\tilde{\lambda}_d$, $\tilde{k}_d$, $\tilde{\alpha_d}$, u_{1d}, u_{2d}.

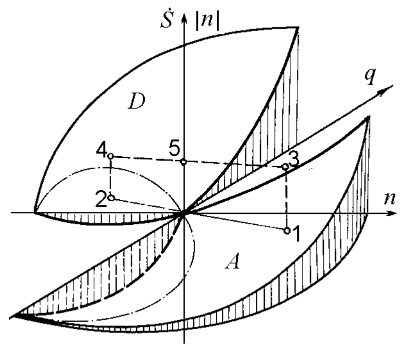


Рис. 5.17. Геометрическая иллюстрация задачи о максимуме производительности абсорбционно-десорбционного цикла

В общем случае задача (5.115), (5.116) имеет четыре базовые точки, где y_a и y_d — концентрации распределяемой компоненты в газе в абсорбере и десорбере соответственно. Нетрудно показать, что изменение параметров источников в сторону увеличения T_d, y_a и в сторону уменьшения T_a, y_d ведет к росту предельной величины отбираемого потока. Поэтому решение задачи не изменится, если условия в форме равенств

$$T_d = T_d^{\max}, \quad y_a = y_a^{\max} \qquad T_a = T_a^{\min}, \quad y_d = y_d^{\min},$$

заменить неравенствами

$$T_d \leq T_d^{\max}, \quad y_a \leq y_a^{\max}, \qquad T_a \geq T_a^{\min}, \quad y_d \geq y_d^{\min}, \tag{5.118}$$

считая параметры источников T_d, y_a, T_a, y_d переменными, ограниченными значениями $T_d^{\max}$, $y_a^{\max}$, $T_a^{\min}$, $y_d^{\min}$. Неравенства (5.101) выделяют в пространстве координат σ, n, q области $\tilde{A}$ и $\tilde{D}$, ограниченные вертикальными плоскостями (σ, q), (σ, n) и поверхностями A и D, определяемыми уравнением (5.100). Области $\tilde{A}$ и $\tilde{D}$ выпуклы, а целевая функция $|n|$ линейна на каждой из них, следовательно, число базовых точек сводится к двум. Таким образом, задача состоит в том, чтобы так выбрать точку 1, принадлежащую поверхности A, и точку 2, принадлежащую поверхности D, чтобы соединяющая их линия проходила через начало координат, а линия, соединяющая точки 3 и 4 с координатами n и $-n$ соответственно, как можно выше пересекала ось $|n|$.

Для двух базовых точек задача (5.115), (5.116) с учетом зависимости (5.117) может быть записана в виде

$$\gamma_a |n_a| + \gamma_d |n_d| \to \max_{n_a, n_d, q_a, q_d, \gamma_a, \gamma_d} \tag{5.119}$$

при условиях

$$\sum_{\nu \in \{a,d\}} \gamma_\nu \left(\frac{q_\nu^2}{\tilde{\lambda}_\nu} + \frac{n_\nu^2}{\tilde{k}_\nu} - n_\nu q_\nu \tilde{\alpha}_\nu + q_\nu u_{1\nu} - n_\nu u_{2\nu} \right) = 0,$$

$$\gamma_a n_a + \gamma_d n_d = 0, \; \gamma_a q_a + \gamma_d q_d = 0,$$

$$\gamma_a + \gamma_d = 1, \; n_a \geq 0, \; n_d \leq 0, \; q_a \leq 0, \; q_d \geq 0, \; \gamma_a \geq 0, \; \gamma_d \geq 0. \tag{5.120}$$

Весовые коэффициенты γ_a и γ_d соответствуют доле общего времени цикла, в течение которой раствор вступает в контакт с источником в абсорбере и десорбере соответственно. Задача (5.119), (5.120) путем преобразований сводится к поиску экстремума функции двух переменных — n_d и q_d:

$$I = \frac{n_d \left(\dfrac{q_d^2}{\tilde{\lambda}_d} + \dfrac{n_d^2}{\tilde{k}_d} - n_d q_d \tilde{\alpha}_d - q_d \Delta u_1 - n_d \Delta u_2 \right)}{\dfrac{\tilde{\lambda}_d - \tilde{\lambda}_a}{\tilde{\lambda}_d \tilde{\lambda}_a} q_d^2 + \dfrac{\tilde{k}_d - \tilde{k}_a}{\tilde{k}_d \tilde{k}_a} n_d^2 - n_d q_d (\tilde{\alpha}_d - \tilde{\alpha}_a) q_d \Delta u_1 + n_d \Delta u_2} \to \max. \tag{5.121}$$

В общем случае задача (5.121) решается численно. Оставшиеся неизвестные исходной задачи (5.119), (5.120) последовательно определяются через оптимальные значения n_d^* и q_d^* по следующим зависимостям:

$$\gamma_d^* = -\frac{I(n_d^*, q_d^*)}{n_d^*}, \quad n_a^* = \frac{I(n_d^*, q_d^*)}{\gamma_a^*}, \quad \gamma_a^* = 1 - \gamma_d^*, \qquad q_a^* = -\frac{\gamma_d^* q_d^*}{\gamma_a^*}.$$

Соответствующий предельной производительности коэффициент эффективности АДЦ определится как

$$\eta_n^* = -\frac{n_d^*}{q_d^*}. \tag{5.122}$$

Для случая равенства в абсорбере и десорбере соответствующих коэффициентов, т.е. $\lambda_a = \lambda_d = \tilde{\lambda}$, $k_a = k_d = \tilde{k}$, $\alpha_a = \alpha_d = \tilde{\alpha}$, задача (5.121) примет вид

$$I = \frac{\tilde{k} q_d^2 n_d + \tilde{\lambda} n_d^3 - \tilde{\lambda} \tilde{k} \tilde{\alpha} n_d^2 q_d}{\tilde{\lambda} \tilde{k} (q_d \Delta u_1 + n_d \Delta u_2)} - n_d \to \max$$

и будет иметь аналитическое решение

$$n_d^* = -\frac{\tilde{k} \tilde{\lambda} \Delta u_1^2}{4(\tilde{\alpha} \tilde{\lambda} \tilde{k} \Delta u_1 / 2 + \tilde{k} \Delta u_2 + \sqrt{B})}, \tag{5.123}$$

$$q_d^* = \frac{\tilde{\lambda}}{4}\Delta u_1 \frac{\tilde{k}\Delta u_2 + \sqrt{B}}{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\tilde{k}\Delta u_1/2 + \tilde{k}\Delta u_2 + \sqrt{B}}, \tag{5.124}$$

где

$$B = \tilde{k}_2\Delta u_2^2 + \tilde{\lambda}\tilde{k}\Delta u_1^2 + \tilde{\lambda}\tilde{k}^2\tilde{\alpha}\Delta u_1\Delta u_2.$$

Используя соотношения (5.123), (5.124), можно определить оставшиеся параметры в оптимальном режиме: доли длительности цикла контакта раствора с источниками $\gamma_a^* = \gamma_d^* = 0,5$; поток перераспределяемого вещества из источника в абсорбер $n_a^* = -n_d^*$; тепловой поток в абсорбере $q_a^* = -q_d^*$; предельную производительность $n_{\max} = |n_d^*|/2$.

Коэффициент эффективности, соответствующий предельной производительности, $\eta_{n\max}$ можно выразить через коэффициент эффективности обратимого АДЦ η_0 (см. (5.111)):

$$\eta_{n\max} = \frac{\eta_0}{1 + \sqrt{1 + (\tilde{\lambda}/k)\eta_0^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\lambda}\eta_0}}. \tag{5.125}$$

Зависимость $\eta_{n\max}$ и предельной производительности от коэффициента теплообмена $\tilde{\lambda}$ имеют характер, показанный на рис. 5.18. Отношение $\eta_0/\eta_{n\max}$ показывает, во сколько раз меньше тепла нужно затратить в обратимом процессе по сравнению с циклом, имеющим предельную производительность. Отметим, что подобное отношение $\eta_0/\eta_{n\max}$ для тепловой машины (см. гл. 4) меняется в зависимости от отношения

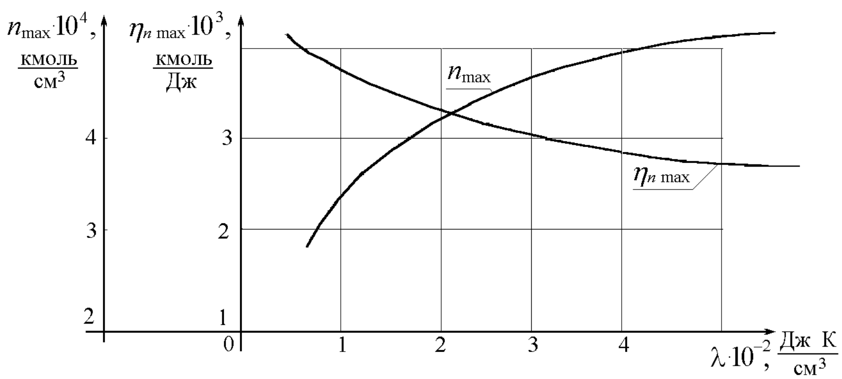


Рис. 5.18. Зависимость максимальной производительности абсорбционно-десорбционного цикла $n_{\max}$ и коэффициента эффективности $\eta_{n\max}$ от коэффициента теплообмена λ

температур источников от 1 (при $T_-/T_+ \to 0$) до 0,5 (при $T_-/T_+ \to 1$) и меньше 0,5 быть не может. Здесь это не так.

Предельная эффективность АДЦ с заданной производительностью. Критерий оптимальности в этой задаче имеет вид (5.112)

$$\eta = \frac{\overline{|n|}}{\overline{|q|}} \to \max$$

при условии заданной производительности

$$\overline{|n|} = n_0.$$

Величина n_0 подчиняется неравенству

$$n_0 < n_{\max},$$

где $n_{\max}$ — решение задачи о предельной производительности.

Запишем задачу о предельном коэффициенте эффективности АДЦ при заданной производительности как усредненную задачу нелинейного программирования:

$$\overline{|q|} \to \min_{\mu, T} \tag{5.126}$$

при условиях

$$\overline{\left(\frac{q}{T}\right)} - \overline{\left(\frac{\mu n}{T}\right)} = 0, \quad \overline{q} = 0, \quad \overline{n} = 0, \quad \overline{|n|} = n_0. \tag{5.127}$$

Для ее решения перейдем от переменных μ и T к новым варьируемым переменным q и n. При этом скорость изменения энтропии будет определяться выражением (5.117), и условие цикличности изменения энтропии раствора запишется в виде

$$\overline{\left(\frac{q^2}{\tilde{\lambda}_n}\right)} + \overline{\left(\frac{n^2}{\tilde{k}_n}\right)} - \overline{(nq\tilde{\alpha}_n)} + \overline{(u_1 q)} - \overline{(u_2 n)} = 0.$$

В общем случае задача (5.126), (5.127) может иметь пять базовых точек, однако аналогично рассуждениям, приведенным выше, можно показать, что достаточно рассмотреть две базовые точки. В этом случае задача преобразуется к виду

$$\gamma_a |q_a| + \gamma_d |q_d| \to \min_{n_a, n_d, q_a, q_d, \gamma_a, \gamma_d}$$

при условиях

$$\gamma_a \left(\frac{q_a^2}{\tilde{\lambda}_a} + \frac{n_a^2}{\tilde{k}_a} - n_a q_a \tilde{\alpha}_a + u_{1a} q_a - u_{2a} n_a\right) + \\ + \gamma_d \left(\frac{q_d^2}{\tilde{\lambda}_d} + \frac{n_d^2}{\tilde{k}_d} - n_d q_d \tilde{\alpha}_d + u_{1d} q_d - u_{2d} n_d\right) = 0,$$

$$\gamma_a q_a + \gamma_d q_d = 0, \quad \gamma_a n_a + \gamma_d n_d = 0, \quad \gamma_a |n_a| + \gamma_d |n_d| = n_0,$$

$$\gamma_a + \gamma_d = 1, \quad \gamma_a \geq 0, \quad \gamma_d \geq 0, \quad n_a \geq 0, \quad n_d \leq 0, \quad q_a \leq 0, \quad q_d \geq 0.$$

Решение поставленной задачи сводится к поиску минимума функции одной переменной

$$F(\gamma_d) = \frac{\hat{\lambda}(\gamma_d)}{2}\left\{\Lambda(\gamma_d)\Delta u_1 - \frac{\hat{\alpha}(\gamma_d)n_0}{2} - \right.$$
$$\left. - \left[\left(\Lambda(\gamma_d)\Delta u_1 - \frac{\hat{\alpha}(\gamma_d)n_0}{2}\right) - \frac{n_0}{\hat{\lambda}(\gamma_d)}\left(\frac{n_0}{\hat{k}(\gamma_d)} + 2\Lambda(\gamma_d)\Delta u_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \to \min, \quad (5.128)$$

где

$$\hat{\lambda}(\gamma_d) = \frac{\tilde{\lambda}_a\tilde{\lambda}_d}{\tilde{\lambda}_a(1-\gamma_d) + \tilde{\lambda}_d\gamma_d}, \quad \hat{k}(\gamma_d) = \frac{\tilde{k}_a\tilde{k}_d}{\tilde{k}_a(1-\gamma_d) + \tilde{k}_d\gamma_d},$$
$$\hat{\alpha}(\gamma_d) = \tilde{\alpha}_a(1-\gamma_d) + \tilde{\alpha}_d\gamma_d, \quad \Lambda(\gamma_d) = (1-\gamma_d)\gamma_d, \quad 0 \le \gamma_d \le 1.$$

В общем случае при известных параметрах источников μ_a, μ_d, T_a, T_d, коэффициентах λ_a, λ_d, k_a, k_d, α_d, α_a и n_a задача решается численно. Через полученное решение $F^* = F(\gamma_d^*)$ и γ_d^* определяются оставшиеся параметры оптимального цикла:

$$\gamma_a^* = 1 - \gamma_d^*, \quad q_a = -\frac{F^*}{1-\gamma_d^*}, \quad q_d = \frac{F^*}{\gamma_d^*}, \quad n_a = -\frac{n_0}{2(1-\gamma_d^*)}.$$

В случае равных коэффициентов λ, k, α в абсорбере и десорбере задача имеет аналитическое решение

$$-q_a = q_d = \frac{\tilde{\lambda}}{4}\left[(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0) - \sqrt{(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0)^2 - \frac{8n_0}{\tilde{k}\tilde{\lambda}}(2n_0 + \tilde{k}\Delta u_2)}\,\right],$$

$$n_a = -n_d = n_0, \qquad \gamma_a = \gamma_d = 0,5.$$

Предельный коэффициент эффективности:

$$\eta_n^* = \frac{4n_0}{\tilde{\lambda}}\left[\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0\sqrt{(\Delta u_1 - 2\tilde{\alpha}n_0)^2 - \frac{8n_0}{\tilde{k}\tilde{\lambda}}\left(2n_0 + \tilde{k}\Delta u_2\right)}\,\right]^{-1}. \quad (5.129)$$

Характер зависимости коэффициента эффективности η_n^* от производительности n_0 иллюстрирует рис. 5.19. Из зависимости (5.129) как

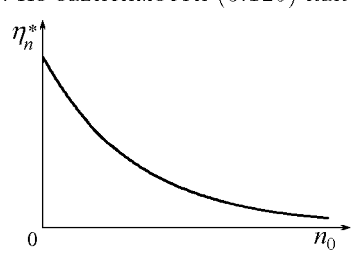


Рис. 5.19. Связь предельной эффективности АДЦ с его производительностью

частный случай следует решение задачи о предельном коэффициенте эффективности, соответствующем обратимому процессу:

$$\lim_{n_0 \to 0} \eta_n^* = \frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} = \eta_0.$$

Если при рассмотрении АДЦ пренебречь эффектом термодиффузии, положив $\alpha = 0$, то решение описанных задач упрощается. Результаты решения таких задач приведены в табл. 5.1. В этой таблице наряду с упомянутыми выше переменными приведены температуры раствора T_{sa}, T_{sd} и его концентрация x.

Учет конечной емкости источников. Рассмотрение АДЦ как системы с двумя источниками бесконечной емкости, не меняющими концентрации и температуры при тепло- и массообмене с раствором, очень сильно упрощает реальные циклы, хотя и дает более точные оценки их эффективности по сравнению с обратимыми. В действительности нужно учесть, что контакт между абсорбентом и газом в абсорбере или паром (инертным газом) в десорбере осуществляется распределенно, при этом параметры контактирующих сред меняются по длине контакта. Кроме этого фактора реальные циклы включают теплообменники, регенерирующие тепло, полученное абсорбентом в десорбере, холодильники для конденсации пара и отделения таким образом выделенных примесей. Часто в процессе абсорбции происходит выделение тепла; чтобы это обстоятельство и связанное с ним повышение температуры абсорбента не ухудшало процесс абсорбции, устанавливают дополнительные холодильники.

Таким образом, АДЦ представляет собой сложную систему тепло- и массообменных аппаратов. Естественный способ ее оптимизации заключается в разбиении системы на отдельные аппараты и оптимизации на первой стадии процесса в каждом из них в функции параметров, от которых зависит режим других аппаратов. На второй стадии эти параметры подбирают так, чтобы необратимость процесса в целом оказалась минимальной. При этом на первом этапе используют условия оптимальности процессов необратимого тепло- и массопереноса, полученные в этой и предыдущей главах. В качестве примера такого подхода рассмотрим АДЦ с источниками конечной емкости.

Будем предполагать, что скорости движения фаз постоянны и соответствуют режиму идеального вытеснения, а поток массопереноса пропорционален разности химических потенциалов. В этом случае, как показано выше (см. гл. 2), в оптимальном процессе изотермического массопереноса отношение концентрации перераспределяемого компонента в источнике $y_n(l)$ к равновесной концентрации $y^*(x(l))$ должно быть постоянным в любом сечении. Здесь x — концентрации перераспределяемого компонента в растворе. Если k — коэффициент массопередачи, отнесенный к единице длины колонны, L — ее длина, а N — общее количество вещества, перераспределяемого в колонне, то рабочая $y_n(x)$ и равновесная $y^*(x)$ линии должны быть таковы, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{y_n(x)}{y^*(x)} = \exp\left(\frac{N}{kRL}\right). \tag{5.130}$$

Т а б л и ц а 5.1. **Расчет оптимальных значений параметров цикла при** $\alpha = 0, \quad k_a = k_d = k, \quad \lambda_a = \lambda_d = \lambda$

Параметр	Предельная производительность	Предельный коэффициент эффективности при заданной производительности
γ_a	0,5	0,5
γ_d	0,5	0,5
q_d	$\frac{\lambda}{4}\Delta u_1$	$\frac{\lambda \Delta u_1}{4} \times \left[1 - \sqrt{1 - \frac{8n_0}{2k}\frac{2n_0 + k\Delta u_2}{\Delta u_1^2}}\right]$
n_d	$\frac{k\Delta u_2}{4} \times \left[1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda}{k}\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}\right)^2}\right]$	$-n_0$
q_a	$-q_d$	$-q_d$
n_a	$-n_d$	$-n_0$
η_n	$\frac{\eta_0}{1 + \sqrt{\frac{\lambda}{k}\eta_0^2 + 1}}$	$\frac{n_0}{q_d}$
T_{sa}	$\frac{4T_a}{3 + T_a/T_d}$	$\frac{T_a \lambda}{q_a T_a + \lambda}$
T_{sd}	$\frac{4T_d}{3 + T_d/T_a}$	$\frac{T_d \lambda}{q_d T_d + \lambda}$
x_i, $i \in \{a,d\}$	$\frac{y_i}{m_{iyx}} \exp\left(-\frac{n_i}{Rk}\right)$	$\frac{y_i}{m_{iyx}} \exp\left(-\frac{n_i}{Rk}\right)$

Приблизиться к выполнению условия (5.130) можно введением рециркуляции раствора, изменением его расхода, наконец, изменением конфигурации абсорбционной системы при ее построении в форме батареи аппаратов.

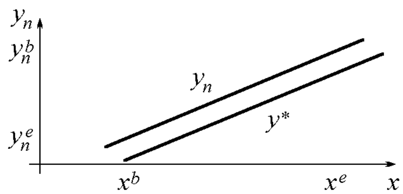


Рис. 5.20. Вид линейной апроксимации рабочей и равновесной линий в абсорбере

Рассмотрим случай, когда равновесную линию можно представить в форме линейной зависимости $y^*(x) = ax + b$, где a и b — некоторые константы, определяемые при обработке экспериментальных данных по равновесию. Количество N переданного вещества считаем заданным. Расход газа G_d и начальная концентрация y_n^b перераспределяемого компонента также фиксированы. Конечную концентрацию y_n^e перераспределяемого компонента можно определить из условий материального баланса (индексы b и e — от слов begin (начало) и end (конец)). Таким образом, из всех рабочих линий с начальными и конечными точками, лежащими на прямых $y = y_n^b$ и $y = y_n^e$ (рис. 5.20), нужно выбрать такую, чтобы для любого x выполнялось условие (5.130). Из этого условия для x^b и x^e имеем с учетом противотока

$$\frac{y_n^e}{y^*(x^e)} = \frac{y_n^e}{ax^e + b} = \exp\left(\frac{N}{kRL}\right),$$
$$\frac{y_n^b}{y^*(x^b)} = \frac{y_n^b}{ax^b + b} = \exp\left(\frac{N}{kRL}\right). \tag{5.131}$$

Откуда находим x^b и x^e, а по ним — оптимальное отношение расхода абсорбента к расходу газа:

$$\frac{G_a}{G_d} = \frac{y_n^b - y_n^e}{x^e - x^b} = a\exp\left(\frac{N}{kRL}\right). \tag{5.132}$$

Найдем обратимую оценку эффективности АДЦ с источниками конечной емкости. Для этого выразим прирост энтропии системы за цикл через параметры источников, учитывая, что прирост энтропии рабочего тела за цикл равен нулю и ΔS_c равен приросту энтропии источников:

$$\Delta S = -\int\limits_0^{\bar{t}} \left(\frac{q}{T_n} - \frac{\mu_n n}{T_n}\right) dt.$$

Для системы, в которой механическая работа не совершается,

$$T_n dS_n = dE_n - \mu_n dN_n = c_n G_n dT_n + G_n dy_n. \tag{5.133}$$

Здесь мольные расходы и теплоемкости газов в абсорбере и десорбере постоянны. С учетом (5.133) получим

$$\Delta S = -c_a G_a \int\limits_{T_a^b}^{T_a^e} \frac{dT_a}{T_a} \; - \; c_d G_d \int\limits_{T_d^b}^{T_d^e} \frac{dT_d}{T_d} + $$

$$+ \; G_a \int\limits_{y_a^b}^{y_a^e} \frac{\mu_a}{T_a} \; dy_a \; + \; G_d \int\limits_{y_d^b}^{y_d^e} \frac{\mu d}{T_d} \; dy_d. \tag{5.134}$$

С учетом уравнений материального баланса

$$\begin{gathered} G_a(y_a^b - y_a^e) = G - g(y_d^e - y_d^b), \\ c_a G_a(T_a^e - T_a^b) = c_d - g G_d(T_d^b - T_d^e) \end{gathered} \tag{5.135}$$

прирост энтропии системы примет вид

$$\Delta S = -c_a G_a \ln \frac{T_a^e}{T_a^b} + c_d G_d \ln \frac{T_d^b}{T_d^e} - G_a R(y_a^b \ln y_a^b - y_a^e \ln y_a^e) +$$

$$+ \frac{G_d R}{V_\mu} \left[(y_d^e \ln y_d^e - y_d^b \ln y_d^b) - (y_d^e - y_d^b) \ln \frac{P_d}{P_a} \right]. \tag{5.136}$$

Для обратимых процессов $\Delta S = 0$, в остальных случаях $\Delta S >$ > 0. Предельное значение коэффициента эффективности дает решение задачи условной оптимизации

$$\eta = \frac{N_d}{Q_d} = \frac{G_d(y_d^e - y_d^b)}{c_d G_d(T_d^b - T_d^e)} = \frac{y_d^e - y_d^b}{c(T_d^b - T_d^e)} \to \max \tag{5.137}$$

при условиях материального баланса (5.135) и условии $\Delta S \geq 0$. Максимума величина η достигает на границе, когда $\Delta S = 0$. Варьируемыми переменными в задаче являются температуры на выходе абсорбера и десорбера T_a^e, T_d^e и концентрации y_a^e и y_d^b. Переменные T_a^b, y_a^b, T_d^b, y_d^e заданы.

Задачу (5.137) в общем случае можно решить только численно. Приведем решение для частного случая, когда параметры источников равны друг другу: $G_a = G_d$, $c_a = c_d$, $P_a = P_d$. В этом случае из уравнений материального баланса можно исключить T_a^e, y_a^e и представить задачу в форме

$$\eta = \frac{y_d^e - y_d^b}{c_d(T_d^b - T_d^e)} \to \max_{y_d^b, T_d^e} \tag{5.138}$$

при условии

$$\ln\left[\frac{T_d^b T_a^b}{(T_d^b - T_d^e + T_a^b)T_d^e}\right] - \frac{R}{c_d}(y_a^b \ln y_a^b + y_d^b \ln y_d^b) + \\ + \frac{R}{c_d}(y_a^b + y_d^b - 1)\ln(y_a^b + y_d^b - 1) = 0. \quad (5.139)$$

Решение задачи (5.138), (5.139) для процесса моноэтаноламиновой очистки газов от CO_2 при $T_a^b = 315$ К, $T_d^b = 393$ К, $y_a^b = 0,22$ кмоль/кмоль, $c_d = 41$ кДж/(кмоль $\cdot$ К) приводит к монотонной зависимости предельного значения η от T_d^e (рис. 5.21), поэтому оптимальный выбор температуры на выходе из десорбера соответствует ее максимально возможному значению. Например, при $T_d^e = 375$ К $\eta^* = 0,36$ кмоль/кДж.

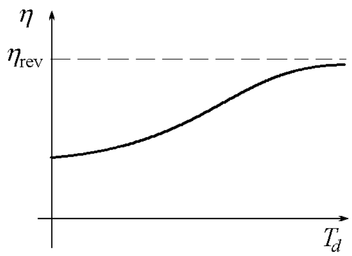


Рис. 5.21. Зависимость предельной эффективности АДЦ от температуры в десорбере

При $T_d^e \to T_d^b$, $y_d^b \to y_d^e$ величина η^* стремится к обратимой оценке коэффициента эффективности АДЦ с источниками бесконечной емкости η_{rev}.

Глава 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

Микроэкономика изучает взаимодействие экономических агентов (ЭА), каждый из которых может представлять собой совокупность индивидуумов (элементарных ЭА), усредненное поведение которых определяет характеристики ЭА. Иногда по анологии с термодинамикой мы будем говорить о системе экономических агентовв, тогда каждый из них оказывается подсистемой. В результате взаимодействия друг с другом ЭА обмениваются ресурсами, при этом каждый из них стремится максимизировать свою осознанную или не осознанную полезность, добровольно выбирая, какой ресурс, в каком количестве и на что обменивать.

В этой главе приведено описание микроэкономических систем на основе термодинамического подхода и показаны задачи, которые могут быть решены с его использованием.

6.1. Математическое описание ЭА. Основные типы ЭА и характеризующие их переменные

Состояние ЭА характеризуется вектором N запаса ресурса и количеством базисного ресурса M. При этом мы будем предпологать, что базисный ресурс M измеряется в одних и тех же единицах для всех экономических агентов (золото, международная валюта). В процессах обмена ЭА выступает как получатель, и как продавец он характеризуется функцией спроса и предложения. Функция спроса показывает, сколько i-го ресурса ЭА готов приобрести по цене c_i. Чем выше эта цена, тем, как правило, меньше спрос. Наконец, при некоторой цене $c_i = p_i$ ЭА прекращает закупки, а при $c_i > p_i$ он готов продавать i-й ресурс, причем в тем большем количестве, чем больше c_i.

Переменные N и M экстенсивные, т.е. при объединении (разделении) однородных ЭА они изменяются в одинаковой пропорции. Кроме того, ЭА характеризуется вектором интенсивных переменных — оценок $p = (p_1, ..., p_k)$ материальных ресурсов и оценки r базисного ресурса. При обьединении ЭА эти переменные выравниваются. *Оценка ресурса p_i (равновесная внутренняя цена) равна той минимальной цене в единицах базисного ресурса, по которой ЭА готов продать*

i-й ресурс, и той максимальной цене, по которой он готов его купить. Во многих случаях в микроэкономике функции спроса и предложения связывают с ценой не количество, а поток ресурса $n_i(p_i c_i)$. При этом, если положительным считать поток, направленный в сторону ЭА, то

$$\operatorname{sign} n_i(c_i, p_i) = \operatorname{sign} (p_i - c_i), \\ n_i(c_i, p_i) = 0 \quad \text{при} \quad c_i = p_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial c_i} < 0. \tag{6.1}$$

Размерность вектора цен c — единицы капитала, отнесенные к единице ресурса.

В свою очередь оценка p может зависеть от состояния ЭА и, в частности, от запасов ресурсов. Обычно, но не всегда, с ростом запаса некоторого ресурса его оценка падает. ЭА может обмениваться с окружением не только материальным, но и базисным ресурсом M. Такой обмен каждый из нас наблюдает в пунктах обмена валюты. При этом минимальная цен продажи (максимальная цена покупки) для ЭА представляет собой оценку базисного ресурса. Обозначим ее через $r(N, M)$. Для каждого из нас эта оценка индивидуальна и меняется в зависимости от жизненных обстоятельств.

Среди ЭА целесообразно выделить такие, у которых оценки p_i не зависят от запаса ресурсов. При обмене с таким ЭА количество закупаемого или продаваемого ему ресурса столь мало по сравнению с наличным запасом, что не влияет на его оценку. Такие ЭА называют рынками. Они представляют собой аналог термодинамических резервуаров.

Функция спроса и предложения рынка $n(c, p)$ зависит от цены покупки (продажи) и оценки как функция (6.1). Такой рынок называют *монопольным.* В пределе, когда для любого потока n разница между ценой и оценкой сколь угодно мала (цены для любой интенсивности потока n равны оценкам рынка), рынок называют *рынком совершенной конкуренции.*

Второй важный тип ЭА — посреднические фирмы, которые назначают цены или интенсивность продажи (покупки) товаров независимо от запаса ресурсов и стремятся сделать это таким образом, чтобы извлечь максимум базисного ресурса. Фирмы аналогичны рабочему телу тепловой машины в термодинамике. Они могут контактировать одновременно с несколькими ЭА, назначая для каждого из них свои цены или потоки. Цены посредника и функции прерывания контакта являются управляющими переменными.

Фирма может быть и производственной, в этом случае она закупает ресурсы (сырье, рабочую силу, производственные фонды) и продает продукцию, выпуск которой определяется производственной функцией того или иного типа [50] и ценой, которую фирма устанавливает. Цену, устанавливаемую фирмой на i-й вид ресурса, обозначим как c_i.

Пример микроэкономического цикла. Рассмотрим систему (рис. 6.1), состоящую из двух рынков и посредника, который на каждом из рынков выступает как монополист. Обозначим цену ресурса на первом рынке $\overline{p}_1$, на втором — $\overline{p}_2$ и предположим, что $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$.

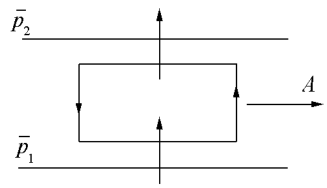


Рис. 6.1. Структура системы с посредником между двумя монопольными рынками

Начальный капитал U_1 посредник имеет в денежной форме (базисный ресурс). Цель посредника — получение прибыли на свой капитал. После покупки товара на первом рынке по цене $\overline{p}_1$ в количестве

$$\Delta N = \frac{U_1}{\overline{p}_1}$$

и продажи его на втором по цене $\overline{p}_2$ посредник получит выручку

$$U_2 = \Delta N \overline{p}_2 = \frac{U_1 \overline{p}_2}{\overline{p}_1}.$$

Его прибыль составит

$$A_0 = U_2 - U_1 = U_1 \left(\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - 1 \right) = \Delta N (\overline{p}_2 - \overline{p}_1).$$

Прибыль посредника на единицу начального капитала (норма прибыли)

$$\eta_0 = \frac{A_0}{U_1} = \frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - 1. \tag{6.2}$$

Здесь η_0 — потенциальная норма прибыли, так как темп покупок и продаж по ценам $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ сколь угодно близок к нулю.

Поток ресурса направлен от рынка с низкими ценами к рынку с высокими, подобно тому как поток тепла направлен от источника с высокой температурой T_+ к источнику с низкой температурой T_-.

Норма прибыли на вложенный капитал (6.2) представляет полную аналогию с КПД цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_-}{T_+},$$

но η_0, в отличие от КПД Карно, может быть и больше единицы.

При неограниченной продолжительности цикл посредника обратим, так как, затратив извлеченный капитал на закупку ресурса на втором рынке и продав его на первом, посредник вернет систему к прежнему состоянию без изменений в окружающей среде.

В том случае, когда задана интенсивность потоков покупок и продаж или продолжительность цикла τ, посредник будет вынужден при закупке ресурса назначать цену $c_1 > \bar{p}_1$, а при продаже снижать ее ($c_2 < \bar{p}_2$). Полученная им прибыль

$$A = \Delta N(c_2 - c_1) < A_0,$$

и процесс оказывается необратимым. Мерой необратимости (потерей прибыльности посредника) может служить разность

$$A_0 - A = \Delta N(c_1 - \bar{p}_1) + \Delta N(\bar{p}_2 - c_2). \tag{6.3}$$

Переходя к потокам ресурса n и интенсивности получения прибыли, можно записать

$$\sigma(C, P) = \frac{A_0 - A}{\tau} = n_1(c_1, p_1)(c_1 - p_1) + n_2(c_2, p_2)(c_2 - p_2). \tag{6.4}$$

Величина σ не отрицательна, так как поток n_1 направлен в сторону посредника, а выходящий поток $n_2 < 0$.

Существование функции благосостояния и диссипация капитала. Введем характеристику ЭА, соответствующую его полному капиталу U, с учетом базисного ресурса M и эквивалентного капитала $p_i N_i$, заключенного в каждом i-м ресурсе. Так что

$$U = M + \sum_i p_i N_i. \tag{6.5}$$

При равновесном обмене, когда цены закупок и продаж в единицах M сколь угодно близки к оценкам p_i, и при постоянной оценке r базисного ресурса величина U не изменяется $\left(dM = -\sum_i p_i dN_i\right)$:

$$dU = dM + \sum_i p_i dN_i = 0. \tag{6.6}$$

Пусть некоторая фирма осуществляет равновесный обмен с ЭА, меняя у него одни виды ресурса на другие. Обмен происходит обратимо и таким образом, что начальное и конечное состояния ЭА в пространстве с координатами N_i совпадают. Если бы в таком процессе фирма могла извлечь некоторое количество базисного ресурса, это означало бы, что возможности его извлечения неограниченны, так как его можно получать лишь от одного ЭА, не вызывая при этом в его состоянии и состоянии окружения никаких изменений. Из невозможности этого процесса следует, что при $r = \text{const}$

$$\oint \sum p_i(N, M)\, dN_i = 0.$$

А из этого, в свою очередь, вытекает, что существует такая функция $Q(N,r)$, частные производные которой по N_i равны p_i, а дифференциал имеет вид

$$dQ = \sum_i p_i \; dN_i + \frac{\partial Q}{\partial r} \; dr.$$

Отметим, что из факта существования функции Q в силу симметрии матрицы вторых производных (матрицы Гессе) для дважды дифференцируемой фунции нескольких переменных следуют равенства, связывающие чувствительности оценок к изменению запасов ресурсов при $dr = 0$

$$\frac{\partial p_i}{\partial N_k} = \frac{\partial p_k}{\partial N_i} \quad \forall k, i. \tag{6.7}$$

Условие (6.6) можно переписать как

$$dU = dM + dQ - \frac{\partial Q}{\partial r} \; dr = d(M+Q) - \frac{\partial Q}{\partial r} \; dr.$$

Обозначая $M + Q = Y$, а $-\dfrac{\partial Q}{\partial r} = \gamma$, получим, что

$$dU = dY + \gamma \; dr.$$

Дифференциал полного капитала является, таким образом, пфаффовой формой двух переменных, которая всегда имеет интегрирующий множитель.

Напомним, что *пфаффовой формой* называют дифференциальную форму первого порядка, т.е. сумму произведений функций нескольких переменных на дифференциалы этих переменных,

$$dK = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \; dx_i.$$

. Если $n = 2$ и функции F_i дифференцируемые, то всегда найдется, такой множитель $r(x)$, что $dS = r(x)dK$ является полным дифференциалом, т.е. S зависит от x, а $\oint dS = 0$.

Обозначим этот множитель в нашем случае через $r(N,M)$. Таким образом, существует некоторая функция состояния (экстенсивных переменных) $S(N,M)$, такая, что ее дифференциал имеет вид

$$dS = r(N,M)dU = r(N,M)\left[dM + \sum_i p_i(N,M)dN_i\right]. \tag{6.8}$$

В обратимом, т.е. осуществляемом по ценам, совпадающем с оценками ресурсов цикле обмена функция S не изменяется, так как

$$\oint dS = 0. \tag{6.9}$$

Оценки ресурсов могут быть выражены через функцию S как

$$r = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial N_i} \Big/ \frac{\partial S}{\partial M}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6.10}$$

При этом оценка базисного ресурса $r > 0$ для всех экономических агентов, а p_i могут быть и отрицательными, если i-й ресурс требует, например, утилизации или затрат на хранение.

Аналогично (6.7) r и p_i связаны равенством

$$\frac{\partial r}{\partial N_i} = \frac{\partial (r p_i)}{\partial M} \quad \forall i.$$

Функцию $S(N, M)$ называют функцией благосостояния или, короче, *благосостоянием.* Приведенное выше доказательство ее существования как следствие невозможности извлечения прибыли от торговли с одним ЭА повторяет доказательство существования энтропии в термодинамике. Применительно к микроэкономике оно проведено для случая скалярного ресурса Л.И. Розоноэром в приложении к обзору [3].

В микроэкономике часто характеризуют предпочтения экономического агента кривыми (поверхностями) безразличия. Каждая из них выделяет множество одинаково предпочтительных состояний. Получение ЭА некоторого количества базисного или иного ресурса без изменения запасов остальных переводит его состояние на более высокую кривую безразличия, оно становится предпочтительнее. В работе [130] существование S было доказано, исходя из аксиомы Вилля [180], использующей понятие предпочтения экономического агента: *в пространстве состояний $X = (N, M)$ ЭА не существует такой последовательности состояний $X_1, X_2, \ldots, X_m$, что X_i предподчтительнее, чем X_{i-1} для $i = 2, \ldots, m$, а конечное и начальное состояния совпадают, $X_1 = X_m$.*

При обмене ресурсами между экономическими агентами должны соблюдаться *условия добровольности*, заключающиеся в том, что ни одна из функций благосостояния S_ν не уменьшается (исключение — ассоциированный обмен, благотворительность). Условия добровольности делают невозможным обмен одним видом ресурса, если его оценки у контактирующих друг с другом ЭА различны.

Если функция благосостояния измеряется в национальной валюте, то величина $r > 0$ характеризует ценность для ЭА международной валюты и имеет размерность [единицы национальной валюты / единицы международной валюты]. Оценка r базисного ресурса в процессах обмена экономическим агентом денег на валютном рынке играет ту же роль, что и оценка ресурса p при обмене ресурсами.

Описание экономических систем становится формально близким к соотношениям термодинамики, если ввести «экономическую температуру»

$$T = \frac{1}{r}.$$

Такое обозначение было введено в [55], истолкованию этой величины, названной «ликвидностью», ее свойствам значительное внимание уделено в [146].

Интенсивные переменные для большинства ЭА зависят от вектора экстенсивных переменных. Зависимость $p(N, M)$ может быть найдена эксперементально по поведению ЭА в процессах обмена. Если постулируется существование функции благосостояния S, то оценки определяют через экстремальную задачу, в которую они входят, как параметры:

$$S(N, M) \to \max \Big/ \left(\sum_i p_i N_i + M \right) = V, \tag{6.11}$$

где величина V фиксирована. В этом случае решение задачи (8.69) и значения p и r связаны, как

$$p_i(N, M) = \frac{\partial S}{\partial N_i} \Big/ \frac{\partial S}{\partial M}. \tag{6.12}$$

Функция S предполагается непрерывно дифференцируемой и строго выпуклой вверх. Как следствие решение задачи (8.69) единственно, а p_i падает с ростом N_i. При таком описании ЭА подобен термодинамической подсистеме конечной емкости.

Рынок, для которого запасы ресурсов столь велики, что их изменение не сказывается на оценках, может быть охарактеризован как ЭА с функцией благосостояния вида

$$S_{R}(N, M) = r_{R} \left(\sum_i p_i N_i + M \right), \tag{6.13}$$

(сравните с уравнением состояния термодинамического резервуара в гл.1).

Функция благосостояния S отличается от функции полезности, существование которой отнюдь не очевидно, тем, что последняя зависит не от запасов ресурсов, а от интенсивности их потребления.

Вернемся к циклическому процессу взаимодействия фирмы с одним ЭА и потребуем, чтобы средняя интенсивность процессов обмена была зафиксирована. Тогда фирма при закупке ресурса вынуждена будет повышать цены по сравнению с оценками p_i, r, а продавать по ценам, которые ниже, чем эти оценки. Благосостояние ЭА при этом возрастет на

$$\Delta S = \oint dS = \int_0^{\tau} \sigma(t) dt > 0, \tag{6.14}$$

а фирма понесет убытки в количестве

$$\Delta S = \int\limits_0^\tau r(t) \left[(c_m(t) - 1) m(r, c_m) + \sum_i (c_i(t) - p_i(t)) n_i(p_i, c_i) \right] dt.$$

Здесь n_i и m — потоки, а c_i и c_m — цены материального и базисного ресурсов, при этом c_m измеряется в долях от «внутреннего курса валюты» r.

Интенсивность потерь фирмы за счет необратимости

$$\sigma(t) = r(t) \left[\sum_i n_i(p_i, c_i)(c_i - p_i) + m(r, c_m)(c_m - r) \right] \geq 0 \qquad (6.15)$$

назовем *диссипацией капитала.* При постоянстве σ и взаимодействии с двумя рынками из (6.20) следует (6.4).

Условия (6.19), (6.9) неубывания благосостояния при экономическом обмене являются аналогом интеграла Клаузиуса, а закон, согласно которому при контакте двух ЭА ресурс переходит от ЭА, для которого его оценка меньше, к ЭА, у которого его оценка больше, и при этом суммарное благосостояние не убывает $(\Delta(S_1 + S_2) \geq 0)$, является аналогом второго начала термодинамики и позволяет построить необратимую микроэкономику, во многом аналогичную термодинамике конечного времени.

Отметим, то важное обстоятельство, что для многих задач знание функции благосостояния $S(N, M)$ не обязательно, достаточно лишь знания ее дифференциала (6.8), в котором зависимость $r(N, M)$ может быть получена на основе обработки статистического материала или исходя из модельных представлений о поведении элементарных участников экономического взаимодействия. В этом отношении ситуация та же, что с уравнением состояния термодинамических систем, связывающим друг с другом энтропию, объем, внутреннюю энергию и количества веществ, содержащихся в системе. Для идеального газа уравнение состояния найдено из модельных представлений, для других систем — экспериментально.

Второй закон микроэкономики. Аналогом законов сохранения материи и энергии в микроэкономике являются законы сохранения ресурсов и капитала. Здесь мы остановимся на микроэкономической аналогии второго закона термодинамики.

Для второго закона термодинамики имеется несколько формулировок, каждая из которых может считаться следствием других. Обсудим аналоги некоторых из этих формулировок в микроэкономике.

Среди многочисленных формулировок второго начала выделим две: формулировку Клазиуса с уточнением Планка: *«Теплота сама собой не* *может переходить от тела холодного к телу более горячему без того, чтобы не осталось других изменений»*, а также формулировку Леонтовича: *«Невозможно построить устройство, в результате действия которого производилась бы положительная работа только за счет охлаждения одного тела без каких либо других изменений»*.

В микроэкономике приведенным формулировкам соответствуют следующие утверждения.

1. *Поток ресурса не может переходить от ЭА, у которого его оценка выше, к агенту с более низкой оценкой без того, чтобы не осталось других изменений.*

2. *Невозможно извлечь капитал за счет обмена ресурсами с одним ЭА без каких-либо других изменений.*

3. *В необратимом процессе в замкнутой термодинамической системе энтропия может только возрастать, а эксергия системы уменьшаться. Состоянию равновесия такой системы соответствует максимум энтропии и минимум работоспособности при условиях, отвечающих наложенным ограничениям.*

Подобное утверждение М. Планк сформулировал как следствие из второго закона термодинамики.

Аналогичноб *процессы ресурсообмена в замкнутых микроэкономических системах протекают в таком направлении, что суммарное благосостояние экономических агентов увеличивается и достигает максимума, а потенциальная возможность извлечения базисного ресурса (прибыльность) уменьшается и достигает минимума, совместимых с наложенными на систему ограничениями, в число которых входят и условия добровольности.*

Выделим еще один тип ЭА — посредника или фирму. В отличие от ЭА, у которого оценки зависят от запасов ресурсов, фирма сама устанавливает цены закупки и продажи ресурсов с целью получения максимальной прибыли. Функция благосостояния фирмы определяется количеством базисного ресурса

$$S_f = M. \tag{6.16}$$

В табл. 6.1, которая в основном совпадает с аналогичной таблицей, приведенной в [55], сведены основные аналогии между экономическими и термодинамическими системами и характеризующими их переменными.

Обозначения, принятые в таблице: T_- и T — температуры резервуара и контактирующей с ним системы, p_- — оценка ресурса на рынке совершенной конкуренции , c — цена ресурса, назначаемая фирмой, N — запас ресурса, U — внутрення энергия системы, q и g — потоки тепла и ресурса.

Т а б л и ц а 6.1. **Аналогии между термодинамическими и микроэкономическими системами и характеризующими их переменными**

Термодинамическая система		Микроэкономическая система	
Название	Обозначение	Название	Обозначение
Резервуар (обратимый теплообмен)	T_-	Рынок совершенной конкуренции	p_-
Резервуар (необратимый теплообмен)	$q = \alpha(T - T_-)$	Монопольный рынок	$g = \alpha(p - p_-)$
Энергия системы	U	Запас ресурса	N
Система с конечной емкостью, температура	$T(U)$	Экономический агент, оценка ресурса	$p(N)$
Тепловая машина, температура	$T(t)$	Фирма-посредник, цена	$c(t)$
Механическая энергия	A	Базисный ресурс	M
Эксергия системы	E	Прибыльность системы	E
Энтропия	S	Благосостояние	S
Диссипация энергии	σ	Диссипация капитала	σ

6.2. Микроэкономические балансы и равновесие

Структура уравнений. Запишем первоначально балансовые соотношения для однородной системы, т.е. для системы, любой элемент которой характеризуется одним и тем же вектором (p), а значит, отсутствует внутренний ресурсообмен. Запишем балансовые уравнения для однородной открытой экономической подсистемы, обменивающейся с окружением потоками ресурса и капитала:

— уравнения материального баланса по i-му ресурсу

$$\dot{N}_i = \sum_{j=1}^{k} n_{ij} + W_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{6.17}$$

где k — число подсистем, а W_i — скорость образования в системе i-го ресурса. Поток считается положительным, если он направлен в систему, и отрицательным, если он направлен вовне системы;

— уравнение баланса по базисному ресурсу

$$\dot{M} = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} c_{ij} n_{ij} + \sum_{j=1}^{k} m_j. \tag{6.18}$$

Здесь c_{ij} — цены покупки (продажи) i-го ресурса j-й подсистемой, m_j — поток базисного ресурса из j-й подсистемы, направленный к i-й.

Уравнение баланса по благосостоянию с учетом (6.8) примет форму

$$\dot{S} = r\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m} n_{ij}(p_i - c_{ij}) + m_j\right) + \sum_{i} W_i p_i\right\}. \tag{6.19}$$

При добровольном обмене функция благосостояния системы в среднем за цикл обмена τ не убывает. Последнее означает, что

$$\int_0^\tau \left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m} n_{ij}(p_i - c_{ij}) + m_j\right) + \sum_{i} W_i p_i\right\} r(t)dt \ge 0.$$

Это условие может быть использовано подсистемой в случае, когда ограничения, наложенные на процесс обмена, также усредняются на интервале $[0, \tau]$. В противном случае условие добровольности обмена требует неубывания $S(t)$ в каждый момент времени $\dot{S}(t) \ge 0 \quad \forall t$. В частности, если сумма денежных потоков неотрицательна, $W_i = 0$ и для любого ресурса его оценка p_i не меньше, чем средневзвешенная цена покупки

$$p_i \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} n_{ij} c_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} n_{ij}},$$

то условие добровольности обмена выполнено.

Отметим, что при записи балансовых соотношений были использованы связи между N, p, S и M, справедливые для равновесной системы. Таким образом, предполагалось, что в экономической подсистеме внутреннее равновесие устанавливается гораздо быстрее характерного времени переходных процессов (гипотеза локального равновесия).

В неоднородной системе отдельные ЭА могут иметь отличные друг от друга значения оценок всех или части ресурсов. Если все ЭА имеют по тому или иному ресурсу N_i одинаковую оценку, постоянную или зависящую от вектора суммарных ресурсов, систему будем называть *однородной по* N_i. Особенно важен случай, когда оценка базисного ресурса r всеми ЭА одинакова и постоянна. Это соответствует процессам обмена внутри экономики, где оценка базисного ресурса устанавливается централизованно (валютный курс центрального банка).

Прежде чем записывать уравнения микроэкономических балансов для открытой неоднородной системы, рассмотрим простую изолированную систему, состоящую из двух ЭА с оценками скалярного ресурса N, равными p_ν и p_j соответственно, и запишем для нее балансовые соотношения, учитывая, что для скалярного ресурса $W_j = W_\nu = 0$.

1. По ресурсу N

$$\dot{N}_\nu = n_{\nu j}, \quad \dot{N}_j = n_{j\nu} = -n_{\nu j}, \quad \dot{N} = \dot{N}_\nu + \dot{N}_j = 0.$$

2. По базисному ресурсу M

$$\dot{M}_\nu = -c_{\nu j} n_{\nu j}, \quad \dot{M}_j = -c_{j\nu} n_{j\nu}.$$

Так как промежуточная цена $c_{\nu j}$ одинакова, а потоки имеют разный знак, то

$$\dot{M} = \dot{M}_\nu + \dot{M}_j = 0.$$

Прямой обмен базисным ресурсом противоречит условию добровольности, так что $m_{\nu j} = 0$.

3. По благосостоянию

$$\dot{S}_\nu = r_\nu n_{\nu j}(p_\nu - c_{\nu j}), \quad \dot{S}_j = r_j n_{j\nu}(p_j - c_{j\nu}).$$

Для суммарной функции благосостояния

$$\dot{S} = n_{\nu j}[r_\nu(p_\nu - c_{\nu j}) + r_j(c_{\nu j} - p_j)]. \tag{6.20}$$

Для однородной системы при $\dot{N} = 0, \dot{M} = 0$ $\dot{S}$ также обращается в нуль, так что правая часть выражения (6.20) равна скорости изменения суммарной функции благосостояния, связанной с неоднородностью.

Выражение (6.20) упрощается в случае, когда система однородна по базисному ресурсу ($r_\nu = r_j = r$), и

$$\dot{S} = r(p_\nu - p_j) n_{\nu j}(p_\nu, p_j) = r\sigma^b_{\nu j}(p_\nu, p_j). \tag{6.21}$$

Величину потока обмена $n_{\nu j}$, как и промежуточную цену $c_{\nu j}$, можно определить по функциям спроса (предложения) для каждой из подсистем $n_\nu(p_\nu, c_{\nu j})$. Действительно (см. [146]), из условия

$$n_\nu(p_\nu, c_{\nu j}) = -n_j(p_j, c_{\nu j}) = n_{\nu j}$$

можно исключить $c_{\nu j}$ и получить $n_{\nu j}(p_\nu, p_j)$. Например, для линейных функций спроса

$$n_\nu(c, p_\nu) = \alpha_\nu(c_{\nu j} - p_\nu), \quad n_j(p_j, c) = \alpha_j(p_j - c_{\nu j})$$

из условия $n_\nu = -n_j$ следует, что

$$c_{\nu j}(p_j, p_\nu) = \frac{\alpha_j p_j + \alpha_\nu p_\nu}{\alpha_j + \alpha_\nu},$$

а

$$n_{\nu j}(p_j, p_\nu) = \frac{\alpha_j \alpha_\nu}{\alpha_j + \alpha_\nu}(p_\nu - p_j) = \overline{\alpha}(p_\nu - p_j).$$

Изменение функций благосостояния:

$$\begin{aligned} \dot{S}_j &= r_j n(p_j, p_\nu)(c - p_j), \\ \dot{S}_\nu &= r_\nu n(p_j, p_\nu)(p_\nu - c). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Для суммарной функции благосостояния

$$\sigma_{j\nu} = \dot{S} = \dot{S}_j + \dot{S}_\nu = n(p_j, p_\nu)[r_j(c - p_j) + r_\nu(p_\nu - c)]. \tag{6.23}$$

Для потоков, пропорциональных разности цены и оценки ресурса, имеем, исключив c,

$$\dot{S}_j = r_j \alpha_j \alpha_\nu^2 \frac{(p_\nu - p)^2}{\alpha_j + \alpha_\nu}, \quad \dot{S}_\nu = r_\nu \alpha_j^2 \alpha_\nu \frac{(p_\nu - p)^2}{\alpha_j + \alpha_\nu}.$$

Отношение $\dot{S}_j/\dot{S}_\nu = r_j\alpha_\nu/r_\nu\alpha_j$ постоянно, если оценки r_j и r_ν не зависят от объемов ресурсов.

В силу свойств функций спроса и предложения, если поток направлен к ν-й подсистеме, промежуточная цена $c_{\nu j}$ удовлетворяет неравенствам

$$p_\nu \geq c_{\nu j} \geq p_j.$$

При этом величина σ в выражении (6.23) неотрицательна. В системе, однородной по базисному ресурсу, величина σ^b измеряется в единицах этого ресурса.

Пусть в рассматриваемую систему поступают внешние потоки ресурса n^e по цене c^e и капитала m^e. Записанные выше балансовые соотношения претерпят очевидные изменения и примут вид

$$\dot{N} = n_\nu^e + n_j^e. \tag{6.24}$$

Для промежуточного потока по-прежнему $n_{\nu j} = -n_{j\nu}$ и

$$\dot{M} = -n_\nu^e c_\nu^e - n_j^e c_j^e. \tag{6.25}$$

Суммарное изменение базисного ресурса за счет промежуточных потоков обмена по-прежнему равно нулю. Изменение благосостояния:

$$\dot{S} = r_\nu n_\nu^e(p_\nu - c_\nu^e) + r_j n_j^e(p_j - c_j^e) + \sigma_{\nu j}(r_\nu, p_\nu, r_j, p_j) = \sigma^e + \sigma_{\nu j}. \tag{6.26}$$

Сумма первых двух слагаемых σ^e соответствует темпу роста функции S, связанному с внешними потоками.

Так как ЭА закупает ресурс по цене не выше, а продает по цене не ниже оценки, то при добровольном обмене с окружением $\sigma^e > 0$. Последнее слагаемое связано с необратимостью внутренних обменов, оно неотрицательно и имеет вид (6.23). Для системы, однородной по базисному ресурсу,

$$\dot{S} = r\Big[n^e_\nu(p_\nu - c^e_\nu) + n^e_j(p_j - c^e_j)\Big] + r\sigma^b_{\nu j}(p_\nu, p_j), \tag{6.27}$$

где $\sigma^b_{\nu j}$ соответствует бартерному обмену между подсистемами.

В стационарном режиме, $n^e_j = n_{\nu j} = -n^e_\nu = n$, причем для ν-й системы внешние потоки — выходные (отрицательные), а для j-й входные (положительные). Система закупает ресурс со «скидкой» $\Delta_j = p_j - c^e_j$, а продает с «наценкой» $\delta_\nu = c^e_\nu - p_\nu$. Перепишем (6.27) для стационарного режима в этих обозначениях:

$$-(n\Delta_\nu + n\Delta_j) + \sigma_{\nu j} = 0.$$

Величина, стоящая в скобках,

$$-\sigma^e = n(\Delta_\nu + \Delta_j) = \sigma_{\nu j},$$

равна убыткам торговых партнеров ЭА за счет «скидок» при продаже ему ресурса и «наценок» при покупке. Таким образом, $\sigma^b_{\nu j}$ — потери базисного ресурса (капитала) при торговле с ЭА, связанные с его неоднородностью и необратимостью процессов товарообмена, что обьясняет название этой величины как *диссипации капитала*.

Обобщим полученные соотношения и запишем балансы для векторного потока, системы, состоящей из K экономических агентов ($\gamma = 1, 2, \ldots, K$), в которую поступают внешние потоки ресурса $n^e_{\nu i}$, причем i-й ресурс в этом потоке имеет цену $c^e_{\nu i}$. В свою очередь вектор потоков между j-м и ν-м ЭА обозначим как $n_{j\nu}$.

Уравнения (6.25) и (6.26) претерпят очевидные изменения. Для каждой ν-й подсистемы

$$\dot{N}_{\nu i} = \sum_j n_{j\nu i} + \sum n^e_{\nu i} + W_{\nu i}, \quad \nu = 1, k, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.28}$$

Аналогично,

$$\dot{M}_\nu = -\sum_i n^e_{\nu i} c^e_{\nu i} + m_\nu - \sum_{j,i} n_{\nu j i} c_{\nu j i} \quad \nu = 1, \ldots, k. \tag{6.29}$$

Здесь m_ν — суммарный поток базисного ресурса в ν-ю подсистему; для внутренних потоков $n_{j\nu}$, направленных из j-й в ν-ю подсистему, роль цен играют промежуточные цены $c_{j\nu}$, определяющиеся равенством $n_{j\nu}$ и $n_{\nu j}$. Получим для $\dot{S}_\nu$

$$\dot{S}_\nu = r_\nu \left[\left(m_\nu - \sum_i n^e_{\nu i} c^e_{\nu i}\right) + \sum_{j,i} n_{j\nu i} c_{j\nu i} + \sum_{ji} p_{\nu i}(n_{j\nu i} + n^e_{\nu i} + W_{\nu i})\right].$$

Для системы в целом

$$\dot{S} = \sum_{\nu} \dot{S}_{\nu} = \sum_{\nu} r_{\nu} m_{\nu} + \sum_{\nu,i} r_{\nu} n^{e}_{\nu i}(p_{\nu i} - c_{\nu i}) +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu j i} \sigma_{\nu j i}(r_{\nu}, p_{\nu}, r_j, p_j) + \sum_{\nu,i} W_{\nu i} p_{\nu i} \right] = \dot{S}^0 + \sigma^e + \sigma = \dot{S}^0 + \sigma_{\Sigma}. \tag{6.30}$$

Здесь первое слагаемое $\dot{S}^0$ соответствует изменению суммарного благосостояния в связи с наличием внешних потоков базисного ресурса, σ_{Σ} — необратимым процессам обмена на границах и внутри системы. Суммарная необратимость $\sigma_{\Sigma} > 0$. Каждое из слагаемых $\sigma_{j\nu i}$ совершенно аналогично $\sigma_{\nu j}$, записанному в форме (6.23). Множитель 1/2 связан с тем, что каждое слагаемое вошло в сумму дважды.

Выражение для $\dot{S}$ упрощается, когда система однородна по базисному ресурсу. В этом случае в (6.30) множитель r можно вынести за знак суммы; получим

$$\sigma_{\Sigma} = r \left(\sum_{\nu,i} n^{e}_{\nu i}(p_{\nu i} - c_{\nu i}) + \frac{1}{2} \sum_{\nu,j,i} \sigma_{\nu j i} + \sum_{\nu,i} W_{\nu i} p_{\nu i} \right). \tag{6.31}$$

Для стационарной системы правые части уравнений (6.28)–(6.30) равны нулю, а в случае, когда система циклически с периодом τ изменяет свои параметры, равны нулю интегралы от правых частей балансовых уравнений на отрезке $[0, \tau]$. Для тех или иных условий, наложенных на интенсивность процессов обмена, может быть найдено значение $\sigma_{\Sigma\,\min}$. В этом случае условие $\sigma_{\Sigma} \geq \sigma_{\Sigma\,\min}$ вместе с уравнениями (6.28)–(6.30) выделяет область реализуемости системы.

Диссипация капитала для некоторых процессов и равновесие в открытых микроэкономических системах.

Обмен между рынками. Пусть система состоит из двух рынков, обменивающихся векторным ресурсом N, оценки которого на первом и втором рынках p_1 и p_2, а оценка базисного ресурса равна r. Процесс стационарный, производство отсутствует. Из (6.31) следует, что диссипация капитала в единицах базисного ресурса

$$\sigma^b = \frac{\sigma}{r} = \sum_i n_i(p_1, p_2)(p_{2i} - p_{1i}).$$

Для $n_i = \alpha_{i12}(p_{2i} - p_{1i})$ получим

$$\sigma^b = \sum_i \alpha_{i12}(p_{2i} - p_{1i})^2.$$

Стационарная открытая система. В стационарной открытой системе (рис. 6.2), равновесной по базисному ресурсу и состоящей из рынков и ЭА, общее число которых равно k, оценки ресурсов у последних

$p_{ij}(N_j, M_j)$, а потоки между ν-й и j-й подсистемами $n_{\nu j}(p_\nu, p_j)$. Для каждого из ЭА в силу (6.28) в векторной форме

$$\sum_j n_{\nu j} + n_\nu^e + W_\nu = 0, \tag{6.32}$$

где j — индекс j-й подсистемы. Диссипация капитала в соответствии с равенством (6.31):

$$\frac{\sigma_\Sigma}{r} = \frac{1}{2}\sum_{\nu,j} n_{\nu j}(p_i, p_j)(p_\nu - p_j) + \sum_\nu n_\nu^e(p_\nu - c_\nu) + \sum_\nu W_\nu p_\nu.$$

В частности, если система недалека от равновесия и потоки пропорциональны разности оценок, а скорости $W_{\nu j}$ постоянны, то аналогично обмену между рынками диссипация в единицах базисного ресурса:

$$\sigma_b = \frac{1}{2}\sum_{\nu,j,i} \alpha_{\nu ji}(p_{\nu i} - p_{ji})^2 + \sum_{i,\nu} p_{\nu i}W_{\nu i} + \sum_\nu \alpha_{\nu i}(p_{\nu i} - c_{\nu i})^2.$$

Здесь ν, j — индексы подсистем, i — индекс ресурса. Условия минимума σ_b по оценкам $p_{\nu i} (\nu = 1, ..., k)$ каждого из ЭА приводят к равенствам

$$\sum_j \alpha_{\nu ji}(p_{\nu i} - p_{ji}) + W_{\nu i} + \alpha_{\nu i}(p_{\nu i} - c_{\nu i}) = 0 \quad \forall_i, \nu,$$

что для линейных потоков совпадает с условиями равновесия (6.32). В силу выпуклости вниз выражения для σ_b в точке стационарности σ_b достигает минимума. Таким образом, справедливо утверждение: *в открытой микроэкономической системе для законов ресурсообмена, близких к линейным, в состоянии равновесия запасы ресурса и капитала между экономическими агентами распределяются таким образом, что диссипация капитала σ минимальна.* Это утверждение является аналогом теоремы Пригожина в необратимой термодинамике.

Равновесие в замкнутых системах. Рассмотрим изолированную систему из k ЭА. Начальные состояния каждого из них заданы и характеризуются вектором $M_{0\nu}, N_{0\nu} (\nu = 1, ..., k)$, а конечное состояние — вектором $\overline{M_\nu}, \overline{N_\nu}$. В силу изолированности системы справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \sum_\nu M_{0\nu} = \sum_\nu \overline{M_\nu}, \quad \sum_\nu N_{0\nu i} = \sum_\nu \overline{N_{\nu i}}, \\ \overline{M_\nu} \geq 0, \quad \overline{N_{\nu i}} \geq 0, \quad i = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{6.33}$$

Будем полагать, что справедливы сделанные выше допущения (6.1) зависимости потоков ресурсов от разности между ценой и оценкой. В процессах обмена между подсистемами роль цены играет одна из оценок контактирующих подсистем. В равновесии все потоки обращаются в нуль, следовательно, равны и оценки каждого из ресурсов у тех ЭА, для которых запас соответствующего ресурса в равновесии положителен. Обозначим эти оценки как $\bar{r}$ и $\bar{p}_i$. Если в равновесии запасы $\overline{M_\nu}$

или $\overline{N_{\nu i}}$ равны нулю, то справедливы неравенства

$$\bar{r}_\nu \le \bar{r}, \quad \bar{p}_{i\nu} \le \bar{p}_i. \tag{6.34}$$

Пусть функция благосостояния системы представляет собой сумму функций благосостояния $S_\nu(M_\nu, N_\nu)$ отдельных ЭА, а последние непрерывные, дважды дифференцируемые и строго выпуклые вверх; тогда задача

$$S = \sum_\nu S_\nu(M_\nu, N_\nu) \to \max_{M_\nu, N_\nu}$$

при условиях (6.33) имеет единственное решение $\bar{M}, \bar{N}$, удовлетворяющее равенствам

$$\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial M_\nu}\right)_{\bar{M},\bar{N}} = \bar{r}, \quad \left(\frac{\partial S_\nu}{\partial N_{\nu i}}\right)_{\bar{M},\bar{N}} = \bar{p},$$

если для всех ν и i $\overline{M_\nu}$ и $\overline{N_{\nu i}}$ положительны, и неравенствам (6.34), если конечные запасы некоторого ресурса ЭА равны нулю. Таким образом, *в состоянии равновесия изолированной системы достигает максимума аддитивная функция благосостояния S составляющих ее ЭА.*

На равновесное состояние могут быть наложены те или иные условия. Например, система может контактировать по тем или иным ресурсам с рынком, у которого оценка ресурсов постоянна. Обозначим вектор таких фиксированных оценок как $p^0 = (p_1^0, p_2^0, ..., p_{0m}^0)$. Число m не превосходит размерности пространства состояний подсистем. Тогда в равновесии для всех ЭА оценки $\bar{p}_{\nu i} = p_i^0$ выравниваются на значении, соответствующем оценкам рынка. А запасы ресурсов перераспределяются таким образом, что доставляют решение задаче

$$S = \sum_\nu S_\nu(M_\nu, N_\nu) \to \max_{M_\nu, N_\nu} \Big/ \bar{p}_{\nu i}(M_\nu, N_\nu) = p_i^0, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

причем условия (6.33) в этой задаче требуется выполнить лишь по тем видам ресурсов, по которым система изолирована от рынка.

В частности, если оценка базисного ресурса для всех подсистем одинакова и постоянна ($r_\nu = r^0$), то максимум S сводится к максимуму суммы капиталов U_ν:

$$\frac{S}{r^0} = \sum_\nu U_\nu = \sum_\nu (\bar{M}_\nu + \sum_i \bar{p}_i \bar{N}_{i\nu}) \to \max_{\bar{M}_\nu, \bar{N}_\nu}. \tag{6.35}$$

При этом $\sum\limits_\nu M_{\nu 0} \ne \sum\limits_\nu \bar{M}_\nu$.

Наконец, в состав системы может входить фирма — посредник, а экономические агенты могут контактировать только через посредника, который стремится извлечь максимальное количество базисного ресурса. Так как посредник может извлекать базисный ресурс в любой системе, где есть разница между оценками материального ресурса у подсистем, содержащих ненулевой его запас, то для всех i и ν

$$\bar{p}_{i\nu}(\bar{N}_\nu, \bar{M}_\nu) = \bar{p}_i, \quad \bar{N}_{\nu i} > 0,$$

$$\bar{p}_{i\nu}(0, \bar{M}_\nu) \le \bar{p}_i, \quad \bar{N}_{\nu i} = 0.$$

При этом условии извлеченный ресурс должен быть максимален (оставшийся минимален):

$$\bar{M}_\Sigma = \sum_\nu \bar{M}_\nu \to \min_{\bar{N}_\nu, \bar{M}_\nu}.$$

Кроме того, для самого посредника начальное и равновесное состояния должны быть одинаковы. На оптимальном решении обмен с ЭА должен протекать равновесно (цены закупок и продаж сколь угодно мало отличаются от их оценок). Если для некоторых ресурсов имеет место контакт с рынком, то по ним оценки в равновесии равны рыночным. Примеры задач о предельном извлечении базисного ресурса приведены ниже.

6.3. Задачи извлечения базисного ресурса, прибыльность

В выражении, связывающем функцию благосостояния ЭА с объемами ресурсов

$$\frac{S}{r} = M + \sum_i p_i N_i = Q,$$

каждое из слагаемых имеет размерность базисного ресурса. Пусть ЭА может контактировать с окружением, интенсивные переменные которого обозначим как $\bar{r}$ и $\bar{p}$. Если ЭА переходит из начального в некоторое близкое к нему состояние, то извлеченное при этом количество базисного ресурса

$$\delta E^0 = -\delta M_\Sigma = -(\delta M + \delta\overline{M}) = \left[\frac{\delta S}{r} + \frac{\delta\overline{S}}{\overline{r}} - \sum_i (p_i \delta N_i - \overline{p}_i \delta\overline{N}_i)\right].$$

Но так как процесс обратим $(\delta S + \delta\overline{S}) = 0, \quad \delta\overline{N}_i = -\delta N_i$, то

$$\delta E^0 = \delta S \left(\frac{1}{\overline{r}} - \frac{1}{r}\right) + \sum \delta N_i (p_i - \overline{p}_i). \tag{6.36}$$

Если процесс в подсистеме необратим, прирост благосостояния увеличится:

$$\delta S = -\delta\overline{S} + \sigma, \quad \sigma > 0.$$

Из формулы (6.36) следует, что в необратимом процессе извлеченный базисный ресурс

$$dE = dE^0 - \frac{\sigma}{\overline{r}}.$$

Интегрируя это равенство вдоль траектории системы, получим общее количество извлеченного базисного ресурса:

$$E = E^0 - \frac{\Delta S}{\overline{r}}. \tag{6.37}$$

Равенство (6.37) — аналог формулы Стодолы в термодинамике, связывающей работу в обратимом и необратимом процессах и абсолютную температуру окружающей среды.

Прибыльностью системы назовем максимальное количество базисного ресурса, которое может быть извлечено из системы, при тех или иных ограничениях.

При этом под системой понимается один или несколько экономических агентов и их окружение (рынок).

При таком определении прибыльности существенную роль играют ограничения, наложенные на процесс. Приведем некоторые из возможных ограничений.

1. Кроме начального состояния могут быть заданы конечные состояния всех или некоторых ЭА.

2. Могут быть зафиксированы условия однородности по тем или иным интенсивным переменным (p_i, r) с внешней средой.

3. Зафиксирована продолжительность процесса.

Эти и иные ограничения уменьшают величину прибыльности. Внешняя среда с постоянными оценками $\overline{r}$ и $\overline{p}$ может отсутствовать. О прибыльности системы в смысле данного определения можно говорить и в этом случае.

Для некоторых систем задача расчета прибыльности при отсутствии ограничений не имеет решения. К таким системам относятся системы с более чем одним рынком, так как в них посредник может извлечь сколь угодно большое количество базисного ресурса. Отметим, что прибыльность в системе с одним рынком при заданном начальном состоянии системы ЭА и отсутствии ограничений на продолжительность процесса является аналогом эксергии, широко использующейся при анализе технологических систем.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из k ЭА, каждый из которых располагает некоторым запасом ресурса N_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и базисного ресурса M_i. Оценка ресурса p_i зависит от N_i и M_i. Одной из подсистем может быть рынок, для которого оценка ресурса p_- постоянна [71].

Будем предполагать, что система замкнута. При контакте i-й и j-й подсистем возникают потоки ресурса n_{ij} и капитала m_{ij}. При этом поток ресурса направлен от подсистемы с меньшей оценкой к подсистеме с большей оценкой, а поток капитала направлен навстречу потоку ресурса.

В системе имеется фирма (посредник), ее целью является такая организация ресурсообмена, при которой фирма извлекает из системы некоторое количество капитала M. В дальнейшем мы будем предполагать, что непосредственный обмен ресурсами между экономическими агентами невозможен, фирма назначает цены покупки и продажи ресурса, стремясь при этом добиться максимума М, а потоки закупок и продаж зависят от цены c_i, предложенной фирмой i-й подсистеме, и оценки p_i подсистемой i-го ресурса, т.е.

$$n_i = n_i(p_i, c_i), \quad n_i = 0 \quad \text{при} \quad p_i = c_i, \qquad \operatorname{sign}(n_i) = \operatorname{sign}(c_i - p_i).$$

Знак потока будем считать положительным, если он направлен в сторону фирмы. Очевидно, что поток капитала

$$m_i(p_i, c_i) = -c_i n_i(p_i, c_i).$$

Запасы ресурса и капитала в i-й подсистеме изменяются как

$$\dot{N}_i = -n_i(p_i, c_i), \quad N_i(0) = N_{i0},$$
$$\dot{M}_i = c_i n_i(p_i, c_i), \quad M_i(0) = M_{i0}.$$

Будем предполагать, что оценки $p_i(N_i, M_i)$ монотонно уменьшаются с ростом N_i при фиксированном M_i и, как правило, растут с ростом M_i при фиксированном N_i. Впрочем, оценка ресурса может быть и независимой от объема капитала экономического агента. Найдем, какой объем базисного ресурса может извлечь фирма за сколь угодно большое и за конечное время для случаев, когда в системе имеется рынок и когда его нет.

Продолжительность процесса не ограничена.

В системе имеется рынок. Обозначим через p_- стоимость ресурса на рынке, тогда при $t \to \infty$ оценки ресурса всех ЭА стремятся к p_-. Из условий равновесия при $t \to \infty$ имеем

$$p_i(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = p_-, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{6.38}$$

Здесь через $\overline{N_i}$, $\overline{M_i}$ обозначены равновесные запасы ресурса и капитала.

Фирма при отсутствии ограничения на продолжительность процесса закупает ресурс по цене, сколь угодно близкой к оценке p_i, поэтому

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -p_i(N_i, M_i), \qquad M_i(N_{i0}) = M_{i0}. \tag{6.39}$$

Прибыльность экономической системы — предельное количество извлеченного базисного ресурса

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{k}(M_{i0} - \overline{M_i}) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} p_i(N_i, M_i(N_i))dN_i. \tag{6.40}$$

Условия (6.37), (6.39) определяют $2k$ неизвестных $\overline{N_i}$ $\overline{M_i}$, а значит, и E_∞.

П р и м е р. Рассмотрим систему, состоящую из двух ЭА и рынка. Заданы начальные запасы ресурса и капитала для ЭА — N_{i0}, M_{i0}, $i = 1, 2$, и стоимость ресурса на рынке p_-.

Пусть оценки ресурса для агентов имеют вид

$$p_i = \alpha_i \frac{M_i}{N_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Система (6.39) перепишется как

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\alpha_i \frac{M_i}{N_i}, \qquad M_i(N_{i0}) = M_{i0};$$

отсюда находим $M_i(N_i)$

$$M_i = \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\alpha_i}}{N_i^{\alpha_i}}, \qquad i = 1, 2.$$

Равновесные запасы ресурса $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ определим из условия равновесия, которое примет вид

$$\alpha_i \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\alpha_i}}{\overline{N_i}^{\alpha_i+1}} = p_-, \qquad i = 1, 2.$$

Получим

$$\overline{N_i} = \left(\frac{\alpha_i}{p_-} M_{i0} \cdot N_{i0}^{\alpha_i}\right)^{1/(\alpha_i+1)}, \qquad i = 1, 2,$$

и соответствующие им равновесные запасы капитала

$$\overline{M_i} = \frac{p_-}{\alpha_i} \overline{N_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{6.41}$$

Из условий (6.41) получим предельное количество извлеченного капитала E_∞ для рассматриваемой системы. Прибыльность системы определяется равенством (6.40).

В системе отсутствует рынок. В этом случае при $t \to \infty$ оценки ресурса в подсистеме оказываются одинаковыми и равными некоторому значению $\overline{p}$. Вместо условий равенства оценок рыночным имеем

$$p_i(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = \overline{p}, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{6.42}$$

Значение $\overline{p}$ нужно определить по условию равенства нулю изменения запаса ресурса фирмы (она продает все, что покупает), т.е.

$$\sum_{i=1}^{k} (\overline{N_i} - N_{i0}) = 0. \tag{6.43}$$

Равенства (6.42), (6.43) наряду с уравнениями (6.39) позволяют найти векторы $\overline{N}$, $\overline{M}$ и $\overline{p}$, определяющие максимум извлеченного капитала E_∞ в этом случае.

П р и м е р. Рассмотрим ту же систему, что в предыдущем примере. Начальные запасы ресурса и капитала заданы: N_{10}, N_{20}, M_{10}, M_{20}. Зависимости оценок от текущих запасов M_i и N_i $(i = 1, 2)$ имеют вид

$$p_1 = \alpha \frac{M_1}{N_1}, \qquad p_2 = \beta \frac{M_2}{N_2}.$$

С учетом этих зависимостей уравнения (6.39) примут вид

$$\frac{dM_1}{dN_1} = -\alpha \frac{M_1}{N_1}, \quad M_1(N_{10}) = M_{10},$$

$$\frac{dM_2}{dN_2} = -\beta \frac{M_2}{N_2}, \quad M_2(N_{20}) = M_{20}.$$

Решая эти уравнения, находим $M_1(N_1)$ и $M_2(N_2)$:

$$M_1 = \frac{M_{10} \cdot N_{10}^{\alpha}}{N_1^{\alpha}}, \quad M_2 = \frac{M_{20} \cdot N_{20}^{\beta}}{N_2^{\beta}}.$$

Пользуясь условиями (6.42) и (6.43), найдем количество ресурса $\overline{N}_i$ у каждого агента после завершения обмена. Эти условия перепишутся как

$$N_{10} + N_{20} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2,$$

$$\alpha \frac{M_{10} N_{10}^{\alpha}}{\overline{N}_1^{\alpha+1}} = \beta \frac{M_{20} N_{20}^{\beta}}{\overline{N}_2^{\beta+1}}.$$

Для частного случая, когда $\alpha = \beta = \gamma$, получим решение этой системы

$$\overline{N}_1 = \frac{(N_{20} + N_{10}) \cdot (M_{10} N_{10}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)}}{(M_{10} N_{10}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)} + (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)}},$$

$$\overline{N}_2 = \frac{(N_{20} + N_{10}) \cdot (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)}}{(M_{10} N_{10}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)} + (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)}}.$$

Значения $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ определяют равновесные запасы капитала

$$\overline{M}_1 = (M_{10} \cdot N_{10}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)} \cdot W,$$

$$\overline{M}_2 = (M_{20} \cdot N_{20}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)} \cdot W,$$

где

$$W = \left(\frac{(M_{10} N_{10}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)} + (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{1/(1+\gamma)}}{N_{20} + N_{10}} \right)^{\gamma}.$$

Подстановка этих выражений в (6.40) позволяет найти прибыльность системы.

При обмене ресурсом без посредника не изменяется как суммарный ресурс, так и суммарный капитал, и устанавливается единая для всей системы оценка ресурса $\overline{p}$. Уравнения (6.39) примут форму

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\overline{p}, \qquad i = 1, ..., k,$$

Так что

$$\overline{M_i} = M_{i0} - \overline{p}(\overline{N} - N_{i0}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

После подстановки этих выражений в условия (6.42), (6.43) они определяют $\overline{N_i}$ и $\overline{p}$.

Продолжительность ресурсообмена ограничена. Будем предполагать, что продолжительность ресурсообмена задана и равна τ. В этом случае фирма вынуждена повышать цены закупки ресурса и снижать цену продажи по сравнению с равновесными оценками p_i. Это приведет к необратимым потерям и уменьшит величину извлеченного капитала. Его максимально возможное значение E_τ окажется меньше, чем E_∞. Их различие

$$\Delta S = (E_\infty - E_\tau) > 0$$

характеризует необратимость процесса ресурсообмена.

Условие оптимальности закупок (*продаж*). Рассмотрим обмен между фирмой и ЭА и выясним, как следует менять цену продажи ресурса, чтобы за фиксированное время τ продать количество ресурса ΔN с максимальной выручкой. Ясно, что тем же условиям будет отвечать и цена покупки ресурса у ЭА, если фирма стремится затратить как можно меньше капитала. И в том, и в другом случае объем капитала ЭА в конце процесса $M(\tau)$ должен быть минимален.

Задача формулируется как

$$\overline{M} = M(\tau) \to \min_c \tag{6.44}$$

при условиях

$$\overline{N} = N(\tau) = N_0 - \Delta N, \tag{6.45}$$

$$\frac{dM}{dN} = -c, \tag{6.46}$$

$$\int_0^\tau dt = \int_{\overline{N}}^{N_0} \frac{dN}{n(p(N,M),c)} = \tau. \tag{6.47}$$

Для перехода от dt к dN использована зависимость

$$\frac{dN}{dt} = -n(p,c),$$

в которой поток n на интервале $(0,\tau)$ не обращается в нуль.

В задаче (6.44)–(6.47) требуется найти такую зависимость $c^*(N)$, при которой прирост капитала ЭА окажется минимальным.

Запишем условия оптимальности для этой задачи в форме принципа максимума в предположении невырожденности решения ($\psi_0 = 1$):

— функция Гамильтона

$$H = -\psi c + \lambda \frac{1}{n(c,p(N,M))};$$

— уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\psi}{dN} = -\frac{\partial H}{\partial M} = -\lambda \frac{\partial n/\partial p(\partial p/\partial M)}{n^2(c,p(N,M))}, \quad \psi(\overline{N}) = 0; \tag{6.48}$$

— условие максимума по c для выпуклой вверх и дифференцируемой функции H

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\psi + \lambda \frac{\partial n / \partial c}{n^2(c, p(N, M))} = 0.$$

Исключая ψ, с учетом (6.47) и сокращая λ получим условие оптимальности закупок (продаж). Они имеют вид

$$\frac{d}{dN}\left[\frac{\partial n/\partial c}{n^2(p,c)}\right] = \frac{\partial n/\partial p \cdot (\partial p/\partial M)}{n^2(p,c)} \tag{6.49}$$

и определяют $c(N, M)$ с точностью до константы, вычисляемой по условию (6.46).

В случае, когда оценка ресурса p зависит только от его запаса N $(\partial p/\partial M = 0)$, условие (6.41) упрощается и примет форму

$$\frac{\partial n/\partial c}{n^2(p,c)} = \text{const}. \tag{6.50}$$

Так, в случае, когда

$$n(p,c) = \alpha(c-p), \tag{6.51}$$

из условия (6.49) при продаже ресурса получим

$$c_\tau^*(N, \overline{N}) = p(N) - \frac{\overline{N} - N_0}{\alpha\tau}, \tag{6.52}$$

а вырученный при продаже капитал равен

$$E_\tau(\overline{N}) = E_\infty(\overline{N}) - \frac{(\overline{N} - N_0)^2}{\alpha\tau}, \tag{6.53}$$

где E_∞ — капитал, который фирма могла бы получить при $\tau \to \infty$, продавая ресурс по равновесным ценам $c(N) = p(N)$. Функция $E(\tau)$ показана на рис. 6.2.

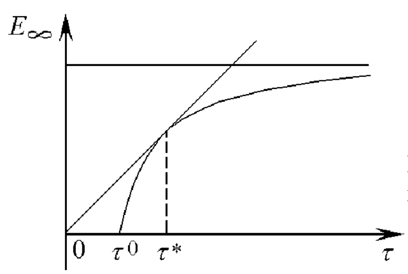


Рис. 6.2. Зависимость прибыльности от продолжительности процесса

При $\tau < \tau_0 = \dfrac{\Delta N^2}{\alpha E_\infty}$ фирма вынуждена доплачивать покупателю. При $\tau^* = 2\tau_0$ средняя интенсивность прибыли $e(\tau) = \dfrac{E(\tau)}{\tau}$ максимальна и равна

$$e^* = \frac{\alpha}{4}\left[\frac{E_\infty(\overline{N} - N_0)}{\overline{N} - N_0}\right]^2.$$

Потери капитала по сравнению с равновесным процессом оценивает уменьшение прибыльности (диссипация капитала):

$$\sigma = n(p, c)(p - c). \tag{6.54}$$

Величина диссипативных потерь определяется как ($r = 1$)

$$\Delta S(\tau) = \int\limits_0^\tau \sigma(t)\, dt = \int\limits_0^\tau n(p, c)(p - c)\, dt. \tag{6.55}$$

Для примера, рассмотренного выше, эти потери равны

$$\Delta S(\tau, \overline{N}) = \int\limits_0^\tau \alpha(p(N) - c(N))^2\, dt = \frac{(\overline{N} - N_0)^2}{\alpha\tau},$$

так что (сравните с равенством (6.36) при $\overline{r} = 1$)

$$E(\tau) = E_\infty(\overline{N}) - \Delta S(\tau, \overline{N}) = E_\infty(\overline{N}) - \int\limits_0^\tau n(p, c)(p - c)\, dt. \tag{6.56}$$

Выражение (6.56) справедливо для произвольной зависимости $n(p, c)$. Действительно, при переходе от dt к dN интеграл в (6.55) перепишется как

$$\Delta S(\overline{N}) = S(\overline{N}) - S(N_0) = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} (p(N) - c_\tau(N, \overline{N}))\, dN.$$

В свою очередь извлеченный капитал равен

$$E(\tau, \overline{N}) = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} c_\tau(N, \overline{N})\, dN, \quad E_\infty(\overline{N}) = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} p(N)\, dN. \tag{6.57}$$

Из сравнения этих равенств следует выражение (6.56). Таким образом, оптимальные процессы закупок (продаж) являются процессами минимальной диссипации, а условие (6.49) выделяет эти процессы.

Извлечение максимальной прибыли в системе ЭА. В этом случае задача сводится к закупке (продаже) ресурса у каждого из экономических агентов. Процесс закупки (продажи) должен протекать оптимально с точки зрения извлечения (затрат) капитала, так что цена c и оценка ресурса p должны в любой момент времени удовлетворять условиям (6.49), (6.50). Объемы закупок ΔN_i у каждого из m ЭА должны выбираться оптимально и удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^m \overline{N_i} = \sum_{i=1}^m N_{i0}. \tag{6.58}$$

Рынок можно считать одной из подсистем, у которой оценка p_- не зависит от запасов ресурса и капитала, а значит, для любых зависимостей $n(c, p_-)$ оптимальная цена c при закупке и продаже на таком рынке должна быть неизменна во времени.

Задача об извлечении максимума капитала за ограниченное время в замкнутой микроэкономической системе сводится, таким образом, на первом этапе к решению m задач (6.44)–(6.47) об оптимальных закупках (продажах) для каждой из подсистем при фиксированных начальных и конечных запасах ресурса (N_{i0} и $\overline{N_i}$). Максимальное количество полученного капитала (минимальное количество затраченного) $E_i(\tau)$ зависит от $\overline{N_i}$. На втором этапе необходимо найти оптимальные значения $\overline{N_i}$ из условия

$$\sum_{i=1}^{m} E_i(\tau, \overline{N_i}) \to \max_{\overline{N_i}} \tag{6.59}$$

при условии (6.58). Условия оптимальности задачи(6.58), (6.59) имеют вид

$$\frac{\partial E_i(\tau, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} = \Lambda, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Значение Λ находят из (6.58).

С учетом выражения (6.57) получим

$$\frac{\partial E_i(\tau, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} = c_{i\tau}(\overline{N_i}, \overline{N_i}) + \int\limits_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} \frac{\partial c_{i\tau}(N_i, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} dN_i = \overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}). \tag{6.60}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой оптимальную цену в момент τ, второе слагаемое корректирует эту цену. Оно определяется усредненным значением чувствиттельности оптимальной цены к количеству реализованного ресурса. Выражение (6.60) назовем скорректированной ценой. Условие для оптимального выбора объемов закупок (продаж) примет форму равенства скорректированных цен для всех подсистем:

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}) = \Lambda, \quad i = 1, ..., m. \tag{6.61}$$

П р и м е р. Проиллюстрируем последовательность решения задачи на примере, когда для каждой из подсистем

$$p_i = \frac{h_i}{N_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.62}$$

$$n_i(c, p) = \alpha_i(c_i - p_i), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.63}$$

Найдем капитал, который можно извлечь из i-й подсистемы за сколь угодно большое время. Из выражения (6.57) с учетом (6.62) имеем

$$E_{i\infty}(\overline{N_i}) = h_i \int\limits_{N_i 0}^{\overline{N_i}} \frac{dN_i}{N_i} = h_i \ln \frac{\overline{N_i}}{N_{i0}}, \quad i = 1, ..., m.$$

Согласно равенству (6.57)

$$E_i(\tau, \overline{N_i}) = h_i \ln \frac{\overline{N_i}}{N_{i0}} - \frac{(\overline{N_i} - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}. \tag{6.64}$$

Условие (6.61) оптимального выбора $\overline{N_i}$ примет форму

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}) = \left[p_i(\overline{N_i}) - \frac{\overline{N_i} - N_{i0}}{\alpha\tau}\right] - \frac{\overline{N_i} - N_{i0}}{\alpha\tau} = \Lambda. \tag{6.65}$$

Задача сильно упрощается, когда все подсистемы имеют постоянные оценки $p = \text{const}$. Тогда условие оптимальности (6.65) приводит к равенствам

$$p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau}(\overline{N_i} - N_{i0}) = \Lambda \to \Delta N_i = \frac{\alpha_i \tau}{2}(p_i - \Lambda). \tag{6.66}$$

Из условия (6.58) значение Λ равно средневзвешенной оценке ресурса

$$\Lambda = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i},$$

а

$$\overline{N_i^*} = \frac{\tau \alpha_i}{2} \left(p_i - \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu} \right) + N_{i0}. \tag{6.67}$$

После подстановки в (6.66) $\overline{N_i^*}$ получим значение максимально возможного капитала $E_i(\tau, \overline{N_i^*})$, который может быть извлечен из подсистемы за время τ. Прибыльность системы

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^{m} \left[p_i(\overline{N_i^*} - N_{i0}) - \frac{(\overline{N_i}^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau} \right]$$

с учетом (6.67) для оценок, не зависящих от запасов ресурса, равна

$$E_\tau^* = \frac{\tau}{4}(p_i^2 - \Lambda^2).$$

В большинстве случаев оценки с ростом запаса ресурса уменьшаются, и прибыльность представляет собой монотонную выпуклую вверх функцию продолжительности закупок.

Глава 7

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСРЕДНИКА

Посреднические структуры играют в микроэкономике важную роль. Устанавливаемые ими цены ресурсов при обмене с ЭА являются управляющими воздействиями в оптимизационных задачах микроэкономики. При выборе цен посредническая фирма, как правило, стремится максимизировать свою прибыль, т.е. извлечь максимум базисного ресурса. Подобную задачу решают торговые посредники, финансовые посредники (банки, конторы обмена валюты), производственные фирмы (посредники между производителями сырья, рынками рабочей силы и оборудования и потребителями продукции). В предыдущей главе были рассмотрены задачи об извлечении базисного ресурса в системах, содержащих не более одного стационарного рынка совершенной конкуренции. В этой главе мы рассмотрим системы без этого ограничения для стационарных и нестационарных рынков.

7.1. Посредник между двумя подсистемами

Два стационарных рынка. Рассмотрим процесс обмена ресурсами между двумя рынками с неизменными во времени оценками ресурсов, осуществляемый через посредника. Требуется определить интенсивность такого обмена, а также цены, которые назначает посредник при покупке ресурса у одной и при продаже другой подсистеме в тех или иных условиях. При этом возможны два случая. В первом посредник поочередно взаимодействует с каждой из подсистем. Здесь он может назначать не только цены, но и продолжительность взаимодействия с каждой из них. Во втором случае закупка и продажа ресурса происходят непрерывно, и посредник распоряжается лишь ценами. Цены на первом и втором рынках обозначим через $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$, причем $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$. Кинетика обмена характеризуется зависимостью

$$g(\overline{p}, p) = \alpha(\overline{p}, p)(\overline{p} - p). \tag{7.1}$$

При этом цена рынка $\overline{p}$ принимает значения $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$, а цены, назначаемые посредником при покупке и продаже ресурса p, являются искомыми переменными.

Максимальная интенсивность прибыли. Целью деятельности посредника является средняя за цикл интенсивность извлечения базисного ресурса, которую он стремится максимизировать.

Поочередная покупка и продажа ресурса. Рассмотрим первоначально случай поочередного взаимодействия посредника с каждым из рынков. Интенсивность получения дохода N равна среднему за цикл значению произведения потока ресурса на цену посредника:

$$N = \frac{1}{T}\int_0^T pg(\overline{p}, p)\, dt = \overline{pg(\overline{p}, p)} \to \max. \tag{7.2}$$

При этом посредник продает на втором рынке все, что покупает на первом:

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(\overline{p}, p)\, dt = \overline{g(\overline{p}, p)} = 0. \tag{7.3}$$

Мы пришли к усредненной задаче нелинейного программирования с одним условием. Для ее решения (см. гл. 9) необходимо составить функцию Лагранжа исходной задачи

$$L = pg(\overline{p}, p) - \lambda g(\overline{p}, p). \tag{7.4}$$

Обозначим функцию L через L_ν при $\overline{p} = \overline{p}_\nu$ и потребуем максимума каждой из функций L_ν по p. Получим

$$\frac{dg(p_\nu, p)}{dp}(p - \lambda) + g(p_\nu, p) = 0, \quad \nu = 1, 2. \tag{7.5}$$

Эти уравнения позволяют найти оптимальные (базовые) значения $p^*_{\text{п}\nu}(\overline{p}_\nu, \lambda)$. После их подстановки в λ_ν получим $L^*_1(\overline{p}_1, \lambda)$ и $L^*_2(\overline{p}_2, \lambda)$. Оптимальное значение λ^* соответствует условию

$$\min_\lambda \max_{\overline{p}_\nu} L^*_\nu(\overline{p}_\nu, \lambda), \tag{7.6}$$

а оптимальные значения цен закупки и продажи равны

$$p_1 = p^*_\text{п}(\lambda^*, \overline{p}_1), \quad p_2 = p^*_\text{п}(\lambda^*, \overline{p}_2),$$

причем

$$p_1 > \overline{p}_1, \quad p_2 < \overline{p}_2.$$

Проведем решение для случая, когда коэффициент α в (7.1) зависит только от цены рынка, т.е. при $\overline{p} = \overline{p}_1$ коэффициент $\alpha = \alpha_1$, а при $\overline{p} = \overline{p}_2$ коэффициент $\alpha = \alpha_2$. Функция L примет вид

$$L = \alpha(\overline{p})(\overline{p} - p)(p - \lambda).$$

Условия (7.5) запишутся как

$$-\alpha_\nu(p - \lambda) + \alpha_\nu(\overline{p}_\nu - p) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

откуда

$$p^*_{n\nu} = \frac{\overline{p}_\nu + \lambda}{2}, \quad \nu = 1, 2. \tag{7.7}$$

Подставляя в L эти значения p, получим

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha_1\Big(\overline{p}_1 - \frac{\overline{p}_1+\lambda}{2}\Big)\Big(\frac{\overline{p}_1+\lambda}{2} - \lambda\Big) = \alpha_1\Big(\frac{\overline{p}_1-\lambda}{2}\Big)^2,\\ L_2 &= \alpha_2\Big(\frac{\overline{p}_2-\lambda}{2}\Big)^2. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Так как $p^*_{n1} > \overline{p}_1$, а $p^*_{n2} < \overline{p}_2$, функция L^*_2 уменьшается с ростом λ, а L^*_1 увеличивается. Минимум по λ от максимума из двух этих функций достигается в точке равенства L^*_1 и L^*_2:

$$L^*_1(\lambda) = L^*_2(\lambda) \Rightarrow \sqrt{\alpha_1}(\overline{p}_1 - \lambda) = -\sqrt{\alpha_2}(\overline{p}_2 - \lambda).$$

Функции L^*_1 и L^*_2 показаны на рис. 7.1. Их максимум выделен. Мини-

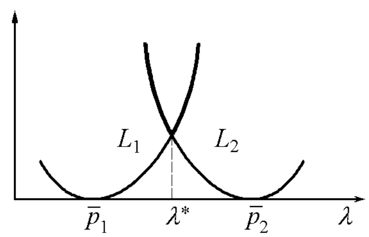


Рис. 7.1 Характер изменения максимального по $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ значения функции Лагранжа

мум по λ от $\max\limits_i L^*_1(\lambda)$ достигается в точке λ^*. Отсюда

$$\lambda^* = \frac{\overline{p}_1\sqrt{\alpha_1} + \overline{p}_2\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \tag{7.9}$$

Чтобы найти доли от общего времени цикла, в течение которых следует производить закупки и продажи, нужно выражения (7.7) и (7.9) подставить в (7.3). Получим

$$\gamma_1\alpha_1(\overline{p}_1 - p^*_{n1}) + \gamma_2\alpha_2(\overline{p}_2 - p^*_{n2}) = \\ = \frac{\gamma_1\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{\alpha_2}(\overline{p}_1 - \overline{p}_2)}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}} + \frac{\gamma_2\alpha_2}{2}\frac{\sqrt{\alpha_1}(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}. \tag{7.10}$$

В частности, при $\alpha_1 = \alpha_2 \quad \lambda^* = \dfrac{\overline{p_1} + \overline{p_2}}{2}$.

Оптимальные цены закупки и продажи определяются после подстановки λ^* в выражение (7.7). Так, для случая $\alpha_1 = \alpha_2$

$$p^*_{\text{п}1} = \frac{3\overline{p}_1 + \overline{p}_2}{4}, \quad p^*_{\text{п}2} = \frac{3\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{4}.$$

Норма прибыли при этом

$$\eta = \frac{p^*_{\text{п}2}}{p^*_{\text{п}1}} - 1 = \frac{3\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{3\overline{p}_1 + \overline{p}_2} - 1,$$

что, естественно, меньше, чем ее равновесное значение $\eta_0 = \dfrac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - 1$.

Предельная интенсивность получения дохода

$$N^* = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})}\Big[\sqrt{\alpha_2(\overline{p}_2^2 - \lambda^{*2})} + \sqrt{\alpha_1}(\overline{p}_1^2 - \alpha^{*2})\Big]. \tag{7.11}$$

При реализации экономического цикла ограничением может быть средний поток капитала, затрачиваемого посредником на приобретение ресурса. Этот поток равен

$$U = p_1 g(\overline{p}_1, p_1)\gamma_1. \tag{7.12}$$

Для кинетики обмена, рассмотренной выше, в оптимальном цикле

$$U^* = \alpha_1 \frac{\lambda^{*2} - \overline{p}_1^2}{4} \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \tag{7.13}$$

Константа λ^* в (7.11) и в (7.13) определена равенством (7.9).

Если на поток затрачиваемого посредником капитала имеется ограничение типа $U \le U^{\max}$ и величина $U^{\max}$ меньше, чем U^*, то равенство (7.12) нужно ввести в задачу в форме еще одного ограничения. Полученная в результате решения такой задачи интенсивность дохода N, естественно, окажется меньше, чем N^*. Если же $U^{\max} \ge U^*$, то посреднику нет смысла тратить весь капитал, в данном цикле он использует только часть его, равную U^*. В этом случае максимуму N соответствует максимальная норма прибыли на вложенный капитал. Задача в такой постановке рассмотрена ниже.

Одновременная закупка и продажа ресурса. При непрерывной закупке и продаже ресурса посреднической фирмой ей нужно выбрать такие цены p_1 и p_2, чтобы интенсивность получения прибыли

$$\overline{N} = p_2 g_2(\overline{p}_2, p_2) + p_1 g_1(\overline{p}_1, p_1) \tag{7.14}$$

была максимальна при условии полной продажи всего закупленного, а именно

$$g_1(\overline{p}_1, p_1) + g_2(\overline{p}_2, p_2) = 0. \tag{7.15}$$

Решение этой задачи нелинейного программирования приводит к соотношению, которому должны удовлетворять оптимальные цены:

$$\frac{g_1(\overline{p}_1, p_1)}{\dfrac{\partial g_1}{\partial p_1}} + p_1 = \frac{g_2(\overline{p}_2, p_{\text{п}2})}{\dfrac{\partial g_2}{\partial p_2}} + p_2. \tag{7.16}$$

В том случае, когда $g_\nu = \alpha_\nu(\overline{p}_\nu - p_{\text{п}\nu})\,(\nu = 1, 2)$, условие (7.71) примет вид

$$2p_1 - \overline{p}_1 = 2p_2 - \overline{p}_2,$$

что вместе с условием (7.70)

$$\alpha_1(\overline{p}_1 - p_1) = -\alpha_2(\overline{p}_2 - p_2)$$

позволяет найти цены закупок и продаж:

$$p^*_{\text{п}1} = \frac{\alpha_1\overline{p}_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\frac{\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{2}, \tag{7.17}$$

$$p^*_{\text{п}2} = \frac{\alpha_2\overline{p}_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\frac{\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{2}. \tag{7.18}$$

Интенсивность получения прибыли

$$\overline{N}^* = \frac{\alpha_1\alpha_2(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}. \tag{7.19}$$

Нетрудно видеть, что при одинаковых α_ν значение $\overline{N}^*$ вдвое больше, чем N^*, найденная выше (см. (7.66)), что естественно, так как потоки ресурсов одинаковы, а продолжительность продаж составляет половину времени цикла. Для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ отношение $\overline{N}^*/N^* < 2$.

Векторный ресурс. При поочередном взаимодействии посредника с рынками и при отсутствии ограничений на интенсивность затрат капитала задача (7.2), (7.3) примет форму

$$N = \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i g_i(\overline{p}, p_i)} \to \max_{p,\overline{p}}, \quad \overline{g_i(\overline{p}, p)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это усредненная задача с n условиями. Число базовых решений у нее не превосходит $n + 1$. Для ее решения первоначально нужно решить вспомогательную задачу

$$L = \sum_{i=1}^{n}[g_i(\overline{p}, p)(p_i - \lambda_i)] \to \min_\lambda \max_{p,\overline{p}}, \quad \overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2).$$

Решение этой задачи сильно упрощается, если для каждого из векторов рыночных цен $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ функция L оказывается строго выпуклой вверх по p, что позволяет найти цены посредника на каждом из рынков, решая уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial p_\nu}(p_i - \lambda_i) + g_\nu(\overline{p}_j, p) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 1, n.$$

Если $g_i = g_i(\overline{p}_i, p_i)$, то задача с векторным ресурсом может быть разбита на n независимых задач, подобных (7.2), (7.3), и все полученные результаты остаются справедливыми. При этом равенство (7.9) справедливо для каждого λ_i, а в выражении (7.11) для N^* стоит сумма по i, каждое из слагаемых в которой положительно. Норму прибыли можно найти по формуле

$$\eta = \frac{N^*}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(\overline{p}_{i1}, p_i)p_i\right)_{\gamma_1}}.$$

То же относится и к задаче с одновременным взаимодействием посредника с рынками.

Особенности векторного случая становятся существенными, когда интенсивность затрат капитала ограничена значением, меньшим того, которое соответствует максимальной интенсивности получения прибыли N^*. Этот случай рассмотрен в следующем пункте.

Посредник между двумя ЭА. В том случае, когда посредник взаимодействует не с рынками, а с ЭА, цены закупок и продаж должны изменяться. Поставленная задача распадается на три подзадачи: оптимальное взаимодействие посредника с первой и второй подсистемами, а также согласование этих двух процессов за счет оптимального подбора общих для них параметров; важно при этом, что каждый из двух процессов взаимодействия (покупка и продажа) должен удовлетворять условиям минимума экономической диссипации, полученным выше (см. гл. 6).

Рассмотрим сначала цикл с поочередной покупкой и продажей ресурса, введя следующие обозначения: C_1, C_2 — емкости первого и второго ЭА; $p_i(t)(i = 1, 2)$ — их оценки; $p(t)$ — цена посредника; τ_i $(i = 1, 2)$ — продолжительность взаимодействия с i-й подсистемой. В результате решения требуется оптимально выбрать τ_1 и τ_2 так, чтобы общая продолжительность была равна заданному значению τ, а также оптимально найти объем закупаемого ресурса Δx. Критерием оптимальности является прибыль, полученная за цикл:

$$I = \int\limits_0^{\tau_2} p_2(t)g(p_2, p_2)dt - \int\limits_0^{\tau_1} p_1(t)g_1(p_1, p_1)dt \to \max \tag{7.20}$$

при условиях

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau, \tag{7.21}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{g_1(p_1, p_1)}{C_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{g_2(p_2, p_2)}{C_2}, \quad p_i(0) = \overline{p}_i, \tag{7.22}$$

$$\int_0^{\tau_1} g_1(p_1, p_1)dt = \int_0^{\tau_2} g_2(p_2, p_2)dt = \Delta x. \tag{7.23}$$

Продемонстрируем последовательность решения для линейной кинетики товарообмена, когда

$$\begin{aligned} g_2(p_2, p_2) &= \alpha_2(p_2 - p_2), \\ g_1(p_1, p_1) &= \alpha_1(p_1 - p_1). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Из результата гл. 6 следует, что для каждого из полуциклов в оптимальном процессе поток ресурса должен быть постоянен, и, как следствие, равновесные цены покупок и продаж линейно изменяются во времени:

$$p_1^*(t) = \overline{p}_1 + \frac{\Delta x}{\tau_1 C_1}\, t, \quad t \in [0, \tau_1], \tag{7.25}$$

$$p_2^*(t) = \overline{p}_2 - \frac{\Delta x}{\tau_2 C_2}\, t, \quad t \in [0, \tau_2]. \tag{7.26}$$

Закупочная цена выше $p_1^*(t)$ на величину $\delta_1 = \Delta x/\tau_1\alpha_1$ и ниже $p_2^*(t)$ на $\delta_2 = \Delta x/\tau_2\alpha_2$, так что

$$\begin{aligned} p_{\text{п}1}^*(t) &= \overline{p}_1 + \frac{\Delta x}{\tau_1}\Big(\frac{t}{C_1} - \frac{1}{\alpha_1}\Big), \\ p_{\text{п}2}^*(t) &= \overline{p}_2 - \frac{\Delta x}{\tau_2}\Big(\frac{t}{C_2} + \frac{1}{\alpha_2}\Big). \end{aligned} \tag{7.27}$$

Эти зависимости после их подстановки в критерий (7.20) позволяют вычислить величину прибыли как функцию от τ_1, τ_2 и Δx и максимизировать ее при условии (7.21). Получим

$$I = \Delta x(\overline{p}_2 - \overline{p}_1) - \Delta x^2\left(\frac{1}{\tau_1\alpha_1} + \frac{1}{\tau_2\alpha_2} + \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2}\right). \tag{7.28}$$

Первое из слагаемых в этом выражении соответствует равновесной прибыли при обмене между двумя рынками, второе же характеризует потери за счет конечного времени обмена и конечных емкостей экономических систем. Чтобы найти распределение времен τ_1 и τ_2, нужно решить задачу

$$\Big(\frac{1}{\tau_1\alpha_1} + \frac{1}{\tau_2\alpha_2}\Big) \to \min \Big/ \tau_1 + \tau_2 = \tau. \tag{7.29}$$

Ее решение, как легко видеть, приводит к соотношениям

$$\tau_1^* = \tau\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \tau_2^* = \tau\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}},$$

так что

$$\frac{1}{\alpha_1\tau_1^*} + \frac{1}{\alpha_2\tau_2^*} = \frac{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}{\tau}\Big(\frac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}\Big). \tag{7.30}$$

Оптимальный объем закупок Δx с учетом (7.30) после максимизации I по Δx равен

$$\Delta x^* = \frac{(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)\tau}{\tau\Big(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\Big) 2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})\Big(\dfrac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2}} + \dfrac{1}{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}\Big)}. \tag{7.31}$$

Максимальная прибыль:

$$I^* = \frac{(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)^2\tau}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})\Big(\dfrac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2}} + \dfrac{1}{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}\Big) + 2\Big(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\Big)\tau}. \tag{7.32}$$

Чем больше продолжительность цикла, тем меньше интенсивность получения дохода $N^* = I^*/\tau$.

При одновременной покупке и продаже ресурса посреднической формой продолжительности процессов покупки и продажи τ_1 и τ_2 должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{\theta} g_1(p_1, p_1)\, dt \geq \int_0^{\theta} g_2(p_2, p_2)\, dt \tag{7.33}$$

для любого $\theta \in [0, \tau]$. Так как с ростом продолжительности τ_1 и τ_2 поток ресурса в оптимальном процессе уменьшается, а общая величина передаваемого ресурса Δx одна и та же при продаже и покупке, то, как правило, $\tau_1 \leq \tau_2$. В частности, для линейной кинетики товарообмена соотношение (7.33) выполнено как равенство, при этом $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Цены покупок и продаж изменяются в соответствии с равенствами (7.27), а величина прибыли соответствует выражению (7.28) после подстановки в (7.27), (7.28) вместо τ_1 и τ_2 продолжительности процесса τ.

Оптимальному решению соответствуют значения

$$\Delta x^* = \frac{\overline{p}_2 - \overline{p}_1}{\dfrac{2}{\tau}\Big(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}\Big) + \Big(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\Big)}, \tag{7.34}$$

$$I^* = \frac{(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)^2}{\dfrac{4}{\tau}\Big(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}\Big) + 2\Big(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\Big)}. \tag{7.35}$$

Предельная норма прибыли. Если требуемая прибыль M меньше I^*, то можно сформулировать задачу нахождения режима, который обеспечивает эту прибыль при минимуме затрат капитала:

$$
\begin{gathered}
I_1 = \int\limits_0^{T_1} p_1 g(\overline{p}_1, p_1) dt \to \min, \\
\int\limits_0^{T_1} p_2 g(\overline{p}_2, p_2) dt - \int\limits_{T_1}^{T} p_1 g(\overline{p}_1) dt = M.
\end{gathered}
\tag{7.36}
$$

Эта задача во многом похожа на предыдущую. Для полуциклов покупки и продажи должны выполняться те же условия минимума диссипации капитала. Различия возникают на стадии соединения частей цикла. Задача стыковки полуциклов примет вид

$$
I_1^*(\tau_1, \Delta x) \to \min_{\Delta x, \tau_1}, \quad \Big/ I_2^*(\tau_1, \Delta x) - I_1^*(\tau_1, \Delta x) = M. \tag{7.37}
$$

Это дает такие же выражения для τ_1^*, τ_2^*, как и выше. Объем закупок:

$$
\Delta x^*(\lambda) = \frac{\lambda(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - \overline{p}_1}{\lambda\Big(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{2}{\alpha_1 \tau_1^*} + \dfrac{2}{\alpha_2 \tau_2^*}\Big) + \Big(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{2}{\alpha_2 \tau_2^*}\Big)}.
$$

Подстановка $\Delta x^*(\lambda)$ в (7.37) приводит к уравнению для нахождения λ^*, а значит, и оптимального объема закупок.

Учет ограничения на интенсивность затрат. В том случае, когда предельные возможности посредника по закупке ресурса ограничены, его оптимальному поведению соответствует получение максимальной прибыли N при фиксированном значении затрат на закупку ресурса. Так как норма прибыли

$$
\eta = \frac{N}{U},
$$

то задача эквивалентна максимизации η при некотором значении U или N.

Рассмотрим первоначально цикл с поочередным контактом посредника с двумя рынками. Кинетику обмена ресурсами примем в форме (7.24) и запишем формальную постановку задачи как

$$
N = [\alpha_2 \gamma_2 (\overline{p}_2 - p_2) p_2 - \alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \overline{p}_1) p_1] \to \max \tag{7.38}
$$

при фиксированных затратах

$$
U = \alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \overline{p}_1) p_1 \le U^{\max} \tag{7.39}
$$

и ненакоплении ресурса посредником:

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \overline{p}_1) = \alpha_2 \gamma_2 (\overline{p}_2 - p_2), \\
\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_i \ge 0, \quad i = 1, 2.
\end{gathered}
\tag{7.40}
$$

Условие (7.39) можно считать равенством, если $U^{\max}$ не превышает затрат U^*, значение которых найдено выше (см. (7.13)).

После стандартных выкладок условие, которому должны удовлетворять цены закупок p_1 и продаж p_2, примет форму

$$\alpha_1(p_1-\overline{p}_1)^2(2p_2-\overline{p}_2)=\alpha_2(\overline{p}_2-p_2)^2(2p_1-\overline{p}_1). \tag{7.41}$$

Оно вместе с ограничениями (7.39), (7.40) определяет $p_1, p_2, \gamma_1, \gamma_2$.

При совмещении процессов покупки и продажи ресурса ограничение на затраты однозначно определяет p_1, p_2, а значит, и прибыль N. Для кинетики обмена ресурсами в форме (7.24) имеем

$$\begin{gathered} p_1=0,5\overline{p}_1+\sqrt{0,25\overline{p}_1^2+\frac{U^{\max}}{\alpha_1}}, \\ p_2=\overline{p}_2-\frac{U^{\max}}{p_1\alpha_2}, \end{gathered} \tag{7.42}$$

$$N=U^{\max}\frac{p_2}{p_1}=U^{\max}\left(\frac{\overline{p}_2}{p_1}-\frac{U^{\max}}{p_1^2\alpha_2}\right). \tag{7.43}$$

Выбор ассортимента. Для векторного ресурса, когда ограничен общий поток затрат, возникает задача о выборе оптимального ассортимента и цен на каждый i-й вид ресурса:

$$N=\sum_{i=1}^{n}N_i(U_i)\to\max\Bigg/\sum_i U_i=U^{\max},\quad U_i\geq 0. \tag{7.44}$$

Здесь U_i — затраты, выделяемые на закупку i-го ресурса, а зависимость N_i от U_i определяется равенствами (7.42), (7.43) при подстановке в них вместо $U^{\max}$ значения U_i. Условие оптимального выбора ассортимента

$$\frac{dN_i}{dU_i}=\mathrm{const},\quad i=1,\ldots,n,$$

примет с учетом (7.42), (7.43) форму

$$\begin{gathered} \frac{\overline{p}_{2i}}{p_{\text{n}1i}}-\frac{2U_i}{p_{\text{n}1i}^2\alpha_{2i}}+\frac{U_i}{2\alpha_{1i}}\left(\frac{2U_i}{\alpha_{2i}p_{\text{n}1i}^3}-\frac{\overline{p}_{2i}}{p_{\text{n}1i}^2}\right)\frac{1}{\sqrt{0,25\overline{p}_{i1}^2+U_i/\alpha_{1i}}}=\mathrm{const}, \\ i=\overline{1,n},\quad p_{\text{n}1i}=0,5\overline{p}_{1i}+\sqrt{0,25\overline{p}_{1i}^2+U_i/\alpha_{1i}}, \\ \sum_{i=1}^{n}U_i=U^{\max}. \end{gathered} \tag{7.45}$$

Решение системы (7.45) позволяет найти оптимальный ассортимент закупаемых ресурсов, распределение средств на их закупку и цены.

7.2. Обмен с нестационарными рынками

Посредник может получать прибыль, не только осуществляя экономический цикл между рынками с различными ценами, но и контактируя с одним рынком в том случае, когда цена ресурса на этом рынке изменяется во времени. Характерным примером является рынок сельскохозяйственной продукции, стоимость которой зависит от сезона и от урожайности в текущем году. Для такого обмена посредник должен иметь запас базисного ресурса и склад для хранения продукта, которым он обменивается с рынком. Другим характерным примером является покупка и продажа на бирже ценных бумаг, курс которых изменяется под действием множества порой случайных факторов. Структура системы показана на рис 7.2, где обозначено: $p_0(t)$ — равновесная цена рынка, $p(t)$ — цена посредника, $A(t)$ и $K(t)$ — запасы ресурса и капитала (базисного ресурса) соответственно.

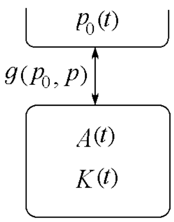


Рис. 7.2. Структура системы извлечения прибыли посредником за счет нестационарности рынка

Задача о предельной прибыли. Требуется найти такой закон изменения во времени цены посредника $p(t)$, чтобы прирост его капитала за период τ был максимален. Формальная постановка задачи имеет вид:

Прирост капитала посредника за время τ

$$I(\tau) = \int_0^\tau -g\Big(p_0(t), p(t)\Big) p(t) dt \to \max_{p(t)\geq 0} . \tag{7.46}$$

Скорость его изменения

$$\dot{K}(t) = -g\Big(p_0(t), p(t)\Big) p(t), \quad K(0) = K_0. \tag{7.47}$$

Изменение объема ресурса

$$\dot{A}(t) = g\Big(p_0(t), p(t)\Big), \quad A(0) = A_0. \tag{7.48}$$

Обьемы ресурса и капитала неотрицательны, в качестве положительного направления потока принята закупка ресурса.

Будем предполагать, что посредник не накапливает ресурса, т.е. $A(\tau) = A(0)$, или

$$\int_0^\tau -g(p_0(t), p(t))\ dt = 0. \tag{7.49}$$

При отсутствии капитала он не покупает ресурс, а при отсутствии ресурса он не продает его, так что

$$g(p_0(t), p(t)) \le 0, \quad \text{при} \quad K = 0, \qquad g(p_0(t), p(t)) \ge 0, \quad \text{при} \quad A = 0. \tag{7.50}$$

Таким образом, задача сводится к максимизации прироста капитала при ограничениях (7.47)–(7.50), управлением является цена посредника $p(t)$, а переменными состояния — объемы запасов ресурса и капитала.

Оценка предельной прибыли. Наибольшую сложность при решении задачи (7.47)–(7.50) представляют ограничения (7.50), так как именно наличие этих условий приводит к необходимости учитывать дифференциальные уравнения (7.47), (7.48). Чтобы обойти эти трудности, мы первоначально ослабим ограничения задачи, предположив, что начальные запасы K_0 и A_0 столь велики, что условия (7.50) несущественны, или, что то же самое, посредник может в случае необходимости получить неограниченный беспроцентный заем. Так как уравнения (7.47), (7.48) являются ляпуновскими (т.е. A и K не входят в правые части этих уравнений (см. гл. 9)), то без ограничений (7.50) их можно не учитывать, а найдя оптимальный закон изменения цен $p^*(t)$, из уравнений (7.47), (7.48) получить оптимальные $A^*(t)$ и $K^*(t)$. Полученное при этом значение максимального прироста капитала $I^*(\tau)$ будет оценкой сверху для прироста капитала, найденного с учетом всех ограничений.

После решения задачи (7.46), (7.49) оценим вероятность выхода системы за границы, определяемые ограничениями (7.50).

Функция Лагранжа для задачи (7.46), (7.49) запишется в форме

$$L(p_0, p) = -g(p_0, p)p + \lambda g(p_0, p) = g(p_0, p)(\lambda - p).$$

Условие ее стационарности по p приводит к уравнению

$$\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}(\lambda - p) - g(p_0, p) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{g(p_0, p)}{\dfrac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}} + p = \lambda. \tag{7.51}$$

С помощью условия (7.49) исключим константу λ из соотношения (7.51). Для этого преобразуем (7.49) как

$$\int_0^\tau g(p_0(t), p(t))\, dt = \int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}(\lambda - p)\, dt = \lambda \int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, dt - \int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, p\, dt = 0,$$

откуда

$$\lambda = \left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, p\; dt \right) : \left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\; dt \right). \tag{7.52}$$

Подставляя (7.52) в (7.51), получаем уравнение, связывающее оптимальную цену $p^*(t)$ с $p_0(t)$:

$$g(p_0, p^*) = \frac{\partial g}{\partial p} \left(\left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, p^* dt \right) : \left(\int_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\; dt \right) - p^* \right). \tag{7.53}$$

Выпишем явные выражения для $p^*(p_0)$ и $I^*(\tau)$ в случае, когда поток покупок (продаж) линеен относительно разности цен:

$$g(p_0, p) = \alpha(p - p_0), \tag{7.54}$$

где α — некоторая положительная константа. Условие (7.53) примет вид

$$g^* = \frac{\alpha}{\tau} \int_0^\tau p\; dt - p(t).$$

Обозначая среднюю цену ресурса за время τ как $\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau p\; dt = \overline{p}$ и учитывая, что в силу (7.49) $\overline{p} = \overline{p_0}$, получим на оптимальном решении

$$g^* = \alpha(p(t) - p_0(t)) = \alpha(\overline{p}_0 - p(t)),$$

откуда

$$p^*(t) = \frac{1}{2}(\overline{p}_0 + p_0(t)). \tag{7.55}$$

Оптимальный поток ресурса равен

$$g^*(p_0, p^*) = \alpha(p^*(t) - p_0(t)) = \frac{\alpha}{2}(\overline{p}_0 - p_0(t)). \tag{7.56}$$

Таким образом, оптимальный поток ресурса пропорционален отклонению его цены от ее среднего за период τ значения.

Вычислим верхнюю оценку для интенсивности прибыли:

$$\begin{aligned} J^* = \frac{I^*(\tau)}{\tau} &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau -g^*(p_0(t), p^*(t)) p^*(t)\; dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\alpha}{2}(p_0 - \overline{p}_0) \frac{1}{2}(p_0 + \overline{p}_0)\; dt = \frac{\alpha}{4\tau} \int_0^\tau (p_0^2 - \overline{p}_0^2)\; dt = \\ &= \frac{\alpha}{4\tau} \int_0^\tau (p_0 - \overline{p}_0)^2\; dt = \frac{\alpha}{4} D_{p_0}. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Полученные соотношения имеют смысл и в том случае, когда $p_0(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс с математическим ожиданием $\overline{p}_0$, дисперсией D_{p_0} и плотностью распределения $\mu(p_0)$ на множестве V возможных значений p_0. Формула (7.53) для оптимального потока ресурса после перехода от усреднения по времени к усреднению по множеству примет вид

$$g(p_0, p^*) = \left(\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}\right)_{p^*} \left(\frac{M\left[\dfrac{\partial g}{\partial p}\, p\right]}{M\left[\dfrac{\partial g}{\partial p}\right]} - p^*\right). \tag{7.58}$$

Здесь через $M[\cdot]$ обозначено математическое ожидание выражения, стоящего в скобках, по p_0. Так,

$$M\left[\frac{\partial g}{\partial p}\, p\right] = \int\limits_V \mu(p_0) \frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}\, p\, dp_0.$$

Таким образом, (7.58) представляет собой интегральное уравнение, связывающее p^* и p_0 для любого t. Эта связь зависит от распределения p_0.

Для линейной кинетики ресурсообмена (7.54) уравнение (7.58) кардинально упрощается. При любом законе распределения $p^*(t)$ зависит только от $\overline{p}_0$, а предельная интенсивность прибыли, как следует из (7.57), равна

$$J^*(\tau) = \frac{\alpha}{4} D_{p_0}. \tag{7.59}$$

Оптимизация цен посредника при перепродаже ресурса. Рассмотрим теперь модель, в которой происходит одновременная покупка и продажа ресурса по разным ценам. Пусть $\hat{p}$ и $\check{p}$ — предельные цены (верхняя и нижняя соответственно) клиентов, $p_+(t)$ — цена покупки, $p_-(t)$ — цена продажи. Поскольку посредник не может продавать ресурс по цене выше, чем максимальная цена клиентов, и покупать ресурс по цене ниже, чем минимальная цена клиентов, то должны выполняться неравенства

$$p_-(t) \le \hat{p}_0, \quad p_+(t) \le \check{p}_0.$$

Задача максимизации интенсивности получения прибыли может быть формализована как

$$J = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \Big[g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+\Big] dt \to \max_{p_+, p_-}. \tag{7.60}$$

Здесь $g_-(\hat{p}_0, p_-)$ и $g_+(\check{p}_0, p_+)$ — потоки продаж и покупок ресурса.

Как и в предыдущей модели, мы считаем, что посредник не накапливает ресурс. Условие ненакопления ресурса запишется как

$$\Delta A = \int\limits_0^\tau \Big[g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)\Big]\,dt = 0. \tag{7.61}$$

При истощении капитала или ресурса потоки покупок и продаж связаны неравенствами

$$\begin{gathered} g_+(\check{p}_0, p_+)p_+ \le g_-(\hat{p}_0, p_-)p_-, \quad K = 0, \\ g_+(\check{p}_0, p_+) \ge g_-(\hat{p}_0, p_-), \quad A = 0. \end{gathered} \tag{7.62}$$

Изменения запасов ресурса и капитала определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{gathered} \dot{A}(t) = g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-), \quad A(0) = A_0, \\ \dot{K}(t) = g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+, \quad K(0) = K_0. \end{gathered} \tag{7.63}$$

В том случае, когда A_0 и K_0 велики, вероятность истощения запасов капитала и ресурса пренебрежимо мала, поэтому неравенства (7.62) можно отбросить. Уравнения (7.63) не содержат в правых частях A и K, и в этом случае их можно не учитывать при выборе оптимальных цен p_+^* и p_-^*.

Решим задачу (7.60), (7.61). Функция Лагранжа запишется как

$$L = g_-(\hat{p}_0, p_-)(p_- - \lambda) - g_+(\check{p}_0, p_+)(p_+ - \lambda).$$

Условия ее стационарности по p_+ и p_- приводят к соотношениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial g_+\Big(\check{p}_0(t), p_+(t)\Big)}{\partial p_+}\,[p_+(t) - \lambda] + g_+\Big(\check{p}_0(t), p_+(t)\Big) = 0, \\ \frac{\partial g_-\Big(\hat{p}_0(t), p_-(t)\Big)}{\partial p_-}\,[p_-(t) - \lambda] + g_-\Big(\hat{p}_0(t), p_-(t)\Big) = 0. \end{gathered} \tag{7.64}$$

Если решение этих двух уравнений единственно и соответствует максимуму L, то из уравнений (7.64) получаем

$$\begin{gathered} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) = -\frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}\,(p_+(t) - \lambda), \\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) = -\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-}\,(p_-(t) - \lambda). \end{gathered}$$

Подставим эти выражения в (7.61):

$$\Delta A = \int\limits_0^\tau \Big[g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)\Big]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-}p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}p_+(t)\right]\,dt +$$

$$+\lambda\int\limits_0^\tau\left[\frac{\partial g_-(\hat p_0(t),p_-(t))}{\partial p_-}-\frac{\partial g_+(\check p_0(t),p_+(t))}{\partial p_+}\right]dt=0,$$

откуда выразим λ:

$$\lambda=\frac{\int\limits_0^\tau\left[\frac{\partial g_-(\hat p_0(t),p_-(t))}{\partial p_-}p_-(t)-\frac{\partial g_+(\check p_0(t),p_+(t))}{\partial p_+}p_+(t)\right]dt}{\int\limits_0^\tau\left[\frac{\partial g_-(\hat p_0(t),p_-(t)}{\partial p_-}-\frac{\partial g_+(\check p_0(t),p_+(t))}{\partial p_+}\right]dt}. \tag{7.65}$$

Исключив λ из уравнений (7.64) и (7.65), получим систему уравнений для нахождения оптимальных $p_+^*(t)$ и $p_-^*(t)$.

Найдем решение для линейной зависимости потока покупки (продажи) от разности цен в форме:

$$\begin{aligned} g_+(\check p_0(t),p_+(t)) &= \alpha_+(p_+(t)-\check p_0(t)),\\ g_-(\hat p_0(t),p_-(t)) &= \alpha_-(p_-(t)-\hat p_0(t)), \end{aligned} \tag{7.66}$$

где α_+, α_- — некоторые положительные константы.

Уравнения (7.64) примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_+(p_+-\lambda)+\alpha_+(p_+-\check p_0) &= 0,\\ \alpha_-(p_--\lambda)+\alpha_-(p_--\hat p_0) &= 0. \end{aligned}$$

Подставив в эти уравнения значение λ, получим оптимальное решение

$$p_+^*(t)=\frac12(\lambda+\check p_0)=\frac12\left[\frac{\alpha_+\overline{p}_++\alpha_-\overline{p}_-}{\alpha_++\alpha_-}+\check p_0(t)\right],$$

$$p_-^*(t)=\frac12(\lambda+\hat p_0)=\frac12\left[\frac{\alpha_+\overline{p}_++\alpha_-\overline{p}_-}{\alpha_++\alpha_-}+\hat p_0(t)\right].$$

В выражениях для p_+^* и p_-^* содержатся их средние значения $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$ на интервале $[0,\tau]$. Мы можем избавиться от $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$, усреднив левые и правые части в этих равенствах. В результате получим систему уравнений с двумя неизвестными $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$

$$\overline{p}_+=\frac{\alpha_+\overline{p}_++\alpha_-\overline{p}_-}{2(\alpha_++\alpha_-)}+\frac{\overline{\check p}_0}{2},\quad \overline{p}_-=\frac{\alpha_+\overline{p}_++\alpha_-\overline{p}_-}{(\alpha_++2\alpha_-)}+\frac{\overline{\hat p}_0}{2},$$

откуда

$$\overline{p}_+=\frac{(2\alpha_++\alpha_-)\overline{\check p}_0+\alpha_-\overline{\hat p}_0}{2(\alpha_++\alpha_-)},\quad \overline{p}_-=\frac{\alpha_+\overline{\check p}_0+(\alpha_++2\alpha_-)\overline{\hat p}_0}{2(\alpha_++\alpha_-)}.$$

Таким образом, зная $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$, можем выразить оптимальные значения p_+^* и p_-^* только через $\check{p}_0(t)$ и $\hat{p}_0(t)$ и их средние значения:

$$p_+^*(t) = \frac{1}{2}\,\check{p}_0(t) + \frac{\alpha_+\overline{\check{p}}_0 + \alpha_-\overline{\hat{p}}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad p_-^*(t) = \frac{1}{2}\,\hat{p}_0(t) + \frac{\alpha_+\overline{\check{p}}_0 + \alpha_-\overline{\hat{p}}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}. \quad (7.67)$$

Найдем теперь верхнюю оценку интенсивности получения прибыли:

$$J = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Big[g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+\Big]dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Big[-\alpha_-\Big(p_-^*(t) - \hat{p}_0(t)\Big)p_-^*(t) - \alpha_+\Big(p_+^*(t) - \check{p}_0(t)\Big)p_+^*(t)\Big]\,dt. \quad (7.68)$$

В том случае, когда цены $\hat{p}_0$ и $\check{p}_0$ представляют собой стационарные случайные процессы, полученные соотношения справедливы и могут быть обобщены, как это сделано выше для обмена с одним рынком. Для кинетики в форме (7.66) выражения (7.67) остаются в силе, если под $\overline{\hat{p}_0}$ и $\overline{\check{p}_0}$ понимать математические ожидания этих процессов, а оценка для интенсивности получения прибыли (7.68) перепишется как

$$J^* = \frac{1}{4}(\alpha_+ D_{\check{p}_0} + \alpha_- D_{\hat{p}_0}) + \frac{\alpha_+\alpha_-}{4(\alpha_+ + \alpha_-)}(\overline{\check{p}}_0 - \overline{\hat{p}}_0)^2,$$

где

$$D_{\check{p}_0} = \overline{\check{p}_0^2} - (\overline{\check{p}}_0^2), \quad D_{\hat{p}_0} = \overline{\hat{p}_0^2} - (\overline{\hat{p}}_0^2)$$

есть дисперсии случайных величин $\check{p}_0$ и $\hat{p}_0$.

Оценка вероятности истощения запаса ресурса. Для того чтобы выяснить, насколько грубой является полученная выше оценка (7.57), найдем вероятность истощения запаса ресурса $A(t)$ в предположении, что $p_0(t)$ является гауссовым стационарным случайным процессом с корреляционной функцией вида

$$R_{p_0}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha|\tau|].$$

Нетрудно показать, что для линейной зависимости (7.54) потока закупок от разности цен этот поток при $p = p^*(p_0)$ также является гауссовым случайным процессом с корреляционной функцией

$$R_{g^*}(\tau) = \frac{\alpha^2}{4}R_{p_0}(\tau) = \frac{\alpha^2\sigma^2}{4}\exp(-\alpha|\tau|).$$

Такой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S_{g^*}(w) = \frac{2\alpha D_{p_0}}{\alpha^2 + w^2} = \frac{2\alpha\dfrac{\alpha^2\sigma^2}{4}}{\alpha^2 + w^2} = \frac{\alpha^3\sigma^2}{2(\alpha^2 + w^2)}.$$

Спектральная плотность процесса $A(t)$, связанного с $g^*(t)$ уравнением (7.48), имеет вид

$$S_A(w) = \frac{\tilde{A}_0 - S_g(w)}{w^2}.$$

Константа $\tilde{A}_0$ имеет смысл математического ожидания процесса $A(t)$ и выбирается из условия ограниченности дисперсии. Дисперсия процесса $A(t)$

$$D_A = \int_0^\infty S_A(w)dw$$

ограничена при $\tilde{A}_0 = \dfrac{\alpha\sigma^2}{2}$, и величина D_A при таком выборе

$$D_A = \frac{\sigma^2}{4}. \tag{7.69}$$

Вероятность истощения запаса ресурса равна вероятности того, что отрицательные отклонения $A(t)$ от $\tilde{A}_0$ превысят величину начального запаса:

$$P(A(t) \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A dA = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{D_A}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(A - \tilde{A}_0)^2}{2D_A}\right] dA =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2(A - \frac{\alpha\sigma^2}{2})^2}{\sigma^2}\right] dA.$$

Одной из возможных (близкой к оптимальной) стратегий выбора $p(t)$ является выбор по формуле (7.66) для тех моментов времени, когда $A(t) > 0$, и выбор $p(t)$ из условия равенства $g(t)$ нулю для случая, когда $A(t) = 0$. Средняя интенсивность получения прибыли в этом случае с учетом того, что при $g(t) = 0$ $\dot{K} = 0$, равна

$$\check{J}(A_0) = \check{J}^*\Big(1 - P(A_0)\Big),$$

и она может служить нижней оценкой для достижимой интенсивности прибыли посредника. При стремлении A_0 к бесконечности оценки сближаются друг с другом.

Аналогичный анализ можно провести для вероятности выполнения второго из неравенств (7.50) (истощение капитала). Однако в отличие от $A(t)$ величина капитала $K(t)$ возрастает, и вероятность того, что $K(t)$ обратится в нуль, со временем уменьшается.

Полученные оценки показывают, какие характеристики рыночных цен нужно прогнозировать для выбора оптимальных потоков и цен покупки и продажи ресурса. Подход может быть обобщен на многопродуктовые модели, где наряду с выбором цен нужно определить ассортимент закупок и продаж.

7.3. Предельная прибыль посредника с учетом задержки поставок и платежей

Рассмотрим систему, состоящую из двух рынков и посреднической фирмы, действующей между ними. Прибыль фирмы без учета вложений в торгово-закупочное оборудование и обеспечение торговых мест представляет собой разность между затратами на поставляемые ресурсы на одном и доходами от продажи этих ресурсов на другом рынке. В пп. 7.1, 7.2 рассмотрена задача о предельной интенсивности получения прибыли при стационарных и нестационарных условиях на каждом рынке в предположении, что поток ресурса однозначно связан с назначаемыми посредником ценами его закупки и продажи. В данном разделе учтен такой фактор, как задержки поставок при покупке ресурса и платежей при его продаже. Этот фактор оказывает в реальной жизни значительное влияние на результаты деятельности посреднической фирмы и ее эффективность.

Первоначально мы рассмотрим случай стабильных условий на рынке, а затем обобщим задачу на случай векторного ресурса и нестационарных условий.

Стационарные рынки. Обозначим через p_{01} и p_{02} соответственно минимальную цену продаж и максимальную цену покупок на первом и втором рынках ($p_{01} < p_{02}$). Посредник при покупке назначает цену $p_1(t) > p_{01}$, а продает по цене $p_2(t) < p_{02}$. Разности цен p_1 и p_{01}, аналогично p_{02} и p_2, обозначим через U_1 и U_2 соответственно:

$$U_1 = p_1 - p_{01}, \quad U_2 = p_{02} - p_2. \tag{7.70}$$

Будем предполагать, что изменения потоков закупок g_1 и продаж g_2 подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \dot g_1 &= f_1(U_1, g_1), \quad g_1(0) = 0,\\ \dot g_2 &= f_2(U_2, g_2), \quad g_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{7.71}$$

В этих уравнениях f_1 и f_2 непрерывны и монотонны по U_1 и U_2. В простейшем случае, когда f_1 и f_2 линейны,

$$\begin{aligned} \dot g_1 &= \frac{1}{T_1}(\alpha_1 U_1 - g_1), \quad g_1(0) = 0,\\ \dot g_2 &= \frac{1}{T_2}(\alpha_2 U_2 - g_2), \quad g_2(0) = 0, \end{aligned} \tag{7.72}$$

где T_i и α_i положительны.

Задача заключается в таком выборе U_1 и U_2, чтобы за фиксированное время τ получить максимальную прибыль:

$$I = \int_0^\tau (p_2 g_2 - p_1 g_1) dt \to \max, \qquad (7.73)$$

при условии, что продается весь закупаемый ресурс:

$$\int_0^\tau (g_1 - g_2)\, dt = 0. \qquad (7.74)$$

При переходе в критерии (7.73) от цен к «движущим силам» процесса U_1 и U_2, учитывая, что

$$p_1 = U_1 + p_{01}, \quad p_2 = p_{02} - U_2,$$

получим

$$I = (p_{02} - p_{01})G - \int_0^\tau (U_2 g_2 + U_1 g_1)\, dt \to \max_{G, U_1, U_2}. \qquad (7.75)$$

Здесь G — объем закупаемого ресурса.

Интеграл в выражении (7.75)

$$P = \int_0^\tau (U_2 g_2 + U_1 g_1)\, dt \qquad (7.76)$$

представляет собой потери, связанные с интенсивностью потоков.

Декомпозиция задачи и условия оптимальности решения. Будем решать задачу в два этапа, на первом из которых объем ресурса G предполагаем фиксированным, и определим $U_1(t)$ и $U_2(t)$, отвечающие решению задач

$$P_1 = \int_0^\tau U_1 g_1\, dt \to \min_{U_1} \Big/ \dot g_1 = f_1(U_1, g_1),\ g_1(0) = 0,\ \int_0^\tau g_1\, dt = G \quad (7.77)$$

и

$$P_2 = \int_0^\tau U_2 g_2\, dt \to \min_{U_2} \Big/ \dot g_2 = f_2(U_2, g_2),\ g_2(0) = 0,\ \int_0^\tau g_2\, dt = G. \qquad (7.78)$$

Решение задач (7.77) и (7.78) определяет оптимальную стратегию закупок и продаж с учетом задержки поставок и платежей. Постановки этих задач идентичны с точностью до индекса, поэтому рассмотрим только первую из них.

Используя первое из уравнений (7.71), получим

$$dt = \frac{dg_1}{f_1(U_1, g_1)}. \tag{7.79}$$

С учетом замены (7.79) задачу (7.77) можно переписать в эквивалентной форме

$$P_1 = \int_0^G \frac{U_1 g_1}{f_1(U_1, g_1)}\, dg_1 \to \min_{U_1(g_1)} \Bigg/ \int_0^G \frac{dg_1}{f_1(U_1, g_1)} = \tau. \tag{7.80}$$

При этом предполагаем, что функция f_1 на оптимальном решении такова, что интегралы в задаче (7.80) существуют. Составив функцию Лагранжа

$$L_1 = \frac{U_1 g_1 - \lambda_1}{f_1(U_1, g_1)},$$

получим из условия $\partial L_1/\partial U_1 = 0$ для любого g_1 уравнение

$$g_1 \left[\frac{f_1(U_1, g_1)}{\partial f_1/\partial U_1} - U_1 \right] = \lambda_1 = \mathrm{const}, \tag{7.81}$$

определяющее $U_1(\lambda_1, g_1)$. Величина множителя Лагранжа $\lambda_1(G, \tau)$ определяется после подстановки $U_1^*(\lambda_1, g_1)$ в условие

$$\int_0^G \frac{dg_1}{f_1\Big(U_1(\lambda_1, g_1), g_1\Big)} = \tau.$$

Таким образом, минимум издержек при закупках $J_{1\,\min}$ зависит от G, τ.

Совершенно аналогично при продаже разница цен удовлетворяет условию

$$g_2 \left[\frac{f_2(U_2, g_2)}{\partial f_2/\partial U_2} - U_2 \right] = \lambda_2, \tag{7.82}$$

а $J_{2\,\min}$ зависит от G и τ. Оптимальное значение G определяется из условия

$$I(G) = (p_{02} - p_{01})G - J_{1\,\min}(G, \tau) - J_{2\,\min}(G, \tau) \to \max_{G>0}. \tag{7.83}$$

Рассмотрим последовательность решения задачи для линейной зависимости (7.72) скорости изменения потока ресурса от разности цен и величины потока. Условия оптимальности (7.81) и (7.82) закупок и продаж примут форму

$$g_i \Big(U_i - \frac{g_i}{\alpha_i} - U_i \Big) = -\frac{g_i^2}{\alpha_i} = \lambda_i,$$

откуда $g_i^*(t) = \mathrm{const} = G/\tau$. Так как управления $U_i(t)$ не ограничены сверху, найдем их из уравнений (7.71):

$$U_i^*(t) = \frac{1}{\alpha_i}\Big[T_i\dot{g}_i^*(t) + g_i^*(t)\Big] = \frac{G}{\tau\alpha_i}\Big[T_i\delta(t) + 1\Big]. \tag{7.84}$$

После подстановки U_i^* и g_i^* в функционалы J_1 и J_2 в (7.77) и (7.78) получим

$$J_{i\min} = \frac{G^2}{\tau^2\alpha_i}(T_i + \tau), \quad i = 1, 2.$$

Предельная прибыль согласно (7.83) равна

$$I^*(G) = (p_{02} - p_{01})G - \frac{G^2}{\tau^2}\left(\frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}\right).$$

Максимум $I^*(G)$ по G достигается при объеме закупаемого ресурса

$$G^* = \frac{\tau^2}{2}(p_{02} - p_{01})\left(\frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)^{-1} \tag{7.85}$$

и равен

$$I^* = \frac{\tau^2}{4}(p_{02} - p_{01})^2\left(\frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)^{-1}. \tag{7.86}$$

Смысл полученного решения состоит в том, что при закупке нужно в условиях задержки поставок форсированно поднять закупочные цены p_1 и, когда поток g_1 достигнет значения g_1^*, поддерживать его на этом уровне. Интенсивность получения прибыли

$$J^* = \frac{I^*}{\tau} = \frac{\tau}{4}(p_{02} - p_{01})^2\left(\frac{T_1}{\alpha_1} + \frac{T_2}{\alpha_2} + \tau\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)^{-1}$$

растет с ростом τ, стремясь к значению

$$J^*(\infty) = \frac{1}{4}(p_{02} - p_{01})^2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Нестационарные рынки. Рассмотрим случай, когда оценки рынков p_{01} и p_{02} представляют собой функции времени. В этом случае задачу получения максимальной прибыли посредника за время τ можно разбить на две подзадачи.

Задача о закупке ресурса примет форму

$$I_1 = \int\limits_0^\tau p_1(t)g_1(t)\,dt = \int\limits_0^\tau \big(p_{01}(t) + U_1(t)\big)g_1(t)\,dt \to \min_{U_1} \tag{7.87}$$

при условиях

$$\int\limits_0^\tau g_1(t)\,dt = G, \tag{7.88}$$

$$\dot{g}_1 = f_1(U_1, g_1), \quad g_1(0) = 0. \tag{7.89}$$

Задача о продаже ресурса с максимальной выгодой имеет аналогичный вид:

$$I_2 = \int_0^\tau \bigl(p_{02}(t) - U_2(t)\bigr) g_2(t)\, dt \to \max_{U_2} \tag{7.90}$$

при условиях

$$\int_0^\tau g_2(t)\, dt = G, \tag{7.91}$$

$$\dot{g}_2 = f_2(U_2, g_2), \quad g_2(0) = 0. \tag{7.92}$$

Решения этих задач и значения $I_{1\,\min}$ и $I_{2\,\max}$ зависят от объема закупаемого ресурса G, который находится из условия

$$I(G) = I_{2\,\max}(G) - I_{1\,\min}(G) \to \max_G. \tag{7.93}$$

Достаточные условия оптимальности. Так как управляющие воздействия U_1 и U_2 в сформулированных задачах не ограниченны, их оптимальные решения могут содержать δ-функции $\bigl($см. (7.84)$\bigr)$, поэтому использование принципа максимума Понтрягина здесь неправомерно. Замена независимой переменной t на g, которая была использована выше, также не может быть применена из-за явно входящего времени. В том случае, когда функции f_1 и f_2 линейны по U_1 и U_2:

$$f_i(U_i, g_i) = M_i(g_i) U_i + N_i(g_i), \quad i = 1, 2, \tag{7.94}$$

могут быть эффективно использованы достаточные условия оптимальности Кротова [32].

С учетом (7.94) запишем функцию Кротова задачи (7.87)–(7.89):

$$R_1 = p_{01}(t) g_1 + U_1 g_1 + \frac{\partial \varphi_1(g_1, t)}{\partial g_1} \Bigl[M_1(g_1) U_1 + N_1(g_1) \Bigr] + \\ + \lambda(g_1 - G/\tau) + \frac{\partial \varphi_1(g_1, t)}{\partial t}.$$

Легко видеть, что при любых значениях λ и произвольной дифференцируемой функции $\varphi(g_1, t)$ на множестве, определяемом условиями (7.88), (7.89), справедливо равенство

$$\int_0^\tau R_1 dt = I_1 - \Bigl[\varphi_1\bigl(g(\tau), \tau\bigr) - \varphi_1(g(0), 0) \Bigr]. \tag{7.95}$$

Если функция φ выбрана так, что R_1 в каждый момент t максимальна по g и U, выполнены условия (7.88), (7.89) и второе слагаемое в правой части (7.95) равно нулю, то найденное решение оптимально.

Нам удобно сузить класс функций $\varphi_1(g_1, t)$ до функций вида

$$\varphi_1(g_1, t) = r_1(g_1) + K_1(t).$$

Тогда при выборе $r_1(g_1)$ так, чтобы

$$\frac{dr}{dg_1} = -\frac{g_1}{M_1(g_1)} \Rightarrow r(g_1) = -\int\limits_0^{g_1} \frac{g}{M_1(g)}\, dg,$$

функция R_1 не зависит от U_1 и перепишется как

$$R_1 = p_{01}(t)g_1 - \frac{g_1 N_1(g_1)}{M_1(g_1)} - \lambda\left(g_1 - \frac{G}{\tau}\right) + \frac{dK_1}{dt}.$$

Так как выбор функции $K_1(t)$ не влияет на максимум R_1 по g_1, можно выбрать ее так, чтобы

$$R_1(g^*(\tau)) + K_1(\tau) = R_1(g(0)) + K_1(0).$$

Условие максимума R_1 по g_1 приводит к равенству, определяющему $g_1^*(t)$ — оптимальный поток закупок:

$$\frac{\partial R_1}{\partial g_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dg_1}\Big[\frac{g_1 N_1(g_1)}{M_1(g_1)}\Big] = p_{01}(t) - \lambda. \qquad (7.96)$$

Так как R_1 не зависит от U_1, то эта функция при выбранной $\varphi(g, t)$ максимальна по U и g. В частности, для уравнения (7.72) $N_1 = -g_1/T_1, \quad M_1 = \alpha_1/T_1$, и условие оптимальности решения (7.96) перепишется как

$$g_1^*(t) = \frac{\alpha_1}{2}\,[\lambda_1 - p_{01}(t)].$$

Параметр λ_1 определяется равенством (7.88):

$$\int\limits_0^{\tau} g_1(t)\, dt = \frac{\alpha_1}{2}\left[\lambda_1 \tau - \int\limits_0^{\tau} p_{01}(t)\, dt\right] = G,$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{1}{\tau}\left[\frac{2}{\alpha_1}G + \int\limits_0^{\tau} p_{01}(t)\, dt\right]$$

и

$$g_1^*(t) = \frac{G}{\tau} + \frac{\alpha_1}{2}\left[\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} p_{01}(t)dt - p_{01}(t)\right] =$$

$$= \overline{g} - \frac{\alpha_1}{2}[p_{01}(t) - \overline{p_{01}}] \quad \text{при} \quad t > 0, \quad g_1(0) = 0.$$

Здесь черта соответствует усреднению на интервале $(0,\tau)$. Подстановка этого решения в уравнение (7.72) определяет $U^*(t)$. Не повторяя подобных выкладок для задачи оптимальной продажи ресурса, запишем аналог условия (7.96) для потока продаж:

$$\frac{\partial R_2}{\partial g_2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dg_1}\Big[\frac{g_2 N_2(g_2)}{M_2(g_2)}\Big] = p_{02}(t) - \lambda_2.$$

Отсюда с учетом уравнения (7.72) следует, что

$$g_2^*(t) = \overline{g} + \frac{\alpha_2}{2}[p_{02}(t) - \overline{p_{02}}] \quad \text{при} \quad t > 0, \quad g_2(0) = 0.$$

Разности цен $U_1^*(t)$ и $U_2^*(t)$ определяются условиями (7.84):

$$p_1^*(t) - p_{01}(t) = U_1^*(t) = \frac{1}{\alpha_1}\Big\{T_1\Big[\Big(\frac{G}{\tau} - \frac{\alpha_1}{2}\,[p_{01}(0) - \overline{p_{01}}]\Big)\delta(t) - \\ - \frac{\alpha_1}{2}\frac{dp_{01}(t)}{dt}\Big] + \frac{G}{\tau} - \frac{\alpha_1}{2}\,[p_{01}(t) - \overline{p_{01}}]\Big\}, \quad (7.97)$$

$$p_{02}(t) - p_2^*(t) = U_2^*(t) = \frac{1}{\alpha_2}\Big\{T_2\Big[\Big(\frac{G}{\tau} + \frac{\alpha_2}{2}\,[p_{02}(0) - \overline{p_{02}}]\Big)\delta(t) + \\ + \frac{\alpha_2}{2}\frac{dp_{02}(t)}{dt}\Big] + \frac{G}{\tau} - \frac{\alpha_2}{2}\,[p_{02}(t) - \overline{p_{02}}]\Big\}. \quad (7.98)$$

Таким образом, для правильного выбора цен необходимо знать средние значения характеристик рынков $p_{0i}(t)$ на интервале $(0,\tau)$. После подстановки $p_1^*(t)$ и $p_2^*(t)$ из (7.97), (7.98) в (7.87) и (7.90) можно выразить $I^*(G)$ согласно (7.93).

Нестационарные рынки на бесконечном интервале времени. Для практики важен случай, когда цены рынков p_{0i} меняются случайным образом, а время τ сколь угодно велико. В этом случае требуется определить оптимальную в среднем стратегию закупок и продаж и оценить предельную прибыль. Сделаем это при следующих допущениях:

— $p_{0i}(t)$ — случайные стационарные процессы с известными математическими ожиданиями $\overline{p_{0i}}$ и спектральными плотностями $S_i(\omega)$;

— связи между «движущими силами» $U_i(t)$ и потоками $g_i(t)$ характеризуются линейными уравнениями (7.72).

Сделанные допущения позволяют перейти в задачах (7.87)–(7.92) в частотную область, заменив условия (7.88) и (7.91) требованием фиксированной средней интенсивности потоков g_0. Для этого перейдем к усреднению на бесконечном промежутке времени, обозначая эту операцию для сокращения записи чертой над соответствующим выражением. Получим для процесса закупки ресурса

$$I_1 = \overline{(p_{01}(t) + U_1(t))g_1(t)} = \overline{p_{01}}g_0 + \overline{U_1}g_0 + \\ + \overline{p_{01}^0(t)g_1^0(t)} + \overline{U_1^0(t)g_1^0(t)} \to \min. \quad (7.99)$$

Здесь $\overline{U_1}$ — математическое ожидание $U_1(t)$, которое, как следует из (7.84), равно

$$\overline{U_1} = \frac{g_0}{\alpha_1};$$

$p_{01}^0(t), g_1^0(t), U_1^0(t)$ — центрированные случайные процессы.

Аналогично, для процесса продажи ресурса в тех же обозначениях получим

$$I_2 = \overline{p_{02}}g_0 - \overline{U_2}g_0 + \overline{p_{02}^0(t)g_2^0(t)} - \overline{U_2^0(t)g_2^0(t)} \to \max, \qquad (7.100)$$

$$\overline{U_2} = \frac{g_0}{\alpha_2}. \qquad (7.101)$$

При этом в силу уравнений (7.72) между преобразованиями по Фурье процессов $g_\nu^0(t)$ и $U_\nu^0(t)$, которые мы обозначим как $\tilde{g_\nu}(i\omega)$ и $\tilde{U}_\nu(i\omega)$, существует связь

$$\tilde{g_\nu}(i\omega) = \frac{\alpha_\nu \tilde{U}_\nu(i\omega)}{T_\nu i\omega + 1}, \quad \nu = 1, 2.$$

Поставленная задача распадается на две подзадачи:

— выбора оптимальных средних значений g_0 и соответственно $\overline{U_\nu}$;

— выбора оперативного управления изменением потоков $g_\nu^0(t)$ относительно их средних значений.

Первая подзадача легко решается из условия

$$\overline{I}(g_0) = \overline{I}_2(g_0) - \overline{I}_1(g_0) \to \max_{g_0}.$$

Здесь $\overline{I}_2$ и $\overline{I}_1$ — суммы первых двух слагаемых в правых частях равенств (7.99) и (7.100) соответственно. С учетом (7.101) получим

$$\overline{p_{02}}g_0 - \frac{g_0^2}{\alpha_2} - \overline{p_{01}}g_0 - \frac{g_0^2}{\alpha_1} \to \max_{g_0},$$

откуда

$$g_0^* = \frac{\alpha_1\alpha_2(\overline{p_{02}} - \overline{p_{01}})}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \overline{I}^* = \frac{\alpha_1\alpha_2(\overline{p_{02}} - \overline{p_{01}})^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Для решения второй подзадачи надо выбрать $g_\nu^0(t)$ и соответствующие им изменения цен $U_\nu^0(t)$ из условий

$$I_1^0 = \overline{p_{01}^0 g_1^0(t)} + \overline{U_1^0(t)g_1^0(t)} \to \min, \qquad (7.102)$$

$$I_2^0 = \overline{p_{02}^0 g_2^0(t)} - \overline{U_2^0(t)g_2^0(t)} \to \max \qquad (7.103)$$

и оптимальные значения этих функционалов добавить к I^*.

Будем искать оптимальную линейную стратегию, т.е. будем предполагать, что выбор $g_\nu^0(t)$ линейно зависит от $p_{\nu 0}^0(t)$ и от значений этой функции в предшествующие моменты времени, т.е.

$$g_\nu^0(t) = \int_0^t p_{\nu 0}^0(t-\tau)K_\nu(\tau)d\tau,$$

где $K_\nu(t)$ — импульсная весовая функция, преобразование Фурье для которой $W_\nu(i\omega)$. В частотной области функционалы (7.102), (7.103) примут вид

$$I_1^0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{p_1}(\omega)\Big[W_1(i\omega)+\frac{1}{\alpha_1}(1+i\omega T_1)\big|W_1(i\omega)\big|^2\Big]d\omega \to \min_{W_1}, \quad (7.104)$$

$$I_2^0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{p_2}(\omega)\Big[W_2(i\omega)-\frac{1}{\alpha_2}(1+i\omega T_2)\big|W_2(i\omega)\big|^2\Big]d\omega \to \max_{W_2}. \quad (7.105)$$

В силу четности спектральных плотностей $S_{p\nu}(\omega)$ процессов $p_{\nu 0}^0(t)$ мнимая часть для функционалов (7.104) и (7.105) равна нулю, и их можно переписать в форме

$$I_1^0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} S_{p_1}(\omega)\Big[\mathrm{Re}_1(\omega) + \frac{1}{\alpha_1}\Big(\mathrm{Re}_1^2(\omega)+\mathrm{Im}_1^2(\omega)\Big)\Big]d\omega,$$

$$I_2^0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} S_{p_2}(\omega)\Big[\mathrm{Re}_2(\omega) - \frac{1}{\alpha_2}\Big(\mathrm{Re}_2^2(\omega)+\mathrm{Im}_2^2(\omega)\Big)\Big]d\omega.$$

Здесь $\mathrm{Re}_\nu(\omega)$ и $\mathrm{Im}_\nu(\omega)$ — действительная и мнимая части характеристики $W_\nu(i\omega)$. Эти функции связаны друг с другом, однако для получения оценок минимума I_1^0 и максимума I_2^0 снизу и сверху мы проигнорируем эту связь. Если полученное решение реализуемо, то оно и дает оптимум.

Легко видеть, что в нашей задаче это так. Функционалы I_1^0 и I_2^0 достигают оптимума при

$$W_1^* = -\frac{\alpha_1}{2}, \quad W_2^* = \frac{\alpha_2}{2}, \quad I_{m\nu}^* = 0.$$

Их оптимальные значения равны

$$I_{1\min}^0 = -\frac{\alpha_1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{p_1}(\omega)d\omega = -\frac{\alpha_1}{4\pi}D_{p_1},$$

$$I_{2\max}^0 = -\frac{\alpha_2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{p_2}(\omega)d\omega = -\frac{\alpha_2}{4\pi}D_{p_2}.$$

Предельная интенсивность прибыли в условиях нестационарных рынков:

$$I^* = \overline{I}^* + I_{2\max}^0 - I_{1\min}^0 = \\ = \frac{\alpha_1\alpha_2}{4(\alpha_1+\alpha_2)}(\overline{p_{20}} - \overline{p_{10}}) + \frac{1}{4\pi}(\alpha_1 D_{p_1} + \alpha_2 D_{p_2}).$$

Здесь D_{p_1} и D_{p_2} — дисперсии случайных колебаний рыночных цен p_{10} и p_{20} относительно средних значений.

Таким образом,

$$g_1^*(t) = g_0 - \frac{\alpha_1}{2} p_{01}^0(t); \quad g_2^*(t) = g_0 + \frac{\alpha_2}{2} p_{02}^0(t).$$

После подстановки этих выражений в уравнения (7.72) получим оптимальные изменения цен $p_1^*(t)$ и $p_2^*(t)$ во времени.

7.4. Извлечение максимальной прибыли при отсутствии дискриминации цен

Выше в п. 6.3 была рассмотрена задача извлечения максимальной прибыли, по условиям которой посредник мог при контакте с каждым ЭА устанавливать различные цены покупок и продаж, зависящие от функции спроса ЭА. Такой индивидуальный выбор (дискриминация) цен расширяет возможности посредника и позволяет увеличить его прибыль. С дискриминацией цен мы сталкиваемся, наблюдая различие цен на одинаковые товары в магазинах, расположенных в центре и на окраинах города, при продаже авиобилетов и пр. Однако в некоторых случаях, например, по требованию изготовителя, посредник должен устанавливать одну и ту же цену покупки и продажи для всех ЭА, с которыми он контактирует. Рассмотрим задачу о максимальном извлечении прибыли в этих условиях.

Требуется найти изменение во времени цен закупки и продажи общих для всех подсистем, у которых фирма приобретает или продает ресурс, а также состав подсистем, продающих и закупающих ресурс. Обозначим через $c_1(t)$ и $c_2(t)$ цены закупки и продажи. Законы изменения цен определяют и состав подсистем, участвующих в процессе. Все подсистемы разбиваются на три категории в каждый момент $t \in [0, \tau]$: подсистемы, у которых ресурс закупают $(p_i(t) < c_1(t))$; подсистемы, которым ресурс продают $(p_i(t) > c_2(t))$; и подсистемы, с которыми фирме нецелесообразно контактировать $(c_1(t) \leq p_i(t) \leq c_2(t))$. Назовем первую категорию систем «продавцы», вторую — «покупатели», а третью — «нейтральные подсистемы».

В общем случае определение оптимальных цен с одновременным изменением состава подсистем достаточно сложно. Задача существенно упрощается, когда фирма осуществляет ресурсообмен с несколькими рынками совершенной конкуренции. В этом случае c_1, c_2 и p_i постоянныб и задача сводится к такому их выбору, чтобы получить максимальную прибыль для зависимости потока закупаемого ресурса от c_1 в форме

$$n_+(c_1, p_i) = \sum_{\nu=1}^{j} n_\nu(c_1, p_\nu) \tag{7.106}$$

и зависимости продаваемого ресурса от c_2

$$n_-(c_2, p_i) = \sum_{\nu=i}^{n} n_\nu(p_\nu, c_2). \tag{7.107}$$

При этом p_j — максимальная оценка, не превосходящая c_1, а p_i — минимальная оценка, большая, чем c_2. Интенсивность получения прибыли должна быть максимальна:

$$s = [c_2 n_-(c_2, p) - c_1 n_+(c_1, p)] \to \max_{c_1, c_2}. \tag{7.108}$$

при условии ненакопления ресурса посредником

$$n_+(c_1, p) = n_-(c_2, p) = n. \tag{7.109}$$

Условие (7.109) позволяет выразить c_1 и c_2 через n. Подставляя эти зависимости в (7.108), получим задачу безусловной оптимизации по n. Найдя ее решение n^*, вычислим c_1^*, c_2^*; они определяют разбиение подсистем на «продацов» и «покупателей». Конкретезируем зависимости n_ν как

$$n_\nu = \alpha_\nu(c - p_\nu).$$

и перепишем (7.109) в форме двух равенств

$$n_+ = \sum_{\nu=1}^{j} \alpha_\nu(c_1 - p_\nu) = n,$$
$$n_- = \sum_{\nu=i}^{n} \alpha_\nu(p_\nu - c_2) = n,$$

откуда, введя обозначения

$$M_1(j) = \sum_{\nu=1}^{j} \alpha_\nu p_\nu, \quad M_2(i) = \sum_{\nu=i}^{n} \alpha_\nu p_\nu,$$
$$A_1(j) = \sum_{\nu=1}^{j} \alpha_\nu, \quad A_2(i) = \sum_{\nu=i}^{n} \alpha_\nu,$$

получим

$$\begin{aligned} c_1(n, j) &= \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)}, \\ c_2(n, i) &= \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)}. \end{aligned} \tag{7.110}$$

Критерий оптимальности (7.108) как функция n примет вид

$$s = n\Big[c_2(n,i) - c_1(n,j)\Big] \to \max. \qquad (7.111)$$

При фиксированном n значения i и j нужно выбирать по условию максимума c_2 и минимума c_1 соответственно.

Условие минимума c_1 по j приводит к неравенствам

$$p_{j+1} > \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)} > p_j. \qquad (7.112)$$

Аналогично из условий максимума c_2 по i следует, что

$$p_i > \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)} > p_{i-1}. \qquad (7.113)$$

Максимум (7.111) по n с учетом (7.110), (7.112), (7.113) определяет максимальную интенсивность извлечения базисного ресурса в системе с общими ценами. Для выпуклой вверх функции s получим

$$c_2(n^*, i) - c_1(n^*, j) = n^* \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} - \frac{\partial c_2}{\partial n}\right)_{n^*}. \qquad (7.114)$$

Для $n = 2\,(j = 1,\ i = 2)$ задача предельно упрощается. Оптимальные цены закупки и продажи для любого момента t удовлетворяют равенствам

$$c_1 = \frac{2\alpha_1 p_1 + \alpha_2(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$c_2 = \frac{2\alpha_2 p_2 + \alpha_1(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

а предельная интенсивность извлечения прибыли равна

$$s^*(t) = \frac{\alpha_1\alpha_2(p_2 - p_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

В том случае, когда оценки p_ν ресурсов для каждого из ЭА зависят от времени, оптимальное решение $c_1^*(t), c_2^*(t)$ определяется этими же соотношениями для каждого момента t.

Взаимодействие нескольких фирм с ЭА. Найдем условия оптимального выбора цен при закупке (продаже) ресурса у ЭА несколь-

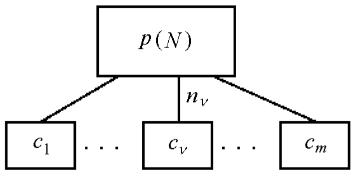


Рис. 7.3. Структура системы обмена ресурсами с несколькими фирмами и рынком конечной ёмкости

кими фирмами за ограниченное время (рис. 7.3). При этом будем предполагать, что оценка ресурса p зависит только от его запаса N.

Затраты:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} n_i(c_i, p)(c_i - p)dt \to \min_{c_i} \tag{7.115}$$

при заданных объемах закупок

$$\int_0^{\tau} n_i(c_i, p)dt = \Delta N_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{7.116}$$

Запас ресурса изменяется как

$$\frac{dN}{dt} = -\sum_{i=1}^{m} n_i(c_i, p), \quad N(0) = a > \sum_{i=1}^{m} \Delta N_i. \tag{7.117}$$

Обозначим $a - \sum_{i=1}^{m} \Delta N_i = b$ и трансформируем задачу, приняв ресурс N в качестве независимой переменной.

Получим

$$\int_b^a \frac{\sum_{i=1}^{m}(c_i - p)n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} dN \to \min_{c_i}, \tag{7.118}$$

$$\int_b^a \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i} dN = \Delta N_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7.119}$$

$$\int_b^a \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i} dN = \tau. \tag{7.120}$$

Функция Лагранжа задачи (7.118)–(7.120):

$$L = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i} \left[\sum_{i=1}^{m} (c_i - p + \lambda_i) n_i - \zeta \right]. \tag{7.121}$$

Необходимые условия оптимальности принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial c_\nu} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\left(\sum\limits_{i-1}^{m} n_i \right)^2} \frac{\partial n_\nu}{\partial c_\nu} \left[\sum_{i=1}^{m} (c_i - p + \lambda_i) n_i - \zeta \right] +$$
$$+ \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i} \left[n_\nu + (c_\nu - p + \lambda_\nu) \frac{\partial n_\nu}{\partial c_\nu} \right] = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Так что для всех ν должны быть выполнены условия

$$\frac{n_\nu(c_\nu, p)}{\dfrac{\partial n_\nu}{\partial c_\nu}} + c_\nu + \lambda_\nu = p + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (c_i - p + \lambda_i) - \zeta}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i(c_i, p)}, \quad \nu = 1, \ldots, m, \tag{7.122}$$

которые совместно с (7.119), (7.120) определяют искомое решение $c^*(N)$ через известную зависимость $p(N)$.

7.5. Предельная интенсивность извлечения прибыли в открытой микроэкономической системе

Рассмотрим систему, состоящую из r рынков совершенной конкуренции и $k-r$ экономических агентов, обменивающихся друг с другом ресурсами и капиталом (рис. 7.4). Оценки ресурса для рынков

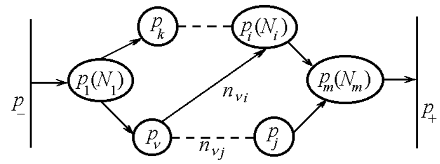


Рис. 7.4. Структура открытой микроэкономической системы с двумя рынками

p_i $(i = 1, \ldots, r)$ постоянны, для $i > r$ эти оценки зависят от запасов ресурса N_i и капитала M_i в i-й подсистеме. Предполагаем, что оценки капитала постоянны и одинаковы для всех подсистем.

Пусть поток ресурса n_i между экономическим агентом, имеющим оценку $p_i(N_i, M_i)$, определяется потоком капитала $q_i = -n_i c_i$, где

c_i — цена ресурса, которая больше p_i, когда экономический агент продает ресурс ($n_i < 0$), и меньше p_i, когда $n_i > 0$. Если обмен происходит между экономическим агентом и j-м рынком, то $c_i = p_j$, а

$$n_{ij} = n_{ij}(p_j, p_i), \quad q_{ij} = -p_j n_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, r; \quad i = r+1, \ldots, k. \tag{7.123}$$

При обмене между двумя экономическими агентами, введем, следуя [147], цену $c_{i\nu}$ так, чтобы

$$\tilde{n}_{i\nu}(p_i, c_{i\nu}) = -\tilde{n}_{\nu i}(p_\nu, c_{i\nu}), \tag{7.124}$$

где $(i;\nu) \geq r+1$. Условия (7.124) позволяют выразить $c_{i\nu}$ через p_i, p_ν. В конечном счете получим

$$n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -n_{\nu i}(p_\nu, p_i). \tag{7.125}$$

Пусть, например,

$$\tilde{n}_{i\nu} = \tilde{\alpha}_{i\nu}(p_i - c_{i\nu}), \quad \tilde{n}_{\nu i} = \tilde{\alpha}_{\nu i}(p_\nu - c_{i\nu}).$$

По условию (7.124) получим $c_{i\nu}$ и потоки, фигурирующие в равенстве (7.125):

$$c_{i\nu} = \frac{\tilde{\alpha}_{i\nu} p_i + \tilde{\alpha}_{\nu i} p_\nu}{\tilde{\alpha}_{i\nu} + \tilde{\alpha}_{\nu i}}, \tag{7.126}$$

$$\begin{gathered} n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \frac{\tilde{\alpha}_{\nu i}\tilde{\alpha}_{i\nu}}{\tilde{\alpha}_{i\nu} + \tilde{\alpha}_{\nu i}}(p_i - p_\nu) = \alpha_{i\nu}(p_i - p_\nu), \\ n_{\nu i}(p_\nu, p_i) = -n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \alpha_{i\nu}(p_\nu - p_i). \end{gathered} \tag{7.127}$$

Потоки капитала равны

$$q_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -c_{i\nu}(p_i, p_\nu) n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -q_{\nu i}(p_\nu, p_i). \tag{7.128}$$

Пусть система (рис. 7.5) включает фирму, которая может покупать ресурс у одних экономических агентов и продавать другим, извлекая

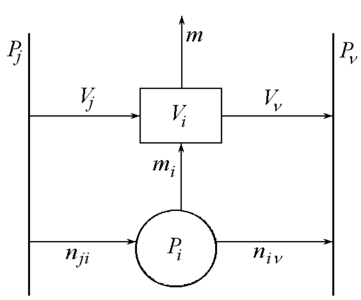


Рис. 7.5. Открытая система, содержащая фирму, рынки и пассивную подсистему

при этом базисный ресурс . Фирма назначает цену v_i при обмене с i-й подсистемой, поток ресурса при этом равен $m_i(p_i, v_i)$. В условиях равновесия задача о максимальной интенсивности извлечения базисного ресурса примет вид

$$m = -\sum_{i=1}^{k} m_i(p_i, v_i)v_i \to \max_{v,p} \tag{7.129}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(p_i, v_i) = 0, \tag{7.130}$$

$$\sum_{j=1}^{k} n_{ji}(p_j, p_i) = m_i(p_i, v_i), \qquad i = r+1, \ldots, k. \tag{7.131}$$

Знак минус в (7.129) объясняется тем, что за положительное направление принято направление потока ресурса от ЭА к фирме, такой поток сопровождается затратами капитала. Условие (7.130) соответствует балансу фирмы по ресурсам, а условия (7.131) — балансу каждого из $k-r$ ЭА.

Для получения условий оптимальности запишем функцию Лагранжа задачи (7.129), (7.131):

$$L = \sum_{i=1}^{k} \left[m_i(p_i, v_i)(\Lambda - v_i + \lambda_i) - \lambda_i \sum_{j=1}^{k} n_{ji}(p_j, p_i) \right]. \tag{7.132}$$

При этом $\lambda_i = 0$ при $i \le r$.

Условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_i}{\partial v_i}(\Lambda - v_i - \lambda_i) = m_i(p_i, v_i), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{7.133}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial m_i}{\partial p_i}(\Lambda - v_i - \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial n_{ji}}{\partial p_i}, \quad i = r+1, \ldots, k. \tag{7.134}$$

Условия (7.130), (7.131), (7.133), (7.134) определяют $2(k-r)$ неизвестных p_i и λ_i, величину Λ и k оптимальных цен v_i.

В частности, для $n_{ji} = \alpha_{ji}(p_i - p_j)$, $m_i = \alpha_i(v_i - p_i)$ эти условия перепишутся как

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(v_i - p_i) = 0, \tag{7.135}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}(p_i - p_j) = \alpha_i(v_i - p_i), \quad i = r+1, \ldots, k, \tag{7.136}$$

$$2v_i = \lambda_i + \Lambda + p_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{7.137}$$

$$-\alpha_i(\Lambda - v_i + \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}, \quad i = r+2, \ldots, k. \tag{7.138}$$

П р и м е р. Для частного случая, когда $k = r = 2$, $p_1 = p_-$, $p_2 = p_+$, причем $p_+ > p_-$, система (7.135)–(7.137) примет вид (условия (7.136) и (7.138) отсутствуют, так как $r = k$, а λ_1 и λ_2 равны нулю)

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(v_1 - p_-) + \alpha_2(v_2 - p_+) = 0,\\
&2v_1 = \Lambda + p_-,\\
&2v_2 = \Lambda + p_+.
\end{aligned}$$

Необходимо найти v_1, v_2.

Решение этой системы будет следующим:

$$\begin{aligned}
v_1^* &= \frac{2\alpha_1 p_- + \alpha_2(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},\\
v_2^* &= \frac{2\alpha_2 p_+ + \alpha_1(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}.
\end{aligned}$$

Здесь v_1^* — оптимальная цена закупки, v_2^* — оптимальная цена продажи ресурса. По условию (7.129) с учетом оптимальных цен максимальная интенсивность извлечения базисного ресурса

$$m^* = \frac{\alpha_1\alpha_2(p_+ - p_-)^2}{4(\alpha_1 + \alpha - 2)}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда $r = 2$, а $k = 3$ (см. рис. 7.5). Другими словами, система содержит два рынка, фирму и ЭА. Здесь v_3 — цена покупки (продажи) ресурса фирмой у ЭА, p_3 — оценка им ресурса. Подсистема контактирует с рынками и фирмой, между ними возникают потоки ресурса и капитала. Цель фирмы остается прежней — извлечение максимально возможного количества капитала. При решении этой задачи система (7.135)–(7.138) перепишется в форме

$$\alpha_1(v_1 - p_-) + \alpha_2(v_2 - p_+) + \alpha_3(v_3 - p_3) = 0, \tag{7.139}$$

$$\alpha_3(v_3 - p_3) = \alpha_4(p_3 - p_-) + \alpha_5(p_3 - p_+), \tag{7.140}$$

$$v_1 = \frac{\Lambda + p_-}{2}, \tag{7.141}$$

$$v_2 = \frac{\Lambda + p_+}{2}, \tag{7.142}$$

$$v_3 = \frac{\lambda_3 + \Lambda + p_3}{2}, \tag{7.143}$$

$$-\alpha_3(\Lambda - v_3 + \lambda_3) = \lambda_3(\alpha_4 + \alpha_5). \tag{7.144}$$

Отсюда получаем v_1^*, v_2^*, v_3^*, p_3^*.

Исследуем зависимость предельной интенсивности извлечения прибыли и потока ресурса между фирмой и ЭА от коэффициента α_4. Зададим следующие значения:

$$\alpha_1 = 0.2, \quad \alpha_2 = 0.3, \quad \alpha_3 = 0.01, \quad \alpha_5 = 0.4, \quad p_- = 4, \quad p_+ = 7,$$

и для них найдем зависимости $v_1^*(\alpha_4)$, $v_2^*(\alpha_4)$, $v_3^*(\alpha_4)$ и $p_3^*(\alpha_4)$. Подставляя найденные величины в уравнение для предельной интенсивности извлечения капитала (7.129), получим функцию $m^*(\alpha_4)$.

На рис. 7.6 изображена функция $m^*(\alpha_4)$ и зависимость потока между фирмой и экономическим агентом $m_3^*(\alpha_4) = \alpha_3 \cdot (v_3^*(\alpha_4) - p_3^*(\alpha_4)$.

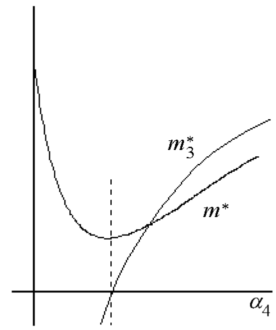


Рис. 7.6. Зависимости предельной интенсивности извлечения капитала и потока капитала между фирмой и ЭА от параметра α_4

Как видно из графиков, функция $m^*(\alpha_4)$ при некотором $\alpha = \alpha_m$ достигает своего минимума, а функция $m_3^*(\alpha_4)$ равна нулю при том же значении α_4. Это естественно, так как фирма обменивается с ЭА с целью увеличения своей прибыли. Если при некотором значении α_4 поток обмена $m_3 = 0$, то целевой поток m минимален.

7.6. Оптимизация ставок коммерческого банка

Банк является посредником между двумя рынками — вкладчиков и заемщиков, которые по тем или иным причинам не могут вступать в непосредственный контакт. Заемщики готовы получать кредиты по большей ставке, чем та, что банк выплачивает своим вкладчикам. За счет этого различия образуется прибыль банка, которую он максимизирует, управляя ставками по вкладам и кредитам. Ставки могут быть фиксированными или зависеть от сроков и объемов займов и кредитов. В последнем случае банк должен собирать информацию о том, как зависят от сроков и объемов заимствования показатели, характеризующие заинтересованность участников рынков, и менять свою стратегию в соответствии с этими данными.

Ниже мы будем обозначать через $\gamma(\tau)$ ставку по займу, взятому на время τ, равную той доле взятого капитала, которую следует возвратить вместе с полученным кредитом. Величина γ, как правило, есть неотрицательная, неубывающая функция от τ. Исключение составляют случаи, когда вкладчик использует банк как место безопасного хранения своего капитала или банк предоставляет льготный заем в благотворительных целях.

Выбор ставок $\gamma_1(\tau_1)$ для вкладов в банк и $\gamma_2(\tau_2)$ для выдачи кредитов влияет на объемы вложений и займов. Они должны выбираться банком по условиям максимума средней прибыли. Если банк назначает лишь годовые ставки $\gamma_1^0 = \gamma_1(1)$ и $\gamma_2^0 = \gamma_2(1)$, то ставки для произвольного срока хранения расчитываются через них по тому или иному правилу. В частности, при непрерывном начислении процентов по вкладу

$$\gamma_i(\tau_i) = (1+\gamma_i^0)^{\tau_i} - 1, \tag{7.145}$$

при начислении пропорционально сроку заимствования

$$\gamma_i(\tau_i) = \gamma_i^0 \tau_i, \quad i = 1,2. \tag{7.146}$$

Заинтересованность вкладчиков и заемщиков банка в капитале будем характеризовать той минимальной ставкой r_1, по которой вкладчики готовы положить деньги в банк, и той максимальной ставкой r_2, по которой заемщики согласны взять кредит; r_1 и $r_2 > r_1$ называют оценками капитала на рынках вкладов и займов соответственно. Они могут зависеть от объема и срока заимствования.

Первоначально будем предполагать, что показатели заинтересованности вкладчиков и заемщиков в капитале известныы. Мы найдем для этого случая оптимальные ставки и соответствующую им максимальную прибыль $\Pi^*(\tau_1, \tau_2)$ как функцию τ_1 и τ_2. Если банк может влиять на сроки заимствования, то он выбирает τ_1 и τ_2 по условию максимума Π^*. Затем рассмотрим случай, когда сроки займов и вкладов — случайные величины и ставки следует выбирать по условию максимума средней прибыли.

Выбор ставок при фиксированных сроках заимствования. Будем предполагать, что сроки заимствования для вкладчиков τ_1 и заемщиковτ_2 и соответствующие им оценки капитала r_1 и r_2 известны. Найдем, как нужно выбирать ставки по займам γ_1 и кредитам γ_2, чтобы прибыль банка была максимальна. Для выбора нужно знать связь между оценками r_i, назначаемыми ставками $\gamma_i (i = 1,2)$ и объемом вкладов и кредитов, поступающих в банк и выдаваемых им в единицу времени. Эти потоки $g_1(\gamma_1, r_1)$ и $g_2(r_2, \gamma_2)$ являются функциями предложения и спроса

$$\begin{aligned} g_1(\gamma_1, r_1) &= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \gamma_1 \le r_1, \\ >0 & \text{при} \quad \gamma_1 > r_1, \end{cases} \\ g_2(\gamma_2, r_2) &= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \gamma_2 \ge r_2, \\ >0 & \text{при} \quad \gamma_2 < r_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.147}$$

Прибыль, полученная от выдачи кредита g_2 на время τ_2, равна

$$\Pi_2 = g_2\Big(r_2, \gamma_2\Big)\gamma_2,$$

а среднегодовое значение этой прибыли

$$\overline{\Pi_2} = g_2(r_2, \gamma_2)\frac{\gamma_2}{\tau_2}. \tag{7.148}$$

Аналогично, средние издержки по погашению долга вкладчикам при сроке заимствования τ_1 равны

$$\overline{\Pi_1} = g_1(\gamma_1, r_1)\frac{\gamma_1}{\tau_1}. \tag{7.149}$$

Средняя прибыль банка

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi_2} - \overline{\Pi_1} = \frac{\gamma_2}{\tau_2}\, g_2(r_2, \gamma_2) - \frac{\gamma_1}{\tau_1}\, g_1(\gamma_1, r_1). \tag{7.150}$$

Максимума этого выражения по γ_1, γ_2 нужно достичь при условии, что деньги вкладчиков полностью используются для выдачи кредитов:

$$g_1(\gamma_1, r_1) - g_2(r_2, \gamma_2) = 0. \tag{7.151}$$

Задача (7.150), (7.151) в такой постановке, совпадает с задачей о предельных возможностях посредника за счет выбора цен покупки и продажи ресурса, рассмотренной выше, поэтому приведем кратко результаты решения с учетом вида целевой функции $\overline{\Pi}$.

Условия оптимальности задачи (7.150), (7.151) приводят к соотношению

$$\frac{\gamma_2}{\tau_2} - \frac{\gamma_1}{\tau_1} = \frac{g_1(\gamma_1, r_1)}{g_{1\gamma_1}\tau_1} - \frac{g_2(\gamma_2, r_2)}{g_{2\gamma_2}\tau_2}, \tag{7.152}$$

которое вместе с равенствами (7.151) позволяет найти γ_1 и γ_2. Здесь $g_{1\gamma_1}$ и $g_{2\gamma_2}$ сокращенные обозначения для частных производных потоков g_1 и g_2 по γ_1 и γ_2.

Для линейных зависимостей

$$g_1 = \alpha_1(\gamma_1 - r_1)), \quad g_2 = \alpha_2(r_2 - \gamma_2), \quad \gamma_1 \geq r_1, \quad \gamma_2 \leq r_2$$

уравнения (7.151), (7.152) приводят к решению

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\alpha_2\tau_2 + \alpha_1\tau_1}[\tau_1(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1) - 0,5\alpha_2(r_2\tau_1 - r_1\tau_2)], \\ \gamma_2(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{\alpha_2\tau_2 + \alpha_1\tau_1}[\tau_2(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1) + 0,5\alpha_1(r_2\tau_1 - r_1\tau_2)]. \end{aligned} \tag{7.153}$$

Максимальная прибыль посредника при выборе ставок по условиям (7.153):

$$\Pi_{\max}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\overline{\alpha}}{4}\left(\frac{r_2(\tau_2)}{\tau_2} - \frac{r_1(\tau_1)}{\tau_1}\right)^2, \tag{7.154}$$

где

$$\overline{\alpha(\tau_1,\tau_2)} = \frac{\alpha_1\alpha_2\tau_1\tau_2}{\alpha_1\tau_1+\alpha_2\tau_2}.$$

Функция $\Pi_{\max}(\tau_1,\tau_2)$ определена для значений τ_1 и τ_2, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{r_2(\tau_2)}{\tau_2} \geq \frac{r_1(\tau_1)}{\tau_1},$$

которое соответствует положительности потоков вкладов и займов.

Если банку известны зависимости $r_1(\tau_1)$ и $r_2(\tau_2)$ и он может назначать τ_1 и τ_2 или влиять на их выбор, то наиболее выгодные сроки заимствования τ_1^* и τ_2^* доставляют максимум выражению (7.154). При вычислении τ_1^* и τ_2^* из условия $\Pi_{\max} \to \max\limits_{\tau_1,\tau_2}$ полезно иметь в виду, что $\overline{\alpha}$ достигает максимума, когда

$$\alpha_1\tau_1 = \alpha_2\tau_2 = \beta, \tag{7.155}$$

причем его максимум равен $\beta/2$.

Для оценки максимальной по срокам заимствования средней прибыли достаточно найти $\tilde{\tau}_1$ по условию минимума $r_1(\tau_1)/\tau_1$ и $\tilde{\tau}_2$ по условию максимума $r_2(\tau_2)/\tau_2$. На плоскости с координатами τ_1,τ_2 максимум выражения (7.154) лежит между точкой $\tilde{\tau}$ и прямой, соответствующей условию (7.155). При этом справедливы неравенства

$$\min(\alpha_1\tilde{\tau}_1;\, \alpha_2\tilde{\tau}_2) \leq \frac{8\Pi_{\max}(\tau_1^*,\tau_2^*)}{\frac{r_2(\tilde{\tau}_2)}{\tilde{\tau}_2} - \frac{r_1(\tilde{\tau}_1)}{\tilde{\tau}_1}} \leq \max(\alpha_1\tilde{\tau}_1;\, \alpha_2\tilde{\tau}_2). \tag{7.156}$$

Выбор ставок для случайных сроков заимствования. Пусть зависимости оценок от сроков заимствования $r_1(\tau_1)$ и $r_2(\tau_2)$ известны, ставки $\gamma_1(\tau_1)$ и $\gamma_2(\tau_2)$ нужно выбрать по условию максимума средней прибыли с учетом балансовых условий (7.151), которые должны быть выполнены в среднем по τ_1 и τ_2. Сами же сроки заимствования предполагаются случайными величинами с плотностями распределения $P_1(\tau_1)$ и $P_2(\tau_2)$.

Средняя прибыль за год

$$\overline{\Pi} = \overline{\frac{1}{\tau_2} g_2(r_2(\tau_2),\gamma_2(\tau_2))\gamma_2(\tau_2)} - \overline{\frac{1}{\tau_1} g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1))\gamma_1(\tau_1)} \tag{7.157}$$

должна быть максимальна при условии

$$\overline{g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1))} - \overline{g_2(r_2(\tau_2),\gamma_2(\tau_2))} = 0. \tag{7.158}$$

При этом усреднение ведется в первом слагаемом в (7.157) и во втором в (7.158) по τ_2, а в остальных по τ_1, так что, например,

$$\overline{g_1} = \int\limits_0^\infty g_1(\gamma_1(\tau_1), r_1(\tau_1))P_1(\tau_1)d\tau_1,$$

$$\overline{\left(\frac{g_2\gamma_2}{\tau_2}\right)} = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\tau_2} g_2(r_2(\tau_2), \gamma_2(\tau_2))\gamma_2(\tau_2)P_2(\tau_2)d\tau_2.$$

Функция Лагранжа задачи (7.157), (7.158) имеет вид

$$\overline{L} = \left(\overline{\left(\frac{g_2\gamma_2}{\tau_2}\right)} - \lambda\overline{g_2}\right) - \left(\overline{\left(\frac{g_1\gamma_1}{\tau_1}\right)} - \lambda\overline{g_1}\right).$$

Усреднение в первом слагаемом ведется по τ_2, а во втором по τ_1.

Условия оптимальности задачи (7.157), (7.158) по $\gamma_1(\tau_1)$ и $\gamma_2(\tau_2)$ приводят к соотношениям

$$\frac{g_{i\gamma_i}\gamma_i(\tau_i) + g_i(\gamma_i(\tau_i), r_i(\tau_i))}{g_{i\gamma_i}} = \lambda\tau_i, \quad i = 1, 2, \tag{7.159}$$

которые определяют оптимальные зависимости $\gamma_1(\tau_1, \lambda)$ и $\gamma_2(\tau_2, \lambda)$. Подстановка этих зависимостей в (7.158) позволяет найти λ, а значит, и оптимальное решение.

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_1(\gamma_1(\tau_1) - r_1(\tau_1)),\\ g_2 &= \alpha_2(r_2(\tau_2) - \gamma_2(\tau_2)). \end{aligned} \tag{7.160}$$

В этом случае частные производные

$$g_{1\gamma_1} = \alpha_1, \quad g_{2\gamma_2} = -\alpha_2.$$

Условия (7.159) для потоков капитала в форме (7.160) примут вид

$$\begin{aligned} 2\gamma_1(\tau_1) - r_1(\tau_1) &= \lambda\tau_1,\\ 2\gamma_2(\tau_2) - r_2(\tau_2) &= \lambda\tau_2. \end{aligned} \tag{7.161}$$

Подставим эти равенства в условия (7.158). Получим

$$\alpha_1\left(\frac{\lambda\overline{\tau_1} + \overline{r_1}}{2} - \overline{r_1}\right) = \alpha_2\left(\overline{r_2} - \frac{\lambda\overline{\tau_2} + \overline{r_2}}{2}\right).$$

Здесь $\overline{\tau_1}$ и $\overline{\tau_2}$ — математические ожиданния τ_1 и τ_2.

Из последнего равенства получим значение множителя λ

$$\lambda = \frac{\alpha_1\overline{r_1} + \alpha_2\overline{r_2}}{\alpha_1\overline{\tau_1} + \alpha_2\overline{\tau_2}}, \tag{7.162}$$

так что оптимальные ставки:

$$\gamma_1(\tau_1) = \frac{1}{2}\left(r_1(\tau_1) + \frac{\alpha_1\overline{r_1} + \alpha_2\overline{r_2}}{\alpha_1\overline{\tau_1} + \alpha_2\overline{\tau_2}}\tau_1\right),$$
$$\gamma_2(\tau_2) = \frac{1}{2}\left(r_2(\tau_2) - \frac{\alpha_1\overline{r_1} + \alpha_2\overline{r_2}}{\alpha_1\overline{\tau_1} + \alpha_2\overline{\tau_2}}\tau_2\right). \tag{7.163}$$

Максимальная средняя прибыль банка при таком выборе ставок равна

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{4}\left[\alpha_1\left(\overline{\frac{r_1^2(\tau_1)}{\tau_1}}\right) + \alpha_2\left(\overline{\frac{r_2^2(\tau_2)}{\tau_2}}\right) - \lambda^2(\alpha_1\overline{\tau_1} + \alpha_2\overline{\tau_2})\right], \tag{7.164}$$

где λ выражается через усредненные оценки $\overline{r_i}$ и α_i в соответствии с (7.162).

Выбор годовых ставок оптимальных в среднем. Если банк выбирает только годовые ставки γ_1^0 и γ_2^0, то функции $\gamma_i(\tau_i, \gamma_i^0)$ зависят от выбранных ставок и способа начисления процентов (см. (7.145), (7.146)). Оптимум в задаче (7.157), (7.158) ищется по параметрам γ_1^0 и γ_2^0.

Обозначив производные

$$\frac{\partial\gamma_i(\tau_i, \gamma_i^0)}{\partial\gamma_i^0} = \gamma_i'(\tau_i, \gamma_i^0), \quad i = 1, 2,$$

получим вместо условий оптимальности (7.159) после исключения λ соотношение

$$\overline{\frac{\gamma_1'}{\tau_1}\left(g_1 + \gamma_1\frac{\partial g_1}{\partial\gamma_1}\right)}\;\overline{\frac{\gamma_2'}{\tau_2}\frac{\partial g_2}{\partial\gamma_2}} = \overline{\frac{\gamma_2'}{\tau_2}\left(g_2 + \gamma_2\frac{\partial g_2}{\partial\gamma_2}\right)}\;\overline{\frac{\gamma_1'}{\tau_1}\frac{\partial g_1}{\partial\gamma_1}}. \tag{7.165}$$

Это равенство вместе с условием (7.158) определяет оптимальные значения параметров γ_1^0, γ_2^0.

Для потоков в форме (7.160)

$$\frac{\partial g_1}{\partial\gamma_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial\gamma_2} = -\alpha_2,$$

в случае, когда $\gamma_i(\tau, \gamma_i^0)$ имеют вид (7.146)

$$\frac{\gamma_i'}{\tau_i} = \gamma_i^0,$$

система (7.165), (7.158) может быть легко решена.

Условия (7.165) примут вид

$$\overline{\tau_1} + (\gamma_1^0\overline{\tau_1} - \overline{r_1}) = \overline{\tau_2} - (\overline{r_2} - \gamma_2^0\overline{\tau_2}), \tag{7.166}$$

уравнение (7.158) для этого случая запишется как

$$\alpha_1(\gamma_1^0\overline{\tau_1} - \overline{r_1}) = \alpha_2(\overline{r_2} - \gamma_2^0\overline{\tau_2}),$$

что позволяет переписать (7.166) как

$$\overline{\tau_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\overline{r_2} - \gamma_2^0\overline{\tau_2}) = \overline{\tau_2} - (\overline{r_2} - \gamma_2^0\overline{\tau_2}),$$

$$\overline{\tau_1} + (\gamma_1^0\overline{\tau_1} - \overline{r_1}) = \overline{\tau_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\gamma_1^0\overline{\tau_1} - \overline{r_1}).$$

Откуда оптимальные в среднем значения годовых ставок:

$$\begin{aligned} \gamma_2^0 &= \frac{\alpha_1(\overline{\tau_1} - \overline{\tau_2})}{(\alpha_1 + \alpha_2)\overline{\tau_2}} + \frac{\overline{r_2}}{\overline{\tau_2}}, \\ \gamma_1^0 &= \frac{\alpha_2(\overline{\tau_2} - \overline{\tau_1})}{(\alpha_1 + \alpha_2)\overline{\tau_1}} + \frac{\overline{r_1}}{\overline{\tau_1}}. \end{aligned} \tag{7.167}$$

Они зависят лишь от средних по срокам заимствованиям оценок капитала $\overline{r_i(\tau_i)}$ и средних значений сроков заимствования $\overline{\tau_i}$.

Оптимизация ставок по объему вкладов и займов. Если известны зависимости оценок капитала r_i не только от продолжительности заимствования, но и от объемов вкладов и выдаваемых кредитов V_i, то этот фактор можно учесть при назначении оптимальных ставок $\gamma_i(\tau_i, V_i)$. Будем, как и выше считать, что τ_i и V_i случайны и их плотность распределения $P_i(\tau_i, V_i)$ $(i = 1, 2)$. Как и выше, индекс $i = 1$ относится к вкладчикам, а $i = 2$ к заемщикам банка. Обозначим через $m_i[r_i(\tau_i, V_i),\, \gamma_i(\tau_i, V_i)]$ число вкладчиков (заемщиков), обращающихся в банк в единицу времени. Задача о максимуме средней прибыли примет вид

$$\overline{\Pi} = \sum_{i=1}^{2} \overline{\frac{V_i}{\tau_i} m_i[r_i(\tau_i, V_i), \gamma_i(\tau_i, V_i)]} \to \max_{\gamma_i} \tag{7.168}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{V_i m_i[r_i(\tau_i, V_i), \gamma_i(\tau_i, V_i)]} = 0. \tag{7.169}$$

При этом

$$\operatorname{Sign} m_i = \operatorname{Sign}(r_i - \gamma_i), \quad i = 1, 2;$$

усреднение в i-м слагаемом ведется по τ_i, V_i.

Условия оптимальности задачи (7.168), (7.169) совпадают с условиями (7.159) с заменой g_i на $m_i V_i$.

Если поток вкладчиков (заемщиков) пропорционален разности ставок банка и оценок его клиентов

$$m_i = \alpha_i(r_i - \gamma_i), \tag{7.170}$$

то

$$g_i = \frac{\alpha_i}{V_i}(r_i - \gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

Условия оптимальности после исключения λ — множителя примут вид

$$2\left[\frac{\gamma_2(\tau_2, V_2)V_2}{\tau_2} - \frac{\gamma_1(\tau_1, V_1)V_1}{\tau_1}\right] = \frac{r_2(\tau_2)V_2}{\tau_2} - \frac{r_1(\tau_1)V_1}{\tau_1}. \tag{7.171}$$

После выкладок, аналогичных тем, что проделаны при выводе равенства (7.163), получим

$$\gamma_i(\tau_i, V_i) = \frac{1}{2}r_i(\tau_i, V_i) + \lambda\tau_i, \quad i = 1, 2, \tag{7.172}$$

$$\lambda = \frac{\alpha_1\overline{r_{1v}} + \alpha_2\overline{r_{2v}}}{\alpha_1\overline{\tau_{1v}} + \alpha_2\overline{\tau_{2v}}}.$$

Здесь

$$\overline{r_{iv}} = \overline{\left(\frac{r_i(\tau_i, V_i)}{V_i}\right)}, \quad \overline{\tau_{iv}} = \overline{\left(\frac{\tau_i}{V_i}\right)}, \quad i = 1, 2.$$

Усреднение ведется по V_i, τ_i с учетом их плотностей распределения.

Учет налогов и инфляции. В рассмотренной выше простейшей схеме деятельности банка не учитывался целый ряд факторов. К ним относятся риски, связанные для вкладчика с ненадежностью банка, а для банка с возможностью невозврата займов не учитывалось то, что часть средств банк вкладывает в ценные бумаги, курс которых изменяется, наконец, не учитывалось влияние инфляции и налогообложения. Можно предположить, что надежность банка вкладчики учитывают, меняя свою оценку $r_1(\tau_1)$ по отношению к разным банкам, а банк аналогично дискриминирует заемщиков. Те из них, кто проводит более рискованные, а значит, более доходные операции согласны брать займ под больший процент.

Обсудим учет влияния прогнозируемой инфляции, темп которой μ примем постоянным. Инфляция приносит убытки тем участникам рынка, которые получают доход с временным сдвигом, т.е. вкладчикам и банку. В условиях инфляции вкладчик увеличит свою оценку

$$r_{1i}(\tau_1) = r_1(\tau_1)\exp(\mu\tau_1);$$

аналогично заемщик, которому нужно возвращать меньшую сумму, скорректирует оценку в меньшую сторону

$$r_{2i}(\tau_2) = r_2(\tau_2)\exp(-\mu\tau_2)$$

Подстановка полученных таким образом оценок в приведенные выше расчетные соотношения позволяет найти оптимальные ставки с учетом инфляции.

Следующий фактор — налогообложение. Обозначим через δ_1 — долю дохода от банковских вкладов, взимаемую в форме налога с вкладчиков, а через δ — долю от разницы между суммой займов и суммой возврата, взимаемой в форме налога с банка. Вкладчик получит в этом случае с учетом налога и инфляции доход

$$d_1 = g_1(\gamma_1(\tau_1), r_{1i}(\tau_1))(1-\delta_1)\frac{\gamma_1(\tau_1)}{\tau_1},$$

а банк — прибыль

$$\Pi_n = \Pi(\gamma_1, \gamma_2, r_{1i}, r_{2i}) - \delta g_2(y, r_{2i})(y-1),$$

где Π имеет вид (7.150).

Минимизация этого выражения приводит к условиям оптимальности ставок.

Полученные зависимости позволяют оптимизировать процентные ставки и оценить предельную прибыль коммерческого банка при известных функциях спроса кредиторов и заемщиков, определяющих интенсивность их обращения на обслуживание в функции процентных ставок и сроков заимствования. Кроме того, нужно знать распределение клиентов банка по объемам вкладов и по срокам заимствования.

Глава 8

ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФИРМЫ

8.1. Управление технологическими потоками за счет выбора цен

Рассмотрим систему, на вход которой поступает поток сырья g_1, зависящий от закупочной цены сырья p_c. На выходе системы — поток готовой продукции g_2, величина которого зависит от продажной цены p_Π. В общем случае потоки и цены векторные. Целевая функция — прибыль — зависит как от цен, так и от величин указанных потоков. Задача заключается в таком выборе закупочных цен сырья и отпускных цен готовой продукции, чтобы достичь максимума прибыли.

Скалярные потоки сырья и готовой продукции. Обозначим закупочные цены сырья и отпускные цены готовой продукции через p_c и p_Π, а соответствующие им материальные потоки через $g_1(p_c)$ и $g_2(p_\Pi)$. Среднее значение прибыли

$$I = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau [g_2(p_\Pi)p_\Pi - g_1(p_c)p_c - y]dt \to \max_{p_c, p_\Pi}. \tag{8.1}$$

Здесь $y = \text{const}$ — постоянная составляющая себестоимости производства. Будем считать, что накопления продукции и сырья за рассматриваемый период времени не происходит, т.е. соблюдается условие баланса

$$\int\limits_0^\tau [g_1(p_c) - g_2(p_\Pi)]dt = 0. \tag{8.2}$$

Задача (8.1), (8.2) представляет собой усредненную задачу нелинейного программирования. Оптимальный вектор цен определяется условиями

$$P^* = (p_\Pi^*, p_c^*) = \operatorname*{argmax}_P R(P, \lambda), \tag{8.3}$$

$$\lambda^* = \operatorname*{argmax}_\lambda R(P^*, \lambda), \tag{8.4}$$

где R — функция Лагранжа для задачи (8.1), (8.2), в которой опущено усреднение

$$R = g_2(p_\Pi)(p_\Pi - \lambda) - g_1(p_c)(p_c - \lambda) - y.$$

В том случае, когда неусредненная задача (8.1), (8.2) выпукла, а функция R — непрерывно дифференцируема, найдется единственное значение вектора цен P^*, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial R}{\partial p_{\text{п}}} = \frac{dg_2(p_{\text{п}})}{dp_{\text{п}}}(p_{\text{п}} - \lambda) + g_2(p_{\text{п}}) = 0, \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_c} = -\frac{dg_1(p_c)}{dp_c}(p_c - \lambda) - g_1(p_c) = 0, \tag{8.6}$$

которые вместе с условием

$$g_1(p_c^*) = g_2(p_{\text{п}}^*) \tag{8.7}$$

определяют и значение λ^*, соответствующее условию (8.4).

В противном случае максимум R по вектору цен P достигается не более чем при двух значениях P_1^* и P_2^*. Оптимальное решение состоит в том, чтобы в течение времени $\gamma\tau$ держать цены на уровне $P_1^* = \{p_{\text{п}1}^*, p_{c1}^*\}$, а в оставшееся время $(1-\gamma)\tau$ поддерживать их равными $P_2^* = \{p_{\text{п}2}^*, p_{c2}^*\}$, где $0 < \gamma < 1$. При этом не исключено, что значения $p_{\text{п}1}^*$ и $p_{\text{п}2}^*$ или p_{c1}^* и p_{c2}^* могут совпадать. Точки P_1^* и P_2^* называют базовыми, а соответствующий режим — переключательным. В переключательном режиме потоки g_1 и g_2 изменяются. Для их сглаживания необходимо использовать склады сырья и готовой продукции.

Для того чтобы решение было единственным, достаточно выпуклости функции Лагранжа R исходной неусредненной задачи по вектору P. Вследствие сепарабельной структуры этой функции условия постоянства оптимального вектора цен, а, следовательно, потоков g_1 и g_2 (условия нецелесообразности складов) принимают форму неравенств

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_{\text{п}}^2} = \frac{d^2 g_2(p_{\text{п}})}{dp_{\text{п}}^2}(p_{\text{п}} - \lambda) + 2\frac{dg_2(p_{\text{п}})}{dp_{\text{п}}} \le 0, \tag{8.8}$$

$$-\frac{\partial^2 R}{\partial p_c^2} = \frac{d^2 g_1(p_c)}{dp_c^2}(p_c - \lambda) + 2\frac{dg_1(p_c)}{dp_c} \ge 0. \tag{8.9}$$

Отметим, что по определению функции спроса и предложения $dg_2/dp_{\text{п}} \le$ ≤ 0, а $dg_1/dp_c \ge 0$.

Рассмотрим случай, когда функции $g_2(p_{\text{п}})$ и $g_1(p_c)$ линейные, т.е.

$$\begin{cases} g_2(p_{\text{п}}) = b(p_{\text{п}}^0 - p_{\text{п}}) & \text{при} \quad p_{\text{п}} \le p_{\text{п}}^0, \\ g_2(p_{\text{п}}) = 0 & \text{при} \quad p_{\text{п}} > p_{\text{п}}^0, \end{cases} \tag{8.10}$$

$$\begin{cases} g_1(p_c) = a(p_c - p_c^0) & \text{при} \quad p_c \ge p_c^0, \\ g_1(p_c) = 0 & \text{при} \quad p_c < p_c^0, \end{cases} \tag{8.11}$$

где $a, b, p_{\text{п}}^0, p_c^0$ — некоторые положительные константы. Нетрудно убедиться в том, что функции (8.10), (8.11) удовлетворяют условиям (8.8), (8.9) соответственно. Поэтому задача (8.1), (8.2) имеет единственное решение. Оптимальные значения цен закупок сырья и продаж продукции при этом равны

$$p_c^* = \frac{p_c^0(2a+b) + bp_{\text{п}}^0}{2(a+b)}, \tag{8.12}$$

$$p_{\text{п}}^* = \frac{p_{\text{п}}^0(a+2b) + ap_c^0}{2(a+b)}. \tag{8.13}$$

В случае, когда максимум R по вектору P достигается в двух базовых точках P_1 и P_2, постановку задачи (8.1), (8.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\gamma[g_2(p_{\text{п}1})p_{\text{п}1} - g_1(p_{c1})p_{c1} - y] + \\ &\qquad + (1-\gamma)[g_2(p_{\text{п}2})p_{\text{п}2} - g_1(p_{c2})p_{c2} - y] \to \max_{P_1, P_2, \gamma}, \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\gamma[g_1(p_{c1}) - g_2(p_{\text{п}1})] + (1-\gamma)[g_1(p_{c2}) - g_2(p_{\text{п}2})] = 0, \tag{8.15}$$

$$0 < \gamma < 1. \tag{8.16}$$

Функция Лагранжа для этой задачи

$$\begin{aligned} \overline{R} &= \gamma[g_2(p_{\text{п}1})p_{\text{п}1} - g_1(p_{c1})p_{c1} - y] + (1-\gamma)[g_2(p_{\text{п}2})p_{\text{п}2} - \\ &- g_1(p_{c2})p_{c2} - y] + \lambda[\gamma(g_1(p_{c1}) - g_2(p_{\text{п}1})) + (1-\gamma)(g_1(p_{c2}) - \\ &- g_2(p_{\text{п}2}))] = \gamma R(p_{\text{п}1}, p_{c1}, \lambda) + (1-\gamma)R(p_{\text{п}2}, p_{c2}, \lambda). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Условия оптимальности задачи (8.14)–(8.16) имеют вид

$$P_i^* = \operatorname{argmax} R, \quad i = 1, 2, \tag{8.18}$$

$$R(p_{\text{п}1}^*, p_{c1}^*, \lambda^*) = R(p_{\text{п}2}^*, p_{c2}^*, \lambda^*). \tag{8.19}$$

Значение λ^* определяется из условия (8.15):

$$\gamma[g_1(p_{c1}^*) - g_2(p_{\text{п}1}^*)] + (1-\gamma)[g_1(p_{c2}^*) - g_2(p_{\text{п}2}^*)] = 0. \tag{8.20}$$

Пусть функции $g_2(p_{\text{п}})$ и $g_1(p_c)$ кусочно постоянны и принимают три фиксированных значения (см. рис. 8.1, *а*), т.е.

$$g_2(p_{\text{п}}) = \begin{cases} G_2^1 & \text{при} \quad p_{\text{п}} \le p_{\text{п}}^1, \\ G_2^2 & \text{при} \quad p_{\text{п}}^1 < p_{\text{п}} \le p_{\text{п}}^2, \\ 0 & \text{при} \quad p_{\text{п}} > p_{\text{п}}^2, \end{cases} \tag{8.21}$$

$$g_1(p_c) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p_c < p_c^1, \\ G_1^1 & \text{при} \quad p_c^1 \le p_c < p_c^2, \\ G_1^2 & \text{при} \quad p_c \ge p_c^2. \end{cases} \tag{8.22}$$

Такой характер зависимости соответствует случаю, когда имеется взаимозаменяющая продукция, и если цена первого вида товара превышает некоторое значение, потребитель начинает использовать второй.

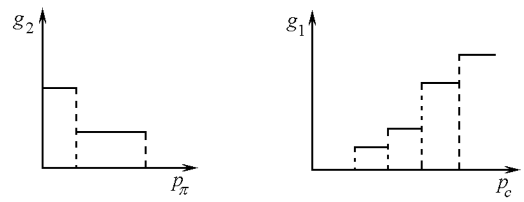


Рис. 8.1. Кусочно постоянные функции спроса и предложения, принимающие три (*а*) и более (*б*) фиксированных значений

Тогда $p^*_{\text{п}1} = p^1_{\text{п}}$, $p^*_{\text{п}2} = p^2_{\text{п}}$, $p^*_{c1} = p^1_c$, $p^*_{c2} = p^2_c$. Доля времени γ, в течение которой цены должны поддерживаться на уровне P_1^*, равна

$$\gamma = \frac{G_2^2 - G_1^2}{(G_1^1 - G_1^2) + (G_2^2 - G_2^1)}.$$

Значение λ определяется из условия

$$G_2^1(p^1_{\text{п}} - \lambda) - G_1^1(p^1_c - \lambda) = G_2^2(p^2_{\text{п}} - \lambda) - G_1^2(p^2_c - \lambda).$$

Например, если

$$p^1_{\text{п}} = 129, \quad p^2_{\text{п}} = 155, \quad G_2^1 = 160, \quad G_2^2 = 120,$$
$$p^1_c = 120, \quad p^2_c = 125, \quad G_1^1 = 150, \quad G_1^2 = 160,$$
$$y = 28$$

(цены — в тыс.р./т, потоки — в т/месяц), то в оптимальном режиме $P_1 = \{p^1_c, p^1_{\text{п}}\}$, $P_2 = \{p^2_c, p^2_{\text{п}}\}$. Доля времени, в течение которой цены необходимо поддерживать на уровне P_1, равна $\gamma = 0,8$. Оптимальное значение критерия оптимальности $I_2 = 1804$.

Если бы при тех же данных искали стационарный режим, когда цены и потоки в течение всего времени не изменяются, т.е. решали неусредненную задачу (8.1), (8.2), то оптимальные значения цен составляли бы $p_c = 125$, $p_{\text{п}} = 129$, а оптимальное значение критерия оптимальности было $I_1 = 612$.

В случае, когда функции $g_2(p_\text{п})$ и $g_1(p_c)$ имеют более сложный вид (см. рис. 8.1, *б*), условия оптимальности принимают вид

$$p^*_{\text{п}1} = p^i_\text{п}, \quad p^*_{\text{п}2} = p^j_\text{п}, \quad p^*_{c1} = p^k_c, \quad p^*_{c2} = p^s_c,$$
$$\gamma = \frac{G^j_2 - G^s_1}{(G^k_1 - G^s_1) + (G^j_2 - G^i_2)},$$
$$G^i_2(p^i_\text{п} - \lambda^*) - G^k_1(p^k_c - \lambda^*) = G^j_2(p^j_\text{п} - \lambda^*) - G^s_1(p^s_c - \lambda^*).$$

Скалярный поток продукции и векторный поток сырья. В более сложном случае для производства одного вида продукции требуется m видов сырья, закупаемых на рынке по ценам p_{ck} в количестве $g_{1k}(p_{ck})$, $k = 1, \ldots, m$. При этом для выпуска единицы продукции требуется α_k единиц сырья k-го вида. Тогда с учетом ненакопления предприятием продукции и сырья за рассматриваемый период времени постановка задачи имеет вид

$$I = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \left[g_2(p_\text{п})p_\text{п} - \sum_{k=1}^m g_{1k}(p_{ck})p_{ck} - y\right] dt \to \max_P, \tag{8.23}$$

$$\int\limits_0^\tau [g_{1k}(p_{ck}) - \alpha_k g_2(p_\text{п})]dt = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.24}$$

На оптимальном решении аналогично рассмотренному ранее случаю справедливо условие

$$\min_\lambda \max_P R(\lambda, P) = \min_\lambda \max_p \left[g_2(p_\text{п})\left(p_\text{п} - \sum_{k=1}^m \alpha_k\lambda_k\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^m g_{ik}(p_{ck})(p_{ck} - \lambda_k) - y\right], \tag{8.25}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $P = (p_\text{п}, p_{c1}, p_{c2}, ..., p_{cm})$.

В том случае, когда задача (8.23), (8.24) выпуклая, ее решение единственно. Для непрерывно дифференцируемых функций $g_2(p_\text{п})$ и $g_{1k}(p_{ck})$ это решение удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial R}{\partial p_\text{п}} = \frac{dg_2(p_\text{п})}{dp_\text{п}}\left(p_\text{п} - \sum_{k=1}^m \alpha_k\lambda_k\right) + g_2(p_\text{п}) = 0, \tag{8.26}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_{ck}} = -\frac{dg_{1k}(p_{ck})}{dp_{ck}}(p_{ck} - \lambda) - g_{1k}(p_{ck}) = 0, \tag{8.27}$$

$$g_{1k}(p^*_{ck}) = \alpha_k g_2(p^*_\text{п}), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.28}$$

Используя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получим, что при выполнении неравенства

$$\frac{d^2 g_2(p_{\text{п}})}{dp_{\text{п}}^2}\left(p_{\text{п}} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k\right) + 2\frac{dg_2(p_{\text{п}})}{dp_{\text{п}}} \le 0 \tag{8.29}$$

склад готовой продукции не нужен. Аналогично, если справедливо условие

$$\frac{d^2 g_{1k}(p_{ck})}{dp_{ck}^2}(p_{ck} - \lambda_k) + 2\frac{dg_{1k}(p_{ck})}{dp_{ck}} \ge 0, \tag{8.30}$$

то склад k-го вида сырья не нужен.

В частности, нетрудно показать, что линейные функции

$$\begin{cases} g_2(p_{\text{п}}) = b(p_{\text{п}}^0 - p_{\text{п}}) & \text{при} \quad p_{\text{п}} \le p_{\text{п}}^0, \\ g_2(p_{\text{п}}) = 0 & \text{при} \quad p_{\text{п}} > p_{\text{п}}^0, \end{cases} \tag{8.31}$$

$$\begin{cases} g_{1k}(p_{ck}) = a_k(p_{ck} - p_{ck}^0) & \text{при} \quad p_{ck} \ge p_{ck}^0, \quad k = 1, \ldots, m, \\ g_{1k}(p_{ck}) = 0 & \text{при} \quad p_{ck} < p_{ck}^0, \quad k = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{8.32}$$

удовлетворяют требованиям (8.29), (8.30). В этом случае задача (8.23), (8.24) имеет единственное решение

$$p_{\text{п}}^* = \frac{1}{2}\left(p_{\text{п}}^0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k\right), \tag{8.33}$$

$$p_{ck}^* = \frac{1}{2}(p_{ck}^0 + \lambda_k), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.34}$$

Значения λ_k определяются путем решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j + M_k \lambda_k = p_{\text{п}}^0 + M_k p_{ck}^0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{8.35}$$

где $M_k = a_k/\alpha_k b$.

Векторные потоки сырья и готовой продукции. Приведем постановку задачи о максимальной прибыли для случая, когда предприятие производит n видов продукции, продаваемых на рынке по ценам $p_{\text{п}i}$ в количестве $g_{2i}(p_{\text{п}i})$, $i = 1, \ldots, n$, и закупает m видов сырья по ценам p_{ck} в количестве $g_{1k}(p_{ck})$, $k = 1, \ldots, m$. При этом для производства единицы продукции i-го вида требуется α_{ik} единиц сырья k-го вида. Задача примет вид

$$I = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \left[\sum_{i=1}^n g_{2i}(p_{\text{п}i})p_{\text{п}i} - \sum_{k=1}^m g_{1k}(p_{ck})p_{ck} - y\right] dt \to \max_P, \tag{8.36}$$

$$\int\limits_0^\tau \left[g_{1k}(p_{ck}) - \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} g_{2i}(p_{\text{п}i})\right] dt = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{8.37}$$

где $P = (p_{\text{п}1}, p_{\text{п}2}, ..., p_{\text{п}n}, p_{c1}, ..., p_{cm})$ — вектор цен.

На оптимальном решении задачи (8.36), (8.37) справедливо условие

$$\min_\lambda \max_P R(\lambda, P) = \min_\lambda \max_P \left[\sum_{i=1}^n g_{2i}(p_{\text{п}i}) \left(p_{\text{п}i} - \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\lambda_k\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^m g_{1k}(p_{ck})(p_{ck} - \lambda_k) - y\right], \tag{8.38}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$. Если задача (8.36), (8.37) выпуклая, то для непрерывно дифференцируемых функций g_{2i} и g_{1k} она имеет единственное решение, которое определяется условиями

$$\frac{\partial R}{\partial p_{\text{п}i}} = \frac{dg_{2i}(p_{\text{п}i})}{dp_{\text{п}i}}\left(p_{\text{п}i} - \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\lambda_k\right) + g_{2i}(p_{\text{п}i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.39}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_{ck}} = -\frac{dg_{1k}(p_{ck})}{dp_{ck}}(p_{ck} - \lambda_k) - g_{1k}(p_{ck}) = 0, \tag{8.40}$$

$$g_{1k}(p^*_{ck}) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} g_{2i}(p^*_{\text{п}i}), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.41}$$

Условия нецелесообразности наличия складов ресурсов аналогичны условиям (8.8), (8.9):

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p^2_{\text{п}i}} = \frac{d^2 g_{2i}(p_{\text{п}i})}{dp^2_{\text{п}i}}\left(p_{\text{п}i} - \sum_{k=1}^m \alpha_{ik}\lambda_k\right) + 2\frac{dg_{2i}(p_{\text{п}i})}{dp_{\text{п}i}} \le 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.42}$$

$$-\frac{\partial^2 R}{\partial p^2_{ck}} = \frac{d^2 g_{1k}(p_{ck})}{dp^2_{ck}}(p_{ck} - \lambda_k) + 2\frac{dg_{1k}(p_{ck})}{dp_{ck}} \ge 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.43}$$

В случае, когда функции g_{2i} и g_{1k} линейно зависят от цен $p_{\text{п}i}$ и p_{ck}, т.е.

$$g_{2i}(p_{\text{п}i}) = \begin{cases} b_i(p^0_{\text{п}i} - p_{\text{п}i}) & \text{при} \quad p_{\text{п}i} \le p^0_{\text{п}i}, \\ 0 & \text{при} \quad p_{\text{п}i} > p^0_{\text{п}i}, \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{8.44}$$

$$g_{1k}(p_{ck}) = \begin{cases} a_k(p_{ck} - p_{ck}^0) & \text{при} \quad p_{ck} \geq p_{ck}^0, \\ 0 & \text{при} \quad p_{ck} < p_{ck}^0, \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{8.45}$$

они удовлетворяют условиям (8.42), (8.43), а задача (8.36), (8.37) имеет единственное решение, определяющееся условиями

$$p_{\text{п}i}^* = \frac{1}{2}\left(p_{\text{п}i}^0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\lambda_k\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.46}$$

$$p_{ck}^* = \frac{1}{2}(p_{ck}^0 + \lambda_k), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{8.47}$$

Значения λ_k находят после решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j M_{jk} = c_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{8.48}$$

где $c_k = a_k p_{ck}^0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ik} b_i p_{\text{п}i}^0$, а

$$M_{jk} = \begin{cases} a_k + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ik}b_i & \text{при} \quad j = k, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ik}b_i & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Отметим, что потоки предложения сырья $g_{1k}(p_{ck})$ и спроса на продукцию $g_{2i}(p_{\text{п}k})$ в свою очередь определяются распределением оценок на множестве поставщиков сырья и потребителей продукции соответственно. Эти распределения имеют вид, показанный на рис. 8.2.

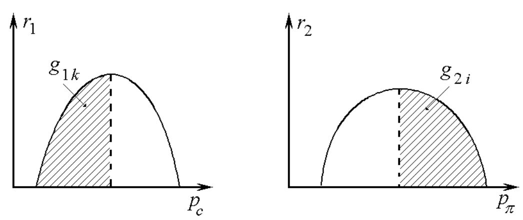


Рис. 8.2. Распределения оценок ресурсов на множестве поставщиков сырья и потребителей продукции предприятия

Поток закупаемого сырья пропорционален площади под кривой распределения оценок его поставшиков, расположенной левее назначенной цены, а поток готовой продукции — площади под кривой распределения оценок ее потребителей, расположенной правее $p_{\text{п}i}$. Поэтому

$dg_{2i}/dp_{\text{п}i} \leq 0$, $dg_{1k}/dp_{ck} \geq 0$. При равномерных плотностях распределения потоки предложения и спроса линейно зависят от соответствующих цен на интервалах внутри границ распределения.

8.2. Производственная фирма в открытой микроэкономической системе

В этом разделе рассмотрены модели поведения и предельные возможности производственной фирмы в зависимости от ее структуры и характеристик. Условие минимальной диссипации капитала для открытой микроэкономической системы распостранено на системы, включающие фирму.

Экономический агент, как показано в гл. 6, характеризуется функцией благосостояния $S(N, M)$, зависящей от вектора ресурсов $N > 0$, в котором через $M = N_0$ обозначается базисный ресурс (деньги). Как правило, $S(N)$ — монотонно возрастающая по каждой составляющей вектора N, выпуклая вверх функция, однородная первого порядка по N. Примером такой функции является функция Кобба–Дугласа для взаимозаменяемых ресурсов:

$$S(N) = \kappa \prod_{i=0}^{m} N_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1. \tag{8.49}$$

Последнее равенство связано с однородностъю первого порядка функции S. Если базисный ресурс дополняет другие виды ресурсов, то

$$S(N) = \kappa \prod_{i=1}^{m} N_i^{\alpha_i} + rN_0, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1. \tag{8.50}$$

Рассмотрим систему, состоящую из экономических агентов и рынка, вектор оценок которого p_+ постоянен. Пусть запас ресурса в подсистеме равен N^0, а его оценка — $p(N)$. Введем *прибыльность ресурса C^0, как предельное количество базисного ресурса, которое может быть извлечено при продаже ресурса N^0 на рынке*:

$$C^0(N^0) = p_+ N^0 - \int_{N^0}^{0} p(N)\, dN = p_+ N^0 - R(N^0).$$

Здесь $R(N^0)$ — минимальная стоимость ресурса, которую нужно заплатить при его покупке за сколь угодно длительное время; C^0 имеет ту же размерность, что и базисный ресурс.

Механизм извлечения базисного ресурса $C^0(N^0)$ можно представить как закупку ресурса у подсистемы посредником с последующей продажей его на рынке. При этом потоки закупок и продаж сколь угодно малы, так что цена закупки сколь угодно близка к $p(N)$, а цена продажи — к p_+. Такой процесс называют *квазиравновесным.*

Если тем или иным способом заданы средние интенсивности потоков, например, ограничена продолжительность закупок, то количество извлеченного базисного ресурса изменится. Оно станет равным

$$C(N^0) = -\int\limits_{N^0}^{0} (p_+ - c(N))\, dN = p_+ N^0 - R_{\text{п}}(N^0).$$

При этом цена посредника $c(N) > p(N)$, а разница

$$D(N^0) = R_{\text{п}}(N^0) - R(N^0) = \int\limits_{0}^{N^0} (c(N) - p(N))\, dN > 0.$$

Если учесть, что

$$dN = g(c,p)\, dt,$$

где g — поток закупок, то

$$D(\tau) = \int\limits_{0}^{\tau} g(c,p)(c-p)\, dt > 0, \tag{8.51}$$

при этом

$$\int\limits_{0}^{\tau} g(c,p)\, dt = N_0.$$

Величина D характеризует необратимые потери прибыльности ресурса. Действительно, для того, чтобы вернуть систему в прежнее состояние, т.е. закупить ресурс N_0 на рынке по цене p_+ и продать его подсистеме по цене $c_1(N) \le p(N)$, придется потратить базисного ресурса (капитала) больше, чем было получено в прямом процессе. Подынтегральное выражение в (8.51)

$$\frac{dD}{dt} = \sigma(c,p) = g(c,p)(c-p) \tag{8.52}$$

характеризует интенсивность потерь.

Отметим, что прибыльность ресурса $C(N_0)$, как и величины D и σ, положительны и тогда, когда ресурс переходит от рынка с оценкой ресурса p_- к подсистеме. В этом случае $p(N) > p_-$, и базисный ресурс извлекают при закупке на рынке с оценкой p_- с последующей продажей подсистеме по цене $c(N) \le p(N)$. При этом в выражении (8.52) изменяется знак потока g и знак разности $c - p$ так, что σ остается неотрицательной.

Понятие прибыльности можно распостранить не только на обьем ресурса, содержащийся в системе, но и на ресурс, поступающий в систему или покидающий ее с интенсивностью g. Прибыльность потока g равна

$$\rho = gp(N),$$

где N — текущий запас ресурса в системе. Если поток покидает систему, то с ростом оценки p его прибыльность (возможность извлечения базисного ресурса за счет последующей перепродажи) уменьшается, а если он поступает в систему, то с ростом оценки его прибыльность растет.

Для однородной открытой экономической системы можно записать балансовые уравнения по ресурсу, капиталу и благосостоянию:

$$\dot{N}_i = g_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.53}$$

$$\dot{N}_0 = g_{0\text{вх}} - g_{0\text{вых}} - \sum_{i=1}^{n} \left(g_{i\text{вх}} c_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} c_{i\text{вых}} \right), \tag{8.54}$$

$$\dot{D}_i = p_i \dot{N}_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Для неоднородной системы уравнения (8.53) и (8.54) останутся без изменения, а уравнение для благосостояния по i-му ресурсу примет форму

$$\dot{D}_i = g_{i\text{вх}} p_i^1 - g_{i\text{вых}} p_i^m - \sigma_i(p). \tag{8.55}$$

Здесь N_i — суммарный запас i-го ресурса, N_0 — суммарный запас капитала, $\sigma_i(p) > 0$ характеризует потери прибыльности, связанные с неоднородностью системы по оценкам i-го ресурса, и имеет вид (2.157).

В стационарном режиме ($\dot{D}_i = 0, \dot{p} = 0, g_{i\text{вых}} = g_{i\text{вх}} = g_i$) величина

$$\sigma_i(p) = g_i(p_i^m - p_i^1) > 0.$$

Чем больше σ_i, тем больше потеря прибыльности i-го ресурса, покидающего систему.

Производственные фирмы закупают одни виды ресурсов (сырье, энергию, трудовые ресурсы и пр.), а продают — другие. Эти фирмы могут иметь сложную структуру с обменом потоками сырья и полуфабрикатов между ее элементами. Ниже с учетом структуры рассмотрены предельные возможности производственной фирмы, функционирующей в открытой микроэкономической системе.

Однородная производственная фирма со скалярным потоком продукции. Рассмотрим производственную фирму, приобретающую ресурсы с интенсивностями q_i по ценам c_i ($i = 1, \ldots, m$) и вырабатывающую поток g продукции с ценой c_g. Здесь мы не учитываем внутренней структуры фирмы и промежуточных потоков сырья и полуфабрикатов. Поэтому рассматриваемую фирму можно назвать однородной.

Разобьем вектор поступающих ресурсов на две категории: взаимодополняющие ресурсы с потоками $q_i(c_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и взаимозаменяемые ресурсы с потоками $q_i(c_i)$ $(i = n+1, \ldots, m)$. На каждый из потоков наложено условие неотрицательности. То значение цены закупки c_{i0}, для которого поток q_i обращается в нуль, называют оценкой ресурса. При $c_i > c_{i0}$, $q_i(c_i) > 0$. Аналогично, оценка c_{g0} определяет область ненулевого потока продукции (при $c_g < c_{g0}$, $g(c_g) > 0$).

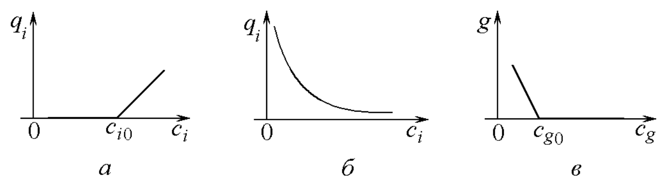


Рис. 8.3. Связь цен с потоками ресурсов (*а, б*) и продукции (*в*)

Функция предложения (зависимость потока от цены закупки) может быть различной. Например (рис. 8.3, *а*),

$$q_i(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad c_i \le c_{i0}, \\ k_i(c_i - c_{i0}) & \text{при} \quad c_i > c_{i0}. \end{cases} \tag{8.56}$$

Здесь коэффициент k_i больше нуля. При закупке ресурса на рынке $c_{i0} = p_i$. Для ресурсов, стоимость которых K постоянна и не зависит от потоков q_i, таких, как оплата аренды зданий и земли (рис. 8.3, *б*),

$$q_i(c_i) = \frac{K}{c_i} \quad \text{при} \quad c_i > 0. \tag{8.57}$$

Поток продукции фирмы определен функцией спроса $g(c_g)$. Характер этой зависимости показан на рис. 8.3, *в*:

$$g(c_g) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad c_g \ge c_{g0}, \\ k_g(c_{g0} - c_g) & \text{при} \quad c_g < c_{g0}. \end{cases} \tag{8.58}$$

Для взаимодополняющих ресурсов потребление каждого однозначно определяется потоком продукции g, так что

$$q_i = \varphi_i(g), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а суммарные затраты на эти ресурсы

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i(c_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(g)\varphi_i(g), \tag{8.59}$$

где зависимости $c_i(g)$ определяются из условия

$$q_i(c_i) = \varphi_i(g), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.60}$$

Для взаимозаменяемых ресурсов существует зависимость между потоком продукции g и потоками q_i:

$$g = F(q_{n+1}, ..., q_m),$$

которая не позволяет определить q_i через g. Для каждого значения производительности g минимальные затраты

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \sum_{i=n+1}^{m} c_i q_i(c_i) \Bigg/ F\big(q(c)\big) = g. \tag{8.61}$$

Таким образом, затраты на взаимозаменяемые ресурсы определяются решением экстремальной задачи (8.61).

Предельные возможности производственной фирмы зависят от значения производственного потока g, для которого интенсивность извлечения базисного ресурса максимальна:

$$n_0(c_g) = c_g g(c_g) - T_1\big(g(c_g)\big) - T_2\big(g(c_g)\big) \to \max_{c_g \leq c_{g0}}. \tag{8.62}$$

Диссипация капитала при закупке сырья и продаже продукции фирмой равна

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} (c_i - c_{i0}) q_i + (c_{g0} - c_g) g; \tag{8.63}$$

$\sigma = 0$, если закупка ресурса и продажа продукции производятся по ценам c_{i0} и c_{g0}, при этом отношение дохода к затратам $\eta = n_0/(T_1 + T_2)$ максимально, хотя как числитель, так и знаменатель этого выражения стремятся к нулю.

Приведем решение задачи о максимуме интенсивности получения прибыли n_0 при линейных функциях $F(q)$ и $\varphi_i(g)$:

$$F(q) = \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i q_i, \quad i = n+1, \ldots, m, \tag{8.64}$$

$$\varphi_i(g) = \frac{g}{\alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.65}$$

Используя зависимости (8.56) и (8.60), находим выражения для $c_i(g)$

$$c_i = c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.66}$$

и затрат $T_1(g)$:

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g}{\alpha_i} \left(c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i} \right). \tag{8.67}$$

Задача (8.61) примет вид

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \sum_{i=n+1}^{m} c_i k_i (c_i - c_{i0}) \Bigg/ \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i k_i (c_i - c_{i0}) = g. \tag{8.68}$$

Ее решение

$$T_2(g) = \sum_{i=n+1}^{m} c_i^*(g) k_i (c_i^*(g) - c_{i0}), \tag{8.69}$$

где

$$c_i^*(g) = \frac{c_{i0}}{2} + \alpha_i \frac{2g + \sum\limits_{i=n+1}^{m} k_i c_{i0} \alpha_i}{2 \sum\limits_{i=n+1}^{m} k_i \alpha_i^2}, \quad i = n+1, \ldots, m, \tag{8.70}$$

откуда

$$T_2(g) = \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2g + \sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i k_i c_{i0} \right)^2}{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i^2 k_i} - \sum_{i=n+1}^{m} k_i c_{i0}^2 \right]. \tag{8.71}$$

Задача (8.62) с учетом этих выражений запишется в форме

$$n_0 = c_g g(c_g) - g(c_g) \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i0}}{k_i \alpha_i} - g^2(c_g) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i \alpha_i^2} - \\ - \sum_{i=n+1}^{m} k_i c_i^* \big(g(c_g)\big) \Big[c_i^* \big(g(c_g)\big) - c_{i0} \Big] \to \max_{c_g}. \tag{8.72}$$

Эта задача выпукла вверх. С учетом того, что (см. (8.70), (8.58))

$$\frac{dc_i^*}{dg} = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{j=n+1}^{m} \alpha_j^2 k_j}, \quad \frac{dg}{dc_g} = -k_g,$$

условие оптимальности задачи (8.72) запишется как

$$\frac{dn_0}{dc_g} = 0 \Longrightarrow (2c_g - c_{g0}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i0}}{\alpha_i k_i} - 2k_g (c_{g0} - c_g) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i \alpha_i} - \\ - \sum_{i=n+1}^{m} \frac{k_i \alpha_i}{\sum\limits_{j=n+1}^{m} k_j \alpha_j^2} \Big[2c_i^*(g) - c_{i0} \Big] = 0,$$

откуда с учетом (8.70) можно получить выражения для c_g^*:

$$c_g^* = \frac{c_{g0}}{2} + \frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_{i0}}{\alpha_i} + \frac{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i k_i c_{i0}}{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i^2 k_i}\right]}{2k_g \left[1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i^2 k_i}\right]}, \tag{8.73}$$

и после подстановки c_g^* в (8.58) и (8.72), получить выражение для максимальной интенсивности прибыли n_0^*.

Учет внутренней структуры и распределение потоков ресурса. В реальной производственной системе зависимости между потоками закупаемых и производимых ресурсов непосредственно не заданы. Переработка может состоять из нескольких стадий, включать в себя рециклы, распределение полуфабрикатов, цены которых не определены, и пр. Ниже рассмотрены несколько задач, связанных с учетом структуры производственной фирмы.

Система с рециклом. Структура системы показана на рис. 8.4, *а*. В этой системе доля выпуска γ направляется в производство. Обозначим этот поток через $q_0 = \gamma g$.

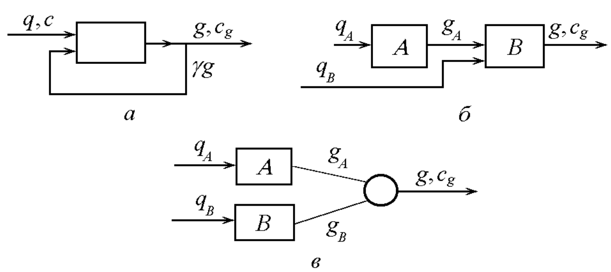


Рис. 8.4. Соединения производственных ячеек с рециклом (*а*), последовательное (*б*) и параллельное (*в*)

Если рецикл с потоком q_0 относится к взаимодополняющим ресурсам, а значит, однозначно связан с производительностью, то условие

$$q_0 = \gamma g = \varphi_0\big(g(1+\gamma)\big)$$

для монотонной функции φ_0 определяет $\gamma(g)$. Так, для зависимостей в форме (8.64) из условия $\gamma g = (1+\gamma)g/\alpha_0$ следует, что $\gamma = 1/\alpha_0 - 1$. Задача оценки предельной прибыли отличается от задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, тем, что в функциях $T_1(g)$ и $T_2(g)$ нужно заменить g на $(1+\gamma(g))g$.

В случае, если рецикл относится к взаимозаменяемым ресурсам, задача (8.61) примет вид

$$T_2(g,\gamma) = \min_{c \geq c_0} \left[\sum_{i=n+1}^{m} c_i q_i(c_i) + c_g \gamma g \right] \Big/ F(q_{n+1}, ..., q_m, \gamma g) = (1+\gamma) g, \tag{8.74}$$

ее значение (минимальные затраты) $T_2(g,\gamma)$ будут зависеть не только от g, но и от γ. Критерий максимальной интенсивности прибыли:

$$n_0 = c_g g(c_g) - T_1\big((1+\gamma)g(c_g)\big) - T_2\big(g(c_g),\gamma\big) \to \max_{c_g \leq c_{g0}, 1>\gamma\geq 0}. \tag{8.75}$$

Последовательное соединение производственных ячеек. Структура такой схемы представлена на рис. 8.4, *б*. Для первой из ячеек A по формулам (8.59), (8.61) могут быть расчитаны минимальные затраты как функция потока полуфабриката:

$$T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A). \tag{8.76}$$

В том случае, когда поток полуфабриката является взаимодополняющим, он определяется значением продуктового потока g $\big(g_A = \varphi_A(g)\big)$, а значит, и затраты T_A оказываются зависимыми от g. Выбор цены c_g и производительности g осуществляется решением задачи (8.62), которая для данного случая запишется в виде

$$n_0(c_g) = c_g g(c_g) - T_{1B}\big(g(c_g)\big) - T_{2B}\big(g(c_g)\big) - T_A\big(g(c_g)\big) \to \max_{c_g \leq c_{g0}}. \tag{8.77}$$

Если же поток g_A полуфабриката взаимозаменяемый, то слагаемое $T_A\big(g(c_g)\big)$ в выражении для n_0 (8.77) отсутствует, а задача (8.61) преобразуется к виду

$$T_2(g) = \min_{c \geq c_0} \left[\sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} q_{iB}(c_{iB}) + T_A(g_A) \right] \Big/ F\big(q(c)\big) = g. \tag{8.78}$$

П р и м е р. Решим задачу (9.26) для линейных зависимостей $q_\nu(c_\nu)$ (8.56), $F_\nu(q_\nu)$ (8.63), $\varphi_\nu(g_\nu)$ (8.64) ($\nu = \{A, B\}$). С учетом (8.67), (8.71) эта задача имеет вид

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} k_{iB} (c_{iB} - c_{i0B}) + \sum_{i=1_A}^{n_A} \frac{g_A}{\alpha_{iA}} \left(c_{i0A} + \frac{g_A}{\alpha_{iA} k_{iA}} \right) +$$
$$+ \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2g_A + \sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA} k_{iA} c_{i0A} \right)^2}{\sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}} - \sum_{i=n_A+1}^{m_A} k_{iA} c_{i0A}^2 \right] \to \min_{c_{iB}, g_A}$$

при условии

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} \alpha_{iB} q_{iB} + \alpha_{0B} g_A = g_B. \tag{8.79}$$

Условия оптимальности этой задачи определяют выражения для управляющих переменных:

$$c_{iB} = \frac{\lambda\alpha_{iB} + c_{i0B}}{2} \implies q_{iB} = k_{iB}\frac{\lambda\alpha_{iB} - c_{i0B}}{2} \quad (i = 1 + n_A, \ldots, m_A),$$

$$g_A = \frac{\sum\limits_{i=1_A}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}}{2}\left[\lambda\alpha_{0B} - \left(\sum_{i=1}^{n_A} \frac{c_{i0A}}{\alpha_{iA}} + \frac{\sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{i_A} k_{iA} c_{i0A}}{\sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}}\right)\right],$$

где множитель λ находят из условия (8.79).

Параллельное соединение производственных ячеек. Структура такой системы приведена на рис. 8.4, *в*. Системы с параллельной структурой тщательно изучены. Найдя для каждой ячейки минимальные затраты $T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A)$ и $T_B(g_B) = T_{1B}(g_B) + T_{2B}(g_B)$, потоки g_A и g_B выбирают таким образом, чтобы были выполнены условия

$$\frac{dT_A}{dg_A} = \frac{dT_B}{dg_B}, \quad g_A + g_B = g. \tag{8.80}$$

Условия (8.80) связывают потоки ячеек с общим потоком g и, тем самым, определяют затраты T_A и T_B как функции g. Последний же выбирается из условия

$$n_0(c_g) = c_g g(c_g) - T_A\big(g(c_g)\big) - T_B\big(g(c_g)\big) \to \max_{c_g \le c_{g0}}. \tag{8.81}$$

Представив производственную структуру как соединение отдельных ячеек, каждая из которых в свою очередь, может не быть однородной, можно найти предельные возможности системы.

Для систем с векторным потоком готового продукта $g = (g_1, g_2, \ldots \ldots, g_j, \ldots, g_\kappa)$ максимальная прибыль для каждого вида продукции $n_{0j}(g_j)$ определяется выражением (8.62). Выбор вектора g осуществляют как решение задачи

$$n_0(g) = \sum_{j=1}^{\kappa} n_{0j}[g_j(c_{gj})] \to \max_{c_{gj}}. \tag{8.82}$$

при тех или иных ограничениях, связывающих друг с другом потоки g_j. Такими ограничениями могут быть возможности оборудования, ограничения на поток какого-либо ресурса и пр.

Интенсивность прибыли n_0 не всегда является критерием для выбора цен и потоков в производственных системах. Величина n_0 может быть задана: $n_0 = n_0^0$. Если это заданное значение не превосходит максимально возможного и требуется при $n_0 = n_0^0$ минимизировать затраты на единицу продукции, то, как нетрудно показать, задача сводится к минимизации диссипации капитала σ (8.63) при фиксированном $n_0^0(g)$.

Целесообразность складов сырья и готовой продукции. Наличие складов сырья и готовой продукции позволяет не только сгладить изменения внешних условий, но в ряде случаев повысить эффективность производства даже в стационарном окружении. Если на производстве есть склады сырья и готовой продукции, то «жесткие» связи между потоками заменяются усредненными. Так, например, для взаимодополняющих ресурсов имеем

$$\int_0^\tau \left[q_i\big(c_i(t)\big) - \varphi_i\big(g(t)\big)\right] dt = 0 \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.83}$$

вместо равенства (8.60). Аналогично, для взаимозаменяемых ресурсов в задаче (8.61) нужно искать минимум функционала

$$\overline{T_2} = \sum_{i=n+1}^{m} \int_0^\tau c_i(t) q_i\big(c_i(t)\big)\ dt \tag{8.84}$$

по $c_i(t) \geq c_{i0}$ $(i = n+1, \ldots, m)$ при условии

$$\int_0^\tau \Big[g(t) - F\Big(q_{n+1}\big(c_{n+1}(t)\big), ..., q_m\big(c_m(t)\big)\Big)\Big]\, dt = 0. \tag{8.85}$$

В критерии оптимальности (8.62) при наличии складов также можно провести усреднение по времени, аналогичное (8.84), и искать изменение во времени отпускной цены $c_g(t)$ и потока $g(t)$.

Сформулированные таким образом задачи являются усредненными задачами нелинейного программирования (см. гл. 9). Они имеют оптимальное решение либо в форме констант (статический режим), в этом случае наличие складов не приводит к дополнительному эффекту, либо в форме кусочно постоянных функций (циклический режим). В случае циклического режима часть или все переменные задачи принимают в течение определенных долей γ_ν интервала времени τ оптимальные (базовые) значения, переключаясь между ними. Максимальное среднее значение $\overline{n_0}$ в этом случае больше, чем n_0 в статическом режиме, и склады позволяют получить дополнительный эффект. Приведем как следствия из общих утверждений, изложенных в гл. 9, условия целесообразности или, напротив, нецелесообразности складов.

1. Пусть g^* — оптимальное статическое значение производительности, а c_i^* — соответствующие этому значению цены. Если

$$\max_{\lambda}\min_{c}\left[\sum_{i=n+1}^{m} c_i q_i(c_i) + \lambda\left[F\big(q(c)\big) - g^*\right]\right] < \sum_{i=n+1}^{m} c_i^* q_i^*(c_i^*), \qquad (8.86)$$

то склад на взаимозаменяемых потоках сырья целесообразен.

2. Аналогично, если для i-го взаимодополняющего потока

$$\max_{\lambda}\min_{c}\left[c_i q_i(c_i) + \lambda\Big[q_i(c_i) - \varphi_i(g^*)\Big]\right] < c_i^* q_i^*(c_i^*), \qquad (8.87)$$

то склад i-го ресурса позволит получить эффект. Разница между левой и правой частями неравенств (8.86), (8.87) дает оценку сверху для возможного эффекта. Если эта разница невелика, то не стоит тратить средства на создание складов сырья.

3. Наконец, склад готовой продукции целесообразен, если

$$\min_{\lambda}\max_{c_g}\left[n_0(c_g) + \lambda\Big[g(c_g) - g^*\Big]\right] > n_0(c_g^*). \qquad (8.88)$$

Условие (8.88) означает, что при $c_g = c_g^*$ выпуклая оболочка функции $n_0(c_g)$ проходит выше ее графика.

Как правило, целесообразность складов объясняется скачками в функциях спроса и предложения, связанными с переходом при некоторых значениях потока на другое оборудование, другие средства доставки, льготные тарифы и пр.

Открытая микроэкономическая система, включающая фирму. Как указывалось в гл. 6, для открытой микроэкономической системы, состоящей из экономических агентов, у которых оценки ресурсов определяются вектором их запасов N, в стационарном режиме вблизи равновесия устанавливаются такое распределение ресурсов

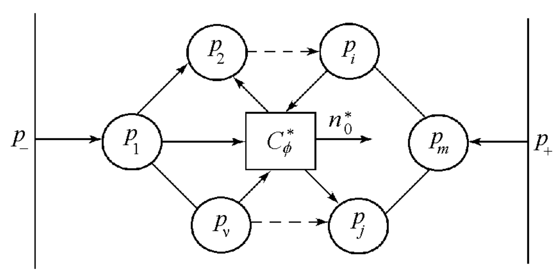


Рис. 8.5. Открытая микроэкономическая система, включающая фирму

между подсистемами и связанные с запасами ресурсов оценки и потоки, что величина диссипации капитала σ минимальна. Если система содержит посредническую или производственную фирму (рис. 8.5), то в стационарном режиме фирма извлекает базисный ресурс с интенсивностью n_0, при этом она устанавливает такие цены $c^*_\phi(p)$ закупки, продажи и связанные с ними потоки обмена, для которых величина $n_0 = n^*_0(p)$ максимальна.

Пользуясь приведенными выше соотношениями, можно рассчитать состояние открытой экономической системы по критерию минимума диссипации с тем дополнительным условием, что скорость изменения базисного ресурса фирмы равна $n^*_0(p)$:

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{j,\nu} g_{j\nu}(p_\nu, p_j)(p_\nu - p_j) +$$

$$+ \sum_j g_{j\phi}(c_\phi, p_j)(c_\phi - p_j) \to \min_{p_j(N_j)} \Big/ \sum_j g_{j\phi}(c_\phi, p_j)c_\phi = n^*_0(p).$$

Из последнего соотношения вытекает у т в е р ж д е н и е: *для стационарной открытой микроэкономической системы, содержащей производственную фирму, справедливо условие минимальной диссипации. При этом диссипация капитала определяется выражением*

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{j\nu} g_{j\nu}(p_\nu, p_j)(p_\nu - p_j) + n^*_0(p) - \sum_j g_{j\phi}(c^*_\phi, p_j)p_j \to \min_{p_j(N_j)}. \quad (8.89)$$

Здесь $g_{j\phi}$ — потоки между фирмой и подсистемами, к которым относятся как потоки ресурсов q (в этом случае $c_\phi > p_j$), так и продукции g (в этом случае $c_\phi < p_j$). Вблизи равновесия зависимость потоков от движущих сил $p_\nu - p_j$ или $c_\phi - p_j$ предполагается линейной.

Задачу (8.89) нужно решать одновременно с вычислением максимального потока $n^*_0(p)$ прибыли фирмы. Будем предполагать, что каждый из потоков $g_j(c_j, p_j)$ монотонно зависит от c_j, знак потока положителен, если он направлен от подсистемы к фирме (закупки) и отрицателен при продаже. В этом случае мы можем выразить цену закупки (продажи) $c_j(g_j, p_j)$ у j-го ЭА через величину потока и записать задачу о максимуме прибыли как

$$n_0(p, g_j) = -\sum_j g_j c_j(g_j, p_j) \to \max_{g_j} \quad (8.90)$$

при условии

$$\sum_j g_j = 0. \quad (8.91)$$

Характер зависимости $c_j(g_j, p_j)$ показан на рис. 8.6.

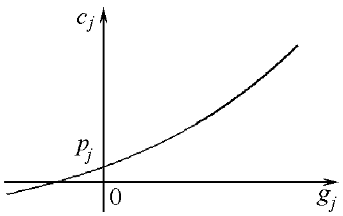


Рис. 8.6. Характер зависимости цены от потока ресурса

Условия оптимальности задачи (8.90), (8.91) приводят к соотношениям, позволяющем найти оптимальные значения потоков из решения системы

$$g_j = \Big(\lambda - c_j(g_j, p_j)\Big)\frac{\partial g_j}{\partial c_j}, \tag{8.92}$$

где

$$\lambda = \sum_j c_j(g_j, p_j)\gamma_j, \quad \gamma_j = \frac{\partial g_j}{\partial c_j} : \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial c_j}.$$

Таким образом, $\gamma_j > 0$, их сумма равна единице и λ имеет смысл средневзвешенной цены ресурса.

Максимальная прибыль:

$$n_0^*(p) = \lambda^2 \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial c_j} - \sum_j c_j^2 \frac{\partial g_j}{\partial c_j}. \tag{8.93}$$

Система может содержать не одну, а несколько конкурирующих фирм. В этом случае каждая ν-я фирма ($\nu = 1, \ldots, k$) решает задачу (8.90), (8.91) с тем дополнительным требованием, что цены закупки (продажи) у всех фирм при контакте с j-м ЭА одинаковы. Таким образом, мы приходим к совокупности k взаимосвязанных экстремальных задач

$$n_{\nu 0}(p, g_j) = -\sum_j g_{j\nu} c_j(g_j, p_j) \to \max_{g_{j\nu}} \tag{8.94}$$

при условиях

$$\sum_j g_{j\nu} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, k, \tag{8.95}$$

$$g_j = \sum_\nu g_{j\nu}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{8.96}$$

Если каждая из посреднеческих фирм имеет доступ ко всем ЭА, то задачи (8.94), (8.95) одинаковы для всех ν. Дело обстоит иначе, если задана структура системы, определяющая, с каким из ЭА каждая из фирм может вступать в контакт. Чтобы учесть этот фактор, можно ввести функции контакта $u_{\nu j}$, равные единице, если ν-я фирма может вступать в контакт с j-м ЭА, и равные нулю в противном случае.

Условия оптимальности (8.92), (8.93) претерпят при этом изменения, так что оптимальные потоки ресурса для ν-й фирмы удовлетворяют соотношениям

$$g_{j\nu} = u_{\nu j}\Big(\lambda_\nu - c_j(g_j, p_j)\Big)\frac{\partial g_j}{\partial c_j}, \tag{8.97}$$

в которых

$$\lambda_\nu = \sum_j c_j(g_j, p_j)\gamma_{\nu j},$$

$$\gamma_{\nu j} = u_{\nu j}\frac{\partial g_j}{\partial c_j} : \sum_j u_{\nu j}\frac{\partial g_j}{\partial c_j}.$$

Наконец, фирмы могут вступать в контакт друг с другом, т.е. выступать в роли перекупщиков. В этом случае задачу можно свести к рассмотренной, введя фиктивного ЭА, оценка ресурса p_0 для которого находится таким образом, чтобы удовлетворялись балансовые соотношения для потоков ресурса.

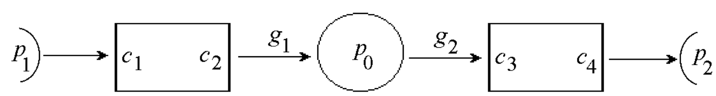


Рис. 8.7. Последовательное соединение фирм-перекупщиков

Так, для последовательной структуры двух фирм (рис. 8.7) оптимальное решение находят из условий

$$g_1^*(p) = \operatorname*{argmax}_{g_1} g_1[c_2(g_1, p_0) - c_1(g_1, p_1)],$$

$$g_2^*(p) = \operatorname*{argmax}_{g_2} g_2[c_4(g_2, p_2) - c_3(g_2, p_0)],$$

$$g_1^*(p_0) = g_2^*(p_0).$$

Если фирм-перекупщиков несколько, то значение p_0 находится так, чтобы суммарный поток ресурса на входе фиктивного ЭА был равен суммарному потоку на его выходе.

Глава 9

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Особенности задач оптимизации макроуправляемых систем

Уравнения макродинамических (термодинамических и микроэкономических) балансов (см. гл. 1, гл. 6) связывают скорости изменения экстенсивных переменных — внутренней энергии, энтропии, благосостояния, запасов ресурсов — с потоками, которыми система обменивается с внешней средой, и со скоростью процессов, протекающих в системе (химических превращений, производственных процессов и пр.), т.е. с внешней и внутренней кинетикой процессов. В свою очередь кинетика зависит от значений интенсивных переменных как самой системы, так и ее окружения. Так, скорости химических реакций зависят от температуры, давления, химических потенциалов самой системы и от параметров контактирующих систем и внешних потоков. Мощность P зависит от скорости изменения объема $\dot{V}$. Интенсивность товарообмена определяется различием оценок ресурсов. Кроме того, потоки зависят от коэффициентов кинетики.

Обозначим через x вектор экстенсивных переменных рассматриваемой системы. Скорости их изменения стоят в левых частях уравнений макродинамических балансов. Таким образом, $x = (E, N, S, ...)$. Через y обозначим вектор интенсивных переменных системы, $y = (T, p, \mu, ...)$. Наконец, через u обозначим вектор переменных, которые можно в заданных пределах изменять внешними по отношению к системе воздействиями. К ним относятся объем термодинамической системы V, коэффициенты β в уравнениях тепло- и массопереноса, температуры, давления, химические потенциалы внешних конвективных потоков, цены закупок и продаж и пр. Вектор u является вектором управляющих воздействий.

В этих обозначениях уравнения макродинамических балансов примут форму

$$\dot{x}_\nu = f_\nu\big(y(x, u_1), u_2\big), \quad \nu = 0, ..., m. \tag{9.1}$$

Здесь m — размерность вектора состава N, u_1 — те составляющие управлений, которые влияют на интенсивные переменные системы, а u_2 — те составляющие, от которых вектор y непосредственно не зависит.

Функция $y(x, u_1)$ определяется соотношениями, связывающими интенсивные переменные системы с ее экстенсивными переменными через уравнение состояния. Если, например, уравнение состояния задано в форме зависимости внутренней энергии от энтропии, объема и состава

$$E = E(S,\, V,\, N), \tag{9.2}$$

то вектор y определяется (см. гл. 1) равенствами

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial E}{\partial V}, \quad \mu_i = \frac{\partial E}{\partial N_i}, \quad i = 1, ..., m.$$

Структура макроуправляемой системы показана на рис. 9.1. Здесь первый блок определяется уравнением состояния системы, а второй — кинетическими соотношениями.

Особенности этой структуры и в том, что составляющие вектора x — энтропия, внутренняя энергия, обьемы ресурсов — не входят непосредственно в правые части уравнений (9.1), позволяет во многих случаях упростить задачу, предположив, что возможности изменения управлений u_1 таковы, что с их помощью может быть реализован произвольный закон изменения $y(t)$.

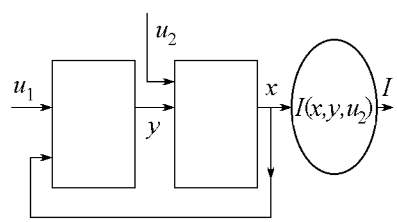


Рис. 9.1. Структура, отражающая особенности математической модели макроуправляемой системы

Если в критерий оптимальности $I(y, u_2)$ управления u_1 непосредственно не входят, можно уравнения (9.1) переписать в форме

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(y, u_2), \quad \nu = 0, \ldots, m+1, \tag{9.3}$$

и считать y таким же управляющим воздействием, как и u_2. При этом мы расширяем множество допустимых решений, и естественно, что значение (максимум критерия оптимальности) I^0 модифицированной таким образом задачи будет давать оценку сверху для задачи на максимум и оценку снизу для задачи на минимум величины I^* в исходной постановке. Задача с условиями (9.3) (ее называют оценочной) представляет собой расширение для исходной задачи с условиями (9.1), так как условия $y(x, u_1)$ отброшены.

Важно подчеркнуть, что условия, а значит, и оптимальное решение оценочной задачи не зависят от уравнения состояния термодинамической системы, а зависят только от ее структуры, кинетики тепло- и массопередачи, кинетики химических реакций и от составляющих вектора u_2. Зная оптимальное решение y^*, u_2^*, x^* оценочной задачи, проверяют, можно ли найденное решение реализовать в исходной задаче. Для этого определяют $u_1(t)$ из уравнений

$$f_\nu\big(y(x^*, u_1), u_2^*\big) = \dot{x}_\nu^*, \quad \nu = 0, ..., m+1. \tag{9.4}$$

Если найденное таким образом управление u_1^* допустимо, т.е. удовлетворяет наложенным на него ограничениям, то искомое решение исходной задачи найдено, величина I^* совпадает с I^0 (расширение эквивалентно). Если же среди допустимых значений управления u_1 не найдется вектора, удовлетворяющего уравнениям (9.4), то полученное решение оценочной задачи помимо оценки для I^* дает полезную информацию о характере искомого решения.

Остановимся подробнее на одном распространенном классе задач оптимизации макроуправляемых систем, когда задано начальное значение $x(0)$ вектора состояния системы и конечное значение $x(\overline{t})$ для всех составляющих x, кроме одной. Эту последнюю обозначим через x_0. Мы приходим к экстремальной задаче вида

$$I = \int\limits_0^\tau f_0(y, u_2)dt \to \max \tag{9.5}$$

при условиях

$$J_\nu = \int\limits_0^\tau f_\nu(y, u_2)dt = x_\nu(\overline{t}) - x_\nu(0) = C_\nu, \quad \nu = 1, ..., m+1, \tag{9.6}$$

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(y, u_2), \quad \nu = 0, ..., m+1. \tag{9.7}$$

Здесь для определенности экстремум понимается как максимум.

Отметим, что в оценочной задаче (9.5)–(9.7) дифференциальные уравнения (9.7) на оптимальное решение y^*, u_2^* не влияют. Если найдено такое решение, то уравнения (9.7) позволяют найти соответствующее ему решение $x^*(t)$. При фиксированном значении τ задача сводится к определению такой вектор-функции $z = (y, u_2)$, чтобы среднее значение на интервале $[0, \tau]$ функции $f_0(z)$ было максимальным при условии, что средние значения на том же интервале функций $f_\nu(z)$ заданы и равны $C_\nu/\overline{\tau}$. В некоторых задачах $y(t)$ является заданной случайной либо регулярной функцией времени.

Характерными для макроуправляемых систем с посредником, поочередно контактирующим с другими подсистемами, являются циклические процессы, в которых переменные, характеризующие состояние одной из подсистем, изменяются периодически ($x_\nu(\tau) = x_\nu(0)$). В правых частях уравнений (9.6) константы C_ν для соответствующих переменных равны нулю.

Задача (9.5), (9.6) является задачей усредненной оптимизации.

9.2. Эквивалентные преобразования и расширение экстремальных задач

Под экстремальной задачей понимают задачу о максимуме некоторого критерия $I(x)$ на множестве допустимых решений $x \in D$:

$$I(x) \to \max \Big/ x \in D. \tag{9.8}$$

Множество D может принадлежать векторному пространству R^n либо пространству функций, на котором определен функционал $I(x)$. Элемент x^* множества D, на котором I достигает максимума, назвают *оптимальным решением*, а величину критерия $I(x^*)$ на этом решении — *значением задачи.*

По цели решения экстремальные задачи можно разбить на две категории.

I. Задачи, целью решения которых является получение верхней грани критерия оптимальности I^*, — критериальные задачи.

II. Задачи, в которых значение критерия является лишь индикатором правильности решения, целью же является получение x^*, — аргументные задачи [91].

Если условия задачи известны абсолютно точно, а саму задачу удалось решить аналитически, то между двумя группами задач нет разницы, так как решению x^* соответствует $I^* = I(x^*)$. Но если решение задачи не единственно, т.е. различным значениям x_ν соответствует одно и то же $I(x_\nu) = I^*$, то в критериальной задаче это обстоятельство несущественно.

В ряде случаев решения задачи (9.8) может не существовать даже при ограниченном сверху функционале $I(x)$. Это может быть, например, когда $I(x)$ растет при $x \to x^*$, но сам элемент x^* не принадлежит D. Решением в этом случае естественно считать последовательность $\{x_i\}$ элементов D, на которой $I(x_i)$ стремится к $I(x^*)$, — максимизирующую последовательность. Такую последовательность часто называют *обобщенным решением.*

Само же значение $I(x^*)$ представляет собой то минимальное число N, для которого справедливо неравенство

$$I(x) \le N \quad \forall x \in D.$$

Оно называется точной верхней гранью I на D $\big(\sup I(x) \;/\; x \in D\big)$. Аналогично вводится обозначение inf для точной нижней грани.

Решения в классе максимизирующих последовательностей, как правило, не единственны; в критериальной задаче может быть выбрано любое из них, причем в качестве решения взят такой член последовательности, для которого величина $I(x_i)$ с заданной точностью близка к верхней грани критерия.

Характерными для второй группы являются задачи о построении математической модели процесса по данным эксперимента, их решение в свою очередь используется для тех или иных задач расчета и проектирования. Если сколь угодно малые изменения исходных данных, не меняющие величины функционала I на оптимальном решении, существенно меняют само это решение или погрешности счета при численном решении сильно влияют на искомое значение x^*, то в аргументной задаче это недопустимо и нужно модифицировать критерий оптимальности либо ввести добавочные ограничения на множество искомых решений.

Как оптимальное решение, так и значение задачи зависят от исходных данных, которые в свою очередь могут быть получены в результате измерений и содержать погрешность; при постановке задачи с целью облегчения ее решения может быть использована упрощенная модель. В этом случае решение имеет ценность только тогда, когда зависимости оптимального решения для аргументных и значения для критериальных задач от такого рода исходных данных непрерывны. Задачи, обладающие этим свойством, называют *корректно поставленными.*

Эквивалентные преобразования экстремальных задач. Задачу (9.8) можно видоизменить таким образом, чтобы ее решение x^*, значение I^* или и то, и другое не изменились. В первом случае преобразованную задачу называют тождественной исходной задаче по решению, во втором — по значению, а в третьем — просто тождественной. Приведем несколько примеров подобных преобразований.

I. Монотонное преобразование критерия, при котором задача (9.8) преобразуется в задачу

$$F_0\big(I(x)\big) \to \max \big/ \; x \in D, \tag{9.9}$$

где функция F_0 монотонно растет с ростом I (если F_0 дифференцируема, то производная этой функции по I почти всюду положительна). Задача (9.9) тождественна исходной задаче (9.8) относительно решения.

II. Введение в критерий оптимальности исчезающего слагаемого

$$I(x) + \varphi(x) \to \max \big/ \; x \in D, \tag{9.10}$$

где функция $\varphi(x)$ обращается в нуль для любого $x \in D$. Задача (9.10) тождественна исходной.

III. Монотонное преобразование суммы критерия оптимальности с исчезающим слагаемым

$$F_0\big(I(x) + \varphi(x)\big) \to \max \big/ \; x \in D.$$

Эта задача, как и задача (9.9), тождественна исходной относительно решения.

Понятие тождественности экстремальных задач можно обобщить на случай, когда множества допустимых решений исходной и преобразованной задач различны. Рассмотрим две задачи.

З а д а ч а A. $\quad I_A(y) \to \max \big/ \, y \in D_A$.

З а д а ч а $A1$. $\quad I_{A1}(z) \to \max \big/ \, z \in D_{A1}$.

О п р е д е л е н и е. Экстремальные задачи A и $A1$ назовем *тождественными относительно решения*, если между элементами множеств D_A и D_{A1} можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что из неравенства

$$I_A(y_1) \geq I_A(y_2), \quad (y_1, y_2) \in D_A, \tag{9.11}$$

следует неравенство

$$I_{A1}(z_1) \geq I_{A1}(z_2), \quad (z_1, z_2) \in D_{A1}. \tag{9.12}$$

Здесь z_1 соответствует y_1, а z_2 соответствует y_2 (рис. 9.2). Все задачи, тождественные задаче A относительно решения, будем объединять в класс $\overline{A}$. Неравенства (9.11), (9.12) гарантируют, что оптимальному решению задачи A соответствует оптимальное решение задачи $A1$.

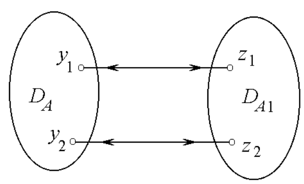


Рис. 9.2. К определению задач, тождественных относительно решения

П р и м е р. Рассмотрим задачу A вида

$$f_0(x) \to \max \Big/ \, f_0(x) > 0, \quad a \leq x \leq b,$$

и задачу $A1$

$$\int_a^b \sqrt{f_0(\tau)} \delta(t - \tau) d\tau \to \max \Big/ \, f_0(\tau) > 0.$$

Функция f_0 непрерывна и ограничена на $[a, b]$. Если ввести соответствие между множествами допустимых решений этих задач, при котором решению x^0 задачи A соответствует решение $\delta(x^0 - \tau)$ в задаче $A1$, то они окажутся тождественными относительно решения в смысле данного выше определения.

Расширение экстремальных задач. Ниже часто будет использован прием, при котором исходная экстремальная задача заменяется другой задачей — с более широким множеством допустимых решений.

Простейший способ такого перехода заключается в отбрасывании того или иного ограничения в исходной задаче. Ясно, что получившаяся после этого задача имеет более широкое множество D. Другой способ — отбрасывание условий постоянства во времени искомого решения и переход от поиска вектора к поиску вектор-функции; отбрасывание требований гладкости искомого решения и пр. Такой переход и является расширением экстремальной задачи. Будем называть расширением и задачу, получившуюся отбрасыванием тех или иных ограничений в эквивалентно преобразованной задаче.

Дадим определение расширения.

З а д а ч а B $(I_B(y) \to \max \big/ y \in D_B)$ называется *расширением для задачи* A $(I_A(y) \to \max \big/ y \in D_A)$, если из множества D_B можно выделить такое подмножество $\tilde{D}_B$, что задача $\tilde{B}$ $(I_B(y) \to \max \big/ y \in \in \tilde{D}_B)$ тождественна по решению задаче A. Таким образом, задача $\tilde{B}$ принадлежит классу $\overline{A}$.

Прокомментируем это определение. Согласно ему множества исходной задачи D_A и расширенной D_B могут иметь разную природу. Например, множество векторов и множество действительных функций. Критерии оптимальности исходной и расширенной задач I_A и I_B в общем случае различны, но таковы, что на множествах D_A и $\tilde{D}_B$ они удовлетворяют неравенствам (9.11), (9.12), т.е. на этих множествах они монотонно связаны друг с другом. В частности, если D_A и $\tilde{D}_B$ совпадают, критерии оптимальности могут совпадать друг с другом или быть монотонно связанными на D_A.

В расширенной задаче критерий и условия, определяющие множество D, могут зависеть от некоторого параметра λ, причем так, что для любого значения $\lambda \in V_\lambda$ задача B_λ является расширением. Такое расширение B_λ: $I_B(\lambda, y) \to \max \big/ y \in D_{B\lambda}$ называют *параметрическим.*

Дадим определения эквивалентного и эффективного расширения, предположив, что критерии I_A и I_B таковы, что на соответствующих друг другу элементах множеств D_A и $\tilde{D}_B$ они совпадают.

I. *Расширение задачи A эквивалентно, если значения исходной и расширенной задач одинаковы, т.е.*

$$I_A^* = \sup_{y \in D_A} I_A(y) \;=\; I_B^* = \sup_{y \in D_B} I_B(y). \tag{9.13}$$

Параметрическое расширение эквивалентно, если равенство (9.13) *выполнено хотя бы для одного значения $\lambda \in V_\lambda$.*

II. *Показателем эффективности расширения называют величину $\Delta = I_B^* - I_A^*$; для параметрического расширения показатель эффективности $\Delta = \inf\limits_{\lambda \in V_\lambda} I_B^*(\lambda) - I_A^*$.*

Так как множество D_B шире, чем $\tilde{D}_B$, а на последнем максимальное значение I_B совпадает с I_A^*, то максимум I_B на D_B может быть только больше, чем I_A^*; значит, величина показателя эффективности Δ заведомо неотрицательна, а для эквивалентного расширения равна нулю. Отметим, что данные выше определения справедливы и тогда, когда одна или обе задачи, исходная и расширенная, не имеют решения, так как в эти определения входят верхние грани соответствующих критериев оптимальности.

Перечислим основные цели использования расширения:

1) сведение задачи условной оптимизации к задаче безусловного оптимума;

2) определение приближенного решения или решения в классе максимизирующих последовательностей для тех задач, которые обычного решения не имеют;

3) получение условий оптимальности решения и оценок значения задачи;

4) построение и обоснование некоторых типов вычислительных алгоритмов.

Наиболее распространенным способом расширения является такой, при котором значение критерия I_A на любом элементе множества D_A равно значению критерия I_B на соответствующем элементе подмножества $\tilde{D}_B$. Если D_A и D_B определены на элементах одного и того же пространства, то D_A и $\tilde{D}_B$ совпадают, и $\forall y \in D_A \quad I_A(y) = I_B(y)$. Для этого способа расширения справедливы следующие свойства.

1. Оценочное свойство:

$$I_B^* = \sup_{y \in D_B} I_B(y) \ \geq \ I_A^* = \sup_{y \in D_A} I_A(y), \tag{9.14}$$

или $\Delta \geq 0$. Таким образом, значение расширенной задачи дает верхнюю оценку для значения исходной задачи.

Для параметрического расширения

$$I_B^*(\lambda) \geq I_A^* \quad \forall \lambda \in V_\lambda. \tag{9.15}$$

2. Неравенства седловой точки: для эквивалентного параметрического расширения справедливы неравенства седловой точки

$$I_B(y, \lambda^*) \leq I_B(y^*, \lambda^*) = I_A(y^*) \leq I_B(y^*, \lambda).$$

Здесь y^*, λ^* — значения переменных, на которых $I_B = I_A$, при этом y^* является решением исходной задачи.

Эти неравенства следуют из того факта, что для любого λ справедливо (9.15), а для λ^* это неравенство превращается в равенство. Максимум $I_B^*(\lambda)$ функции $I(\lambda, y)$ по y в точке λ^* принимает свое минимальное значение.

3. Связь необходимых условий оптимальности: оптимальное решение y^* исходной задачи удовлетворяет не-

обходимым условиям оптимальности не только исходной, но и эквивалентной расширенной задачи.

4. Достаточные условия оптимальности (лемма Кротова) [32]: чтобы y^* было решением исходной задачи A, достаточно, чтобы оно было решением расширенной задачи и принадлежало множеству D_A.

5. Условие эквивалентности расширения: для эквивалентности расширения достаточно, чтобы любое решение y^* расширенной задачи B, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, можно было приблизить последовательностью $\{y_i\}$, каждый элемент которой принадлежит D_A, причем $\lim\limits_{i\to\infty} I_B(y_i) = I_B(y^*)$.

Прокомментируем эти свойства. Оценочное свойство и вытекающие из него неравенства седловой точки следуют непосредственно из определения расширения, так как максимум на более широком множестве заведомо не меньше максимума на узком множестве.

Свойство 3 не требует доказательства. Из определения эквивалентности расширения следует, что оптимальное решение исходной задачи является одним из оптимальных решений эквивалентной расширенной задачи, а следовательно, удовлетворяет необходимым условиям ее оптимальности. Это свойство позволяет выразить необходимые условия оптимальности исходной задачи через необходимые условия оптимальности расширенной задачи, доказав предварительно эквивалентность расширения. Для этого доказательства часто используют свойство 5.

Из леммы Кротова вытекает, что для нахождения решения исходной задачи достаточно построить такую расширенную задачу, оптимальное решение которой оказалось бы допустимым для некоторой задачи из класса $\overline{A}$. В том случае, когда исходная задача имеет решение в форме максимизирующей последовательности, достаточно, чтобы решение либо предел максимизирующей последовательности расширенной задачи можно было сколь угодно точно приблизить последовательностью допустимых решений исходной.

9.3. Усредненное расширение экстремальных задач

Целый ряд постановок экстремальных задач содержит наряду с векторными и функциональными переменными их средние значения или средние значения функций, зависящих от этих переменных [5, 125]. Ниже мы покажем, что задачу с усреднением можно рассматривать как расширение экстремальной задачи, и сопоставим этот способ с другими способами расширения для задачи нелинейного программирования и вариационной задачи со скалярным аргументом.

Усредненное расширение. Рассмотрим в качестве исходной задачу

$$f(x) \to \max / x \in D, \tag{9.16}$$

искомым решением которой является вектор $x \in D \subset V \subset R^n$

Пусть из элементов множества V может быть произведена выборка с использованием случайного механизма. Плотность распределения $P(x)$ этой выборки требуется найти. Оценка выбранной функции $P(x)$ может быть произведена по некоторому критерию. В частности, $P(x)$ можно выбирать по условию максимума функции f от среднего по ансамблю значения x. В этом случае задача примет форму

$$f(\overline{x}) = f\left[\int\limits_V xP(x)dx\right] \to \max_{P(x)} \tag{9.17}$$

при условиях

$$\int\limits_V P(x)dx = 1, \quad P(x) \geq 0. \tag{9.18}$$

Другой способ оценки плотности распределения — среднее значение функции f на ансамбле решений

$$\overline{f(x)} = \int\limits_V f(x)P(x)dx \to \max_{P(x)} \tag{9.19}$$

при тех же условиях (9.18). При этом не требуется, чтобы каждый элемент ансамбля решений принадлежал D. Достаточно, чтобы, например, среднее значение

$$\int\limits_V xP(x)dx \in D. \tag{9.20}$$

Если задача (9.16) выпукла и ее оптимальное решение равно x^*, то оптимальные решения $P^*(x)$ в задачах (9.17), (9.19) совпадают. При этом

$$P^*(x) = \delta(x - x^*), \tag{9.21}$$

где δ — функция Дирака. Значения этих трех задач также одинаковы. В общем случае между значениями задачи (9.16) и каждой из задач (9.17), (9.19) выполнено неравенство, аналогичное (9.14).

Множества допустимых решений задач (9.17), (9.19) не принадлежат пространству R^n, тем не менее согласно определению расширения, приведенному выше, каждая из задач (9.17),(9.19) является расширением для задачи (9.16).

Действительно, в соответствии с этим определением можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами $\tilde{x}$ множества D задачи (9.16) и множеством плотностей распределения D_1 вида

$$P_{\tilde{x}}(x) = \delta(x - \tilde{x}). \tag{9.22}$$

Каждому вектору $\tilde{x}_0 \in D$ соответствует распределение вида $\underline{P_{\tilde{x}_0}(x)}$ (9.22) и обратно, причем значения $f(x)$ в (9.16), $f(\overline{x})$ в (9.17) и $\overline{f(x)}$ в (9.19) на соответствующих элементах решений совпадают, так что задача (9.16) эквивалентна задачам (9.17), (9.19), в которых множество допустимых решений ограничено решениями, имеющими вид (9.22), а x берется из множества D.

Задачи (9.17) и (9.19), в которых $P(x)$ удовлетворяет только условиям (9.18), (9.20), являются расширением для задач с решениями вида (9.22), а значит, и для задачи (9.16).

Усредненные расширения задачи нелинейного программирования. Структура оптимального решения. В качестве задачи A рассмотрим задачу нелинейного программирования (НП), в которой для простоты ограничения имеют форму равенств

$$f_0(x) \to \max_x \Big/ f(x) = 0, \quad x \in V_x \subset R^n, \tag{9.23}$$

где $x \in R^n$, f_0 — скалярная, полунепрерывная сверху и ограниченная на V_x функция, а f — вектор-функция размерности $m < n$; множество V_x замкнуто и ограничено. Сопоставим задаче (9.23) задачу вида

$$\overline{f}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f_0(x(t))dt \to \max_{x(t)} \Big/ \overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))dt = 0,$$
$$x(t) \in V_x \in R^n \quad \forall t \in [0, \tau]. \tag{9.24}$$

Решение $x(t)$ ищется в классе измеримых функций.

Задача (9.24) является расширением для (9.23), так как из множества ее допустимых решений можно выделить подмножество функций, постоянных для почти всех $t \in [0, \tau]$, и каждому вектору $x_0 \in V_x$ в задаче (9.23) сопоставить $x(t) = x_0$.

Каждой функции $x(t)$ можно поставить в соответствие вероятностную меру $\mu(y) = \dfrac{1}{T}\ \mu\{t : x(t) \le y\}$, где μZ — мера Лебега множества Z. С использованием вероятностной меры задача (9.24) может быть переписана в форме

$$\overline{f}_0 = \int\limits_{V_x} f_0(x) d\mu(x) \to \max_{\mu(x)} \Big/ \overline{f} = \int\limits_{V_x} f(x) d\mu(x) = 0, \tag{9.25}$$

или, с введением плотности меры $P_i(x) = \dfrac{d\mu_i}{dx_i}$,

$$\overline{f}_0 = \int\limits_{V_x} f_0(x) P(x) dx \to \max_{P(x)} \Big/ \overline{f} = \int\limits_{V_x} f(x) P(x) dx = 0. \tag{9.26}$$

В точках разрыва первого рода меры $\mu(x)$ ее плотность содержит δ-составляющие. В силу свойств функции $\mu(x)$ решение в (9.26) должно удовлетворять требованиям (9.18).

Задача (9.26) представляет собой расширение для задачи (9.23). Ее обозначают как $\overline{\text{НП}}$. Оптимальному решению задачи (9.26) $P^*(x)$ соответствуют сколь угодно много функций $x^*(t)$ в задаче (9.23), для каждой из которых $P(x) = P^*(x)$. Исключение составляет случай, когда $P^*(x) = \delta(x - x^0)$. В этом случае функция $x^*(t) = x^0$ единственна.

Справедливо следующее

Утверждение 9.1. 1. *Оптимальное решение задачи* $\overline{\text{НП}}$ $P^*(x)$ имеет вид

$$P^*(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(x - x^\nu), \tag{9.27}$$

где

$$\gamma_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1. \tag{9.28}$$

2. Если $P^*(x)$ — искомое решение, то найдется такой ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, ...\lambda_m)$, что в точках x^ν функция

$$R = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_j f_j(x) \tag{9.29}$$

достигает *абсолютного максимума по* $x \in V_x$.

Значения x^ν называют базовыми значениями x. Если оптимальное решение задачи $\overline{\text{НП}}$ реализуется во времени, то функция $x(t)$ скачкообразно изменяется между базовыми значениями, принимая ν-е из них в течение доли γ_ν от общего интервала времени T.

Усреднение в задаче НП может производится не по всем, а по части переменных. Разобьем переменные в задаче (9.23) на две группы — детерминированные x и рандомизированные u. Усреднение проводится только по u. Задача $\overline{\text{НП}}^u$ имеет форму

$$\overline{f_0(x,u)}^u \to \max_{x, p(u)} \Big/ \overline{f(x,u)}^u = 0. \tag{9.30}$$

При этом

$$\overline{f_j(x,u)}^u = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_j(x,u(t))dt = \int\limits_{V_u} f_j(x,u)P(u)du. \tag{9.31}$$

$$P(u) \geq 0; \qquad \int\limits_{V_u} P(u)du = 1.$$

Функции f_j непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x. Условия оптимальности задачи (9.30) имеют следующую форму.

Утверждение 9.2. 1. *Оптимальное распределение рандомизированных переменных имеет вид*

$$P^*(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(u - u^\nu), \tag{9.32}$$

$$\gamma_\nu \geq 0, \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1.$$

2. *Если* $(x^*, P^*(u))$ — *искомое решение, то найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = (\lambda_0, ...\lambda_m)$, *что образованная с его помощью функция Лагранжа* $R = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x,u)$ *локально неулучшаема по детерминированным переменным и достигает максимума на множестве* V_u *для каждого из базовых значений* u^ν:

$$\begin{gathered} \frac{\delta}{\delta x}\left\{\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu R(x, u^\nu)\right\}\delta x \leq 0, \\ u^\nu = \arg\max_{u \in V_u} R(\lambda, x^*, u), \quad \nu = 0, \dots, m. \end{gathered} \tag{9.33}$$

Здесь δx — вариация допустимая по условиям $x \in V_x$

Вариантов усредненного расширения задачи нелинейного программирования может быть очень много, так как не все ограничения могут зависеть и от детерминированных, и от рандомизированных переменных, наряду с усреднением функций могут быть условия в форме функций от средних значений переменных и пр. Доказывать условия оптимальности для каждого варианта постановки нет смысла. Целесообразно записать усредненное расширение задачи НП в канонической форме и получить для нее необходимые условия оптимальности, следствием из которых будут утверждения 9.1 и 9.2.

Каноническая форма усредненного расширения задачи НП имеет вид

$$F_0\left[\overline{f(x,u)}, x\right] \to \max \tag{9.34}$$

при условиях

$$F_j\left[\overline{f(x,u)}, x\right] = 0, \quad j = 1, \ldots, r; \quad x \in V_x, \tag{9.35}$$

черта над функцией f соответствует усреднению по u на замкнутом и ограниченном множестве V_u. Размерность вектор-функции f равна m, функция F непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов, а f непрерывна по u и непрерывно дифференцируема по x.

Теорема 9.1 (условия оптимальности усредненной задачи НП).

1. *Оптимальное распределение рандомизированных переменных имеет вид*

$$P^*(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(u - u^\nu), \tag{9.36}$$

где γ_ν удовлетворяют требованиям (9.28).

2. *Если $x^*, P^*(u)$ — оптимальное решение, то найдется такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_{j\nu})(j = 1, \ldots, r; \quad \nu = 0, \ldots, m)$, что для каждого из базовых значений u^ν вектора и достигает максимума на V_u функция*

$$L = \lambda_0 \frac{\delta F_0}{\delta \overline{f}} f(x,u) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\delta F_j}{\delta \overline{f}} f(x,u),$$

где

$$\overline{f} = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f(x, u^\nu).$$

Так что

$$u^\nu = \arg \max_{U \in V_u} L(x^*, \lambda, u). \tag{9.37}$$

3. *Функция*

$$R = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j F_j \tag{9.38}$$

локально неулучшаема по детерминированным переменным

$$\frac{\delta R}{\delta x} \; \delta x \le 0. \tag{9.39}$$

После приведения задач $\overline{\text{НП}}$ и $\overline{\text{НП}}^u$ к форме (9.34), (9.35) из теоремы 9.1 следуют условия оптимальности их решения. Отметим, что число базовых решений определяется только размерностью вектор-функции f.

Доказательство теоремы 9.1. При фиксированном $x \in V_x$ значения вектор-функции f в задаче (9.34), (9.35) принадлежат множеству Q, которое представляет собой отображение множества V_u в m-мерное пространство f. Значения же вектора $\overline{f}$ принадлежат выпуклой оболочке Q. Согласно теореме Каратеодори каждый элемент выпуклой оболочки может быть представлен как линейная комбинация не более чем $m+1$ элементов Q. Таким образом, $\overline{f(x,u)}$ можно представить как

$$\overline{f(x,u)} = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f(x, u^\nu), \tag{9.40}$$

где γ_ν удовлетворяют требованиям (9.28). Равенство (9.40) позволяет преобразовать задачу (9.34), (9.35) к форме обычной задачи нелинейного программирования с переменными x, u^ν, γ_ν $(\nu = 0, \ldots, m)$, условиями (9.35) и (9.28) и воспользоваться теоремой Куна–Таккера. Действительно, задача примет вид

$$F_0 \left[\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f(x, u^\nu), x \right] \to \max \tag{9.41}$$

при условиях

$$F_j \left[\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f(x, u^\nu), x \right] = 0, \quad j = 1, \ldots, r, \quad x \in V_x, \tag{9.42}$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1, \quad \gamma_\nu \geq 0. \tag{9.43}$$

Функция Лагранжа для нее

$$\overline{R} = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j F_j \left[\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f(x, u^\nu), x \right] - \Lambda \left(\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu - 1 \right).$$

Условия ее оптимальности по искомым переменным с учетом неотрицательности γ_ν приводят к утверждениям теоремы 9.1. А именно, из

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_\nu} \delta\gamma_\nu \leq 0, \quad \delta\gamma_\nu \geq 0$$

следует, что для базовых значений $u = u^\nu$ функция

$$L = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial \overline{f}} f(x,u) = \Lambda \quad \text{при} \quad \gamma_\nu^* > 0 \tag{9.44}$$

и

$$L \leq \Lambda \quad \text{при} \quad \gamma_\nu = 0.$$

Таким образом, для всех значений U^ν, входящих в задачу (9.41)–(9.43) с положительным весом, функции L максимальна по U на множестве V_u, т.е. выполнено требование (9.37). В случае, если на оптимальном решении $f(x,u^*)\in Q$, u^* доставляет максимум L.

Условия оптимальности по x

$$\frac{\partial\overline{R}}{\partial x}\delta x \le 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{r}\lambda_j\left[\frac{\partial F_j}{\partial\overline{f}}\sum_{\nu=0}^{m}\gamma_\nu\frac{\partial f(x,u^\nu)}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial x}\right]\delta x\le 0. \qquad (9.45)$$

Здесь, как и в (9.44), обозначено $\overline{f(x,u)}=\sum\limits_{\nu=0}^{m}\gamma_\nu f(x,u^\nu)$. Соответственно $\sum\limits_{\nu=0}^{m}\gamma_\nu\dfrac{\partial f(x,u^\nu)}{\partial x}=\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial x}$.

Условия (9.45) с учетом обозначения (9.38) приводит к неравенствам (9.39).

Утверждения 9.1 *и* 9.2 *следуют из доказанной теоремы.* Действительно, в задаче (9.25) усреднение производится по всем переменным, размерность функции f равна m, и функция L, фигурирующая в (9.37) и (9.44), совпадает с функцией Лагранжа R задачи (9.23).

В задаче (9.30) усреднение ведется только по u, производные $\partial F/\partial\overline{f}$ в (9.44) равны единице, так как F_j и f_j совпадают, а значит, функции L и R совпадают друг с другом и с функцией Лагранжа неусредненной постановки задачи (9.30). Условия (9.37) и (9.39) совпадают при этом с (9.33).

Усреднение в вариационных задачах. В вариационных задачах, где искомые переменные зависят от скалярного аргумента t, введение усреднения позволяет получить решение в форме максимизирующих последовательностей и сформулировать условия оптимальности в форме принципа максимума для произвольного сочетания критерия оптимальности и ограничений. Предварительно дадим вспомогательные утверждения и определения.

Пусть в задаче A: $I_A(y)\to\max\Big/ y\in D_A$ для каждого j-го из условий, определяющих множество D_A, может быть введена норма Δ_j отклонения этого условия от его номинального значения (норма невязки).

Определение 9.1. Задачу A называют *корректной относительно значения*, если для любого $\epsilon>0$ найдется такое δ, что из неравенства $\max\limits_j(\Delta_j)\le\delta$ следует, что отклонение значения I_A^* задачи по модулю не превышает ϵ.

В задаче нелинейного программирования корректность в смысле определения 9.1 соответствует непрерывности функции достижимости.

Определение 9.2. Расширение B: $I_B(y)\to\max\Big/ y\in D_B$

задачи A *эквивалентно*, если

$$I^*_{\overline{A}} = \sup_{y \in D_{\overline{A}}} I_{\overline{A}}(y) = I^*_B = \sup_{y \in D_B} I_B(y). \tag{9.46}$$

Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения.

Лемма 9.3. *Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы любому решению расширенной задачи $y^0 \in D_B$ можно было сопоставить такую последовательность $\{y_i\} \subset D_A$ допустимых решений исходной задачи, что*

$$\lim_{i \to \infty} I_{\overline{A}}(y_i) = I_B(y^0). \tag{9.47}$$

Для задач, корректных относительно значения, последовательность $\{y_i\}$ может не принадлежать $D_{\overline{A}}$. Нужно лишь, чтобы в пределе при $i \to \infty$ любое из ограничений исходной задачи выполнялось сколь угодно точно в смысле определения 9.1.

Утверждение леммы 9.3. следует из определения 9.2. Если оптимальное решение y^* расширенной задачи существует, то y^0 можно заменить на y^*.

Лемма 9.4. *Если y^*_A — оптимальное решение задачи A, расширение B эквивалентно A и $D_B \supset D_A$, то y^*_A удовлетворяет необходимым условиям оптимальности расширенной задачи.*

Лемма 9.4 следует из того, что y^*_A неулучшаемо на D_A, а последнее является подмножеством множества допустимых расширенной задачи.

Назовем вариационной задачей в канонической форме задачу вида

$$I = \int_0^T \Big[f_{01}(t, x(t), u(t), a) + \sum_l f_{02}(t, x(t), a)\delta(t - t_l) \Big] dt \to \max \tag{9.48}$$

при условиях

$$J_j(\tau) = \int_0^T \Big[f_{j1}(t, x(t), u(t), a, \tau) + f_{j2}(t, x(t), a, \tau)\delta(t - \tau) \Big] dt = 0 \tag{9.49}$$

$$\forall \tau \in [0, T], \quad j = 1, \ldots, m, \quad u \in V_u, \quad a \in V_a.$$

Здесь a — вектор параметров, постоянных на $[0, T]$, функции f_{j1} и f_{j2} $(j = 0, \ldots, m)$ непрерывно дифференцируемы по x, a и t и непрерывны по u.

Лемма 9.5. *Пусть задача* (9.48), (9.49) *корректна относительно значения в смысле определения* 9.1, *в котором величина вариации* *каждого из условий* (9.49) *определена как* $\Delta_j = \max\limits_{\tau} |J_j(\tau)|$. *Тогда усредненное расширение этой задачи*

$$\overline{I} = \int\limits_0^T \Big[\overline{f_{01}(t,x,u,a)}^u + \sum_l f_{02}(t,x,a)\delta(t-t_l)\Big]dt \to \max \tag{9.50}$$

при условиях

$$\overline{J}_j(\tau) = \int\limits_0^T \Big[\overline{f_{j1}(t,x,u,a,\tau)}^u + f_{j2}(t,x,a,\tau)\delta(t-\tau)\Big]dt = 0 \tag{9.51}$$

$$\forall \tau \in [0,T], \quad j = 1,\dots,m, \quad u \in V_\lambda, \quad a \in V_a$$

эквивалентно задаче (9.48), (9.49).

Здесь

$$\overline{f_{j1}}^u = \int\limits_{V_u} f_{j1}(t,x,A,u,a,\tau)P(u,t)du. \tag{9.52}$$

Распределение $P(u,t)$ *удовлетворяет условиям*

$$P(u,t) \geq 0; \quad \int\limits_{V_u} P(u,t)du = 1 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{9.53}$$

Справедливость леммы 9.5 следует из леммы 9.3 и того факта, что любому решению $p^0(u,t)$, $x^0(t)$, a^0 можно сопоставить последовательность решений

$$\{z_i\} = \{u_i(t), x^0(t), a^0\},$$

на которых

$$I(z_i) \to \overline{I^*}, \quad J_j(\tau, z_i) \to \overline{J_j}(\tau) = 0, \quad i \to \infty, \quad j = 1,\dots,m.$$

Действительно, совершенно аналогично тому, как это было сделано выше при доказательстве теоремы 9.1., можно доказать справедливость первого из утверждений лемммы 9.5; здесь при любом фиксированном значении t, x, a, τ значения вектора $\overline{f} = (\overline{f}_0, \overline{f}_1, ..., \overline{f}_m)$ принадлежат выпуклой оболочке множества Q, получающегося при отображении V_u в $(m+1)$-но мерное пространство f. Так как искомое решение максимизирует f_0 по U, то оно принадлежит верхней границе Q и может быть получено как линейная комбинация $(m+1)$-го элемента Q.

Для любого решения $P^0(u,t)$ в форме (9.53) можно построить последовательность $\{u_i(t)\}$ решений задачи (9.48), (9.49) следующим образом: разобъем $[0,\tau]$ на i интервалов $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i$ и примем на каждом из интерволов $\gamma_\nu(t)$ и $u^\nu(t)$ постоянными. Пусть для r-го интервала их значения равны $\gamma_{\nu r}$ и u_r^ν $(\nu = 0,\dots,m)$. Полученную при этом задачу назовем дискретизацией задачи (9.50), (9.51).

Аналогичное разбиение $[0,\tau]$ проведем в задаче (9.48), (9.49) с той разницей, что каждый из интервалов разобъем на $m+1$ более мелких. Так, Δ_r разобъем на $\Delta_{r0}, \Delta_{r1}, ..., \Delta_{rm}$, причем

$$\frac{\Delta_{r\nu}}{\Delta_r} = \gamma_{\nu r},$$

а переменные $u(t)$ в задаче (9.48), (9.49) будем считать кусочно постоянными и принимающими в интервале $\Delta_{r\nu}$ значение U_r^ν. Для построенных таким образом решений на каждом из интервалов $\Delta_r (r = \overline{1,i})$, значения функционалов I и $J(\tau)$ в задаче (9.48), (9.49) равны значениям соответствующих функционалов для дискретизации задачи (9.50), (9.51). При $i \to \infty$ и продолжительностях интервалов Δ_r, равномерно по r стремящихся к нулю, величины I_D и $J_D(\tau)$ в дискретизации усредненной задачи сколь угодно близки к $\overline{I}$ и $\overline{J}(\tau)$, а значит, то же относится и к I и $J(\tau)$ в задаче (9.48), (9.49) с учетом ее корректности относительно значения. Лемма 9.5 доказана.

Искомым решением задачи (9.50), (9.51) являются распределение $P^*(u,t)$, вектор-функция $x(t)$ и вектор a. Оно удовлетворяет условиям теоремы 9.2.

Т е о р е м а 9.2. *Пусть $P^*(u,t)$, $x^*(t)$, a^* — искомое решение; оптимальное распределение рандомизированных переменных имеет вид*

$$P^*(u,t) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t)\delta(u - u^\nu(t)), \tag{9.54}$$

где $\forall t \in [0,T]$ кусочно непрерывные функции $\gamma_\nu(t) \geq 0$, $\sum\limits_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t) = 1$.

Найдется такой скаляр $\lambda_0 \geq 0$ и такая кусочно непрерывная для почти всех τ вектор-функция $\lambda(\tau) = (\lambda_1(\tau), ...\lambda_m(\tau))$, определенная и не равная нулю одновременно с λ_0 на отрезке $[0,T]$ и равная нулю за его пределами, что для функционала

$$S = \lambda_0 \overline{I} + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^T \lambda_j(\tau)\overline{J_j}(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^T R\, dt \tag{9.55}$$

и его подынтегрального выражения

$$R = \lambda_0 R_0 + \sum_{j=1}^{m} R_j^{\text{св}}, \tag{9.56}$$

в котором

$$R_0 = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t) f_{01}(t, x(t), u^\nu(t), a) + \sum_l f_{02}(t, x(t), a)\delta(t - t_l),$$

$$R_j^{\text{св}} = \int\limits_0^T \lambda_j(\tau)\left[\sum_{\nu=0}^m \gamma_\nu(t) f_{j1}(t, x(t), u^\nu, a, \tau) + \right.$$

$$\left. + f_{j2}(t, x(t), a, \tau)\delta(\tau - t)\right] d\tau \qquad (9.57)$$

справедливы соотношения

$$\frac{\delta S}{\delta a}\delta a \leq 0, \qquad (9.58)$$

$$\frac{\delta R}{\delta x} = 0, \qquad (9.59)$$

$$u^\nu(t) = \arg\max_{u \in V_u} R(x, \lambda, a^*, u). \qquad (9.60)$$

Для доказательства 9.2 воспользуемся следующей теоремой из [76].

Пусть $y^*(t)$ — решение задачи о максимуме функционала

$$I = \int\limits_0^T f_0(y, t) dt \qquad (9.61)$$

при условиях

$$J_j(\tau) = \int\limits_0^T f_j(y, t, \tau) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \tau \in [0, T], \qquad (9.62)$$

в которой f непрерывна и непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов. Тогда найдется такая не равная нулю вектор–функция

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1(\tau), ..., \lambda_m(\tau)), \quad \lambda_0 \geq 0,$$

что для $y = y^*$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)\delta y \leq 0, \qquad (9.63)$$

где

$$R = R_0 + \sum_{j=1}^m R_j = \lambda_0 f_0 + \sum_{j=1}^m \int\limits_0^T \lambda_j(\tau) f_j(y, t, \tau) d\tau,$$

а δy — допустимая вариация $y(t)$ по условию $y \in V_y(t)$.

Задача (9.50), (9.51) для распределения $P(u, t)$ в форме (9.54) имеет форму (9.61), (9.62), причем

$$\overline{R} = R + R_{m+1} = \lambda_0 R_0 + \sum_j R_j^{\text{СВ}} - R_{m+1},$$

где R_0 и $R_j^{\text{св}}$ имеют форму (9.57), а слагаемое R_{m+1} соответствует условию

$$\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t) - 1 = 0 \quad \forall t \in [0, T], \tag{9.64}$$

которое может быть записано в форме (9.62) как

$$J_{m+1}(\tau) = \int_0^T \left(\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t) - 1 \right) \delta(t - \tau)\, d\tau = 0 \quad \forall \tau \in [0, T],$$

так что

$$R_{m+1} = \int_0^T \lambda_{m+1}(\tau) \left(\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t) - 1 \right) \delta(t-\tau)\, d\tau = \lambda_{m+1}(t) \left(\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu(t) - 1 \right).$$

Условия (9.63) для переменных γ_ν

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_\nu}\, \delta\gamma_\nu \le 0, \quad \gamma_\nu \ge 0$$

приводят к тому, что для базовых значений $u^\nu(t)$ (для них $\gamma_\nu(t) > 0$)

$$R(x, \lambda, a^*, u^\nu) = \lambda_{m+1}(t), \quad \nu = 0, \ldots, m,$$

а для $u \ne u^\nu(t)$ $\quad \gamma_\nu(t) = 0$ и $\delta\gamma_\nu > 0$, а значит,

$$R(x, \lambda, a^*, u) \le \lambda_{m+1}(t),$$

откуда следует условие максимума (9.60).

Условие (9.59) следует из (9.63) с учетом отсутствия ограничений на x, условия же (9.58) вытекают из того, что по отношению к вектору параметров a задача (9.50), (9.28) является задачей нелинейного программирования, а S — ее функцией Лагранжа.

Так как расширение (9.50), (9.51) эквивалентно задаче (9.48), (9.49), то в силу леммы 9.4 оптимальное решение этой последней $(u^*(t), x^*(t), a)$, если оно существует, удовлетворяет условиям оптимальности (9.58)–(9.60). Условие существования оптимального решения задачи (9.48), (9.49) в классе кусочно непрерывных функций $u(t)$ предполагает, что $\gamma_0(t) = 1$, а остальные множители $\gamma_j(t)$ в (9.54) равны нулю.

Соотношения (9.58)–(9.60) позволяют получить условия в форме принципа максимума для задачи с произвольным сочетанием критерия оптимальности и ограничений разного типа. Для этого достаточно каждому типу критерия и каждому типу ограничений сопоставить слагаемые R_0 и $R_j^{\text{св}}$, обозначить через $u(t)$ только те переменные, которые при приведении условий задачи к канонической форме оказались в любом из них в составе функций f_{01} (переменные первой группы), записать функцию R согласно (9.56) и подставить ее в (9.58), (9.60). При этом нетрудно проследить, как изменение или добавление некоторого условия влияет на условия оптимальности решения, так как оно меняет одно из слагаемых функции R и, возможно, принадлежность переменных к первой группе.

Основанная на таком подходе методика получения условий оптимальности задач оптимального управления приведена в параграфе 9.5.

9.4. Задача нелинейного программирования

Остановимся подробнее на задаче нелинейного программирования, способах ее преобразования, видах расширения и основанных на них алгоритмах решения.

Условия оптимальности решения задачи нелинейного программирования. Под задачей нелинейного программирования (НП) понимают задачу о максимуме функции $f_0(x)$ при наложенных на вектор x условиях в форме равенств и неравенств.

Формально

$$f_0(x) \to \max \Big/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m, \\ \varphi_v(x) \geq 0,\ v = 1, 2, \dots \end{array} \tag{9.65}$$

При этом множество V_x пространства R^n определяется ограничениями, наложенными на каждую из составляющих вектора x, типа

$$a_k \leq x_k \leq b_k, \quad x_k \geq 0,$$

т.е. представляет собой параллелепипед в пространстве X. Число условий в форме равенств $m < n$. В противном случае решениями являются либо корни системы $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, либо множество допустимых решений пусто. Функции f_0, f_i, φ_v, если это специально не оговорено, предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми.

Заметим, что условия в форме неравенств всегда можно свести к условиям в форме равенств, введя дополнительные переменные. Например,

$$\varphi_v(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi_v(x) - y_v = f_{m+v}(x, y_v) = 0, \quad y_v \geq 0.$$

Поэтому далее для сокращения выкладок будем рассматривать задачу с условиями только в форме равенств.

Оптимальным решением задачи НП (иногда просто решением) называют такой элемент $x^* \in D$, для которого $f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D$.

Если множество D не пусто, замкнуто и ограничено, а функция f_0 ограничена и непрерывна на D, то x^* существует.

Функция Лагранжа. Пусть x^* — элемент множества допустимых решений D такой, что значение $f_0(x^*)$ не меньше значения f_0 для любого другого элемента D, т.е. x^* — оптимальное решение задачи НП. Выясним, каким условиям кроме неравенства

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D \tag{9.66}$$

должно удовлетворять это решение. Потребность в таких условиях связана с тем, что неравенство (9.66) не конструктивно, т.е. не дает никакого другого пути для определения x^*, кроме полного перебора.

Общая логика получения необходимых условий заключается в том, что из множества D выделяется *подмножество сравнения* L, включающее x^*. Это подмножество должно быть таким, чтобы условия оптимальности на нем были в отличие от неравенства (9.66) конструктивными.

Если x^* — решение задачи о максимуме $f_0(x)$ на D, то необходимо, чтобы x^* доставляло максимум $f_0(x)$ на L, так что условия оптимальности на L — необходимые условия оптимальности для задачи НП. При этом они тем ближе к необходимым и достаточным (тем «сильнее»), чем шире множество сравнения.

В качестве L будем рассматривать множество элементов D, отличающихся от x^* на сколь угодно малый по модулю вектор δx, так что:

1) $x^* + \delta x \in D \, \forall \delta x \in l$; 2) $|\delta x| \leq \epsilon$.

Множество вариаций l образуется из L вычитанием x^* из всех его элементов.

Сначала предположим, что функции f_0 и f_i непрерывно дифференцируемы в точке x^*, а само это решение находится внутри V_x. Заменим, пользуясь малостью ϵ, функции f_0 и f_i линейной частью их разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0(x^*) + (\nabla f_0(x^*), \delta x), \\ f_i(x) &= f_i(x^*) + (\nabla f_i(x^*), \delta x), \ i = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{9.67}$$

Условия принадлежности к множеству L можно записать как

$$f_i(x) - f_i(x^*) = 0,$$

или, с учетом (9.67),

$$(\nabla f_i(x^*), \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in l, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9.68}$$

Условия оптимальности на L:

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in L,$$

или

$$(\nabla f_0(x^*), \delta x) \leq 0 \quad \forall \delta x \in l. \tag{9.69}$$

Пусть точка x^* лежит строго внутри множества L. Тогда вектор δx, лежащий в плоскостях, выделяемых условиями (9.68), может иметь любой знак. А это значит, что неравенство в (9.69) можно заменить равенством. Действительно, если бы нашелся такой вектор δx^1, для которого это неравенство было бы строгим, то вектор $\delta x^2 = -\delta x^1$ тоже удовлетворял бы (9.68), однако для него неравенство (9.69) уже не выполнялось бы, его левая часть оказалась бы больше нуля. Следовательно, мы пришли к противоречию и доказали, что (9.69) может быть записано как

$$(\nabla f_0(x^*), \delta x) = 0 \quad \forall \delta x \in l. \tag{9.70}$$

Как же расположены векторы ∇f_0 и ∇f_i $(i = 1, \ldots, m)$ в точке x^*? Из условия (9.70) следует, что $\nabla f_0(x^*)$ нормален к любым допустимым

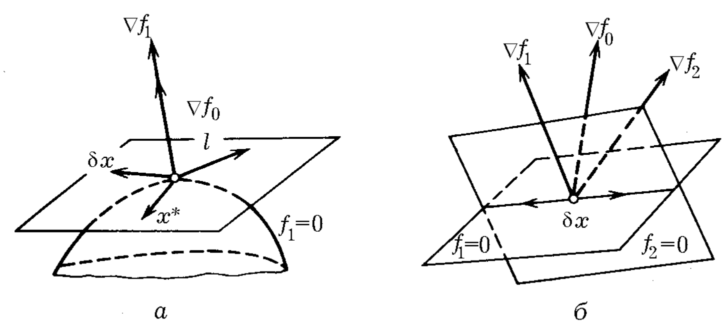


Рис. 9.3. Расположение градиентов целевой функции и ограничений в локально неулучшаемой точке для одного (*а*) и двух (*б*) ограничений

векторам δx. Если $m = 1$, то множество допустимых δx представляет собой плоскость. Градиент f_1, как и градиент f_0, нормален к этой плоскости (рис. 9.3, *а*). Следовательно, оба эти вектора лежат на одной прямой, т.е. найдется такой скаляр λ, что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda \nabla f_1(x^*) = 0. \tag{9.71}$$

Если $m = 2$, а размерность x равна, например, трем, то множество l — прямая, полученная пересечением двух плоскостей. Градиенты f_1 и f_2, а также градиент f_0 нормальны к ней (рис. 9.3, *б*). Следовательно, они лежат в одной плоскости и найдутся такие λ_1 и λ_2, что

$$\nabla f_0(x^*) + \lambda_1 \nabla f_1(x^*) + \lambda_2 \nabla f_2(x^*) = 0.$$

В общем случае m условий равенства (9.68) и (9.70) означают, что в точке x^* градиенты целевой функции и функций f_i линейно зависимы, т.е. найдется такой вектор λ с составляющими λ_i, что

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{9.72}$$

Мы получили условия оптимальности для задачи НП в гораздо более удобной, чем (9.66), форме. Совместное решение (9.72) и системы уравнений связи

$$f_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{9.73}$$

позволяет найти векторы x^* и λ. Эти уравнения линейны относительно λ, но нелинейны по x. Они могут иметь не единственное решение. Каждое из таких решений удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, а одно из них является решением задачи НП во всех случаях, за исключением особых (вырожденных) решений (см. ниже).

Условиям (9.72) можно придать более изящную форму, введя функцию

$$R = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x). \tag{9.74}$$

Тогда, если x^* — решение задачи НП, то оно удовлетворяет уравнениям связи и условию

$$\nabla R(x^*) = 0,$$

т.е. функция R в этой точке стационарна. Функцию R называют *функцией Лагранжа* задачи НП.

Отметим, что если в задаче НП требовалось бы найти не максимум, а минимум $f_0(x)$ на том же множестве допустимых решений, то условия (9.72), (9.73), определяющие x^* и λ, не изменились бы, так как при выводе необходимых условий минимума в неравенствах (9.69) фигурировал бы знак $\geq$, однако для внутренней точки D такое неравенство переписывается как равенство, т.е. принимает вид (9.70), что и приводит к условиям (9.72). Это не удивительно потому, что для задачи о безусловном максимуме и минимуме дифференцируемой функции необходимые условия оптимальности совпадают.

Вырожденное решение. При записи условий, определяющих множество l допустимых вариаций δx, предполагалось, что вектор δx имеет в условиях (9.68) ту же размерность, что и в (9.69). При этом каждое из условий (9.68) уменьшает размерность вектора допустимых вариаций на единицу, т.е. выделяет в пространстве x гиперплоскость.

Таким образом, при невырожденном решении размерность множества допустимых вариаций равна размерности n вектора x минус число условий m. Однако это не всегда так. В некоторых случаях подобные допущения неверны.

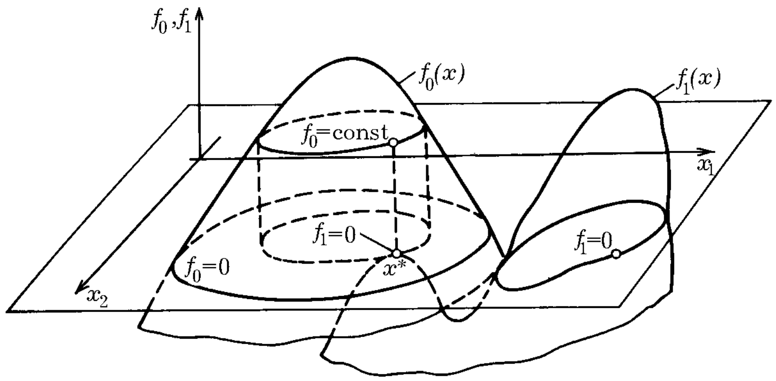


Рис. 9.4. Случай, когда решение x^* задачи условной оптимизации является стационарной точкой ограничения $f(x) = 0$ (вырожденный)

Пусть $m = 1$. Для этого случая условия оптимальности получены в форме (9.71). Пусть точка x^*, кроме того, оказалась точкой стационарности функции f_1 (рис. 9.4). Это значит, что вектор $\nabla f_1(x^*)$ равен нулю и при любом ограниченном λ из (9.71) следует, что вектор $\nabla f_0(x^*)$ также должен быть равен нулю. Но это, очевидно, не так. Градиент f_0 в точке x^* зависит от вида этой функции и не обязан обращаться в нуль. В этом случае условие

$$(\nabla f_1(x^*), \delta x) = 0 \tag{9.75}$$

выполнено не только для допустимых вариаций δx, но и для любого вектора δx, так как $\nabla f_1(x^*) = 0$.

Аналогичная ситуация возможна и в общем случае, если одна из функций (например, f_1) стационарна на множестве вариаций, определяемых остальными условиями. В этом случае условие (9.75) справедливо для любых вариаций δx, удовлетворяющих равенствам вида

$$(\nabla f_i(x^*), \delta x) = 0, \ i = 2, 3, \ldots \tag{9.76}$$

На рис. 9.5 показан вид функций f_1 и f_2 для случая вырожденного решения.

Условие стационарности любой из функций f_i на множестве, определяемом остальными условиями задачи, может быть записано (аналогично условиям оптимальности) как условие линейной зависимости

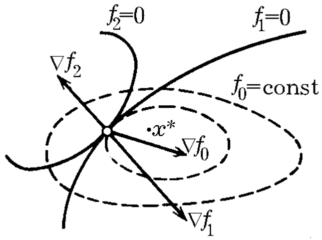


Рис. 9.5. Расположение градиентов целевой функции и связей в случае вырожденного решения

градиентов функций f_i. Если решение x^* вырождено, то найдется такой ненулевой вектор λ, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{9.77}$$

Здесь любой отличный от нуля множитель λ_i можно принять равным единице, так как условие (9.77) не изменится при делении его правой и левой частей на λ_i.

Чтобы распространить условия оптимальности (9.72) на обычные и на вырожденные решения, функцию Лагранжа модернизируют, записывая как

$$R = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x). \tag{9.78}$$

При невырожденном решении $\lambda_0 = 1$, при вырожденном $\lambda_0 = 0$. В последнем случае условие стационарности R совпадает с условием (9.77) вырожденности решения. При расчете x^* необходимо найти как обычные, так и вырожденные решения, подставить их в $f_0(x)$ и выбрать то, для которого целевая функция окажется больше.

Отметим, что вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ в нуль не обращается, т.е. хотя бы одна его составляющая отлична от нуля.

Если оптимальное решение x^* лежит на границе V_x, например, неотрицательная составляющая x_v вектра x в точке x^* равна нулю, то по этой составляющей допустимы только неотрицательные вариации $\delta x \geq 0$, приращение целевой функции, а значит, и функции Лагранжа на этих вариациях должно быть неположительно. Условия оптимальности в этом случае можно переписать в форме

$$(\nabla_x R(x^*, \lambda), \delta x) \leq 0. \tag{9.79}$$

,

Из этих условий вытекает, что множители Лагранжа при ограничениях, которые с введением вспомогательных неотрицательных переменных были преобразованы в равенства, должны быть равны нулю, если на оптимальном решении вспомогательная переменная положительна, и должны быть неотрицательны, если оптимальное значение этой переменной равно нулю (*условия дополняющей нежесткости*).

Рассмотренные выше условия оптимальности составляют содержание т е о р е м ы К у н а – Т а к к е р а.

Если x^* — решение задачи (9.65), *то найдется такой вектор множителей Лагранжа λ с составляющими $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ (λ_0 равно нулю или единице; все составляющие вектора λ не равны нулю одновременно), что в точке x^* выполнены условия* (9.79) *и условия дополняющей нежесткости.*

Достигает ли функция Лагранжа максимума в точке x^*? Условие (9.79) теоремы Куна–Таккера совпадает по форме с необходимым условием максимума функции Лагранжа R на множестве V_x. В связи с этим возникает желание заменить условие (9.79) условием

$$x^* = \arg\max_{x \in V_x} R(x, \lambda), \tag{9.80}$$

Правомерна ли такая замена? Остановимся на этом ниже. Здесь же отметим, что переход от условия (9.79) к (9.80) очень заманчив по двум причинам:

1) условие (9.79) содержит градиент R и требует дифференцируемости $f_0(x)$ и функций, задающих D. Условие (9.80) подобных требований не содержит. Функция $R(x, \lambda)$ должна быть лишь непрерывна по x и ограничена на V_x. Тогда на ограниченном замкнутом множестве V_x она достигает точки максимума (теорема Вейерштрасса). Множество V_x при использовании (9.80) может состоять из изолированных областей или отдельных точек;

2) условие (9.79) является лишь необходимым для максимума R по x. Множество сравнения L при использовании (9.79) гораздо уже, чем при использовании (9.80), и в общем случае оно выделяет больше «претендентов» на решение, среди которых требуется произвести дополнительный выбор.

К сожалению, переход от слабого условия (9.79) стационарности внутри или локального максимума на границе V_x к условию максимума R для задачи НП в общем случае сделать нельзя, т.е. не найдется такой вектор λ^*, для которого решение $x^*(\lambda^*)$, найденное по условию (9.80), удовлетворяло бы уравнениям связи и ограничениям.

Ниже приведены ответы на следующие вопросы:

1) для каких задач можно использовать условие (9.80) абсолютного максимума;

2) как нужно модифицировать функцию Лагранжа R, чтобы можно было свести задачу НП к задаче безусловной оптимизации;

3) можно ли использовать конструкции, аналогичные функции Лагранжа, для оценок значений задачи НП сверху и снизу?

С ответами на эти вопросы тесно связаны как численные методы решения задачи НП, так и соотношения между задачей НП и задачами, полученными из нее путем введения усредненных условий.

Эквивалентные преобразования и функция достижимости задачи НП. Как и выше, будем предполагать, что все неравенства в условиях задачи сведены к равенствам, и рассматривать исходную задачу НП в форме

$$f_0(x) \to \max \Big/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, m. \end{array} \tag{9.81}$$

Ее решение и значение обозначим как x^* и $f_0^* = f_0(x^*)$.

Задача, тождественная (9.81) относительно решения, может быть получена посредством замены $f_0(x)$ на $R(f_0(x), f(x), \lambda)$, если для почти всех x фукнция R монотонно возрастает по f_0 на множестве допустимых решений исходной задачи. Преобразованная задача примет вид

$$R(f_0, f, \lambda) \to \max \Big/ x \in D, \tag{9.82}$$

где $R(f_0, 0, \lambda)$ непрерывна и монотонно возрастает по f_0 для всех λ и почти всех f_0 (при некоторых значениях f_0, имеющих нулевую меру, производная $\partial R / \partial f_0$ может быть равна нулю или отсутствовать).

В частности, в форме (9.82) могут быть записаны преобразования задачи с применением штрафных функций

$$R(f_0, f, \lambda) = f_0(x) - \Phi(\lambda, f(x)) \to \max / x \in D. \tag{9.83}$$

О п р е д е л е н и е. Функцию $\Phi(\lambda, x)$ называют *штрафной функцией множества* $D \in V$, если Φ определена и неотрицательна на V, равна нулю для $x \in D$ и стремится к бесконечности при $\lambda \to \infty$ для любого $x \notin D$.

Например,

$\Phi(\lambda, f) = \lambda f^2(x)$ — квадратичный штраф;

$\Phi(\lambda, f) = \lambda |f(x)|$ — модульный штраф.

Иногда используют комбинацию штрафной функции с исчезающими слагаемыми другого вида. Например,

$$R(f_0, f, \lambda) = f_0(x) + \lambda_1 f(x) - \lambda_2 f^2(x)$$

— комбинация функции Лагранжа с квадратичным штрафом.

Пусть $x^* \in D$ — оптимальное решение исходной задачи (9.81), а $f_0^* = f_0(x^*)$ — ее значение. Им соответствует значение $R(f_0^*, 0, \lambda) = R^*(\lambda)$ преобразованной задачи. Так как

$$f_0(x^*) \geq f_0(x) \quad \forall x \in D,$$

то в силу монотонности R по f_0 на D

$$R^*(\lambda) \geq R(f_0, f, \lambda) \quad \forall x \in D.$$

В свою очередь максимум R на множестве $V \supset D$ не может быть меньше, чем $R^*(\lambda)$. Так что

$$\max_{x \in V} R(f_0, f, \lambda) \geq R^*(\lambda). \tag{9.84}$$

Пусть при $\lambda = \lambda^*$ максимум в левой части неравенства (9.84) принадлежит D, так что неравенство превратилось в равенство

$$\max_{x \in V} R(f_0, f, \lambda^*) = R^*(\lambda^*).$$

Таким образом, для преобразованной задачи справедливы неравенства

$$R(f_0(x), f(x), \lambda^*) \leq R(f_0(x^*(\lambda^*)), f(x^*(\lambda^*)), \lambda^*) \leq$$
$$\leq R(f_0(x^*(\lambda)), f(x^*(\lambda)), \lambda), \tag{9.85}$$

где $x^*(\lambda) = \arg\max_{x \in V} R(f_0(x), f(x), \lambda)$.

Отметим, что $f(x^*(\lambda^*) = 0$, так как $x^*(\lambda^*) \in D$, а $f_0(x^*(\lambda^*) = f_0^*$. Левое из неравенств следует из того, что X^* — точка максимума R, а правое — из неравенства (9.84).

Правое неравенство в (**??**) дает возможность найти оценку значения задачи НП, вычислив для некоторого вектора λ максимум R по $x \in V$ и использовав то обстоятельство, что этот максимум больше, чем $R(f_0^*, 0, \lambda^*)$.

Логическая схема методов решения задачи НП, связанных с переходом к безусловной оптимизации, в общих чертах такова.

1. Исходной задаче НП A ставится в соответствие класс задач $\overline{A}(\lambda)$, тождественных A относительно решения для любого из допустимых значений параметра λ.

2. Строится расширение $B(\lambda)$ задач $\overline{A}(\lambda)$ посредством отбрасывания тех или иных ограничений, например, условий $f(x) = 0$.

3. Ищется такое значение λ, при котором решение расширенной задачи $B(\lambda)$ оказывается допустимым по ограничениям $\overline{A}(\lambda)$ (принадлежит $D_{\overline{A}}$). В этом случае в соответствии с леммой Кротова решение расширенной задачи совпадает с решением задачи из $\overline{A}(\lambda)$, а значит, и с решением A.

Задачу поиска λ, которая решается на последнем, третьем этапе, называют двойственной к задаче $\overline{A}$. Она, как следует из неравенств (**??**), сводится к минимизации по λ максимума по x критерия оптимальности расширенной задачи $B(\lambda)$.

Конкретизируем эту схему для задачи нелинейного программирования (9.81).

Задача $\overline{A}(\lambda)$ имеет вид (9.82).

Задача $B(\lambda)$.

$$R(x, \lambda) = R[f_0(x), f(x), \lambda] \to \max_{x \in V_x}. \tag{9.86}$$

В этой задаче ограничения $f(x) = 0$ отброшены. Она представляет собой расширение $\overline{A}(\lambda)$.

Если удастся найти вектор неопределенных параметров $\lambda = \lambda^*$ такой, чтобы решение задачи $B(\lambda)$ удовлетворяло условиям $f(x) = 0$, т.е. условный максимум в (9.82) совпал с безусловным, то мы получим решение исходной задачи.

Прежде чем использовать такую схему решения, нужно сформулировать требования к выбору функции $R(f_0, f, \lambda)$:

1). вектор λ^* должен существовать для достаточно широкого класса функций f_0 и f;

2). размерность вектора параметров λ должна быть минимальна.

Различные виды функций $R(f_0, f, \lambda)$ в разной степени отвечают этим требованиям. Чтобы выбрать способ расширения и обосновать существование λ^*, важно разобраться в том, как изменяется максимальное значение функции f_0 при переходе от одной линии уровня функции f к другой.

Функция достижимости. При исследовании экстремальных задач часто требуется найти зависимости их оптимального решения или их значения от некоторого параметра, входящего в условия задачи. Зависимость значения задачи от параметра называют функцией цены, функцией невязок и пр. Ниже мы будем использовать зависимость значения задачи нелинейного программирования от правых частей уравнений $f(x) = 0$, эту зависимость будем называть функцией достижимости [75].

Заменим в задаче НП условия $f_i(x) = 0$ условиями $f_i(x) = C$ и будем искать максимум функции f_0 для всех значений вектора C, при которых равенства $f(x) = C$ и условия $x \in V_x$ совместны друг с другом. Очевидно, что максимальное достижимое значение $f_0(x)$ зависит от C. Формально *функция достижимости задачи НП*:

$$f_0^*(\mathrm{C}) = \max f_0(x) \Big/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = C_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{9.87}$$

При $C = 0$ значение $f_0^*(0)$ равно значению исходной задачи НП. Как будет показано далее, условия оптимальности и эффективность вычислительных алгоритмов во многом зависят от вида $f_0^*(C)$.

Будем предполагать, что для любого $x \in V_x$ функции $f_0(x)$ и $f_i(x)$ принимают ограниченные значения. Тогда множеству V_x соответствует множество V_C значений вектора C, причем нескольким элементам V_x в общем случае соответствует один и тот же элемент V_C.

Например, для задачи

$$f_0(x_1, x_2) \to \max \Big/ \quad \begin{array}{l} |x_1| \le 1, \quad |x_2| \le 1, \\ f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{array} \tag{9.88}$$

линии уровня и множество допустимых решений изображены на рис. 9.6. Множество V_C для этой задачи представляет собой отрезок действительной оси

$$-\sqrt{2} - 1 \le C \le \sqrt{2} - 1,$$

причем каждой точке этого отрезка соответствуют все точки плоскости x, лежащие на линии $x_1 + x_2 = C + 1$ внутри квадрата, выделяемого неравенствами в (9.88).

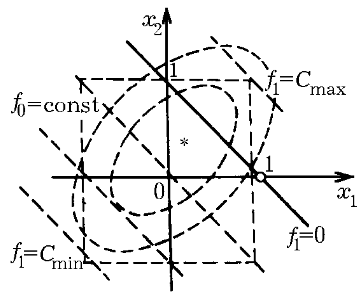


Рис. 9.6. Линии уровня ограничения и множество допустимых значений переменных

Выясним, как связан характер функции достижимости с поведением целевой функции $f_0(x)$ и функций, определяющих множество допустимых решений. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \max \Big/ \ f_i(x) = C_i, \ i = 1, \ldots, m. \tag{9.89}$$

Пусть $x^*(C)$ — решение этой задачи, а вектор $\lambda^*(C) = (\lambda_1^*(C), \ldots, \lambda_m^*(C))$ — соответствующий этому решению вектор множителей Лагранжа. Пусть также решение невырожденно и как x^*, так и λ^* непрерывны и непрерывно дифференцируемы по C в ϵ–окрестности некоторого значения C^0. Вычислим частную производную функции достижимости $f_0^*(C)$ в точке C^0 по C_i:

$$\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i}. \tag{9.90}$$

Условия, определяющие множество D в (9.89), перепишем как $\tilde{f}_i(x, C_i) = f_i(x) - C_i = 0$ и вычислим частные производные каждого из них по C_i:

$$\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i} - 1, \tag{9.91}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_v}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i}, \quad v = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m. \tag{9.92}$$

Умножим каждое из равенств (9.90)–(9.92) на $\lambda_v (v = 0, \ldots, m)$ и просуммируем друг с другом, в результате чего получим

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i} \left(\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j^*} + \sum_{v=1}^{m} \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial x_j^*} \right) - \lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial C_i} \frac{\partial R}{\partial x_j^*} - \lambda_i.$$

Так как x^* — точка стационарности функции Лагранжа, то $\partial R / \partial x_j^* = 0$, откуда

$$-\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9.93}$$

Таким образом, если решение x^* задачи (9.89) невырожденное ($\lambda_0 = 1$), то антиградиент функции достижимости в точке C^0 равен вектору множителей Лагранжа λ задачи (9.89) при $C_i = C_i^0$. В частности, при $C_i^0 = 0$ в невырожденной задаче НП ($\lambda_0 = 1$) множители Лагранжа характеризуют чувствительность значения задачи к изменению ограничений. Если некоторое ограничение несущественно и его малое изменение никак не повлияет на значение целевой функции в точке x^*, то соответствующий множитель Лагранжа равен нулю.

Поясним причины недифференцируемости функции достижимости в случае вырожденного решения. Причина заключается в том, что вырожденному решению соответствует изолированная точка a на плоскости x. На рис. 9.7, *а* показано расположение линий уровня, соответствующих задаче, изображенной на рис. 9.4. При замене равенства $f_1 = 0$ на $f_1 = C$ поверхность f_1 перестанет касаться с плоскостью, соответствующей значению C. Если точка касания a при сколь угодно малом изменении C исчезнет, то произойдет скачок функции достижимости в сторону ее уменьшения (рис. 9.7, *б*).

Вырожденное решение может и не быть изолированным; так, в задаче с неравенствами вырожденному решению соответствуют точки, в которых границы двух неравенств касаются друг друга. И в этом случае малое изменение одной из границ приводит к тому, что решение перестает быть допустимым либо существенно изменяется.

Нетрудно доказать следующее утверждение: *в том случае, когда задача НП выпукла (функция f_0 выпукла вверх и множество D выпукло), множество V_C и функция достижимости $f_0^*(C)$ также выпуклы.*

Связь между функциями достижимости исходной и преобразованной задачи. Проследим связь между функциями достижимости задачи НП

$$f_0(x) \to \max \Big/ \quad \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = C_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

и преобразованной задачи с теми же ограничениями, но с модифицированной функцией цели $R(f_0, f, \lambda)$. Будем предполагать, что функция R монотонно зависит от f_0 при любых допустимых по условиям $x \in V_x$ значениях вектор-функции f. Функцией достижимости для преобразованной задачи назовем функцию

$$R^*(\lambda, C) = \max_{x \in V_x} R(f_0(x), \lambda, f(x))/ \quad f(x) = C.$$

Так как при $f(x) = C$ от x зависит в R только f_0, а функция R монотонна по f_0, то максимум R достигается, когда f_0 достигает максимума по x при $x \in V_x$ и $f(x) = C$, т.е.

$$R^*(\lambda, C) = \left\{ \max_{x \in V_x} R(f_0(x)C \Big/ f(x) = C \right\} = R(f_0^*(C), C). \tag{9.94}$$

Таким образом, для получения функции достижимости преобразованной задачи нужно, воспользовавшись равенством (9.94), подставить в R вместно f значение C, а вместо f_0 функцию достижимости задачи НП.

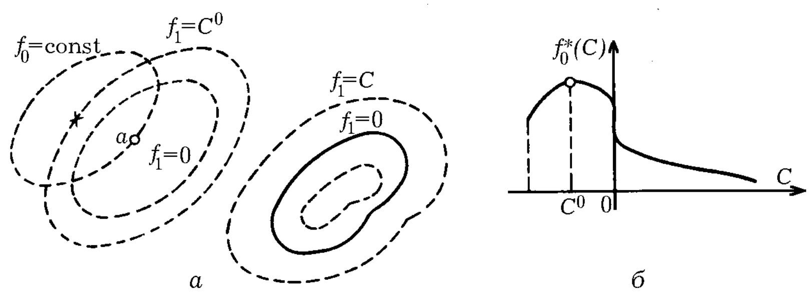


Рис. 9.7. Линии уровня целевой функции, функции f (*а*) и функции достижимости (*б*) для задачи, изображенной на рис. 9.4

Рассмотрим случай, когда безусловный максимум целевой функции оказывается на множестве D. В терминах функции достижимости этот факт выразится в том, что функция $f_0^*(C)$ имеет абсолютный максимум на множестве V_C в точке $C = 0$. Действительно, абсолютный максимум функции $f_0(x)$ на множестве V_x достигается в некоторой точке x^0, которой соответствуют значения $f_i(x^0) = C_i^0$ (рис. 9.8, *а*). Если x^0 является решением задачи НП, то C_i^0 равны нулю и точка $C = 0$ оказывается точкой абсолютного максимума $f_0^*(C)$ (рис. 9.8, *б*).

В исходной задаче НП такой вариант может возникнуть лишь в исключительных случаях. Пусть, однако, удалось построить преобразованную задачу, для которой решение или значение (или и то, и другое) совпадали бы с решением и значением для исходной задачи НП. Если при этом абсолютный максимум функции достижимости преобразованной задачи окажется в точке $C = 0$, то для нее можно перейти от требования условного максимума к требованию максимума безусловного

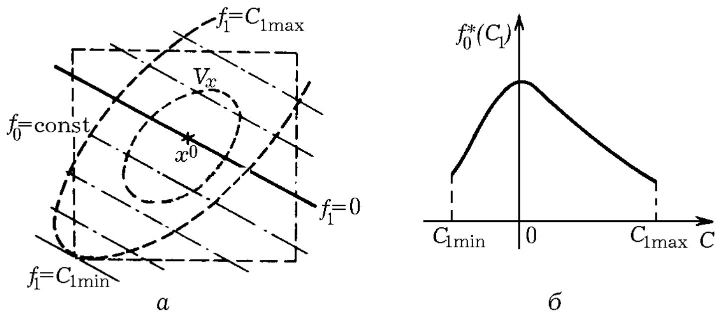


Рис. 9.8. Случай совпадения условного и безусловного максимумов: (*а*) — линии уровня целевой функции и ограничения; (*б*) — характер функции достижимости

Выбор вида функции R сводится к тому, чтобы для возможно более широкого класса функций достижимости $f_0^*(C)$ существовало решение неклассического (включающего операцию взятия максимума по C) уравнения

$$\operatorname*{argmax}_C R^*(\lambda, C) = 0 \tag{9.95}$$

относительно λ. Если функция R^* дважды дифференцируема по C, то для того, чтобы λ^* было решением неклассического уравнения (9.95), необходимо выполнение условий

$$\nabla_c R^*(\lambda^*, C)\big|_{C=0} = 0. \tag{9.96}$$

Кроме того, матрица Гессе вторых производных этой функции по C должна быть при $C = 0$ отрицательно определенной.

Рассмотрим частные виды задач типа (9.82) и соответствующие им расширения.

Расширение Лагранжа. Пусть в (9.82) функция

$$R(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x), \tag{9.97}$$

где λ_i — любые ограниченные числа.

Функция (9.97) совпадает с функцией Лагранжа. Задача (9.82) примет вид

$$R(x, \lambda) \to \max \Big/ \begin{array}{l} f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, \\ x \in V_x, \end{array} \tag{9.98}$$

а расширенная задача запишется как

$$R(x,\lambda) \to \max \Big/ \; x \in V_x. \tag{9.99}$$

Задача (9.98) тождественна задаче НП; множество ее допустимых решений то же, что и в исходной задаче, и для любого из элементов этого множества $R(x,\lambda) = f_0(x)$, так как $f_i(x) = 0$. Вопрос об эквивалентности расширения (9.99) сводится к вопросу о том, при каких условиях найдутся такие ограниченные λ-множители, для которых решение задачи НП доставляет функции R максимум на множестве V_x.

Выясним связь между функцией достижимости $f_0^*(C)$ задачи НП и функцией достижимости задачи (9.98):

$$R^*(C,\lambda) = \max R(x,\lambda) \Big/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = C_i, \; i = 1,\ldots,m; \end{array}$$

получим (см. (9.94))

$$R^*(C,\lambda) = f_0^*(C) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i C_i. \tag{9.100}$$

Таким образом, функция достижимости задачи (9.98) отличается от $f_0^*(C)$ добавлением m-мерной плоскости, проходящей через начало координат. Множители λ_i определяют наклон этой плоскости (это составляющие ее градиента).

У т в е р ж д е н и е. *Расширение Лагранжа* (9.99) *задачи НП эквивалентно тогда и только тогда, когда можно провести плоскость* $M(C) = \sum_i k_i C_i + f_0^*(0)$ *такую, что для любого* $C \in V_C$

$$M(C) \geq f_0^*(C),$$

причем $\lambda_i^* = -k_i$.

Плоскость $M(C)$ в том случае, когда $(df_0^*/dC)_{C=0}$ существует, является касательной к f_0^*. В более общем случае эту плоскость называют *опорной.*

Покажем справедливость этого утверждения в случае, когда имеется лишь одна связь (рис. 9.9). Функция $f_0^*(C)$ может быть и негладкой в точке $C = 0$, поэтому касательной в этой точке не существует, но опорная прямая может быть проведена. Ее наклон равен k, и она всюду выше, чем f_0^*. Если ко всем ординатам f_0^* добавить величину $-kC$, т.е.

$$R^*(C) = f_0^*(C) + \lambda C \quad (\lambda = -k),$$

то построенная таким образом функция имеет в точке $C = 0$ горизонтальную опорную прямую, нигде не пересекающуюся с $R^*(C)$. Таким образом, $R^*(0) \geq R^*(C)$ $\forall C \in V_C$, т.е. максимум функции дости-

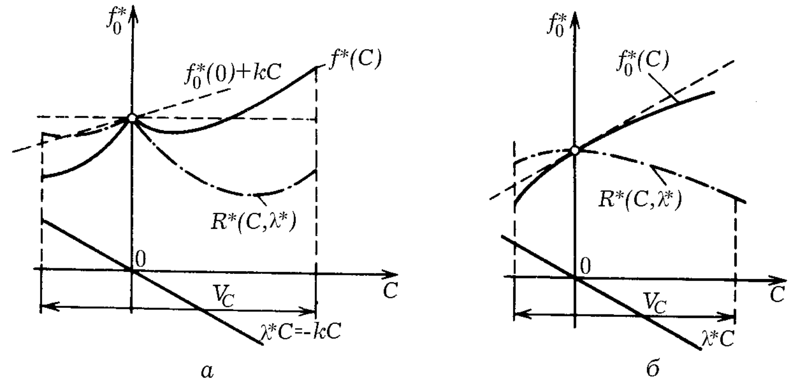


Рис. 9.9. Функции достижимости, для которых расширение Лагранжа эквивалентно: *а* — недифференцируемая в точке $C = 0$; *б* — дифференцируемая в точке $C = 0$

жимости задачи (9.94) оказался в точке $C = 0$, следовательно, параметрическое расширение Лагранжа (9.99) эквивалентно задаче (9.94), а значит, и исходной задаче НП. Очевидно, что при любом значении λ, отличном от k, значение расширенной задачи, равное максимальной ординате функции достижимости, больше значения задачи НП.

Заметим (рис. 9.10), что в том случае, когда такой опорной прямой нельзя построить, никакое значение λ не обеспечит смещение максимума $R^*(C)$ в точку $C = 0$. Поясним это. На рис. 9.9 абсолютный максимум функции достижимости исходной задачи оказался на правом конце отрезка V_C. Так как точку максимума мы хотим сместить в точку $C = 0$, то выбираем λ отрицательным. При этом правый конец $R^*(\lambda, C)$ опустится, зато левый поднимется, и при некотором λ^0 для двух значений C, одно из которых больше, а другое меньше нуля, значения $R^*(\lambda^0, C)$ окажутся одинаковыми. Любое изменение λ приводит к повышению значения расширенной задачи. При $\lambda = \lambda^0$ значение расширенной задачи $\max R^*(\lambda^0, C)$ минимально по λ, но выше значения исходной задачи $f_0^*(0)$.

Не будем приводить доказательство условия эквивалентности расширения Лагранжа, так как оно представляет собой формализацию тех же построений, которые приведены на рис. 9.9 и рис. 9.10. Обсудим лишь некоторые следствия из этого условия:

1) если функция достижимости $f_0^*(C)$ выпукла, то расширение Лагранжа заведомо эквивалентно (рис. 9.9, *б*);

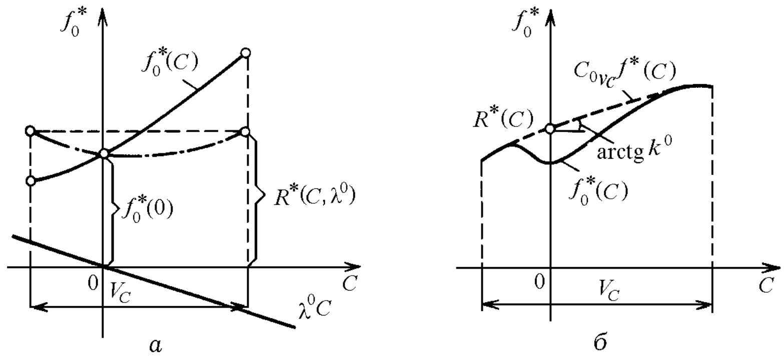


Рис. 9.10. Функция достижимости в случаях, когда расширение Лагранжа не эквивалентно: *а* — вогнутая функция; *б* — вогнутая функция в окрестности точки $C = 0$

2) если функция $f_0^*(C)$ строго вогнута (даже только в окрестности $C = 0$), то расширение Лагранжа заведомо не эквивалентно (рис. 9.10).

В том случае, когда расширение эквивалентно, можно воспользоваться свойством седловой точки и определить решение x^* задачи НП из условия

$$f_0(x^*) = \min_{\lambda} \max_{x \in V_x} R(x, \lambda).$$

При этом функции $f_0(x)$ и $f(x)$ могут быть и не дифференцируемыми (для существования максимума достаточно их непрерывности, ограниченности и замкнутости множества V_x).

Отметим, что когда расширение не эквивалентно, множители, при которых максимум $R(x, \lambda)$ по x минимален, не равны составляющим градиента плоскости, касательной к функции $f_0^*(C)$ в точке $C = 0$. Они соответствуют равенству максимальных значений $R^*(C)$ в нескольких точках, «между» которыми находится точка $C = 0$. Для случая одномерного решения таких точек оказалось две. Для случая m измерений можно предположить, что число таких максимумов не будет превышать $m + 1$. Далее покажем, что это действительно так.

Выпуклой оболочкой функции называют выпуклую оболочку множества, лежащего под графиком функции (подграфика). В свою очередь *выпуклой оболочкой множества* М *в пространстве* R^n называют множество, включающее все элементы М и элементы R^n, которые могут быть получены посредством операции усреднения элементов множества М.

Построим выпуклую оболочку $Co_{V_C} f_0^*(C)$ функции достижимости на множестве V_C. В некоторых точках она совпадает с $f_0^*(C)$, в других проходит выше. В тех точках, где выпуклая оболочка совпадает с функцией достижимости, любая опорная к $f_0^*(C)$ плоскость является опорной и к выпуклой оболочке, для других значений C она проходит выше, чем $Co_{V_C} f_0^*(C)$, а значит, тем более выше, чем функция достижимости.

Таким образом, *если в точке $C = 0$ функция достижимости и ее выпуклая оболочка совпадают, то расширение Лагранжа эквивалентно* (достаточное условие эквивалентности).

Покажем, что это условие и необходимо, т.е. в том случе, когда

$$Co_{V_C} f_0^*(0) > f_0^*(0), \tag{9.101}$$

расширение Лагранжа неэквивалентно. Действительно, согласно определению выпуклой оболочки

$$Co_{V_C} f_0^*(0) = \max \sum_{v=0}^{m} \gamma_v f_0^*(C^v) \Bigg/ \begin{array}{l} \gamma_v \geq 0, \sum\limits_v \gamma_v = 1, \\ \sum\limits_v \gamma_v C^v = 0. \end{array} \tag{9.102}$$

Из (9.102) следует, что начало координат в пространстве C является внутренней точкой выпуклой оболочки множества, состоящего из точек C^v (расположено «между» C^v).

Предположим, что вектор λ^* подобран так, что значения функции R в точках C^v одинаковы и максимальны, т.е.

$$f_0^*(C^v) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* C_i^v = R^*(0), \quad v = 0, \ldots, m. \tag{9.103}$$

Имеется $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными ($\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $R^*(0)$). При найденных значениях λ-множителей плоскость, опорная к Co_{V_C} $f_0^*(C)$ и проходящая через точки C^v, оказывается горизонтальной и отстоящей от начала координат на расстояние $R^*(0)$. Изменение наклона гиперплоскости приведет к тому, что значение функции $R^*(C)$ в некоторых точках C^v возрастет и станет больше $R^*(0)$, а в других уменьшится. Таким образом, никаким изменением λ нельзя сделать значение расширенной задачи меньшим значения $R^*(0)$. Вместе с тем, $R^*(0)$ равно ординате выпуклой оболочки функции достижимости при $C = 0$, так как добавление слагаемого $\sum\limits_i \lambda_i C_i$ не меняет ординаты выпуклой оболочки функции $f_0^*(C)$ в точке $C = 0$, поэтому если выполнено неравенство (9.101), то расширение Лагранжа неэквивалентно, показатель эффективности

$$\Delta = Co_{V_C} f_0^*(0) - f_0^*(0) > 0,$$

а λ^0 определяется наклоном k^0 выпуклой оболочки функции достижимости в нуле (рис. 9.10, *б*).

В заключение отметим, что опорная гиперплоскость может пройти не через $m+1$, а через меньшее число точек выпуклой оболочки. В этом случае некоторые из γ_v в (9.102) обращаются в нуль. Число одинаковых максимумов функции $R^*(C)$ меньше $m+1$, однако для этих максимумов условия (9.103) выполнены и все проведенные выше рассуждения остаются в силе.

Расширение Лагранжа в комбинации с монотонным преобразованием целевой функции. Рассмотрим задачу, тождественную по решению задаче НП вида

$$R_F(x,\lambda) = F_0(f_0(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \to \max \Big/ \begin{array}{l} x \in V_x, \\ f_i(x) = 0, \end{array} \tag{9.104}$$

в которой F_0 — монотонно возрастающая функция f_0. Соответствующее этой задаче расширение задачи НП имеет вид

$$R_F(x,\lambda) = F_0(f_0(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \to \max / \; x \in V_x.$$

Функция достижимости для задачи (9.104) связана с $f_0^*(C)$ зависимостью (см. (9.94))

$$R^*(C) = F_0(f_0^*(C)) + \sum_i \lambda_i C_i. \tag{9.105}$$

Функция $F_0(f_0^*(C)) = F_0^*(C)$ может оказаться выпуклой, хотя $f_0^*(C)$ и невыпукла, так как при монотонном преобразовании меняются наклон и кривизна при каждом C. Если удастся подобрать F_0 так, чтобы обеспечить выпуклость $F_0^*(C)$, то, как было показано выше, найдется такой вектор λ, что абсолютный максимум в (9.105) окажется в точке $C=0$. Это будет означать, что расширение (9.104) эквивалентно задаче НП по решению. Если это так, то можно определить решение задачи НП из условия седловой точки функции R_F:

$$R_F(x^*,\lambda^*) = \min_{\lambda} \max_{x \in V_x} R_F(x,\lambda). \tag{9.106}$$

Подставив x^* в $f_0(x)$, получим значение задачи НП.

Рассмотрим изменение матрицы Гессе функции $f_0^*(C)$ при ее монотонном преобразовании. Предварительно запишем составляющие градиента $F_0^*(C)$ в точке C^0:

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial C_i} = \left(\frac{dF_0}{df_0^*}\right)_{f_0^*(C^0)} \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)_{C^0},$$

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial C_i \partial C_j} = \left(\frac{dF_0}{df_0^*}\right)_{f_0^*(C^0)} \left(\frac{\partial^2 f_0^*}{\partial C_i \partial C_j}\right)_{C^0} + \\ + \left(\frac{d^2 F_0}{df_0^{*2}}\right)_{f_0^*(C^0)} \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)_{C^0} \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_j}\right)_{C^0}, \tag{9.107}$$

или, в сокращенной записи,

$$\nabla F_0^*(C) = \frac{dF_0}{df_0^*} \nabla f_0^*(C),$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{dF_0}{df_0^*}\gamma_{ij} + \frac{d^2 F_0}{df_0^{*2}} f_{0ci}^* f_{0cj}^*. \tag{9.108}$$

Здесь через Γ_{ij} и γ_{ij} обозначены элементы матрицы Гессе преобразованной и исходной задач, а через f_{0cv}^* — частная производная f_0^* по C_v.

Чтобы функция $F_0^*(C)$ была выпукла, достаточно, чтобы матрица $\Gamma = \| \Gamma_{ij} \|$ была отрицательно определенной. Первые слагаемые в (9.108) отличаются от элементов γ_{ij} матрицы Гессе исходной задачи неотрицательным множителем, так как функция F_0 монотонно возрастающая. Если вторые слагаемые в этих выражениях равны нулю, то вогнутой функции достижимости исходной задачи будет соответствовать вогнутость и $F_0^*(C)$.

Однако наличие второго слагаемого позволяет в ряде случаев добиться отрицательной определенности матрицы Γ. Для этого диагональные элементы должны быть отрицательны и достаточно велики по модулю. Второе слагаемое в диагональных элементах имеет вид

$$\Delta_i = \left(\frac{d^2 F_0}{df_0^{*2}}\right) (f_{0ci}^*)^2.$$

Чтобы слагаемые Δ_i были отрицательны, функция F_0 должна быть не только монотонной, но и выпуклой по f_0.

Отметим, что монотонное преобразование целевой функции реализуется, по существу, и в методе «уровней» (см., например, [19]).

Как правило, нетрудно оценить значение M абсолютного максимума функции достижимости $f_0^*(C)$ на множестве V_c, если он существует. Значение M равно максимуму функции $f_0(x)$ на множестве V_x. Если M известно, то подходящей формой функции F_0 может быть

$$F_0(f_0) = a(f_0 - M)^k, \tag{9.109}$$

где k — целые числа, $a = -1$ для k четных и $a = +1$ для k нечетных.

Пример. Пусть $f_0^*(C)$ определена на отрезке $0 \leq C \leq 1$ и имеет вид (рис. 9.11)

$$f_0^*(C) = (C - 2)^2 - 5.$$

Эта функция вогнута. Ее вторая производная

$$\frac{d^2 f_0^*}{dC^2 = 2}.$$

Сама она на отрезке $[0,1]$ меняется от -1 до -4.

Выберем преобразование $F_0(f_0)$ в форме

$$F_0(f_0^*) = (f_0^*)^k$$

и подберем такое значение показателя степени k, для которого величина $d^2F_0^*/dC^2$ оказалось бы отрицательной для любого $C \in [0,1]$. В соответствии с (9.107), когда C — скалярная величина,

$$\frac{d^2F_0}{dC^2} = \frac{dF_0}{df_0^*}\frac{d^2f_0^*}{dC^2} + \frac{d^2F_0}{df_0^{*2}}\left(\frac{df_0^*}{dC}\right)^2 = 2kf_0^{*k-1} + 4k(k-1)f_0^{*k-2}(C-2)^2 \le 0.$$

Если $2kf_0^{*k-1} > 0$, то на эту величину можно сократить обе части неравенства, причем его знак не изменится. Получим условие для выбора k. Так как второе слагаемое отрицательно, оно достигает максимума при $C = 1$ и $f_0^* = -4$ и равно $-(k-1)/2$, так что

$$\frac{(k-1)}{2} \ge 1,$$

или $k \ge 3$.

При $k = 3$ условие $2kf^{*k-1} > 0$ выполнено для любых значений $f_0^* \in [-1,-4]$, причем меньшим значениям f_0 соответствуют меньшие значения F_0. Функция достижимости преобразованной задачи для $F_0 = f_0^3$ показана на рис. 9.11.

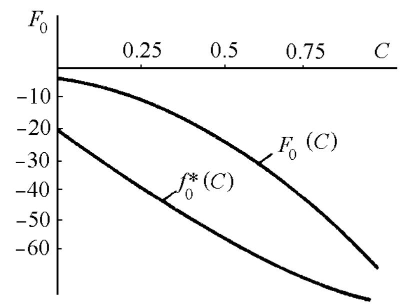


Рис. 9.11. Пример монотонного преобразования функции достижимости, превращающего ее в выпуклую

Расширение с использованием исчезающего слагаемого. Обобщением расширения Лагранжа для задачи НП является задача

$$\hat{R} = f_0(x) + \Phi(f(x)) \to \max_{x \in V}. \tag{9.110}$$

Здесь Φ — произвольная непрерывная функция, причем

$$\Phi(0) = 0.$$

Таким образом, на множестве D, когда $f(x) = 0$, целевые функции исходной и расширенной задач равны, а слагаемое $\Phi(f)$ исчезает.

Расширению (9.110) соответствует задача, тождественная задаче НП вида

$$\hat{R} = f_0(x) + \Phi(f(x)) \to \max \Big/ \begin{array}{l} f(x) = 0, \\ x \in V_x. \end{array} \tag{9.111}$$

Функция достижимости задачи (9.111)

$$\hat{R}(C) = f_0^*(C) + \Phi(C).$$

Градиент и элементы матрицы Гессе для этой функции имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{R}^*}{\partial C_i} = \frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial C_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{9.112}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{R}^*}{\partial C_i\, \partial C_j} = \frac{\partial^2 f_0^*}{\partial C_i\, \partial C_j} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_i\, \partial C_j} \quad \forall i, j. \tag{9.113}$$

Таким образом, матрица Гессе для функции достижимости преобразованной задачи представляет собой сумму

$$\Gamma = \gamma + \Delta,$$

где γ и Δ — матрицы Гессе функции достижимости исходной задачи и исчезающего слагаемого соответственно. В частном случае, когда функция Φ линейна, расширение (9.110) совпадает с раширением Лагранжа, матрица $\Delta = 0$ и выпуклость $R^*(C)$ определяется выпуклостью $f_0^*(C)$.

Рассмотрим вопрос о том, как выбирать функцию Φ, чтобы достигнуть эквивалентности расширения. Пусть функция $R^*(C)$ дважды дифференцируема, тогда для эквивалентности необходимо, чтобы в точке $C = 0$ она была стационарна [см. (9.96)]:

$$\left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial C_i}\right)_{C=0} \quad \forall i.$$

Следовательно, в точке $C = 0$ градиенты функций f_0^* и Φ должны быть равны по значению и противоположны по знаку. Достаточным условием эквивалентности является выполнение условий стационарности и выпуклость функции $\hat{R}^*(C)$.

Другим общим соображением, определяющим выбор Φ, является то, что на множестве D, т.е. при $C = 0$, $R^*(0) = f_0^*(0)$ и не зависит от вида и параметров функции Φ. Так как желательно, чтобы $\hat{R}^*(0)$ оказалась максимальным значением R^*, то функция $\Phi(C)$ должна уменьшать $f_0^*(C)$ как при $C < 0$, так и при $C > 0$. При этом абсолютный максимум $R^*(C)$ заведомо уменьшается, а так как он ограничен снизу значением $R^*(0)$, то можно надеяться, что в пределе он стремится к этому значению. Функции $\Phi(f(x))$, равные нулю на множестве допустимых решений и уменьшающие критерий расширенной задачи для любого недопустимого решения, называют *штрафными функциями*. Действительно, в расширенной задаче любой вектор $x \in V_x$ допустим, но если он не удовлетворяет равенствам $f(x) = 0$, то штрафная добавка $\Phi(f)$ стремится сделать такое решение невыгодным.

Наконец, последнее соображение, позволяющее в ряде случаев найти вид функции Φ, основано не лемме Кротова (см. п. 9.2). Для эквивалентности расширения достаточно, чтобы оптимальное решение расширенной задачи или одно из оптимальных решений, если их несколько, оказалось допустимым для исходной задачи, т.е. удовлетворяло связям $f(x) = 0$. Пусть удалось так выбрать Φ, чтобы функция $\hat{R}$ в расширенной задаче достигала максимума для очень многих значений вектора $x \in V_x$ и хотя бы одно из них оказалось допустимым, тогда, согласно лемме Кротова, расширение эквивалентно. Множество тех значений x, для которых $\hat{R}$ максимальна, обозначают через V_x^*. На методике выбора функции Φ, при которой пересечение множеств V_x^* и D заведомо не пусто, остановимся ниже.

Расширение с использованием штрафных функций. Расширение для задачи нелинейного программирования образуется с использованием штрафной функции $\Phi(a, x)$ множества допустимых решений этой задачи как

$$\hat{R}(x, a) = [f_0(x) + \Phi(a, x)] \to \max \big/ \ x \in V_x.$$

При фиксированном a решение этой задачи $x^*(a)$ не обязательно принадлежит D, а следовательно,

$$\hat{R}(x^*(a), a) \geq \max_{x \in D} f_0(x).$$

По мере роста a штраф за нарушение ограничений задачи растет, и максимум по x функции $\hat{R}(x, a) = R^*(a)$ стремится к значению задачи нелинейного программирования $f_0(x^*)$ при некоторых условиях [24], которые приведем без доказательства.

Пусть последовательность $x^*(a)$ имеет при $a \to \infty$ предельную точку; множество, определяемое условиями $|f(x)| \leq \epsilon, \varphi(x) \geq -\epsilon$, ограничено при некотором $\epsilon > 0$; функции f_0, f_i, φ_v определены и непрерывны в R^N, а f_0 ограничена сверху; функция $\Phi(a, x)$ является штрафной функцией множества D в смысле данного выше определения и для любого a непрерывно и монотонно зависит от f_i и φ_v.

Тогда $\lim_{a \to \infty} x^*(a) = x^*$, а $\lim_{a \to \infty} f_0(x^*(a)) = f_0(x^*)$.

Отметим, что число параметров расширения не связано с числом ограничений, как при расширении Лагранжа. Например, a может быть скалярным, каковым бы ни было число ограничений.

Остановимся подробнее на некоторых видах штрафных функций для задачи с условиями в форме равенств.

1. Квадратичный штраф

$$\Phi(a, x) = -a \sum_i f_i^2(x), \tag{9.114}$$

где $a > 0$. В функции достижимости соответствующее слагаемое имеет вид

$$\Phi(C, a) = -a \sum_i C_i^2. \tag{9.115}$$

Казалось бы, при достаточно большом a можно добиться, чтобы максимум $\hat{R}^*(C)$ оказался в точке $C = 0$. Покажем, что это не так.

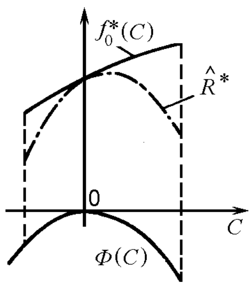


Рис. 9.12. Функции достижимости исходной и расширенной задач с квадратичным штрафом

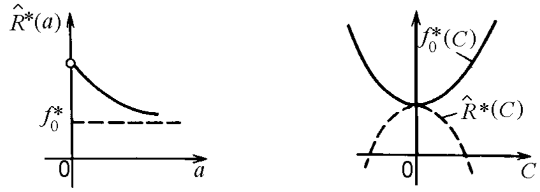
На рис. 9.12 показан вид $f_0^*(C)$. Эта функция выпукла, и расширение Лагранжа в данном случае было бы эквивалентно при конечном λ. Расширение с использованием функции штрафа (9.114) окажется эквивалентным лишь в пределе при $a \to \infty$. Действительно, вычислим производную функции $\hat{R}^*(C)$:

$$\frac{d\hat{R}^*}{dC} = \frac{df_0^*}{dC} - 2aC.$$

В точке $C = 0$ второе слагаемое для любого конечного a равно нулю. Поэтому если $df_0^*/dC \neq 0$, то функция $\hat{R}^*(C)$ не может иметь максимум в нуле, так как не выполнено необходимое условие ее максимума — условие стационарности. Это видно и на рис. 9.12. С ростом a функция $\Phi(a, C)$ становится все круче, максимум R^* на множестве V_C становится все ближе к $\hat{R}^*(C)$, а следовательно, и к $f_0^*(0)$. Оценка, полученная из решения задачи

$$\hat{R}^*(a) = \max_{x \in V_x} \left[f_0(x) - a \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x) \right],$$

с ростом a уменьшается и стремится к значению задачи НП при $\alpha \to \infty$ (рис. 9.13, a).



а *б*

Рис. 9.13. Расширение с использованием квадратичного штрафа: *а* — изменение значения расширенной задачи с ростом a; *б* — функция достижимости исходной и расширенной задач

Вместе с тем невыпуклость $f_0^*(C)$ часто не препятствует использованию квадратичного штрафа. Пусть, например, $f_0^*(C) = 1 + C^2$ (рис. 9.13, *б*), функция вогнута и использование расширения Лагранжа не позволяет свести задачу условной оптимизации к безусловной. Функция достижимости в задаче с использованием квадратичного штрафа имеет вид

$$\hat{R}^*(C) = (1 + C^2) - aC^2.$$

Достаточно принять $a = 2$, чтобы ее абсолютный максимум оказался в точке $C = 0$, так как $\hat{R}^*(C)_{a=2} = 1 - C^2$. Отметим, что в точке $C = 0$ функция $f_0^*(C)$ стационарна. Именно этот факт и позволил добиться эквивалентности расширения при конечном значении a.

2. Комбинация монотонного преобразования целевой функции с квадратичным штрафом. То, что расширение с использованием квадратичного штрафа может быть эквивалентным при конечном a только для задачи, у которой функция достижимости стационарна в точке $C = 0$, приводит к мысли о целесообразности предварительного перехода от исходной задачи НП с целевой функцией $f_0(x)$ к тождественной ей задаче с целевой функцией $F_0(f_0(x))$, в которой F_0 монотонно возрастающая. Функция достижимости такой задачи [см. (9.105)]

$$F_0^*(C) = F_0(f_0^*(C)).$$

Ее производная при $C = 0$

$$\frac{dF_0^*}{dC} = \left(\frac{dF_0}{df_0}\right)_{f_0^*(0)} \left(\frac{df_0^*}{dC}\right)_{C=0}.$$

Это выражение обращается в нуль при монотонной функции F_0, например, вида

$$F_0(f_0) = \Big(f_0 - f_0^*(0)\Big)^3. \qquad (9.116)$$

Расширенная задача примет форму

$$\hat{R} = F_0(f_0(x), \beta) - a \sum_i f_i^2(x) \to \max_{x \in V_x}, \qquad (9.117)$$

а соответствующая функция достижимости для F_0, заданной в виде (9.116),

$$\hat{R}^*(C) = (f_0^*(C) - \beta)^3 - a \sum_i C_i^2.$$

3. Модульный штраф. Из сказанного выше следует, что достижению эквивалентности расширения при использовании квадратичного штрафа с конечным a препятствует то, что в этом случае градиент Φ по C при $C = 0$ обращается в нуль. Это же характерно

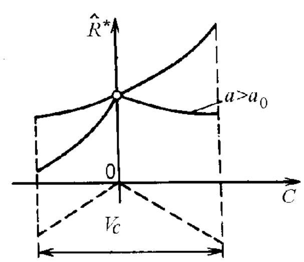


Рис. 9.14. Функции достижимости исходной и расширенной задач для модульного штрафа

для любой функции штрафа, дифференцируемой в нуле, так как точка $C = 0$ всегда является точкой максимума Φ. Однако можно использовать функции штрафа, не дифференцируемые в точке $C = 0$. Наибольшее распространение получил модульный штраф. Для этого случая функция достижимости

$$\hat{R}^*(C, a) = f_0^*(C) - a \sum_{i=1}^{m} |C_i|.$$

На рис. 9.14 показан характер изменения $\hat{R}^*(C, a)$ с ростом a, а на рис. 9.15 изменение значения расширенной задачи, т.е. абсолютного максимума $R^*(C, a)$ на множестве V_C. При некотором конечном $a = a^0$ абсолютный максимум R^* достигается в точке $C = 0$, несмотря на то что наклон $f_0^*(C)$ в точке $C = 0$ положителен, а сама функция вогнута.

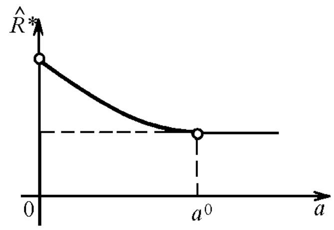


Рис. 9.15. Изменение значения расширенной задачи с ростом a для модульного штрафа

Неудобство модульного штрафа состоит в том, что целевая функция расширенной задачи не является гладкой функцией и ее градиент по x не существует при всех $x \in D$.

4. Комбинация функции Лагранжа с квадратичным штрафом. Составим расширенную задачу в форме

$$\hat{R}(x, a, \lambda) = f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x) - \lambda_{n+1} \sum_i f_i^2(x) \to \max_{x \in V_x} \tag{9.118}$$

и соответствующую ей функцию достижимости

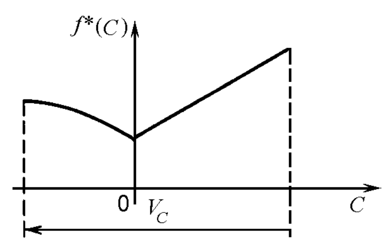
$$\hat{R}^*(C, a, \lambda) = f_0^*(C) + \sum_i \lambda_i C_i - a \sum_i C_i^2. \tag{9.119}$$

Если выбрать

$$\lambda_i = -\left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)_{C=0},$$

то градиент суммы первых двух слагаемых в (9.119) в точке $C = 0$ окажется равным нулю, а в этом случае, как показано выше, при конечном a может быть достигнут абсолютный максимум R^* по C в точке $C = 0$ (при этом множество V_C предполагаем ограниченным, а если это не так, то при $C \to \infty$ считаем, что $f_0^*(C)$ растет не быстрее квадратичной параболы).

Рис. 9.16. Вид функции достижимости, для которого комбинированное расширение не эквивалентно



Класс задач, для которых комбинированное расширение эквивалентно при конечных λ и a, гораздо шире, чем для расширения Лагранжа и для расширения с использованием квадратичного штрафа. Однако и в этом случае не для всех задач удается добиться эквивалентности. Примером может служить задача, функция достижимости $f_0^*(C)$ для которой показана на рис. 9.16.

Действительно, ни при каком ограниченном a добавление слагаемого $-aC^2$ не приведет к тому, что сумма $f_0^*(C) - aC^2$ будет выпукла в окрестности $C = 0$, а это означает (см. выше), что не существует такого λ-множителя, для которого

$$\hat{R}^*(C) = f_0^*(C) - aC^2 + \lambda C$$

была бы максимальна в точке $C = 0$. Между тем расширение с использованием модульной функции штрафа в данном случае эквивалентно при конечном a.

Численные методы решения задачи НП, основанные на последовательной аппроксимации функции достижимости. Понятия расширения и функции достижимости задачи нелинейного программирования могут быть использованы не только для выбора структуры функции R, но и для анализа способов численного решения [34].

Выше было рассмотрено несколько видов расширения задачи НП. Это соответствует переходу от задачи

$$f_0(x) \to \max / \quad f(x) = 0, \quad x \in V_x \tag{9.120}$$

к задаче

$$R(f_0(x), f(x), \lambda) \to \max_x / \quad x \in V_x, \tag{9.121}$$

в которой отсутствуют уравнения связей. Функция R такова, что на множестве допустимых решений задачи (9.120) она либо совпадает с $f_0(x)$, либо монотонно от нее зависит.

При этих условиях параметры λ и структуру R желательно выбирать так, чтобы максимум $x^*(\lambda)$ в задаче (9.121) оказался на множестве допустимых решений задачи (9.120), т.е. были выполнены условия $f(x^*(\lambda^*)) = 0$. Это возможно, если функция достижимости $R^*(C, \lambda)$ задачи

$$R(f_0(x), f(x), \lambda) \to \max \Big/ \; f(x) = 0, \quad x \in V_x$$

(она тождественна по решению (9.120)) имеет абсолютный максимум в точке $C = 0$ при некотором $\lambda = \lambda^*$.

Условие которому должно удовлетворять λ^*, можно переписать в форме уравнения, содержащего операцию максимума (неклассического уравнения):

$$C^*(\lambda) = \operatorname*{argmax}_{C \in W} R[f_0^*(C), C, \lambda] = 0. \tag{9.122}$$

Размерность уравнения (9.122) равна размерности n векторв C. Каждой из выбранных структур вспомогательной задачи соответствует свой алгоритм расчета вектора λ^*. Важно выяснить, в каких случаях решение уравнения (9.122) существует, и оценить трудоемкость алгоритмов его получения.

Существование решения уравнения для расчета вектора неопределенных параметров. Левая часть в уравнении (9.122) зависит от функции достижимости $f_0^*(C)$ исходной задачи, которая нам не известна и может быть найдена только для конкретного значения C посредством операции вычисления максимума. Построить $f_0^*(C)$ гораздо сложнее, чем решить исходную задачу, и, как кажется на первый взгляд, переход от этой задачи к уравнению (9.122) не имеет смысла. Однако в действительности такой подход полезен тем, что позволяет выяснить условия существования решения уравнения (9.122) при тех или иных предположениях о свойствах $f_0^*(C)$. Кроме того, решение вспомогательной задачи (9.121) позволяет получить достаточно большую информацию об этой функции и построить ее апроксимацию в окрестности точки $C = 0$, что в свою очередь приводит к алгоритмам пересчета вектора неопределенных множителей λ.

Остановимся подробнее на вопросе о существовании решения уравнения (9.122), предположив первоначально, что R^* и f_0^* дважды дифференцируемы по совокупности своих аргументов. В этом случае корни уравнения (9.122) должны удовлетворять условиям

$$\left(\frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} = \left(\frac{\partial R^*}{\partial f_0^*}\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} + \frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9.123}$$

$$\left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial C^2}\right)_{C=0} < 0. \tag{9.124}$$

Первое из них представляет собой n уравнений относительно составляющих вектора λ, а второе — условие отрицательной определенности квадратичной формы, которое проверяется по критерию Сильвестра применительно к матрице Гессе функции R^*.

Ее элементы

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial R^*}{\partial f_0^*}\frac{\partial^2 f_0^*}{\partial C_i \partial C_j} + \frac{\partial^2 R^*}{\partial f_0^{02}}\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\frac{\partial f_0^*}{\partial C_j} + \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i \partial C_j}. \tag{9.125}$$

В том случае, когда R^* недифференцируема по C в точке $C = 0$, условие (9.123) может быть переписано в форме

$$\left(\frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} > 0, \quad \left(\frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C=0_+} < 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.126}$$

Условия (9.123), (9.124) необходимы для того, чтобы вектор λ^* был решением уравнения (9.122). Они достаточны, если условие отрицательной определенности (9.124) справедливо не только для $C = 0$, но и для любого $C \in W$.

Запишем условия (9.123), (9.124) для некоторых структур функции R.

А. Модифицированая функция Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} = \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} + \lambda_i = 0, \left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial C^2}\right)_{C=0} = \left(\frac{d^2 f_0^*}{dC^2}\right)_{C=0} - 2\lambda E < 0. \tag{9.127}$$

Условия (9.127) при соответствующем выборе вектора λ могут быть выполнены для произвольной дважды дифференцируемой в нуле функции f_0^*, при этом второе условие для функций f_0^* с ограниченными вторыми производными может быть выполнено для всех значений C. Таким образом, можно расчитывать, что для широкого класса задач решения уравнений (9.122) существуют.

Б. Монотонные преобразования целевой функции с ведением квадратичного штрафа.

Для преобразования (9.116) условия (9.123), (9.124) примут вид

$$\left(\frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} = 3(f_0^*(0) - \lambda_0)^2 \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)_{C=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.128}$$

$$\left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial C^2}\right)_{C=0} = 3(f_0^*(0) - \lambda_0)^2 \left(\frac{d^2 f_0^*}{dC^2}\right)_{C=0} - 6(f_0^*(0) - \lambda_0)A(C) - 2\lambda_1 E < 0. \tag{9.129}$$

Здесь и выше через A обозначена матрица с элементами

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i}\right)\left(\frac{\partial f_0^*}{\partial C_j}\right).$$

Первое из этих условий для дифференцируемой в точке $C = 0$ функции достижимости может быть выполнено за счет выбора λ_0 из условия

$$\lambda_0 = f_0^*(0) = f_0^*. \tag{9.130}$$

Неравенство (9.129) выполняется при соответствующем выборе λ_1, если λ_0 удовлетворяет (9.130). Отметим, что если в (9.127) размерность вектора λ равна $n + 1$, то в (9.129) она равна двум.

Рассмотренные примеры показывают, что условия (9.123), (9.124) позволяют оценить структуру вспомогательной задачи с точки зрения возможности решения уравнений (9.122) при тех или иных свойствах $f_0^*(C)$.

Алгоритмические схемы решения уравнений для неопределенных параметров. После решения задачи (9.121) при некотором λ^k мы не только получаем $x^*(\lambda^k)$ и по нему $C^*(\lambda^k)$, но и можем утверждать, что в точке $C^*(\lambda^k)$ выполнены условия, аналогичные (9.123) и (9.124):

$$\left(\frac{\partial R^*}{\partial C_i}\right)_{C^*(\lambda^k)} = \left[\frac{\partial R}{\partial f_0^*}\frac{\partial f_0^*}{\partial C_i} + \frac{\partial R}{\partial C_i}\right]_{C^*(\lambda^k)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (9.131)$$

$$\left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial C^2}\right)_{C^*(\lambda^k)} < 0, \quad (9.132)$$

так как в точке $C^*(\lambda^k)$ функция $R^*(C, \lambda^k)$ достигает своего безусловного максимума по $C \in W$. Кроме того, справедливо обобщение теоремы Эверетта :

$$f_0[x^*(\lambda^k)] = f_0^0[C^*(\lambda^k)], \quad (9.133)$$

поскольку для любого вектора $x \in V$, лежащего на линии $f(x) = C^*(\lambda^k)$, функция f_0 не превосходит $f_0[x^*(\lambda^k)]$. Если бы это требование не было выполнено, то в силу монотонности R по f_0 точка $x^*(\lambda^k)$ не могла бы быть точкой максимума R (Эвереттом соответствующая теорема доказана для функции Лагранжа).

Использование условий (9.131)-(9.133) позволяет предложить алгоритмическую схему решения уравнения (9.122), основанную на последовательной аппроксимации функции достижимости $f_0^*(C)$ в окрестности $C = 0$. Эта схема такова.

1-й шаг. Для выбранной структуры R и начального значения $\lambda = \lambda^0$ решают задачу (9.121), получают $x^*(\lambda^0)$ и, подставляя его в функции f_0 и f_i, находят

$$f_0[C^*(\lambda^0)] = f_0[x^*(\lambda^0)], \quad C_i^0(\lambda^0) = f_i[x^*(\lambda^0)], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Задавшись структурой аппроксимации функции достижимости $f_{0a}^0(C, b)$, подставляют это выражение в условия (9.131)-(9.133) и находят вектор коэффициентов аппроксимации $b = b^0$.

2-й шаг. Для найденного вектора b^0 определяют очередное значение $\lambda = \lambda^1$ из условий (9.123), (9.124), конкретезированных для принятой структуры R.

3-й шаг. Повторяют первый шаг для $\lambda = \lambda^1$ и уточняют коэффициенты b аппроксимации по условиям (9.131)-(9.133), выписанным для $\lambda = \lambda^1$ и для $\lambda = \lambda^0$, и т.д.

С каждым новым циклом алгоритма число условий, которым должна удовлетворять аппроксимация f_{0a}^0, увеличивается, что позволяет ее делать все более детальной.

Правило остановки алгоритмической схемы заключается в равенстве с заданной точностью нулю вектора невязок $C^*(\lambda^k)$:

$$|C^*(\lambda^k)| \leq \varepsilon > 0. \quad (9.134)$$

Условие невырожденности решения исходной задачи при использовании правила (9.134) не играет существенной роли, так как даже в случае, когда задача с условиями $f(x) = 0$ имеет вырожденное решение, задача с условиями $|f(x)| \leq \varepsilon > 0$, которая решается численно, для непрерывных функций $f_i(x)$ невырожденная.

Ниже остановимся подробнее на алгоритмах пересчета параметров λ, основанных на последовательной аппроксимации f_0^*.

Конкретизация алгоритмов, основанных на последовательной аппроксимации функции достижимости. Конкретный алгоритм решения уравнения (9.122) в значительной степени зависит от вида аппроксимации $f_{0a}^0(C, b)$. Чем детальнее эта аппроксимация, тем более трудоемкой является задача определения коэффициентов b и тем большая информация о функции $f_0^*(C)$ необходима для их расчета. Поэтому ограничимся рассмотрением линейной и неполной квадратичной аппроксимации

$$f_{0a}^0(C, b) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i C_i, \tag{9.135}$$

$$f_{0a}^0(C, b) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i C_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i C_i^2. \tag{9.136}$$

Так как аппроксимация (9.136) более общая, то приведем выражения для пересчета λ для такого вида f_{0a}^0. Для линейной аппроксимации (9.135) в полученных ниже выражениях нужно положить коэффициент $\tilde{b} = 0$.

Пусть в k-м цикле алгоритма найден вектор b^k коэффициентов в $f_{0a}^0(C, b)$. Предпологая, что f_0^* близка к f_{0a}^0, получим для f_{0a}^0 в форме (9.136) уравнения для выбора λ^k из условий стационарности R^* в точке $C = 0$ по C:

$$(R^*_{f_0^0} b_i^k + R^*_{Ci})_{C=0,\lambda^k} = 0 \to b_i^k = -(R^*_{Ci}/R^*_{f_0^0})_{C=0,\lambda^k}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.137}$$

Здесь и ниже через $R^*_{f_0^0}$ и R^*_{Ci} обозначены частные производные R^* по соответствующим переменным. Условиям отрицательной определенности должна удовлетворять матрица Гессе функции R^* с элементами (см. (9.125))

$$\Gamma_{ii} = R^*_{f_0^0} \tilde{b}_i^k + \frac{\partial^2 R^*}{(\partial f_0^0)^2} b_i^{k\,2} + \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i^2}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9.138}$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 R^*}{(\partial f_0^*)^2} b_i^k b_j^k + \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i \partial C_j}, \quad i \neq j.$$

Желательно, чтобы эти условия выполнялись для всех C, а не только для $C = 0$. Из условий Гершгорина отрицательной определенности матрицы Γ

$$\Gamma_{ii} < -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |\Gamma_{ij}|$$

можно получить оценку для слагаемого $\partial^2 R^*/\partial C_i^2$:

$$\left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i^2} + \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} \left|\frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i \partial C_j}\right|\right)_{\lambda^k} < -R^*_{f_0^*}\tilde{b}_i^k - \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 R^*}{\partial f_0^{02}} b_i^k b_j^k\right|. \quad (9.139)$$

После того, как выбран вектор λ^k, удовлетворяющий уравнению (9.137) и обеспечивающий отрицательную определенность матрицы Γ, решение задачи (9.121) позволяет найти вектор $x^{0k} = x^*(\lambda^k)$, а по нему $C^{0k} = f(x^{0k})$. Условия для пересчета коэффициентов аппроксимации f^0_{0a} запишутся в виде

$$[R^*_{f_0^*}(b_i^k + \tilde{b}_i^k C^{0k}) + R^*_{Ci}]_{C^{0k}, \lambda^k} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (9.140)$$

$$b_0^k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k C_i^{0k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i^k (C_i^{0k})^2 = f_0(x^{0k}). \quad (9.141)$$

Так как размерность вектора b в (9.139) равна $(2n+1)$, то для уточнения коэффициентов аппроксимации можно привлечь данные, полученные при решении задачи (9.121) в предыдущем цикле алгоритма. Например, наряду с условиями (9.140) рассмотреть условия

$$[R^*_{f_0^*}(b_i^k + 2\tilde{b}_i^k C_i^{0(k+1)}) + R^*_{Ci}]_{C^{0(k+1)}, \lambda^{k+1}} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (9.142)$$

При линейной аппроксимации функции f_0^* условий (9.140), (9.141) достаточно для уточнения вектора b^k. Из (9.137), (9.139), (9.141) в этом случае следуют соотношения, связывающие λ^{k+1} с λ^k и с результатами решения задачи (9.121) в k-м цикле алгоритма:

$$(R^*_{Ci}/R^*_{f_0^*})_{0, \lambda^{k+1}} = (R^*_{Ci}/R^*_{f_0^*})_{C^{0k}, \lambda^k},$$

$$\left(\frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i^2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left|\frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i \partial C_j}\right|\right)_{\lambda^{k+1}} < -\left(\frac{1}{(R^*_{f_0^*})^2}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 R^*}{\partial f_0^{02}} R^*_{Ci} R^*_{Cj}\right|\right)_{C^{0k}, \lambda^k}, \quad (9.143)$$

$$b_0^k = f_0(x^{0k}) + \sum_{i=1}^{n} C_i^{0k}(R^*_{Ci}/R^*_{f_0^*})_{C^{0k},\lambda^k}.$$

Для квадратичной аппроксимации (9.135) нетрудно получить аналогичные соотношения. Действительно, условия (9.140), (9.142) представляют собой систему линейных уравнений. Обозначим через Δ_i^k, D_i^k и $\tilde{D}_i^k$ определители вида

$$\Delta_i^k = \begin{vmatrix} R^{0k}_{f_0^*}, & R^{0k}_{f_0^*}C_i^{0k} \\ R^{0(k-1)}_{f_0^0}, & R^{0(k-1)}_{f_0^*}C^{0(k-1)} \end{vmatrix}, \tag{9.144}$$

$$\tilde{D}^k = \begin{vmatrix} R^{0k}_{f_0^*}, & -R^{0k}_{Ci} \\ R^{0(k-1)}_{f_0^*}, & -R^{0(k-1)}_{Ci} \end{vmatrix},$$

$$D_i^k = \begin{vmatrix} -R^{0k}_{Ci}, & R^{0k}_{f_0^*}C_i^{0k} \\ -R^{0(k-1)}_{Ci}, & R^{0(k-1)}_{f_0^*}C^{0(k-1)} \end{vmatrix}.$$

В первых строках этих определителей стоят частные производные R^*, вычисленные в точке C^{0k}, λ^k, а во вторых — в точке $C^{0(k-1)}, \lambda^{k-1}$. Если $\Delta_i^k \neq 0$, то коэффициенты b^k и $\tilde{b}^k$ равны

$$b_i^k = D_i^k/\Delta_i^k, \quad \tilde{b}_i^k = \tilde{D}^k/\Delta_i^k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9.145}$$

Для выбора λ^{k+1}нужно использовать равенства (9.137), неравенства (9.139) и условие (9.141), в которые подставлены соотношения (9.145).

При использовании алгоритмов, основанных на аппроксимации функции достижимости, полезно иметь в виду следующие утверждения:

1. Если при $C = 0$ функция достижимости вспомогательной задачи $R^*(C, \lambda)$ не зависит от некоторой составляющей λ_ν вектора λ, то в точке $C = 0, \lambda = \lambda^*$ выполнено равенство:

$$R^*(0, \lambda^*) = \min_{\lambda_\nu} \max_{C} R^*[f_0^*(C), C, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}^*, \ldots, \lambda_n^*]. \tag{9.146}$$

Действительно, если все составляющие λ, кроме λ_ν, найдены из уравнения (9.122), а $\lambda_\nu = \lambda_\nu^*$, то максимум R^* по C достигается в точке $C^*(\lambda) \neq 0$ и он больше, чем $R^*(0, \lambda)$, а последнее значение равно $R(0, \lambda^*)$. Таким образом, $\max\limits_C R^*(C, \lambda)$ минимален по λ в точке λ^*.

2. Полная производная по λ функции $R^*(\lambda) = \max\limits_C R^*(C, \lambda)$ равна частной производной R^*_λ всюду где $dC^*/d\lambda^r$ ограничена.

Это утверждение следует из равенства

$$\frac{dR^*}{d\lambda} = \left(\frac{\partial R_0}{\partial C}\right)_{C^*} \frac{dC}{d\lambda} + \left(\frac{\partial R^*}{\partial \lambda}\right)_{C^*}$$

и того факта, что производная R^* по C в точке C^* равна нулю.

А. Модифицированная функция Лагранжа. Зададим функцию R^* в форме

$$R^*(C,\lambda) = f_0^*(C) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i C_i^2.$$

В отличие от (9.118) здесь вместо одного множителя λ_{n+1} введены n параметров $\tilde{\lambda}_i$ при квадратичных функциях штрафа, так как индивидуальный выбор этих параметров позволяет уменьшить среднее значение коэффициентов штрафа, а вместе с этим трудоемкость решения задачи (9.121). Конкретизируем для такой формы функции R соотношения (9.143), учтя, что

$$R^*_{Ci} = \lambda_i - \tilde{\lambda}_i C_i^0, \quad R^*_{f_0^*} = 1, \quad \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_0^2} = -\tilde{\lambda}_i, \quad \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i \partial C_j} = \frac{\partial^2 R^*}{\partial f_0^{02}} = 0$$

После подстановки этих выражений в (9.143) получим

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \tilde{\lambda}_i^k C_i^{0k}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{9.147}$$

$$\tilde{\lambda}^{k+1} > 0, \tag{9.148}$$

$$b_0^k = f_0(x^{0k}) + \sum_{i=1}^{n} C_i^{0k}(\lambda_i^k - \tilde{\lambda}_i^k C_i^{0k}). \tag{9.149}$$

Условия (9.147) при фиксированном значении составляющей $\tilde{\lambda}_i^k > 0$ соответствуют изменению λ вдоль антиградиента функции $R^*(\lambda)$, что соответствует утверждениям 1 и 2. Условия (9.148) дают очень малую информацию для выбора $\tilde{\lambda}$, что связано с линейной аппроксимацией f_0^0 и с тем, что в (9.139) производные функции f_0^* заменены производными аппроксимации этой функции. Условие (9.149) позволяет спрогнозировать значение исходной задачи $f_0^*(0) = f_0^* \approx b_0^k$.

Для выбора множителей $\tilde{\lambda}_i$ можно воспользоваться равенством (9.146) и утверждением 2, меняя $\tilde{\lambda}$ от цикла к циклу, в соответствии с выражением

$$\tilde{\lambda}_i^{k+1} = \tilde{\lambda}_i^k - m\left(\frac{\partial R^*}{\partial \tilde{\lambda}_i}\right)_{C^{0k},\lambda^k} = \tilde{\lambda}_i^k + m(C_i^{0k})^2, \tag{9.150}$$

где m — некоторая положительная константа. Из формулы (9.150) следует, что $\tilde{\lambda}_i$ монотонно увеличивается от цикла к циклу. Вычислительная практика подтверждает необходимость монотонного роста коэффициента штрафа $\tilde{\lambda}$.

При квадратичной аппроксимации f_0^* определители (9.144) примут форму

$$\begin{gathered}\Delta_i^k = C_i^{0(k-1)} - C_i^{0k},\\ D_i^k = C_i^{0(k-1)} C_i^{0k} (\tilde{\lambda}_i^k - \tilde{\lambda}_i^{k-1}) - \lambda_i^k C_i^{0(k-1)} + \lambda_i^{k-1} C_i^{0k},\\ \tilde{D}_i^k = \lambda_i^k - \lambda_i^{k-1} + \tilde{\lambda}_i^{k-1} C_i^{0(k-1)} - \tilde{\lambda}_i^k C_i^{0k}, \quad i = 1, \ldots, n.\end{gathered}$$

Для расчета λ^{k+1} из (9.137) имеем

$$\lambda_i^{k+1} = -D_i^k/\Delta_i^k, \quad \tilde{\lambda}_i^{k+1} > \tilde{D}_i^k/\Delta_i^k, \quad \tilde{\lambda}_i^{k+1} > \tilde{\lambda}_i^k, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (9.151)$$

Для прогноза f_0^* можно использовать выражение (9.141), разрешив его относительно b_0^k и найдя b_i^k и $\tilde{b}_i^k$ из равенств (9.145). Использование квадратичной аппроксимации f_0^* почти не осложняет расчеты, но в ряде случаев уменьшает время решения задачи (9.149) за счет более разумного выбора коэффициента штрафа $\tilde{\lambda}$.

Б. Монотонное пробразование функции цели с введением квадратичного штрафа. По тем же соображениям, что и для модифицированной функции Лагранжа, введем векторный коэффициент штрафа и запишем R^* в форме

$$R^*(C, \lambda) = (f_0^*(C) - \lambda_0)^3 - 1/2 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i C_i^2.$$

При этом

$$\begin{gathered}R_{Ci}^* = -\tilde{\lambda}_i C_i, \quad R_{f_0^*}^* = 3(f_0^*(C^*) - \lambda_0)^2 = 3(f_0(x^*) - \lambda_0)^2,\\ \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i^2} = -\tilde{\lambda}, \quad \frac{\partial^2 R^*}{\partial C_i \partial C_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 R^*}{\partial f_0^{02}} = G(f_0^*(C^*) - \lambda_0) = G(f_0(x^*) - \lambda_0).\end{gathered}$$

При линейной аппроксимации функции достижимости из условий (9.143) с учетом конкретного вида производных функции R_0 следуют соотношения

$$\lambda_0^{k+1} = f_0^*(0) \approx b_0^k = f_0(x^{0k}) - \frac{1}{3(f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k)^2} \sum_{i=1}^{n} (C_i^{0k})^2 \tilde{\lambda}_i^k, \quad (9.152)$$

$$\tilde{\lambda}^{k+1} > \frac{2}{3|f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k|^3} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{\lambda}_i^k \tilde{\lambda}_j^k C_i^{0k} C_j^{0k}|. \quad (9.153)$$

Для квадратичной аппроксимации $f_0^*(C)$ запишем выражения для определителей (9.144)

$$\Delta_i^k = 9[f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k]^2[f_0(x^{0(k-1)}) - \lambda_0^{k-1}]^2(C_i^{0(k-1)} - C_i^{0k}),$$

$$D_i^k = 3C_i^{0k}C_i^{0(k-1)}\{\tilde{\lambda}_i^k[f_0(x^{0(k-1)} - \lambda_0^{k-1})]^2 - \tilde{\lambda}_i^{k-1}[f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k]^2\}.$$

$$\tilde{D}_i^k = 3\{\tilde{\lambda}_i^{k-1}C_i^{0(k-1)}[f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k]^2 - \tilde{\lambda}_i^k C_i^{0k}[f_0(x^{0(k-1)} - \lambda_0^{k-1}]^2\}.$$

Если $\Delta_i^k \neq 0$, то для расчета λ_0^{k+1} из равенств (9.137) и (9.141) следует

$$\lambda_0^{k+1} = b_0^k = f_0(x^{0k}) - \sum_{i=1}^n \left(D_i^k + \frac{1}{2}\tilde{D}_i^k C_i^{0k}\right)\frac{C_i^{0k}}{\Delta_i^k}. \qquad (9.154)$$

Неравенства (9.139) примут вид

$$\tilde{\lambda}_i^{k+1} > 3\left\{[f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k]^2\frac{\tilde{D}_i^k}{\Delta_i^k} + 2|f_0(x^{0k}) - \lambda_0^k|\sum_{j=1}^n \left|\frac{D_j^k D_i^k}{\Delta_j^k \Delta_i^k}\right|\right\}, \qquad (9.155)$$

$$\tilde{\lambda}^{k+1} > \tilde{\lambda}_i^k; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Величина λ_0^{k+1} представляет собой значение задачи f_{0a}^* после очередной итерации. Подчеркнем, что при использовании модифицированной функции Лагранжа этот прогноз, а значит и значение $f_0(x^{0k})$, не учитывается при расчете λ, здесь же вся информация, полученная при решении вспомогательной задачи (9.121), используется полностью. При тестовых расчетах алгоритмы, основанные на монотонном преобразовании функции f_0 в форме $F_0(f_0 - \lambda_0)^3$ и $F_0(f_0, \lambda_0) = \operatorname{arctg}[(f_0 - \lambda_0)|f_0 - \lambda_0|]$ показали высокую эффективность.

Условия оптимальности для усредненных задач нелинейного программирования. В п. 9.2 были даны условия оптимальности для усредненной задачи НП в канонической форме. Здесь мы подробнее остановимся на конкретных типах усредненных задач.

Усреднение функций, определяющих условия задачи. Рассмотрим, как и ранее, в качестве исходной задачу нелинейного программирования (9.81).

На множестве V_x определим распределение (плотность вероятностной меры) $p(x)$ со свойствами

$$\int_{V_x} p(x)\,dx = 1; \quad p(x) \geq 0. \qquad (9.156)$$

Среднее значение функции $f(x)$ на интервале $[0, \tau]$ может быть найдено как (см. п. 9.3)

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(x(t))\,dt = \int\limits_{V_x} f(x)p(x)\,dx. \tag{9.157}$$

Если в задаче (9.81) искомая переменная x изменяется во времени или эта задача решается многократно и вместо требования максимума f_0 необходимо достичь максимума среднего значения этой функции, а функции f_i равны нулю также лишь в среднем, то мы приходим к расширению задачи НП вида

$$\overline{f_0(x)} =\!\rightarrow \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{f_i(x) = 0}, \\ \\ i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{9.158}$$

Будем называть эту задачу $\overline{\text{НП}}$. Переменной в задаче (9.158) является не вектор x, а его распределение $p(x)$ на множестве V_x. Переменную x называют *рандомизированной*.

Задача $\overline{\text{НП}}$ есть расширение задачи НП. Действительно, при $p(x) = \delta(x - x^0)$, где $x^0 \in V_x$, а в остальном произвольно, для непрерывной функции $f(x)$

$$\overline{f(x)} = \int\limits_{V_x} \delta(x - x^0)f(x)dx = f(x^0).$$

Любому вектору $x^0 \in D$ можно поставить в соответствие функцию $p(x) = \delta(x - x^0)$, удовлетворяющую условиям задачи (9.158), при этом справедливо равенство

$$f_0(x^0) = \frac{\overline{f_0(x)}}{p(x)} = \delta(x - x^0).$$

Таким образом, на множестве допустимых решений расширенной задачи нужно наложить дополнительные ограничения, выделив из всех возможных распределений только δ-образные, чтобы получить задачу, тождественную исходной. Следовательно, $\overline{\text{НП}}$ является расширением для задачи НП (см. п. 9.2).

Рассмотрим сначала частный вид задачи НП, когда функции $f_i(x) = x_i$ такие, что

$$f_0(x) \rightarrow \max \Big/ \begin{array}{l} x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n, \\ x \in V_x. \end{array} \tag{9.159}$$

Задача (9.159) в детерминированной постановке не имеет смысла, так как ее решение $x^* = 0$, если, естественно, нуль принадлежит V_x. Значение этой задачи $f_0^* = f_0(0)$. Однако возможна усредненная постановка задачи (9.159):

$$\overline{f_0(x)} \to \max \ / \ \overline{x}_i = 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{9.160}$$

Здесь черта соответствет усреднению на множестве V_x. Значение задачи (9.160), как это следует из определения выпуклой оболочки функции, равно ординате выпуклой оболочки функции $f_0(x)$ на множестве V_x в точке $x = 0$. Так как построение любой ординаты выпуклой оболочки функции n переменных, согласно теореме Каратеодори, требует усреднения не более чем $(n+1)$-й ординаты функции $f_0(x)$, задачу (9.160) можно переписать в форме

$$\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu f_0(x^\nu) \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu x_i^\nu = 0,\ i = 1, \dots, n; \\ \gamma_\nu \geq 0,\ \sum\limits_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu = 1. \end{array} \tag{9.161}$$

Вернемся к задаче (9.158) и попытаемся привести ее также к задаче построения выпуклой оболочки функции. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что задачу (9.158) можно решать в два этапа. На первом этапе найдем максимум функции $f_0(x)$ при условиях $f(x) = C$, где C принимает все те значения, при которых поверхность уровня $f(x) = C$ пересекается с множеством V_x. Задача

$$f_0(x) \to \max \Big/ \begin{array}{l} f_i(x) = C_i,\ i = 1, \dots, m, \\ x \in V_x \end{array} \tag{9.162}$$

является задачей нелинейного программирования, как и (??). В результате решения (9.162) получим множество условно оптимальных решений $x^*(C)$ и функцию $f_0(x^*(C)) = f_0^*(C)$, т.е. функцию достижимости задачи НП.

Справедливо следующее утверждение: *оптимальное распределение* $p^*(x)$ *в задаче* $\overline{\text{НП}}$ (9.158) *сосредоточено в точках* $x^*(C)$*, так что для любого* $x \in V_x$*, не являющегося условно оптимальным решением* (9.158), $p^*(x) = 0$.

Действительно, пусть в точке x^0 некоторое распределение $p(x^0) \neq$ $\neq 0$, а $f(x^0) = C^0$, причем

$$\overline{f(x)} = \int\limits_{V_x} f(x) p^0(x) dx = 0, \tag{9.163}$$

величина же

$$\overline{f_0(x)} = \int\limits_{V_x} f_0(x) p^0(x) dx = M. \tag{9.164}$$

Если в качестве решения взять другое распределение $p^*(x)$, которое всюду совпадает с $p^0(x)$, но в ϵ-окрестности точки x^0 равно нулю, зато отлично от нуля в точке $x^*(C^0)$, то значение интеграла в (9.163) не изменится, а значение интеграла (9.164) увеличится, так как при $f(x) = C^0$ вектор $x^*(C^0)$ доставляет максимум $f_0(x)$.

Другими словами, *если усреднять, то усреднять условно оптимальные значения* x.

С учетом сказанного второй этап решения задачи (9.158) можно сформулировать как определение максимума среднего значения функции $f_0^*(C)$ при условии, что среднее значение вектора $\overline{C} = 0$, или

$$\overline{f_0^*(C)} \to \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{C}_i = 0, \ i = 1, \ldots, m, \\ C_i \in V_C. \end{array} \tag{9.165}$$

Эта задача аналогична задаче (9.160). Ее значение, а следовательно, и значение задачи (9.158) равно ординате выпуклой оболочки функции достижимости $f_0^*(C)$ для $C = 0$:

$$\sup_{x \in D} \overline{f_0(x)} = \frac{\sup \overline{f_0^*(C)}}{\overline{C}} = 0, \quad C \in V_C.$$

Заметим, что множество допустимых решений задачи нелинейного программирования (9.81) может быть пусто, т.е. внутри V_x, например, нет элементов, для которых $f_i(x)$ равнялись бы нулю. При этом функция $f_0^*(C)$ не определена в точке $C = 0$. Однако для построения $Co_{V_C} f_0^*$ множество V_C дополняют до его выпуклой оболочки, и на дополнительных «участках» $f_0^*(C)$ считают достаточно малой. При этом $Co_{V_C} f_0^*$ на этих участках определена. На рис. 9.17 приведен пример функции достижимости и ее выпуклой оболочки. Решение исходной задачи отсутствует, так как для любого $x \in V_x$ функция f не равна нулю. Усредненная задача имеет решение, которому соответствует значение целевой функции, равное $Co_{V_C} f_0^*(0)$.

Усредненная задача имеет смысл и в случае, если число условий в форме равенств в исходной задаче НП больше размерности вектора искомых переменных. Так, для задачи

$$\overline{f_0(x)} \to \max / \overline{f_1(x)} = 0, \ \overline{f_2(x)} = 0, \ x \in V_x,$$

в которой x — скаляр, обычная постановка задачи НП бессмысленна, так как решение существует лишь в том исключительном случае, когда уравнения $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ имеют общий корень, принадлежащий V_x. Усредненная задача может иметь решение, причем число базовых значений не превосходит трех, т.е. на единицу больше числа связей.

Действительно, множество достижимости на плоскости с координатами $f_1 = C_1$ и $f_2 = C_2$ представляет собой отображение множества V_x точек числовой оси. В частности, это множество может быть линией (рис. 9.18). Зависимость f_0 от C_1 и C_2 вдоль этой линии представляет

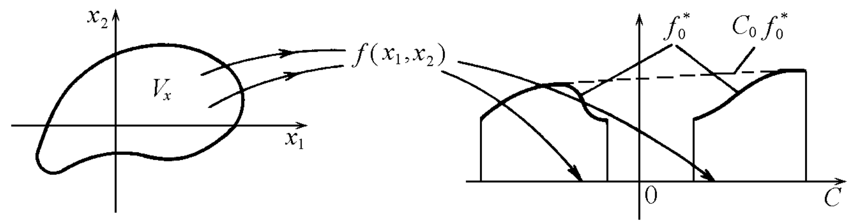
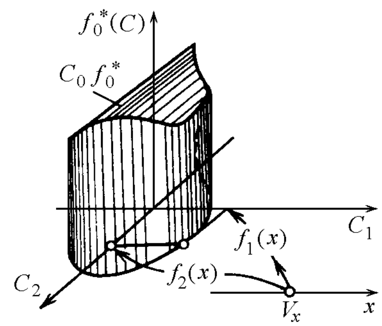


Рис. 9.17. Функция достижимости и ее выпуклая оболочка для случая, когда множество допустимых решений исходной задачи НП пусто

Рис. 9.18. Функция достижимости и ее выпуклая оболочка для случая, когда размерность переменных в задаче нелинейного программирования меньше размерности связей



собой функцию достижимости. Область ее определения в общем случае невыпукла, но выпуклую оболочку $Co_{V_C} f_0^*$ можно найти и в этом случае.

Так как вектор C имеет размерность m, число базовых точек C^ν в задаче (9.165) не превышает $m+1$. Таким образом, распределение $p(C)$ в задаче (9.165) можно искать в форме

$$p(C) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(C - C^\nu),$$

где C^ν — базовые значения C. Но так как каждому из базовых значений C^ν соответствует условно оптимальное решение $x^*(C^\nu)$, то соответствующее распределение $p(x)$ также сосредоточено не более чем в $m+1$ точках:

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(x - x^\nu). \tag{9.166}$$

При подстановке распределения (9.166) в выражения для $\overline{f_0(x)}$ и

$\overline{f_i(x)}$ задача (9.158) примет вид

$$I = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0(x^\nu) \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_i(x^\nu) = 0; \\ x^\nu \in V_x,\ i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{9.167}$$

Таким образом, эта задача сводится к обычной задаче НП, переменными в которой являются базовые значения x^ν вектора x и весовые множители γ_ν.

Связь задачи $\overline{\text{НП}}$ с расширением Лагранжа задачи НП. Запишем функцию Лагранжа для задачи (9.167) и получим условия ее оптимальности:

$$\overline{R} = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0(x^\nu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_i(x^\nu) + \Lambda \left(1 - \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \left[f_0(x^\nu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^\nu) - \Lambda \right] + \Lambda.$$

Сравнивая это выражение с функцией Лагранжа

$$R = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

исходной задачи НП, видим, что

$$\overline{R} = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu (R(x^\nu, \lambda) - \Lambda) + \Lambda, \tag{9.168}$$

где $R(x^\nu, \lambda)$ — функция Лагранжа задачи нелинейного программирования для базовых значений вектора x.

С учетом того, что $\sum\limits_{\nu} \gamma_\nu = 1$, функция Лагранжа усредненной задачи равна среднему значению функции Лагранжа для исходной задачи, причем усреднение ведется по всем базовым значениям x^ν. Заметим, что некоторые из весовых множителей γ_ν могут быть равны нулю. Это означает, что число базовых точек меньше $m + 1$. Выясним, каким условиям должны удовлетворять те x^ν, которые входят в выражение (9.168) с ненулевым весом. Для этого запишем условия оптимальности задачи (9.167) по переменным γ_ν, воспользовавшись теоремой Куна–Таккера:

$$\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_\nu} \right) \delta\gamma_\nu \le 0.$$

Так как γ_ν ограничены только с одной стороны ($\gamma_\nu \ge 0$), то $\delta\gamma_\nu \ge 0$, а следовательно,

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_\nu} = R(x^\nu) - \Lambda \le 0 \tag{9.169}$$

или $R(x^\nu) \le \Lambda$. Если $\gamma_\nu^* > 0$, то $\delta\gamma_\nu$ может быть любого знака, а следовательно, неравенство (9.169) превращается в равенство:

$$R(x^\nu) = \Lambda.$$

Для всех остальных x весовой коэффициент можно считать нулевым $\gamma_\nu = 0$, при этом $\partial\overline{R}/\partial\gamma_\nu < 0$ и $R(x) < \Lambda$.

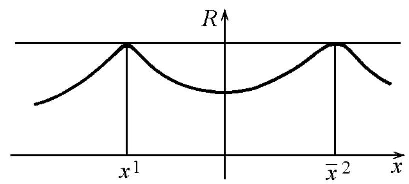


Рис. 9.19. Функция Лагранжа при выборе λ из условия минимума по λ и максимума $R(x,\lambda)$ по x

Таким образом, *для всех тех значений x^ν, которые входят в усредненную задачу с ненулевым весом, функция Лагранжа R исходной задачи нелинейного программирования достигает абсолютного максимума.* Этот максимум, естественно, одинаков для всех x^ν (рис. 9.19), откуда следует, что

$$\overline{R}(\gamma_\nu^*, x^{\nu*}, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu^* [R(x^{\nu*}, \lambda) - \lambda] + \Lambda = \sup_{x \in V_x} R(x, \lambda). \qquad (9.170)$$

Условия равенства значений R в точках $x^{\nu*}$ и условия ее максимума в них позволяют выписать уравнения для расчета соответствующих координат.

Из теоремы Куна–Таккера для задачи $\overline{\text{НП}}$ вытекает, таким образом, что найдется вектор λ-множителей Лагранжа, для которого функция $\overline{R}$ достигает абсолютного максимума по переменным $x^\nu \in V_x$ и $\gamma_\nu \in V_\gamma$ на элементе множества $\overline{D}$ допустимых решений задачи $\overline{\text{НП}}$. Отсюда следует, что расширение Лагранжа для задачи $\overline{\text{НП}}$ эквивалентно. Как для любого эквивалентного параметрического расширения λ-множители удовлетворяют условию

$$\overline{R}(\lambda^*, \gamma_\nu^*, x^{\nu*}) = \inf_{\lambda \in V_\lambda} \sup_{\gamma_\nu, x^\nu} \overline{R}(\lambda, \gamma_\nu, x^\nu).$$

С учетом равенства (9.170) получим

$$\overline{R}(\lambda^*, \gamma_\nu^*, x^{\nu*}) = \inf_{\lambda \in V_\lambda} \sup_{x \in V_x} R(\lambda, x). \qquad (9.171)$$

Но левая часть в (9.171) в силу эквивалентности расширения Лагранжа равна значению задачи $\overline{\text{НП}}$, следовательно, показатель эффективности усредненного расширения для задачи нелинейного программирования равен соответствующему показателю для расширения Лагранжа той же задачи

$$\Delta_y = \sup_{x \in \overline{D}} \overline{f_0(x)} - \sup_{x \in D} f_0(x) = \inf_{\lambda \in V_\lambda} \sup_{x \in V_x} R(\lambda, x) - \sup_{x \in D} f_0(x) = \Delta_{\text{Л}}\,. \qquad (9.172)$$

Таким образом, *расширение Лагранжа эквивалентно задаче НП тогда и только тогда, когда этой задаче эквивалентно усредненное расширение* $\overline{\text{НП}}$, т.е. когда функция достижимости $f_0^*(C)$ совпадает со своей выпуклой оболочкой при $C = 0$.

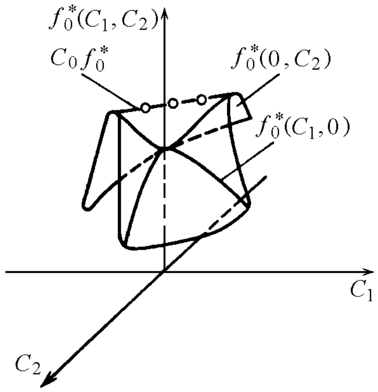


Рис. 9.20. Невыпуклая функция достижимости, сечения которой по каждой из переменных выпуклы

В том случае, когда любое из сечений $f_0^*(0, C_i)$ или $f_0^*(0, C_j)$ невыпукло в нуле, т.е. когда выпуклая оболочка этой функции на V_C имеет для $C = 0$ ординату, большую ординаты самой функции, расширение Лагранжа задачи НП не эквивалентно. Выпуклость в нуле даже всех сечений функции достижимости (рис. 9.20) координатными плоскостями, естественно, не гарантирует эквивалентности расширения Лагранжа, так как

$$Co_{V_C} f_0^*(C)_{C=0} \geq Co_{V_C} f_0^*(0, C_j)_{C_j=0}.$$

Другие виды усредненных расширений. Задача $\overline{\text{НП}}$ не единственно возможный способ расширения с использованием усреднения для задачи нелинейного программирования. Часто в реально возникающих задачах в критерий эффективности, связи и ограничения входят не сами переменные x, а их средние значения. Приведем несколько возможных модификаций усредненного расширения [82].

1. Задача о максимуме функции от среднего значения аргумента:

$$f_0(\overline{x}) \to \sup \ / \ p(x) = 0 \qquad \forall x \notin D. \tag{9.173}$$

Здесь D — множество допустимых решений исходной задачи нелинейного программирования, задаваемое условиями $f(x) = 0$, а $\overline{x}$ — среднее значение вектора x на множестве D:

$$\overline{x} = \int\limits_D x p(x)\, dx; \quad p(x) \geq 0; \quad \int\limits_D p(x)\, dx = 1.$$

Так как множество значений $\overline{x}$, удовлетворяющих этим условиям, представляет собой выпуклую оболочку множества D, то задача (9.173) эквивалентна задаче НП, но на множестве значений x, принадлежащих выпуклой оболочке множества D,

$$f_0(x) \to \sup \ / \ x \in CoD. \tag{9.174}$$

Ее условия оптимальности вытекают из теоремы 9.1 и сводятся к тому, что на оптимальном решении в каждой из базовых точек x^l, число которых не превышает $k+1$, функция

$$L(x) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \overline{x_i}}\right)_{\overline{x^*}} x_i$$

достигает максимума, и требования $x^l \in D$ для $l = 0, \ldots, k$, выполнены.

2. З а д а ч а о м а к с и м у м е с р е д н е г о з н а ч е н и я ф у н к ц и и п р и с в я з я х, н а л о ж е н н ы х н а с р е д н е е з н а ч е н и е а р г у м е н т а:

$$\overline{f_0(x)} \to \sup \ / \ f_i(\overline{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \tag{9.175}$$

или, в более полной записи,

$$\int\limits_{V_x} f_0(x) p(x) dx \to \sup_{p(x)};$$

$$f_i \left[\int\limits_{V_x} p(x) x dx \right] = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

При записи этой задачи в канонической форме и использовании условий теоремы 9.1 получим соответствия

$$F_0 = \overline{f_0(x)}, \quad F_\nu = f_\nu(\overline{x}), \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Число усреднений равно k, а функция

$$R = \lambda_0 \overline{f_0(x)} + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu f_\nu(\overline{x}).$$

В базовых точках x^l, число которых не превышает $k+1$, выражение

$$L(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial \overline{x}_i}\right)_{x^*}$$

максимально и выполнены условия

$$f_\nu \left(\sum_{l=0}^{k} \gamma_l x^l \right) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

3. Задача о максимуме функции от среднего значения x при усредненных связях:

$$f_0(\overline{x}) \to \sup \ / \ \overline{f_i(x)} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9.176}$$

Условия оптимальности этой задачи также вытекают из теоремы 9.1.

Каждая из перечисленных задач удовлетворяет данному выше определению расширения по отношению к задаче нелинейного программирования, а искомой переменной в них является распределение $p(x)$.

Усредненные задачи с двумя типами переменных. Расширение задачи нелинейного программирования может быть проведено не по всем, а лишь по некоторым составляющим искомого решения. При технической реализации это соответствует ситуации, когда некоторые составляющие (обозначим их через x) можно при многократном повторении задачи менять от решения к решению, другие составляющие, будучи раз выбраны, остаются неизменными. Эту группу переменных обозначим через y. Например, x — режимные параметры процесса (расход, давление, температура и пр.), а y — конструктивные параметры аппарата.

Задача, которую будем обозначать через $\overline{\text{НП}}^x$, примет вид

$$\overline{f_0(y,x)}^x \to \sup \Bigg/ \begin{array}{l} \overline{f_0(y,x)}^x = 0; \\ \\ i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{9.177}$$

Здесь

$$\overline{f(y,x)}^x = \int\limits_{C_x} f(y,x) p(x)\, dx.$$

Искомыми переменными в (9.177) являются вектор y и распределение $p(x)$.

Для каждого фиксированного y эта задача совпадает с обычной постановкой задачи $\overline{\text{НП}}$. Если в функции Лагранжа R для исходной задачи нелинейного программирования выделить переменные первой группы $x \in E^r$ (рандомизированные) и второй группы $y \in E^s$ (детерминированные), то условия оптимальности по x аналогично задаче $\overline{\text{НП}}$ примут вид [см. (9.170)]

$$R(\lambda, \gamma_\nu^*, y, x^{\nu *}) = \sup_{x \in V_x} R(\lambda, y, x), \quad \nu = 0, \ldots, m. \tag{9.178}$$

Ввиду эквивалентности расширения Лагранжа для усредненной задачи нелинейного программирования при каждом $y \in V_y$ найдутся такие $\lambda(y)$, выбираемые из условия $\inf\limits_{\lambda} \sup\limits_{x \in V_x} R(\lambda, y, x)$, что

$$\inf_{\lambda} \sup_{x \in V_x} R(\lambda, y, x) = \sup_{x \in \overline{D_x(y)}^x} \overline{f_0(y, x)}^*.$$

Здесь множество $\overline{D_x(y)}$ выделено связями задачи (9.177). Вместе с тем при фиксированной функции $p(x)$ задача (9.177) превращается в обычную задачу нелинейного программирования относительно переменных второй группы y. Для нее справедливы условия Куна–Таккера, которые в данном случае кроме условий дополняющей нежесткости содержат требования стационарности по y функции $R(\lambda, \gamma_\nu, y, x^\nu)$, что в свою очередь приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu R(\lambda, y, x^\nu)\right] = 0, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{9.179}$$

в которых R — функция Лагранжа для задачи нелинейного программирования.

Особенно важен случай, когда тем или иным способом удается доказать эквивалентность расширения $\overline{\text{НП}}^x$ и исходной задачи нелинейного программирования, например, когда задача НП для любого фиксированного $y \in V_y$ выпукла по x. В этом случае все $\gamma_\nu = 0$, кроме γ_0, которое равно единице, и условия оптимальности задачи нелинейного программирования, совпадающие ввиду эквивалентности с условиями оптимальности расширенной задачи, примут следующую форму:

1) стационарность функции Лагранжа по детерминированным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_0 f_0(y, x) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(y, x)\right]_{x^*, y} = 0; \tag{9.180}$$

2) достижение верхней грани функцией Лагранжа по рандомизированным переменным:

$$x^* = \arg\sup_{x \in V_x} R(y^*, x, \lambda). \tag{9.181}$$

Здесь предполагается, что точка y^* лежит строго внутри V_y. Важно и то, что дифференцируемость функций, определяющих задачу, требуется только по y, причем только в окрестности точки y^*. Если (y^*, x^*) — регулярная точка, т.е. не является экстремальной для системы связей, то $\lambda_0 = 1$.

9.5. Условия оптимальности в форме принципа максимума для задач управления со скалярным аргументом

В прикладных задачах могут встречаться разнообразные сочетания типов критериев оптимальности и условий, определяющих множество допустимых решений. Математическая модель обьекта может уточняться в ходе решения, при этом меняются не только параметры, но и структура ограничений. Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи в канонической записи (см. параграф 9.3) позволяют получить расчетные соотношения, выделяющие оптимальное решение задачи с произвольным сочетанием критерия оптимальности и ограничений. Здесь мы приведем различные типы условий и критериев оптимальности в задачах управления со скалярным аргументом t и дадим вытекающее из теоремы 9.2 правило получения соотношений, представляющих собой необходимые условия оптимальности этих задач.

Будем считать, что аргумент $t \in [0, \overline{t}]$. Составляющие, зависящие от t, называют *функциональными*. Наряду с ними искомое решение может содержать векторные составляющие, принимающие постоянные значения на всем интервале $(0, \overline{t})$, их называют *параметрическими*. Рассмотрим различные виды критериев оптимальности и связей, наложенных на искомые переменные.

Формы оптимизируемых функционалов.

1. Комбинация интегральной и терминальной составляющих:

$$I = \int\limits_0^{\overline{t}} f_0[a, y(t), t]dt + F_0[a, \overline{t}, y(\overline{t})] \to \sup . \tag{9.182}$$

Здесь $y(t)$ — функциональные, а a — параметрические составляющие решения. К числу параметрических составляющих может относится и продолжительность процесса $\overline{t}$. В частности, функции f_0 или F_0, определяющие интегральную и терминальную составляющие критерия, могут быть равны нулю. В том случае, когда $F_0 = 0$, а $f_0 = -1$, критерий (9.182) примет форму

$$I = -\int\limits_0^{\overline{t}} dt \to \sup \sim \overline{t} \to \inf . \tag{9.183}$$

Задачи с критерием (9.183) называют *задачами максимального быстродействия*.

2. Критерий, зависящий от параметров:

$$I = f_0(a) \to \sup, \tag{9.184}$$

не включает функциональных составляющих. Однако если параметры a связаны с $y(t)$ условиями, определяющими множество допустимых решений, задача является вариационной.

3. Критерий минимаксного типа:

$$I = \min_{t \in [0,\bar{t}]} f_0[a, y(t), t] \to \sup\,. \tag{9.185}$$

Критерии одного типа можно привести к другой форме, введя в условия задачи вспомогательные переменные и добавив те или иные ограничения. Например, терминальное слагаемое в (9.182) в том случае, когда функция F_0 при $t = \bar{t}$ непрерывна по t, может быть записано в интегральной форме как

$$F_0(a, \bar{t}, y(\bar{t})) = \int_0^{\bar{t}} F_0(a, t, y(t))\delta(t - \bar{t})\; dt.$$

Формы условий, определяющих множество допустимых решений. Условия, определяющие множество допустимых решений, могут иметь как форму равенств, так и форму неравенств. Ниже для краткости мы будем записывать только равенства.

1. Интегральные ограничения:

$$J = \int_0^{\bar{t}} f(a, y(t), t)\; dt - c(a) = 0. \tag{9.186}$$

2. Конечные соотношения на интервале $(0, \bar{t})$:

$$f(a, y(t), t) = 0 \quad \forall t \in (0, \bar{t}). \tag{9.187}$$

3. Конечные соотношения для фиксированного значения $t = t_0$, принадлежащего интервалу $[0, \bar{t}]$:

$$f(a, y(t_0), t_0) = 0. \tag{9.188}$$

В качестве значения t_0, для которого справедливо условие (9.188), часто выступают значения $t_0 = \bar{t}$ или $t_0 = 0$.

Если конечные соотношения удается разрешить относительно одной из составляющих решения, то размерность задачи можно снизить. Однако далеко не всегда это удается сделать.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\dot{x} = f[a, x(t), u(t), t]. \tag{9.189}$$

Здесь функциональные составляющие решения разбиты на две группы, которые формально по-разному входят в условия (9.189). Составляющие $u(t)$ — управления — входят только в правые части дифференциальных уравнений, составляющие $x(t)$ входят как в правые части, так и в форме производных в левые части уравнений (9.189).

5. Интегральные уравнения

$$x(t) = \int_0^{\bar{t}} f[a, x(\tau), u(\tau), \tau, t]\, d\tau. \tag{9.190}$$

6. Интегральные преобразования:

$$y(t, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} f(u(\tau), \tau, t) d\tau.$$

Вводя добавочные переменные, можно самые различные ограничения преобразовать к нужной форме. Приведем несколько примеров таких преобразований. Например, дифференциальное уравнение может быть задано в неявной форме

$$F(\dot{x}, a, t, x, u) = 0.$$

Для приведения к стандартной форме введем переменные

$$\dot{x} = v(t) \tag{9.191}$$

и перепишем уравнение в форме конечного соотношения

$$F(v, a, t, x, u) = 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \tag{9.192}$$

Условия (9.191), (9.192) соответствуют неявной форме дифференциального уравнения. Переменные, вводимые для того, чтобы преобразовать форму связи, называют *искусственно вводимыми переменными*. Они входят только в те условия задачи, которые преобразуются с их использованием.

Другой пример: условие

$$\min_{t \in [0, \bar{t}]} f(a, t, y(t)) = 0 \tag{9.193}$$

эквивалентно двум требованиям, одно из которых имеет форму неравенства

$$f(a, t, y(t)) \geq 0 \qquad \forall t \in [0, \bar{t}],$$

а второе — форму равенства, содержащего параметр $t_0 \in [0, \bar{t}]$,

$$f(a, t_0, y(t_0)) = 0.$$

Интегральную составляющую критерия оптимальности в (9.182) можно привести к терминальной форме, введя связь в форме дифференциального уравнения

$$\dot{x}_0 = f_0(a, t, y(t))$$

с начальным условием $x_0(0) = 0$. Критерий оптимальности запишется при этом в виде

$$I = x_0(\bar{t}) + F_0[a, \bar{t}, y(\bar{t})] \to \sup .$$

Аналогично критерий (9.185) минимаксного типа может быть переписан как требование максимума некоторого искусственно введенного параметра b с дополнительным ограничением

$$I = b \to \sup \Big/ \ f_0[a, y(t), t] - b \geq 0. \qquad (9.194)$$

Необходимые условия оптимальности вариационных задач управления в классе скользящих режимов. Теорема 9.2 позволяет получить условия оптимальности в форме принципа максимума для задач с критерием и со связями разного типа. Причем эти условия удобно получить как следствие из более общего утверждения — условий оптимальности вариационных задач в классе скользящих режимов.

Для формулировки условий оптимальности нам потребуются вспомогательные конструкции, собранные в табл. 9.1 и 9.2. В этих таблицах некоторым наиболее часто используемым видам целевого функционала и условиям типа равенств сопоставлены слагаемые R_0 и $R_{\text{св}}$ в функции Лагранжа R. Будем рассматривать задачи, в которых требуется обеспечить максимум критерия оптимальности, совпадающего с одним из критериев табл. 9.1 при произвольном сочетании условий, определяющих множество допустимых значений переменных из табл. 9.2. Переменные задачи разобъем на две группы по следующему правилу:

К первой группе относим те функциональные составляющие, которые в соответствии с табл. 9.1, 9.2 *вошли в слагаемые* R_{0I} *и* $R_{\text{св}I}$ *как в функционале* I*, так и во всех условиях, имеющихся в задаче. Все остальные составляющие решения отнесем ко второй группе.*

В выражении (9.196) выделим слагаемые, содержащие $u(t)$, и сумму этих слагаемых обозначим через H. Оставшиеся слагаемые обозначим через N. Так что $R = N(x, \lambda, t) + H(x, u, \lambda, t)$. Наряду с этой функцией запишем расширенную функцию Лагранжа:

$$\tilde{R} = N(x, \lambda, t) + \sum_{k=0}^{m} \gamma_k(t) H(x, u_k, \lambda, t),$$

где m — общее число условий задачи, содержащих $u(t)(m \le n)$, а $\gamma_k(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_k(t) \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{m} \gamma_k(t) = 1. \qquad (9.195)$$

Оптимальным решением задачи в классе скользящих режимов назовем такие функции $\gamma(t)$ с сотавляющими $\gamma_k^*(t)$, $u(t)$ с составляющими $u_k^*(t)$, $x^*(t)$, что $u_k^* \in V$, $\gamma_k^*(t)$ удовлетворяет (9.195), а вектор-функция $x^*(t)$ может быть для любого $t \in [0, \overline{t}]$ сколь угодно точно приближена последовательностью $\{x_r(t)\}$ допустимых по уравнениям связей решений задачи. При этом функционал I достигает на оптимальном решении своей верхней грани. Мерой близости фунций $x^*(t)$ и $x_r(t)$ служит максимальное по t значение модуля их разности.

Переменных первой группы в задаче может и не оказаться, если, например, все переменные связаны друг с другом конечными соотношениями (строка 3, табл. 9.2). Обозначим переменные первой группы через $u(t)$, а второй — через $x(t)$. Для справедливости сформулированных ниже условий оптимальности потребуем, чтобы при каждом t значения $u(t)$ принадлежали замкнутой ограниченной области V пространства R^n, а функции f_0 и $f_{\text{св}}$ были определены на прямом произведении множеств допустимых значений своих аргументов, непрерывны по совокупности этих аргументов и непрерывно дифференцируемы по x, t. Функционал I ограничен на множестве допустимых решений.

Для каждой конкретной задачи, используя табл. 9.1 и 9.2, можно составить функцию R:

$$R = \lambda_0 R_0 + \sum_{\nu=1}^{n} R_{\text{св}\nu}. \qquad (9.196)$$

Таблица 9.1. **Критерии оптимальности и соответствующие им слагаемые в функции Лагранжа**

№	Функционал $I \to \max$	Слагаемые R_0	Тип слагаемого
1	$\int_0^T f_0(y(t), a, t)dt$	$\lambda_0 f_0(y(t), a, t)$	R_{0I}
2	$F_0(y(t_0), a, t_0)$	$\lambda_0 F_0(y(t), a, t)\delta(t - t_0)$	R_{0II}
3	$\min\limits_{t\in[0,T]} f_0(y(t), a, t) = z$	$\frac{\lambda_0 z}{T} + \lambda(t)[z - f_0(y(t), a, t)]$ $\lambda(t) \le 0$, $\lambda(t)[z^* - f_0(y(t), a, t)] = 0.$	R_{0II}

П р и м е ч а н и е. Критерий оптимальности может быть функцией от приведенных в таблице критериев вида $I = F(I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_u)$. В этом случае слагаемое, соответствующее критерию I, выражается через слагаемые R_k, соответствующие критериям I_k, как $R_0 = \sum_{k=1}^{n} \partial F/\partial I_k \cdot R_k$. Если $I = \sum_k a_k I_k$, то $R_0 = \sum_k a_k R_k$.

Т а б л и ц а 9.2. **Основные типы связей и соответствующие им слагаемые в функции Лагранжа**

№	Вид связи	Слагаемые R_{CB}	Тип слагаемого
1	$\int_0^T f(y(t), a, t)dt = 0$	$\lambda f(y(t), a, t), \quad t \in (0, T)$, $0, \quad t \notin (0, T)$	$R_{\text{св}I}$
2	$f(y(t), a, t) = 0$ $\forall t \in (0, T)$	$\lambda(t) f(y(t), a, t), \quad t \in (0, T)$, $0, \quad t \notin (0, T)$	$R_{\text{св}II}$
3	$f(y(t_0), a, t_0) = 0$	$\lambda f(y(t), a, t)\delta(t - t_0)$	$R_{\text{св}II}$
4	$f(x(t), u(t), a, t) - \dot{x} = 0$ $\forall_t \in [0, T]$	$\psi(t) f(x(t), u(t), a, t)$, $\psi(t) = 0, \quad t \notin [0, T]$, $\dot{\psi}(t)x(t) + (x(0)/T)\psi(0)$	$R_{\text{св}I}$ $R_{\text{св}II}$
5	$\int_0^T f(x(t), u(t), a, t, \tau)dt -$ $-x(\tau) = 0$	$\int_0^T \lambda(\tau) f(x(t), u(t), a, t, \tau)d\tau -$ $-\lambda(t)x(t)$	$R_{\text{св}I}$ $R_{\text{св}II}$

Необходимые условия оптимальности в классе скользящих режимов дает следующее утверждение, являющееся очевидным следствием из теоремы 9.2. *Если* $\gamma_k^*(t)$, $u_k^*(t)$ $(k = 0, \ldots, m)$, $x^*(t)$ *— решение задачи о максимуме функционала* I *из табл.* 9.1 *на множестве допустимых решений, определяющемся условиями из табл.* 9.2 *в классе скользящих режимов, то существует не равная тождественно нулю при* $t \in [0, \overline{t}]$ *и обращающаяся в нуль за пределами этого отрезка вектор-функция* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t))$, $\lambda_0 = 0, 1$, *и такая, что при почти всех* t, *удовлетворяющих условиям* $t \in [0, \overline{t}]$ *и* $\gamma_k(t) \geq 0$, *достигает абсолютного максимума по* u *в точках* u_k^* *функция*

$$H(x^*, u_k^*, \lambda, t) = \sup_{u \in V} H(x^*, u, \lambda, t), \tag{9.197}$$

а расширенная функция Лагранжа $\tilde{R}$ *стационарна по* x *откуда*:

$$\frac{\partial N(x,\lambda,t)}{\partial x} = -\sum_{k=0}^{m} \gamma_k(t) \frac{\partial H(x,u_k,\lambda,t)}{\partial x}. \qquad (9.198)$$

Если в задаче имеется вектор параметров a, *то в условия* (9.197), (9.198) *входит его оптимальное значение* a^*, *для которого выполнены условия локальной неулучшаемости функционала* L *по* a:

$$\frac{\partial L}{\partial a}\,\delta a = \left[\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_0^{\bar{t}} \left[N(x,\lambda,a,t) + \sum_{k=0}^{m}\gamma_k(t) H(x,u_k,a,\lambda,t)\right] dt\right] \delta a \le 0. \qquad (9.199)$$

Здесь δa *— вариация допустимая по ограничениям на вектор* a.

В том случае, когда в рассматриваемой задаче верхняя грань функции H по u достигается в одной точке ($\gamma_0(t) \equiv 1$), она имеет решение u^* в форме кусочно непрерывной функции, а не решение в форме скользящего режима, из соотношений (9.197), (9.199) следуют условия оптимальности в форме

$$H(x^*,u^*,t,\lambda,a^*) = \sup_{u\in V} H(x^*,u,t,\lambda,a^*), \qquad (9.200)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (9.201)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int\limits_0^{\bar{t}} (N+H)dt = 0. \qquad (9.202)$$

Из этих соотношений вытекает изложенная ниже процедура получения условий оптимальности для задач со скалярным аргументом.

Алгоритм получения условий оптимальности в форме принципа максимума. Для получения необходимых условий оптимальности в задаче с функционалом конкретного вида и конкретным набором связей можно воспользоваться условиями (9.58)–(9.60), если удастся записать функционал в форме (9.50), а каждое из условий в форме (9.51). Практически удобно наиболее распространенные типы критериев и ограничений переписать в канонической форме и сопоставить им слагаемые R_0 и $R_{\text{св}}$ в функции Лагранжа

$$R_0 = \lambda_0 f_0(y(t),a,t), \qquad (9.203)$$

$$R_{\text{св}} = \int\limits_{V_\tau} \lambda(\tau) f(y(t),a,t,\tau) d\tau. \qquad (9.204)$$

Приведем несколько примеров такого перехода.

1. Условия в форме дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau), \tau), \quad x(0) = x_0, \tag{9.205}$$

в интегральной форме

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x(t), u(t), t)dt.$$

Последнее выражение с использованием δ-функции и функции Хевисайда $h(t)$ можно переписать в виде (9.51):

$$J(\tau) = \int_0^{\bar{t}} \left[x(t)\delta(\tau - t) - f(x(t), u(t), t)h(\tau - t) - \frac{x_0}{\bar{t}} \right] dt = 0, \quad \tau \in [0, \bar{t}].$$

Функция $h(\tau - t)$ равна нулю при $t > \tau$ и равна единице при $t \le \tau$. Согласно (9.204) слагаемое $R_{\text{сб}}$ в обобщенной функции Лагранжа для дифференциального уравнения (9.205) имеет вид

$$R_{\text{сб}} = \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) \left[x(t)\delta(\tau - t) - f(x, u, t)(h(\tau - t) - \frac{x_0}{\bar{t}} \right] d\tau =$$

$$= x(t)\lambda(t) - f(x, u, t) \int_t^{\bar{t}} \lambda(\tau)d\tau - \frac{x_0}{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau)d\tau.$$

Введем функцию $\psi(t)$ такую, что

$$\dot{\psi}(t) = \lambda(t), \qquad \psi(\bar{t}) = 0,$$

$$\int_t^{\bar{t}} \lambda(\tau)d\tau = -\psi(t), \quad \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau)d\tau = -\psi(0).$$

С использованием функции ψ получим

$$R_{\text{сб}} = \dot{\psi}x + \psi f(x, u, t) + \psi(0)\frac{x_0}{\bar{t}}. \tag{9.206}$$

В случае, когда интервал $\bar{t}$ и x_0 фиксированы, последнее слагаемое в этом выражении не зависит от переменных задачи и не влияет на условия оптимальности решения.

При записи уравнения (9.205) в стандартной форме (9.51) было использовано равенство

$$x(\tau) = \int_0^{\bar{t}} x(t)\delta(\tau - t)dt, \quad \tau \in [0, \bar{t}],$$

которое справедливо лишь в случае, когда $x(t)$ — непрерывная функция. Слагаемое, содержащее δ-функцию в выражении для $R_{\text{св}}$, называют *сингулярным*, а слагаемое, не содержащее δ-функцию, — *регулярным*. Составляющие решения, вошедшие в регулярное слагаемое выражения для $R_{\text{св}}$, являются *составляющими первой группы* по отношению к связи в форме дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения (9.205) к первой группе относятся составляющие $u(t)$.

2. Условия в форме конечных соотношений

$$f(y(\tau), \tau) = 0 \quad \forall \tau \in [0, \bar{t}] \tag{9.207}$$

в канонической форме (9.51) могут быть записаны как

$$J(\tau) = \int_0^{\bar{t}} f(y(t), t)\delta(\tau - t)\, dt = 0 \quad \forall \tau \in [0, \bar{t}],$$

функция f непрерывна по совокупности своих аргументов, а y непрерывна по t. Для связей (9.207), составляющих решения, которые можно было бы отнести к первой группе, нет. Слагаемое $R_{\text{св}}$, соответствующее условию (9.207), имеет форму

$$R_{\text{св}} = \int_0^{\bar{t}} f(y(t), t)\lambda(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = \lambda(t)f(y(t), t),$$

причем регулярное слагаемое $R_{\text{св}}$ отсутствует.

В табл. 9.1 и 9.2 некоторым наиболее распространенным типам критериев оптимальности и связей сопоставлены слагаемые R_0, $R_{\text{св}}$ в обобщенной функции Лагранжа R, полученные так же, как это сделано в приведенных примерах. При этом выделены слагаемые $R_{\text{св}I}$ и $R_{\text{св}II}$, соответствующие регулярной и сингулярной составляющим. Использование этих таблиц делает ненужной процедуру приведения конкретной задачи к канонической форме (9.51).

Алгоритм получения условий оптимальности в форме принципа максимума для вариационных задач со скалярным аргументом сводится к следующим операциям.

1. Для конкретного критерия оптимальности и конкретных условий по табл. 9.1, и 9.2 выписывают слагаемые R_0 и $R_{\text{св}}$ и их сумму

$$R = R_0 + \sum_{\nu} R_{\text{св}\nu}.$$

2. Выделяют переменные первой группы, вектор которых обозначают через u, по правилу: *к переменным первой группы относят те составляющие решения $y(t)$, которые ни в слагаемом R_0, ни в одном из слагаемых $R_{\text{св}\nu}$, соответствующих связям, не оказались в R_{0II} и $R_{\text{св}II}$.*

3. Оставшиеся функциональные составляющие решения обозначают через $x(t)$ и относят к переменным второй группы.

4. Для полученной функции R и разбиения переменных выписывают соотношения (9.58)–(9.60).

Если в задаче не оказалось переменных первой группы, это означает, что с использованием функционала Лагранжа для этой задачи ни по одной из составляющих искомого решения нельзя получить условия оптимальности в форме принципа максимума (9.60).

Принцип максимума Понтрягина. В качестве одного из примеров использования алгоритма получения необходимых условий оптимальности рассмотрим получение таких условий для задачи

$$\begin{aligned} &I = \int_0^{\bar{t}} f_0(x,u,t)dt + F_0(x(\bar{t})) \to \max, \\ &\dot{x}_\nu = f_\nu(x,u,t), \quad x_\nu(0) = x_{\nu 0}, \quad \nu = 1,\dots,m, \quad u \in V, \end{aligned} \tag{9.208}$$

все связи в которой имеют форму дифференциальных уравнений.

Выпишем функцию

$$R = \lambda_0 R_0 + \sum_{\nu=1}^{m} R_{\text{св}\nu} = \lambda_0 f_0 + \sum_{\nu=1}^{m} (\psi_\nu f_\nu + \dot{\psi}_\nu x_\nu) + \lambda_0 F_0(x)\delta(t-\bar{t}) \tag{9.209}$$

и отметим, что переменные u (управления) ни в R_0, ни в $R_{\text{св}}$ не оказались в составе R_{0II} и $R_{\text{св}II}$. Следовательно, управления в данной задаче относятся к переменным первой группы. Параметры в задаче (9.208) отсутствуют, и условия оптимальности примут форму

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in V} R(\lambda, u, x^*), \quad \frac{\partial R}{\partial x_\nu} = 0, \quad \nu = 1,\dots,m, \tag{9.210}$$

что с учетом вида функции (9.209) эквивалентно условиям

$$\begin{aligned} &u^*(t) = \arg\max_{u \in V} H(\psi, u, x^*), \\ &\dot{\psi}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial x_\nu} = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_\nu}\delta(t-\bar{t}), \quad \nu = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{9.211}$$

Здесь функция H (функция Гамильтона) представляет собой сумму тех слагаемых в R, которые зависят от u:

$$H = \lambda_0 f_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \psi_\nu f_\nu.$$

Если учесть, что за пределами отрезка $[0,\bar{t}]$ $\psi = 0$, то из (9.211) следует, что $\psi_\nu(t)$ в точке $\bar{t}$ имеет разрыв и при $t = \bar{t}$:

$$\psi_\nu(\bar{t}) = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_\nu}, \quad \nu = 1,\dots,m. \tag{9.212}$$

Условия (9.211), (9.212), которые нужно решать совместно с дифференциальными уравнениями задачи (9.208) и краевыми условиями для x, составляют расчетные соотношения принципа максимума Понтрягина.

Использование алгоритмического подхода к получению необходимых условий оптимальности позволяет проследить, как изменятся эти условия при добавлении в задаче тех или иных ограничений. Пусть, например, к задаче (9.208) добавлено условие, связывающее друг с другом значения фазовых переменных x в момент $\bar{t}$:

$$F(x(\bar{t})) = 0. \tag{9.213}$$

В функцию R добавится слагаемое

$$\tilde{R}_{\text{св}} = \tilde{\lambda} F(x)\delta(t - \bar{t}),$$

для $t < \bar{t}$ условия оптимальности (9.211) не изменятся, при $t = \bar{t}$ значение функций ψ_ν будет теперь равно

$$\psi_\nu(\bar{t}) = \lambda_0 \frac{\partial F_0}{\partial x_\nu} + \tilde{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x_\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, m. \tag{9.214}$$

Дополнительная переменная $\tilde{\lambda}$ определяется условием (9.213).

Функция F_0 в функционале задачи (9.208) и функция F в условии (9.213) могут зависеть и от управлений. В этом случае при $t < \bar{t}$ условия принципа максимума не изменятся. Управление же $u(\bar{t})$ должно удовлетворять слабым условиям

$$\frac{\partial}{\partial u}[\lambda_0 F_0 + \tilde{\lambda} F]\delta u \leq 0,$$

так как при $t = \bar{t}$ оно оказалось переменной второй группы.

Условия оптимальности Бутковского для задачи со связями в форме интегральных уравнений [13]. Для задачи

$$I = \int_0^{\bar{t}} f_0(x, u, t)dt \to \max_{u \in V_u} \Big/ \int_0^{\bar{t}} f(x(\tau), u(\tau), t, \tau)dt - x(t) = 0 \tag{9.215}$$

обобщенная функция Лагранжа, составленная с использованием табл. 9.1 и 9.2, имеет вид

$$R = \lambda_0 f_0(x, u, t) + \int_0^{\bar{t}} \lambda(\tau) f(x(t), u(t), \tau, t)d\tau - \lambda(t)x(t);$$

к переменным первой группы относятся $u(t)$. Условия оптимальности примут форму

$$\begin{gathered}\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_0 f_0 + \int\limits_0^{\overline{t}} \lambda(\tau) f(x,u,\tau,t)d\tau\right], \\ u^* = \arg\max_{u\in V}\left[\lambda_0 f_0 + \int\limits_0^{\overline{t}} \lambda(\tau) f(x,u,\tau,t)d\tau\right].\end{gathered} \qquad (9.216)$$

В частности, в задаче управления линейным объектом с импульсной переходной функцией $k(t)$ связь между управляющим воздействием и переменной состояния x запишется в виде

$$\int\limits_0^{\overline{t}} u(\tau)k(t-\tau)d\tau - x(t) = 0.$$

Условия оптимальности (9.216) перепишутся как

$$\begin{gathered}\lambda(t) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}, \\ u^* = \arg\max_{u\in V}\left[\lambda_0 f_0 + u(t)\int\limits_0^{\overline{t}} \lambda(\tau)k(\tau - t)d\tau\right].\end{gathered} \qquad (9.217)$$

Задачи с условиями в форме неравенств и критерием типа максимина. Некоторые из условий задачи могут иметь форму неравенств. Для получения условий оптимальности по изложенной выше схеме эти неравенства могут быть переписаны в форме равенств с добавлением новых искусственно вводимых переменных. Например, неравенство

$$f(y(t),t) \geq 0 \qquad (9.218)$$

с добавлением неотрицательной переменной $z(t)$ может быть переписано как равенство

$$f(y(t),t) - z(t) = 0.$$

Соответствующее слагаемое в функции R имеет вид

$$R_{\text{св}\nu} = \lambda(t)f(y,t) - \lambda(t)z(t).$$

Переменная $z(t)$ относится ко второй группе и не входит в другие слагаемые функции R, кроме $R_{\text{св}\nu}$, поэтому условия локальной неулучшаемости R по z с учетом того, что допустимая вариация $\delta z \geq 0$, приводят к неравенствам

$$\frac{\partial R}{\partial z}\,\delta z \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial R_{\text{св}\nu}}{\partial z} \geq 0 \Rightarrow \lambda(t) \geq 0.$$

При этом $\lambda(t) = 0$, когда $z(t) > 0$, т.е. когда $f(y,t) > 0$ и $\lambda(t) > 0$, когда $f(y,t) = 0$. Мы имеем здесь полный аналог условий дополняющий нежесткости в математическом программировании.

Аналогичный прием позволяет получить условия оптимальности и для критерия типа максимина

$$I = \min_{t\in[0,\overline{t}]} f_0(y(t),t) \to \max, \tag{9.219}$$

который может быть при введении добавочного параметра a, не зависящего от t, переписан как

$$a \to \max \tag{9.220}$$

с добавлением к условиям задачи неравенства, справедливого при любом значении $t \in [0,\overline{t}]$,

$$f_0(y(t),t) - a \geq 0. \tag{9.221}$$

Критерию (9.220) и условию (9.221) в функции R соответствует слагаемое

$$\tilde{R} = \lambda_0 \frac{a}{\overline{t}} + \lambda(t) f_0 - \lambda(t) a,$$

в котором, как и для неравенства (9.218), $\lambda(t) \geq 0$, а

$$\lambda(t)[f_0(t, y^*(t)) - a^*] = 0.$$

Здесь $\lambda_0 = 1$ для невырожденного и $\lambda_0 = 0$ для вырожденного решения. Так как параметр a не входит ни в какие другие слагаемые R, кроме $\tilde{R}$, и на этот параметр не наложено ограничений, то из условия стационарности по a функционала Лагранжа L следует

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \int\limits_0^{\overline{t}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a}\, dt = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \int\limits_0^{\overline{t}} \lambda(t)\, dt. \tag{9.222}$$

9.6. Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами

Рассмотрим экстремальную задачу вида

$$\overline{f_0} = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} f_0\Big(x(t), u(t)\Big) dt \to \max_u \tag{9.223}$$

при условиях

$$\overline{f_\nu} = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} f_\nu\Big(x(t), u(t)\Big) dt = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{9.224}$$

где f_ν : $(R^{k_1} \times R^{k_2} \to R)$ $(\nu = 0, n)$ непрерывны по x, u; $u \subset V_u \in$ $\in R^{k_1}$ — измеримая функция; V_u ограничено и замкнуто; $x(t) \subset V_x \in$ $\in R^{k_2}$ — заданная измеримая функция времени, которой можно сопоставить вероятностную меру (распределение) $p(x)$. Если $x(t)$ в течение доли α_k интервала $(0, \tau)$ принимает значение x^k, то $p(x)$ содержит слагаемое вида $\alpha_k \delta(x - x^k)$. Величина τ может стремиться к бесконечности, а $x(t)$ может быть стационарным случайным процессом, имеющим плотность распределения $p(x)$ своих значений.

Распределение $p(x)$ может быть записано в форме

$$p(x) = \overline{p}(x) + \sum_k \alpha_k \delta(x - x^k). \tag{9.225}$$

Задача (9.223), (9.224), в которой отсутствует параметр $x(t)$, рассмотрена в п. 9.4. Она имеет либо единственное, либо сколь угодно много оптимальных решений. В первом случае $u^*(t)$ постоянно, во втором оптимальное решение принимает в течение доли γ_j интервала $(0, \tau)$ значение u^j. Число этих (базовых) значений не превосходит $n + 1$, а последовательность, в которой $u^*(t)$ принимает то или иное значение, роли не играет. При этом найдется такой вектор $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, что

$$u^j = \arg\max_{u \in V_u} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu(u), \quad \lambda_0 = \{0, 1\}, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{9.226}$$

Оптимальная величина вектора λ:

$$\lambda^* = \arg\min_{\lambda} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu(u^j), \tag{9.227}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu^* f_\nu(u^j) = \Lambda, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{9.228}$$

Значения γ_j определяются из условий

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j f_\nu(u^j) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0.$$

Для задачи с нестационарным параметром выделим долю интервала $(0, \tau)$, в течение которой $x(t)$ равен одному из постоянных значений x^k; эта доля равна $\alpha\tau$, где $\alpha = \sum_k \alpha_k$. Будем называть $\alpha\tau$ суммарным *интервалом постоянства* $x(t)$. Оставшуюся часть $(1-\alpha)\tau$ назовем *интервалом изменения* параметра x.

Условия оптимальности задачи (9.223), (9.224) выражает следующая

Т е о р е м а. *Пусть $u^*(t)$ — оптимальное решение. Тогда найдется такой ненулевой вектор $\lambda = \{\lambda_0, ..., \lambda_n\}$, $\quad \lambda_0 = \{0, 1\}$, что:*

— на интервале изменения параметра $x(t)$

$$u^*(x, \lambda) = \arg\max_{u \in V_u} \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu f_\nu(x, u); \tag{9.229}$$

— на суммарном интервале постоянства $x(t)$ оптимальное решение переключается между не более чем $(n+1)$-им базовым значением u^j, для каждого из которых справедливо условие

$$u^j = \arg\max_{u \in V_u} \sum_k \alpha_k \sum_{\nu=0}^{m} \lambda_\nu f_\nu(x^k, u), \quad j = 0, \ldots, n; \tag{9.230}$$

— доли γ_j участка постоянства $\alpha\tau$, в течение которых $u^*(t)$ принимает каждое из значений u^j, удовлетворяют условиям

$$\int\limits_{V_x} \overline{p}(x) f_\nu(x, u^*(x)) dx + \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sum_k \alpha_k f_\nu(x^k, u^j) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{9.231}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0; \tag{9.232}$$

— вектор множителей $\lambda_\nu (\nu = 1, n)$ определяется условиями

$$\lambda^* = \arg\min_\lambda \left[\int\limits_{V_x} \overline{p}(x) \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu(x, u^*(x, \lambda))\, dx + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \sum_k \alpha_k f_\nu(x^k, u^j(\lambda)) \right]. \tag{9.233}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С введением распределения (9.226) усреднение по времени в задаче (9.223)–(9.225) можно заменить усреднением по множеству, переписав эту задачу в форме

$$\overline{f_0} = \int\limits_{V_x} f_0(x, u) \overline{p}(x) dx + \sum_k \alpha_k \overline{f_0(x^k, u)} \to \max_{u \in V_u} \tag{9.234}$$

при условиях

$$\overline{f_\nu} = \int\limits_{V_x} f_\nu(x, u) \overline{p}(x) dx + \sum_k \alpha_k \overline{f_\nu(x^k, u)} = 0, \quad \nu = 0, \ldots, n, \tag{9.235}$$

Здесь

$$\overline{f_\nu(x^k,u)} = \frac{1}{\alpha_k \tau_0} \int\limits_0^{\alpha_k \tau} f_\nu(x^k, u(t))dt, \quad \nu = 0, \ldots, m.$$

В свою очередь задача (9.234), (9.235) может быть разбита на три подзадачи. Одна из них соответствует интервалу продолжительности $\tau(1-\alpha)$ изменения параметра, другая — интервалу продолжительностью $\alpha\tau$, когда параметр принимает одно из постоянных значений x^k, третья — задача согласования оптимальных решений первых двух.

З а д а ч а 1.

$$\overline{f_{01}} = \int\limits_{V_x} f_0(x,u)\overline{p}(x)dx \to \max_{u(x)} \tag{9.236}$$

при условиях

$$\overline{f_{\nu 1}} = \int\limits_{V_x} f_\nu(x,u)\overline{p}(x)dx = M_{\nu 1}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{9.237}$$

З а д а ч а 2.

$$\overline{f_{02}} = \frac{1}{\alpha\tau} \int\limits_0^{\alpha\tau} \sum_k \alpha_k f_0(x^k, u)dt \to \max_{u(t)} \tag{9.238}$$

при условиях

$$\overline{f_{\nu 2}} = \frac{1}{\alpha\tau} \int\limits_0^{\alpha\tau} \sum_k \alpha_k f_\nu(x^k, u)dt = M_{\nu 2}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{9.239}$$

При этом учтено, что усреднение в (9.235) может быть распространено на всю сумму по k.

З а д а ч а 3.

$$\overline{f_{01}}^*(M_1) + \overline{f_{02}}^*(M_2) \to \max \Big/ M_{\nu 1} + M_{\nu 2} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{9.240}$$

Здесь через $\overline{f_{01}}^*$ и $\overline{f_{02}}^*$ обозначены значения $\overline{f_{01}}$ и $\overline{f_{02}}$ на оптимальном решении задач 1 и 2, зависящие от значений векторов M_1 и M_2 соответственно.

Решение $u^*(x, M_1)$ задачи 1 определяется условиями (9.229) как задачи с интегральными ограничениями (см. п. 9.5). Задача 2 представляет собой усредненную задачу нелинейного программирования, и для нее из условий (9.226) вытекают условия оптимальности (9.230)–(9.232). Наконец, условия оптимальности задачи 3 приводят к равенствам

$$\frac{\partial \overline{f_{01}}^*}{\partial M_{\nu 1}} = \frac{\partial \overline{f_{02}}^*}{\partial M_{\nu 2}}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{9.241}$$

Так как производные в (9.241) представляют собой не что иное, как значения множителей Лагранжа λ_ν в задачах 1 и 2 соответственно, то из (9.241) следует, что векторы множителей Лагранжа в этих задачах, а следовательно, и в выражениях (9.229) и (9.230), равны друг другу.

Условия (9.233) следуют из того, что при любом векторе λ максимальные значения функционала Лагранжа задачи (9.234), (9.235), стоящие в квадратных скобках в (9.233), не меньше, чем максимум $\overline{f_0}$ на множестве допустимых решений, выделяемом условиями (9.235). Для $\lambda = \lambda^*$ эти значения одинаковы.

Эти результаты использованы в гл. 4 при решении задачи о максимальной средней мощности $\overline{p}$ тепловой машины, в которой рабочее тело контактирует с источником переменной температуры $T_0(t)$.

9.7. Классификация управляемых обьектов по типу оптимальных решений

Задачи оптимального управления, относящиеся к той или иной области, часто обладают некоторыми общими свойствами. Например, их критерии оптимальности или характеристики управляемого объекта одинаковы с точностью до вида некоторой функции, входящей в критерий или связывающей друг с другом переменные состояния x и управляющие воздействия u. Такой общностью обладают многие задачи механики, где критерием является минимум затрат энергии, а уравнения движения отличны друг от друга лишь видом зависимости сил сопротивления от скорости. Аналогично, в задачах необратимой термодинамики критерий — минимум необратимых потерь, а динамика процессов характеризуется типом кинетических закономерностей. Во многих экономических задачах критерием является максимум прибыли, а динамика системы определяется зависимостями потоков ресурсов от различия цен. Таких примеров множество. Во всех этих этих случаях некоторая зависимость $n(x, u, t)$ выделяет конкретную задачу из множества однотипных.

Задача, рассмотренная ниже, в некотором роде обратна по отношению к задаче оптимального управления. В последней требуется при известной характеристике управляемого объекта, а значит, при известной зависимости $n(x, u, t)$, найти решение в форме программы $u^*(t)$, синтеза $u^*(x)$ или выявить его свойства. Задача классификации состоит в нахождении класса управляемых объектов, т.е. класса зависимостей $n(x, u, t)$, для которых оптимальное решение u^* имеет заданные свойства.

Такая задача возникает, например, при исследовании «активных» объектов, поведение которых определяется решеним некоторой экстремальной задачи. Нужно выделить класс объектов, отличающихся некоторыми характерными особенностями своего поведения.

В подобной постановке задача классификации управляемых обьектов носит очень общий характер, и мало шансов, что для нее можно предложить некоторую единую схему решения. Ниже изложена последовательность решения этой задачи для одного класса управляемых систем, а затем в качестве иллюстрирующих примеров с использованием полученных соотношений решены задачи классификации обьектов по типу оптимального управления для термодинамических процессов и процессов ресурсообмена в экономике.

Схема решения задачи классификации управляемых обьектов. Пусть условие, наложенное на процесс оптимального управления, может быть записано в форме связи между управляющим воздействием $u(t)$ и переменной состояния $x(t)$ вида

$$\varphi(x, u^*) = \mathrm{const}, \tag{9.242}$$

где функция φ непрерывна и дифференцируема по совокупности аргументов, величина константы не определена, а $u(t)$ и $x(t)$ — скалярные функции.

Будем предполагать, что индивидуальность системы характеризуется функцией $n(x, u)$, а условия оптимальности имеют форму

$$F(n(x, u), x, u, n_x, n_u) = \mathrm{const}, \tag{9.243}$$

где через n_x,n_u обозначены частные производные n по соответствующим переменным.

На функцию n могут быть наложены те или иные условия, например требование вида

$$n(x, u) = 0 \qquad \text{при} \quad x = u. \tag{9.244}$$

Требуется выделить класс функций $n(x, u)$, для которых решение уравнения (9.243) удовлетворяет требованию (9.242).

Общая схема решения поставленной задачи основана на следующем утверждении.

Утверждение 1. *Решение задачи оптимального управления удовлетворяет условию* (9.242) *тогда и только тогда, когда функция* $n(x, u)$ *является решением уравнения*

$$\frac{F_x}{F_u} = \frac{\varphi_x}{\varphi_u}. \tag{9.245}$$

Действительно, из условия (9.242) следует, что

$$\varphi_x dx = -\varphi_u du,$$

а из (9.243) вытекает, что

$$F_x dx = -F_u du,$$

что приводит к равенству (9.245). Очевидно и обратное: если при выполнении условия (9.243) равенство (9.245) не имеет места, то не выполнено и условие (9.242).

Левая часть равенства (9.245) зависит от вида функции n и ее частных производных, что позволяет получить уравнение в частных производных для функции n, общее решение которого и является искомым классом зависимостей. Ниже рассмотрены примеры решения обратной задачи оптимального управления для конкретных систем, показывающие, что рассмотренный класс задач достаточно широк.

Управляемые термодинамические системы. Экстремальные задачи необратимой термодинамики обычно сводятся к тому, чтобы процессы при тех или иных ограничениях (на интенсивность, продолжительность и пр.) имели минимальную диссипацию. Последняя зависит от кинетики процесса и от способа управления им. Функция $n(x,u)$ характеризует кинетику процесса, например, законы тепло- и массопереноса, скорость химической реакции и пр. Условия вида (9.243) называют в этом случае условиями минимальной диссипации. Рассмотрим первоначально процесс теплообмена, а затем обобщим полученные результаты на более широкий класс термодинамических процессов.

Необратимый теплообмен. Процессом теплообмена минимальной диссипации (см. гл. 2) называют процесс, в котором от тела с температурой $T(t)$ и конечной теплоемкостью за заданное время отбирается заданное количество тепла и при этом прирост энтропии системы оказывается минимальным. Температура охладителя $T_0(t)$ является управляющим воздействием. Зависимость теплового потока $n(T_0,T)$ между охлаждаемым телом и охладителем от их температур T и T_0 называют законом теплообмена. Формально задача имеет вид

$$\Delta S = \int_0^\tau n(T_0,T)\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) dt \Rightarrow \min$$

при условиях

$$\int_0^\tau n(T_0,T)dt = 0,$$

$$C\frac{dT}{dt} = -n(T_0,T), \quad T(0) \to \text{fix}.$$

Здесь C — теплоемкость охлаждаемого тела.

Условие минимальной диссипации для необратимого теплообмена имеет вид (см. гл. 2)

$$\frac{T^2}{n^2(T_0,T)}\frac{\partial n}{\partial T_0} = \text{const}, \quad n(T_0,T)=0 \quad \text{при} \quad T_0=T. \tag{9.246}$$

Какого вида должен быть закон теплообмена $n(T_0,T)$, чтобы выполнялось условие (9.242) с функцией $\varphi(T_0,T)=T_0-T$? То есть для каких законов теплопереноса минимальной диссипации соответствует постоянная разность температур? Ответ на этот вопрос дает

Утверждение 2. *Условиям минимальной диссипации соответствует постоянная разность температур для тех и только тех законов теплообмена, которые могут быть представлены в форме*

$$n(T_0,T)=\frac{M(T_0-T)T^2}{1+R(T)M(T_0-T)}. \tag{9.247}$$

Действительно, введем функцию

$$m(T_0,T)=\frac{n(T_0,T)}{T^2}, \tag{9.248}$$

предполагая ее, как и $n(T_0,T)$, непрерывно дифференцируемой, и подставим в (9.246). После несложных преобразований перепишем это условие в форме

$$F=\frac{1}{m^2(T_0,T)}\frac{\partial m}{\partial T_0} = \text{const}, \quad m(T_0,T)=0 \quad \text{при} \quad T_0=T. \tag{9.249}$$

Из (9.245) с учетом вида функции $\varphi(T_0,T)$ следует, что

$$\frac{F_T}{F_{T_0}}=\frac{\varphi_T}{\varphi_{T_0}}=-1 \tag{9.250}$$

или

$$F_T+F_{T_0}=0. \tag{9.251}$$

Найдем F_T и F_{T_0}:

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{1}{m^2(T_0,T)}\frac{\partial^2 m}{\partial T_0 \partial T} - \frac{2}{m^3(T_0,T)}\frac{\partial m}{\partial T}\frac{\partial m}{\partial T_0}, \\ F_{T_0} &= \frac{1}{m^2(T_0,T)}\frac{\partial^2 m}{\partial T_0 \partial T_0} - \frac{2}{m^3(T_0,T)}\left(\frac{\partial m}{\partial T_0}\right)^2. \end{aligned} \tag{9.252}$$

После подстановки (9.252) в (9.251) получим

$$m_{T_0T}+m_{T_0T_0}=\frac{2}{m}\, m_{T_0}(m_{T_0}+m_T),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial T_0}\,(m_T + m_{T_0}) = \frac{2}{m}\, m_{T_0}(m_T + m_{T_0}). \qquad (9.253)$$

Преобразуем (9.253) следующим образом:

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial T_0}(m_{T_0} + m_T)}{m_{T_0} + m_T} = 2\,\frac{m_{T_0}}{m},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial T_0}\ln|m_{T_0} + m_T| = 2\,\frac{\partial}{\partial T_0}\ln|m|.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial T_0}\ln|\frac{m_T + m_{T_0}}{m^2}| = 0. \qquad (9.254)$$

Из (9.254) следует, что выражение, стоящее под знаком производной, является произвольной непрерывной функцией от T, т.е.

$$\ln\left|\frac{m_T + m_{T_0}}{m^2}\right| = \xi(T),$$

или

$$\frac{m_T + m_{T_0}}{m^2} = -f(T). \qquad (9.255)$$

Уравнение (9.255) решаем методом характеристик

$$\dot{T}_0 = 1, \quad \dot{T} = 1, \quad \dot{m} = -f(T)m^2.$$

Решения этих уравнений:

$$T_0(t) = t + r_1, \quad T(t) = t + r_2,$$

$$\dot{m} = -f(t + r_2)m^2 \Rightarrow \frac{1}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) = f(t + r_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(t) = \frac{1}{\int f(t + r_2)dt + c}, \qquad (9.256)$$

где с — константа, а $f(t)$ — непрерывная функция. С учетом (9.256), исключая t и заменяя dt через dT, получим общее решение в форме

$$m(T_0, T) = \frac{1}{\int f(T)dT + \mu(T_0 - T)}, \qquad (9.257)$$

где f и μ — произвольные функции. Здесь учтено, что в силу (9.256) разность $(T_0 - T)$ и произвольная функция от нее постоянны.

Будем искать функцию $\mu(T_0 - T)$ в виде

$$\mu(T_0 - T) = \frac{1}{M(T_0 - T)}.$$

В силу произвольности функций f и μ в (9.256) перепишем решение в эквивалентной форме

$$m(T_0, T) = \frac{M(T_0 - T)}{1 + R(T)M(T_0 - T)}, \tag{9.258}$$

где $R(T) = \int f(T)dT$ — дифференцируемая функция своих аргументов.

Чтобы учесть требование $m(T_0, T) = 0$ при $T_0 = T$, наложим на функцию $M(T_0 - T)$ дополнительное условие $M(0) = 0$ и с учетом (9.248) и (9.258) получим общий вид зависимости $n(T_0, T)$ в форме (9.247).

Примером может служить закон теплопереноса с коэффициентом теплопроводности, зависящем от температуры, вида

$$n(T_0, T) = \alpha T^2(T_0 - T).$$

Нетрудно показать, что для функции φ, зависящей от отношения температур T и T_0, класс законов теплопереноса, обеспечивающих минимальную диссипацию, включает ньютоновский закон, при котором поток пропорционален разности температур.

Термодинамический процесс общего вида. Задача о минимуме диссипации для термодинамического процесса со скалярной переменной состояния x имеет следующий вид:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} n(x,u)R(x,u)dt \to \min_u \tag{9.259}$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = x_0, \tag{9.260}$$

$$\int_0^{\tau} n(x,u)dt = \Delta N. \tag{9.261}$$

Здесь $\overline{\sigma}$ — производство энтропии, условие (9.260) характеризует скорость изменения интенсивной переменной системы (температуры, давления, химического потенциала), $R(x,u)$ — движущая сила процесса, $n(x,u)$ — поток. Условие (9.261) определяет среднюю интенсивность потока. Необходимые условия оптимальности задачи (9.259)–(9.261) имеют вид (см. гл. 2)

$$F = \frac{n^2(x,u)}{n_u} R_u = \text{const}. \tag{9.262}$$

Требуется найти, для каких зависимостей $n(x,u)$ в оптимальном процессе выполнено требование

$$\varphi(x,u) = \text{const},$$

где φ задана. В соответствии с (9.245) имеем условие

$$\frac{2\dfrac{n_x}{n} + \dfrac{R_{ux}}{R_u} - \dfrac{ux}{u}}{2\dfrac{n_u}{n} + \dfrac{R_{uu}}{R_u} - \dfrac{n_{uu}}{n_u}} = \frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \tag{9.263}$$

определяющее все функции n и R для заданной φ.

В микроэкономических системах аналогичным образом могут быть найдены все те законы ресурсообмена, для которых минимумуму торговых издержек соответствует постоянная разность между ценой и оценкой, или постоянное отношение этих переменных.

9.8. Некоторые способы решения задач оптимального управления

Рассмотрим возможности упрощения некоторых типов задач оптимального управления. Эти приемы использованы выше для задач оптимизации термодинамических и микроэкономических процессов.

Использование переменной состояния в качестве независимой переменной. Для многих задач оптимального управления характерно то обстоятельство, что независимая переменная t не входит явно в функцию f_0 — подынтегральное выражение критерия оптимальности — и в правые части дифференциальных уравнений f_ν ($\nu = 1,\ldots,n$). Считая для простоты, что $F_0\big(x(T)\big) = 0$, запишем постановку такой задачи как

$$I = \int_0^T f_0(x,u)dt \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \dot{x}_\nu = f_\nu(x,u), \\ \nu = 1,\ldots,n. \end{array} \tag{9.264}$$

Пусть найдется функция f_ν, для которой априори можно утверждать, что на оптимальном решении она не обращается в нуль. Для определенности будем считать, что это функция f_1. Это обстоятельство позволяет уменьшить размерность вектора переменных состояния, приняв x_1

в качестве независимой переменной. Из первого дифференциального уравнения выразим dt как

$$dt = \frac{dx_1}{f_1(x,u)}$$

и перепишем остальные уравнения задачи в форме

$$\frac{dx_\nu}{dx_1} = \frac{f_\nu(x,u)}{f_1(x,u)} = \tilde{f}_\nu(x,u), \quad \nu = 2,\ldots,n. \tag{9.265}$$

Аналогично изменится и критерий оптимальности:

$$I = \int\limits_{x_1(0)}^{x_1(T)} \frac{f_0(x,u)}{f_1(x,u)} dx_1 \to \max. \tag{9.266}$$

Если в задаче (9.264) величина T фиксирована, то к условиям трансформированной задачи добавится требование

$$\int\limits_{x_1(0)}^{x_1(T)} \frac{dx_1}{f_1(x,u)} = T. \tag{9.267}$$

Благодаря тому, что функция f_1 на интервале $[0,T]$ не обращается в нуль, правые части дифференциальных уравнений трансформированной задачи (9.265)–(9.267) непрерывны.

Прием замены независимой переменной t одной из переменных состояния можно обобщить на тот случай, когда среди функций f_ν ($\nu = 1,\ldots,n$) не найдется функции для любого $t \in [0,T]$, отличной от нуля. В этом случае можно подыскать такую функцию $y(x)$, что скорость ее изменения вдоль траектории системы уравнений задачи (9.264) не равна нулю:

$$\dot{y} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_\nu} f_\nu(x,u) = \varphi(x,u) \neq 0. \tag{9.268}$$

Если условие (9.268) выполнено, то размерность переменных состояния задачи можно уменьшить на единицу, заменив t на y и выразив одну из переменных состояния через y, при этом соответствующее дифференциальное уравнение можно исключить из системы связей. Переход к переменной состояния в качестве независимой переменной использован в гл. 2 и гл. 6 при получении условий минимальной диссипации. Подобный прием позволяет найти $u^*(x_1)$ вместо $u^*(t)$. Во многих случаях эта зависимость важнее, чем $u^*(t)$.

Сокращение размерности задачи за счет перевода части переменных состояния в разряд управлений. Пусть все переменные состояния в задаче оптимального управления можно разбить на две категории (обозначим их x_1 и x_2) так, что дифференциальные уравнения, связывающие эти переменные с управляющими воздействиями, запишутся в форме

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_1), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_2). \tag{9.269}$$

Особенность уравнений (9.269) в том, что переменные u_1 не входят в правые части уравнений для переменных x_2. Критерий оптимальности может зависеть от всех составляющих x и от u_2. Такая структура позволяет построить расширение задачи, отбросив уравнения, определяющие $\dot{x}_1$, и переведя эти составляющие вектора x в разряд управлений. Ясно, что размерность расширенной задачи уменьшится, и ее решение окажется проще. Величина $\tilde{I}$ критерия оптимальности I исходной задачи на оптимальном решении расширенной даст оценку сверху для I^*. Найдя оптимальное решение расширенной задачи x_1^*, x_2^*, u_2^*, определяют такие управления u_1^*, которые соответствуют найденному решению, т.е. удовлетворяют равенству

$$\dot{x}_1^* = f_1(x^*, u_1). \tag{9.270}$$

Если найденные управления допустимы, то решение расширенной задачи является оптимальным и для исходной, если же среди допустимых управлений нет таких, которые удовлетворяли бы равенству (9.270), то найденное решение позволяет судить о характере оптимального решения исходной задачи.

Трансформация фазового пространства для задач с неограниченным линейно входящим управлением. Рассмотрим первоначально задачу вида

$$I = \int_0^\tau f_0(x, u, z, t)dt \to \max \tag{9.271}$$

при условиях

$$\dot{x} = f_1(x, u, z, t), \tag{9.272}$$

$$\dot{z} = F(x, z)\upsilon, \tag{9.273}$$

$$u \in V_u, \quad z \in V_z, \quad x(0) = x_0, \quad F(x, z) \neq 0.$$

Здесь два типа переменных состояния (x и z) и два вида управлений (u и υ). Последнее линейно входит в уравнения (9.273) и неограниченно.

В соответствии с изложенной выше схемой замены управляющего воздействия переменной состояния с отбрасыванием соответствующих дифференциальных уравнений для решения задачи (9.271)–(9.273) может быть использована следующая процедура.

1. Отбросить условие (9.273), переходя к решению расширенной задачи (9.271), (9.272), считая u и z управляющими воздействиями.

2. По условию (9.273) найти такую функцию $\upsilon(t)$, которая реализует найденное в п. 1 решение. Так как $z(t)$ ищется в классе кусочно непрерывных функций, то $u(t)$ может содержать δ-составляющие. Если F не равна нулю, то υ определяется из (9.273) однозначно.

Рассмотренную задачу можно обобщить на значительно более широкий круг задач, в которых вместо уравнений (9.273) фигурируют уравнения

$$\dot{x} = f_1(x, u, z, t) + f_2(x, z)\upsilon. \tag{9.274}$$

Такое обобщение предложено в [23].

Сделаем замену переменных

$$y = g(x, z) \tag{9.275}$$

и подберем функцию g так, чтобы трансформировать задачу к форме (9.271)–(9.273). Чтобы найти g, запишем выражение для $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \frac{\partial g}{\partial x}\ \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial z}\ \dot{z}, \tag{9.276}$$

и подставим вместо $\dot{x}$ и $\dot{z}$ правые части уравнений (9.272) и (9.273). Теперь подберем g так, чтобы после подстановки множитель при υ оказался равным нулю:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\ f_2(x, z) + \frac{\partial g}{\partial z}\ F(x, z) = 0. \tag{9.277}$$

Полученное однородное линейное уравнение с частными производными позволяет найти $g(x, z)$. Решение его не единственно. Одним из решений является первый интеграл $g_0(x, z)$ уравнения в обыкновенных производных

$$\frac{dx}{f_2(x, z)} = \frac{dz}{F(x, z)}. \tag{9.278}$$

Общим же решением уравнения (9.277) является произвольная непрерывно дифференцируемая функция от g_0.

После того как функция преобразования g найдена, можно выразить x через y и z и подставить как в функционал (9.271), так и в уравнения связей (9.273), (9.274). Они преобразуются к виду (9.272):

$$I = \int\limits_0^T \tilde{f}_0(y, u, z, t)dt \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \dot{y} = \tilde{f}_1(y, u, z, t), \\ \dot{z} = \tilde{F}(y, z)\upsilon,\ z \in V_z,\ u \in V_u, \\ x\big(y(0), z(0)\big) = x_0. \end{array}$$

Таким образом, трансформированная задача приняла форму (9.271)–(9.273).

Метод трансформации фазового пространства может быть использован и в том случае, когда в подынтегральное выражение функционала (9.271) входит слагаемое $f_{02}(x, z)\upsilon$. В этом случае удобно увеличить размерность вектора x, введя составляющую x_0, скорость изменения которой характеризуется выражением

$$\dot{x}_0 = f_{01}(x, u, z, t) + f_{02}(x, z)v.$$

Отметим однако, что задачи, управляющие переменные в которых содержат импульсные составляющие, часто оказываются некорректными по отношению к сколь угодно малым постоянным времени, если при составлении модели в форме (9.271)–(9.273) этими малыми инерционностями пренебрегали. Их реальное наличие скачком меняет значение задачи. Оптимальное решение, полученное с учетом этих малых инерционностей, также оказывается существенно иным.

Параметризация задачи оптимального управления. В ряде случаев задачу оптимального управления удобно решать в два этапа. На первом этапе оптимальное решение находится с точностью до набора неопределенных параметров. После такого решения задача сводится к конечномерной задаче условной оптимизации относительно вектора неопределенных параметров. Введение неопределенных параметров представляет собой реализацию известного из школьной математики принципа «не знаем — обозначим», согласно которому неизвестную величину обозначают через x и по условиям задачи составляют уравнение относительно этой неизвестной. В экстремальных задачах неопределенные параметры позволяют провести декомпозицию задачи, т.е. разбиение ее на несколько подзадач, решение каждой из которых зависит от значения параметра, входящего в другие подзадачи. Так было сделано, например, при исследовании тепловых машин с источниками конечной емкости (гл. 4). В ряде случаев введение параметра позволяет найти форму оптимального решения с точностью до неизвестного параметра, как это было сделано в гл. 5 при определении идеальной рабочей линии процесса ректификации.

В любом случае на первом этапе определяют оптимальное решение вариационной задачи с точностью до неопределенных параметров. Подставляя это решение в ограничения вариационной задачи, находят уравнения связей между составляющими вектора параметров. Если число таких связей меньше, чем число неопределенных параметров, то, выражая критерий оптимальности через найденное решение, находят целевую функцию от введенных параметров. На втором этапе задача сводится к задаче нелинейного программирования относительно вектора параметров.

Список литературы

1. *Амелькин С.А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А.М., Юмагужина В.Н.* Предельные возможности тепломеханических систем. Процессы с одним источником // Известия РАН. Энергетика. – 1998. – №2.– С. 48–58.
2. *Амелькин С.А., Андресен Б., Саламон П., Цирлин А.М., Юмагужина В.Н.* Предельные возможности тепломеханических систем с несколькими источниками // Известия Академии наук. Энергетика. – 1999. – №1.– С. 31–40.
3. *Амелькин С.А., Мартинаш К., Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №4. – С. 3–25.
4. *Арнольд Л.В., Михайловский Г.А., Селиверстов В.М.* Техническая термодинамика и теплопередача. – М.: Высшая школа, 1979.
5. *Бабиевский В.Н., Морозов М.Н., Цирлин А.М.* Осредненные и вероятностные задачи оптимизации в системах управления // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №7. – С. 68–76.
6. *Балакирев В.С., Володин В.М., Цирлин А.М.* Оптимальное управление процессами химической технологии. – М.: Химия, 1978.
7. *Беляева Н.П.,Цирлин А.М.* Оптимальное управление покупкой и продажей ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. – 1998. – №4. – С. 135–143.
8. *Беме Б., Софиева Ю.Н., Цирлин А.М.* О характере установившегося режима для некоторых типов управляемых объектов // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №2. – С. 7–12.
9. *Борн М.* Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики // Развитие современной физики. – М.: Наука, 1964.
10. *Бошнякович Ф.* Техническая термодинамика. – М.: ГЭИ, 1955.
11. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972.
12. *Бродянский В.М., Фратшке В., Михалек К.* Эксергетический метод и его приложения. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
13. *Бутковский А.Г.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965.
14. *Варга Дж.* Оптимальное управление функциональными и дифференциальными уравнениями. – М.: Наука, 1977.
15. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем / Под ред. Ю.С. Попкова. – М.: Наука, 1978
16. *Волкова М.Е., Майков Г.П., Цирлин А.М.* Задачи оптимального управления с непрерывными и дискретно изменяющимися параметрами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1969 – №2. – С. 36–42.
17. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: МГУ, 1971.

18. *Гамкрелидзе Р.В.* О скользящих оптимальных режимах // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143. №6. – С. 1243–1246.

19. Численные методы условной оптимизации / Под ред. Ф. Гилла, У. Мюррея. – М.: Мир, 1977.

20. *Гленсдорф П. Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Мир, 1973.

21. *Гроот С.* Термодинамика необратимых процессов. – М.: Гос. изд. технико-теор. лит., 1956.

22. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964.

23. *Гурман В.И.* Принцип расширения в экстремальных задачах. – М.: Физматлит, 1997.

24. *Гухман А.А.* Об основаниях термодинамики. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

25. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Вычислительная математика и математическая физика. – 1965. – №3. – С. 68–87.

26. *Зангвилл У.И.* Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1966.

27. *Казаков В.А., Цирлин А.М.* Численный метод решения дискретной задачи оптимального управления // Известия РАН, сер. Техническая кибернетика. – 1993 – №2. – С. 147–152.

28. *Каплинский А.М., Пропой А.И.* О стохастическом подходе к задачам нелинейного программирования // Автоматика и телемеханика. – 1970. – №3. – С. 34–41.

29. *Карно С.* Размышление о движущей силе огня и о машинах // Второе начало термодинамики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1934.

30. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. – М.: Наука, 1973.

31. *Кротов В.Ф.* Разрывные решения вариационных задач // Изв. вузов. Математика. – 1961. – №2. – С. 51–59.

32. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.

33. *Кузнецов А.Г., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Оптимальное управление в термодинамических системах с конечной емкостью источников // Автоматика и телемеханика. – 1985. – №6. – С. 56–62.

34. *Куликовский А.В., Сурис Т.Г., Цирлин А.М.* Алгоритмы нелинейного программирования, основанные на аппроксимации функции достижимости // Автоматика и телемеханика. – 1982. – №7, – С. 91-102.

35. *Линецкий С.Б., Роднянский И.Е., Цирлин А.М.* Оптимальные циклы холодильных машин и тепловых насосов // Изв. АН СССР. Энегретика и транспорт. – 1985. – №6. – С. 42–49.

36. *Линецкий С.Б., Цирлин А.М.* Оценка термодинамического совершенства и оптимизация теплообменников // Теплоэнергетика. – 1988. – №10. – С. 87-91.

37. *Майков Г.П., Цирлин А.М.* Условия оптимальности при различных формах записи процесса управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1973. – № 5. – С. 63–71.

38. *Майков В.П., Балунов Ф.И.* Ректификация атермальных смесей. – М.: МИХМ, 1979.

39. *Малых В.Л.* Термодинамические ограничения и эффективность изотермических процессов разделения // Деп. ВИНИТИ № 2020-В87. – 1987. – С.12.

40. *Мартыновский В.С.* Циклы, схемы и характеристики теплотрансформаторов. – М.: Энергия, 1979.

41. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. – М.: Химия, 2000.

42. *Миронова В.А., Цирлин А.М.* Предельные возможности и оптимальная организация регенеративного теплообмена // Теплоэнергетика. – 1987. – № 2. – С. 32–36.

43. *Миронова В.А., Цирлин А.М., Самарин Ю.Б.* Термодинамический анализ процессов разделени газовых смесей // Химическая промышленность. – 1988. – № 8. – С. 486–490.

44. *Миронова В.А., Попов В.А., Самарин Ю.Б.* Термодинамический анализ и оптимизация процесса короткоцикловой безнагревной адсорбции // Химическая промышленность. – 1990. – № 8. – С. 30–32.

45. *Миронова В.А., Соболев В.А., Цирлин А.М.* Оптимальное управление потоками сырья и готовой продукции путем выбора цен // Автоматика и телемеханика. – № 2. – 1998.

46. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, 1971.

47. *Молочников Б.Э., Цирлин А.М.* Термодинамически-оптимальные профили концентраций в задачах изотермического необратимого массопереноса // Теор. основы хим. технологии. – 1990. – № 2. – С. 191–197.

48. *Орлов В.А., Руденко А.В.* Оптимальное управление в задачах о предельных возможностях необратимых термодинамических процессов (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 5. – С. 7–41.

49. *Орлов В.А., Розоноэр Л.И.* Оценки эффективности управляекмых термодинамических процессов на основе уравнений баланса энергии вещества и энтропии // X Всесоюзное совещание по проблемам управления. – М.: Наука, 1986.

50. *Петров А.А.* Математическая модель рыночного равновесия. – М.: Наука, 1966.

51. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1996.

52. *Поспелов И.Г.* Динамическое описание коллективного поведения на рынке // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем / Ред. А.А. Самарский, Н.Н. Моисеев, А.А. Петров. – М.: Наука, 1989.

53. *Пригожин И., Дефей Р.* Химическая термодинамика. – М.: Наука, 1966.

54. *Розоноэр Л.И., Малишевский А.В.* Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой // Всесоюзное совещание по проблемам управления. Рефераты докладов. – 1971, С. 207–209.

55. *Розоноэр Л.И.* Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход) // I-III. Автоматика и телемеханика. – 1973. – № 5. – С. 115–132; – № 6. – С. 65–79; – № 8. – С. 82–103.

56. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Об оптимальных термодинамических процессах // VIII Всес. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. – М., 1980. – С. 75–77.

57. *Розоноэр Л.И., Цирлин А.М.* Оптимальное управление термодинамическими системами // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 1. – С. 70–79; – № 2. – С. 88–101; – № 3. – С. 50–64.

58. *Розоноэр Л.И., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Использование методов оптимизации для оценки предельных возможностей абсорбционно-десорбционных циклов // Теорет. основы хим.технологии. – 1984. – № 3. – С. 362–370.

59. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.

60. *Руденко А.В., Орлов В.Н.* Предельные возможности необратимых термодинамических процессов: Обзор // Теплоэнергетика. – 1984. – № 9. – С. 68–70.

61. *Самуэльсон П.А.* Принцип максимизации в экономическом анализе // THESIS. – Зима 1993. – Т.1., вып.1 – С. 184–202.

62. *Сергеев В.М.* Пределы рациональности (термодинамический подход к теории экономического равновесия). – М.: ФАЗИС, 1999.

63. *Серпионова Е.Н.* Промышленная адсорбция газов и паров. – М.: Высшая школа, 1969.

64. *Софиев М.А.* К расчету активной тепловой изоляции // Теоретические основы химической технологии. – 1988. – № 3. – С. 150–157

65. *Сурис Т.Я., Цирлин А.М.* Алгоритмы решения задачи нелинейного программирования, основанные на аппроксимации функции достижимости // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 7. – С. 91–102.

66. *Сучков В.П., Цирлин А.М.* Задача об оптимальности в среднем и распределение нагрузок между параллельными агрегатами // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1972. – № 3. – С. 80–87.

67. *Трофимов В.В.* Геометрический анализ динамики больших экономических систем // Т. Пу «Нелинейная экономическая динамика» – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», – 2000. – С. 174–198.

68. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. Матем., Механ., Астрон. – 1959. – № 2. – С. 25–29.

69. *Хейвуд Р.* Термодинамика равновесных процессов. – М.: Мир, 1983.

70. *Цирлин А.М., Амелькин С.А., Амелькина М.А.* Модель производственной фирмы в открытой микроэкономической системе // Математическое моделирование. – 2002. – Т.14, № 4. – С. 21–34.

71. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами // Доклады РАН. – 2000. – № 2. – С. 177–179.

72. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике // Автоматика и телемеханика. – № 5. – 2001.

73. *Цирлин А.М.* Решение задач оптимального управления посредством приведения к простейшей изопериметрической задаче // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1968. – № 5. – С. 87–95.

74. *Цирлин А.М.* Решение задач оптимального управления со связями во временной и частотной области // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 6. – С. 34–42.

75. *Цирлин А.М.* Алгоритмы оптимизации, основанные на решении уравнения, включающего функцию достижимости // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 4. – С. 39–52.

76. *Цирлин А.М.* Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1974. – № 2. – С. 143–151.

77. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности периодических установившихся режимов технологических процессов // Теорет. основы хим. технологии. – 1974. – № 2. – С. 43–50.

78. *Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых обектов. – М.: Энергия, 1976.

79. *Цирлин А.М.* Об одном подходе к экстремальным задачам // Тр. VII зимней мат. школы по мат. программированию и смежным вопросам. – М.: АН СССР. – 1976. – С. 127–141.

80. *Цирлин А.М.* Вариационные методы расчета химических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978.

81. *Цирлин А.М.* Оптимизация циклических режимов и объектов с односторонними ограничениями на управления // Тр. конф. по оптимизации сложных химико-технологических систем. – Варна, 1978. – С. 340–362.

82. *Цирлин А.М.* Оптимальные циклы и циклические режимы. – М.: Энергоатомиздат, 1985.

83. *Цирлин А.М.* Оптимальное управление процессами необратимого тепло и массопереноса // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 2. – С. 81–86.

84. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности решения усредненных задач математического программирования // Доклады Академии наук. – Т.323, № 1. – 1992.

85. *Цирлин А.М.* Термодинамика экономических систем // Труды ИПС РАН. – 1994. – Т.1. – С. 64–78.

86. *Цирлин А.М.* Оптимальное управление обменом ресурсами в экономических системах // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 3. – С. 116–126.

87. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. – М.: Физматлит, 1997.

88. *Цирлин А.М., Миронова В.А., Амелькин С.А.* Процессы минимальной диссипации // Теоретические основы химической технологии. – 1997. – Т.31, №6. – С. 649–658.

89. *Цирлин А.М., Беляева Н.А.* Предельные возможности процессов теплообмена // Теплоэнергетика. – 1998. – №9. – С. 53–55

90. *Цирлин А.М.* Второй закон термодинамики и предельные возможности тепловых машин // Журнал технической физики. – 1999. – Т.69, №1. – С. 140–142.

91. *Цыпкин Я.З.* Сглаженные рандомизированные функционалы и алгоритмы в теории адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. – 1971. – №8. – С. 15–21.

92. *Шамбодаль П.* Развитие и приложение понятия энтропии. – М.: Наука, 1967.

93. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.

94. *Amelkin S.A., Tsirlin A.M.* Optimal Choice of Prices and Flows in a Complex Open Industrial System // Open Sys. & Information Dyn. 8: 169–181. – 2001.

95. *Andresen B., Berry R.S., Nitzan A., Salamon P.* Thermodynamics in finite time: I. The step-Carnot cycle // Phys. Rev.A. – 1977. – V.15, N5. – P. 2086–2093.

96. *Andresen B., Salamon P., Berry R.S.* Thermodynamics in finite time: extremals for imperfect heat engines // J. Chem. Phys. – 1977. – V.66, N4. – P. 1571–1577.

97. *Andresen B., Rubin M.H., Berry R.S.* Availability for finite-time processes. General theory and a model // The J. of Phys. Chem. – 1983. – V.87, N15.

98. *Andresen B.* Finite-time thermodynamics. – Copenhagen, 1983.

99. *Andresen B., Berry R.S., Ondrechen M.J., Salamon P.* Thermodynamics for processes in finite time // Acc. Chem. Res. – 1984. – V.17, N8. – P. 266-271.

100. *Andresen B., Salamon P., Berry R.S.* Thermodynamics in finite time // Phys. Today, September. – 1984. – N62.

101. *Andresen B., Gordon J.M.* Optimal heating and cooling strategies for heat exchanges design // J.Appl. Phys. – 1992. – N1. – P. 71-78.

102. *Ayres R.U., Nair I.* Thermodynamics and Economics // Phisics Today. – 1984. – V.37. – P. 313–325.

103. *Ayres R.U., Martinas K. A.* Non-equilibrium evolutionary economic theory // P. Burley, J. Foster (eds.) Economics and thermodynamics: new perspectives on economic analysis. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994. – P. 73–98.

104. *Ayres R.U., Martinas K.* Waste Potential Entropy: The Ultimate Ecotoxic? // Economie Appliquee. – 1995. – V. XLVIII, N2. – P. 95–120.

105. *Barrere M.* Le role du temps daus l'optimisation des cycles thermodynamiques // Revue generale de thermique. – 1980. – N228. – P. 995–1006.

106. *Bejan A.* Solutions Manual for Entropy Generation through Heat and Fluid Flow. – N.Y.: Wiley, 1984.

107. *Bejan A.* Heat Transfer. – N.Y.: Wiley, 1993.

108. *Bejan A.* Entropy generation through heat and fluid flow. – N.Y.: Wiley, 1994.

109. *Bejan A.* Theory of heat transfer – irreversible power plants II. The optimal allocation of heat exchange equipment // Int J. Heat Mass Transfer. – 1995. – V.38, N3.

110. *Bejan A.* Entropy generation minimization: the new thermodynamics of finite size devices and finite time process // J. Appl. Phys. – 1996. – V.79. – P. 1191–1218.

111. *Berry R.S., Heal G., Salamon P.* On a relation between economic and thermodynamic optima // Resources and Energy. – 1978. – N1. – P. 125–137.

112. *Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamic constraints in economic analisis // Sef- organization and dissipative structures: Applications in the physical and social sciences / Eds W.C. Schieve, P.M. Allen. – Austin: Texas, University of Texas Press, 1982.

113. *Berry R.S. Foreword for S. Sieniutycz, P. Salamon* (eds.) Finite-Time Thermodynamics and Thermoeconomics // Advances in thermodynamics. V.4. – N.Y. Taylor & Francis. – 1990. – P. 24–243.

114. *Berry R.S., Kasakov V.A., Sieniutycz S., Szwast Z. and Tsirlin A.M.* Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes. – Chichester: Wiley, 1999.

115. *Brody A., Martinas K., Sajo K.* Essay on Macroecomomics // Acta Oeconomica. – 1985. – V.35, N.3–4. – P. 337-343.

116. *Brody A.* The Use of Thermodynamic Models in Economics. In P. Burley, J. Foster (eds.) Economics and Thermodynamics: new perspectives on economic analysis. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.

117. *Bryant J. A* Thermodynamic approach to economics // Energy Economics. – V.4. – 1982. – P. 36–50.

118. *Caratheodory C.* Untersuchungen uber die Grundlagen der Thermodynamik // Math. Annalen. – N67. – 1909. – P. 355–386.

119. *Chen J., Yan Z., Lin G. and Andresen B.* On the Curzon-Ahlborn efficiency and its connection with the efficiencies of real heat engines // Energy Convers. Mgnt. – 2001. – V.42. – P. 173–181.

120. *Chen L., Wu C. and Sun F.* Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems // J. Non-Equilib. Thermodyn. – 1999. – V.24. – P. 327–359.

121. *Curzon F.L., Ahlburn B.* Efficiency of a Carnot engine at maximum power output // Amer.J. Physics. – 1975. – V.43. – P. 22–24

122. *De Vos A.* Endoreversible thermoeconomics // Energy Conversion Management. – 1995. – V.36, N.1. – P. 1–5.

123. *De.Vos A.* Endoreversible Economics // Energy Conversion nagement. – 1997. – V.38, N.4. – P. 311–317.

124. *Dyke C.* From entropy to economy a thorny path // Advances in Human Ecology. – 1992. – V.1. – P. 149–176.

125. *Fromovitz St.* Non-Linear programming with randomisation // Management Sci. – Ser. A.– V.11, N9. – 1965.

126. *Georgescu-Roegen N.* The Entropy Law and the Economic Process. – Cambridge: Harvard University Press, 1971.

127. *Goktun S., Oznkaynak S., Yavuz H.* Design parameters of a radiative heat engine // Energy. – 1993. – V.18, N6.

128. *Gyftopoulos E.P., Beretta G.P.* New Developments in Thermodynamics // Published in the Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers. – 1993. – N96. – P. 892.

129. *Hoffman K.H., Watowich S.J. and Berry R.S.* // J. Appl. Phys. – 1985. – N58. – P. 2125.

130. *Holyst J. A., Urbanowicz K.* Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // Physica A. – 2000. – V.287, N.3–4. – P. 587–598.

131. *Hurwicz L., Richter M.* An Integrability Condition with Applications to Utility Theory and Thermodynamics // Journal of Mathematical Economics. – 1979. – V.6. – P. 7–14.

132. *Ibrahim O.M., Klein S.A., Mitchell J.W.* Effects of Irreversibility and Economics on the Performance of a Heat Engine // Journal of Solar Energy Engineering. – 1992. – V.141. – P. 267–271.

133. *Ingber L.* Statistical mechanics of nonlinear nonequilibrium financial markets // Mathematical Modelling. – 1984. – V.5. – P. 343–361.

134. *Ingber L.* Statistical mechanics of nonlinear nonequilibrium financial markets: Applications to optimized trading // Mathl. Computer Modelling. – 1996. – V.23. – P. 101–121.

135. *Kiang R.L., Wu C.* // Int.J.Power Energy Systems. – 1994. – N14. – P. 68.

136. *Krane R.J.* A second law analysis of the optimum design and operation of thermal energy storage systems // Int. J. Heat Mass Transfer. – V.30, N1. – 1987.

137. *Landsberg P.T. and Left H.S.* Thermodynamic cycles with nearly universal maximum-work efficiencies // J. Phys. A: Math. Gen. 22

138. *Lee W.Y., Kim S.S.* // Energy. – 1992. – N17. – P. 275.

139. *Leff H.S.* Thermal efficiency at maximum work output: New results for old heat engines // Am. J. Phys. – 1987. – V.55. – P. 602–610.

140. *Lichnerowicz M.* Un modele dechange economique (economie et thermodynamique) // Annales de l'Institut Henri Poincare. – 1970. – N2.

141. *Lichnerowicz M., Lichnerowicz A.* Economie et Thermodynamique: Un Modele dechange economique // Economies et Societes. – 1971. – V.5.

142. *Long N.V., Siebert H.* Lay-off Restraints, Employment Subsidies, and the Demand of Labor // Optimal Control Theory and Economic Analysis. V.2. / Ed. G. Feichtinger. – Amsterdam, 1985.

143. *Lukacs J.* Once more about economic entropy // Acta Oeconomica. – 1989. – V.41, N1–2. – P. 181–192.

144. *Mantegna R.N., Palagyi Z., Stanley H.E.* Aplications of statistical mechanics to finance // Physica A. – 1999. – V.274. – P. 216–221.

145. *Martinas K.* Irreversible Microeconomics, Intern. – Leiden: Onsager-Workshop, 2000. – P. 147–152.

146. *Martinas K.* About Irreversibility in Microeconomics. // Reserch Report (AHFT-89-1). Department of Low Temperature Phisics. – Budapest: Roland Eotvos University, 1989.

147. *Martinas K.* Irreversible microeconomics // K. Martinas, M. Moreau (eds.) Complex Systems in Natural and Economic Sciences. – Matrafured, 1995.

148. *Mironova V., Tsirlin A., Kazakov V., Berry R.S.* Finite-time thermodynamics: Exergy and optimization of time-constrained processes // J.Appl. Phys. – 1994. – N76. – P. 629.

149. *Mirowski P.* More Heat than Light. Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics. Historical perspectives on modern economics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

150. *Mozurkewicz M. and Berry R.S.* Optimization of a heat engine based on a dissipative system // J.Appl. Phys. – 1983. – V.54, N7. – P. 3651–3661.

151. *Naka Y.,Terashita M.* An intermediate heating and cooling method for a distillation column // J. of Chem. Eng. of Japan. – V.11. – N2. – 1980.

152. *Novikov I.I.* The efficiency of atomic power stations // At. Energ. 3 (11), 409 (1957); English translation in J. Nuclear Energy II 7. P. 25–128. – 1958. – N2. – 2002.

153. *Novikov I.I.* // J. Nucl. Energy. – 1958. – N7. – P. 125.

154. *Ondrechen M.J., Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamics in finite time: A chemically driven engine // J.Chem. Phys. – 1980. – V.72, N9. – P. 5118–5124.

155. *Ondrechen M.J., Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamics in finite time: Processes with temperature-dependent chemical reactions // J.Chem. Phys. – 1980. – V.73, N11. – P. 5838–5843.

156. *Ondrechen M.J., Andresen B., Mozurkewich M., Berry R.S.* Maximum work from a finite reservoir by sequential Carnot cycles // Am.J. Phys. – 1981. – N49. – P. 681.

157. *Orlov V.N.* Analytical solutions in optimal control of cyclic heat transfer processes // Systems Science. – 1989. – V.15. – N1.

158. *Orlov V.N. and Berry R.S.* Power output from an irreversible heat engine with a nonuniform working fluid // Phys.Rev.A. – 1990. – N12. – P. 7230.

159. *Pathria R.K., Nulton J.D., Salamon P.* Carnot-like processes in finite time. II. Applications to model cycles.

160. *Proops J.L.R.* Organization and dissipation in economic systems // Journal of Social and Biological Structures. – 1983. – V.6. – P. 353–366.

161. *Rubin M.H.* Optimal configuration of a class of irreversible heat engines. c. I, II // Phys. Rev.A. – 1970. – V.19, N3. – P. 1272.

162. *Salamon P., Hoffman K.H., Schubert S., Berry R.S., Andresen B.* What conditions make minimum entropy production equivalent to maximum power production? // J. Non-Equibri. Thermodyn. – 2001. – N26.

163. *Salamon P., Nulton J.D., Siragusa G., Andresen T.R. and Limon A.* Principles of control thermodynamics // Energy, The Int. J. – 2001. – N26.

164. *Salamon P., Nitzan A., Andresen B. and Berry R.S.* Minimum entropy production and the optimization of heat engines // Phys. Rev. – 1980. – A21. – P. 2115-2129.

165. *Salamon P. and Nitzan A.* Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle // J.Chem. Phys. – 1981. – V.74, N6. – P. 3546–3560.

166. *Salamon P., Band Y.B., Kafri O.* Maximum power from a cycling working fluid // J. Appl. Phys. – 1982. – V.53, N1.

167. *Salamon P.* Physics versus engineering of finite-time thermodynamic models and optimizations // Thermodynamic Optimization of Complex Energy Systems / Eds: A. Bejan, E. Mamut. – Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, – 1999. – P. 421–424.

168. *Samuelson P.A.* Maximum Principle in Analytical Economics // The Am. Econ. Rev. – 1972. – V.B2. – P. 249–262.

169. *Shambadal P.* Les Centrales Nuclearis. – Paris: Armand Colin, 1957.

170. Finite-Time Thermodynamics and Thermoeconomics // Eds. Sieniutycz S. and Salamon P. Taylor & Francis, 1990.

171. Sieniutycz S.,Berry R.S., Thrmal Mass and Thermasl Inteeria in Fluids—A Comparison of Hypoheses // Open systemm & information dynamics. – 1977. – V4, N1.

172. *Spirke W., Ries H.* Optimal finite-fime endoreversible processes // Physical rev. E. – 1995. – V.52, N4. – P. 3455–3459.

173. *Tolman R.C., Fine P.C.* On the Irreverseible Production of Entropy // Rev. of modern Phys. – 1948. – V.20, N1. – P. 51–77.

174. *Tsirlin A.M., Kazakov V.* Maximal work problem in finite-time thermodynamics // Phys. Rev. E. – 2000. – N1.

175. *Tsirlin A.M., Amelkin S.A.* Dissipation and Conditions of Equilibrium for an Open Microeconomic System // Open Sys. & Information Dyn. – 2001. – N8. – P. 157–168.

176. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: I. Thermodynamics // Open Sys. & Information Dyn. – 2001. – N8. – P. 315–328.

177. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: II. Microeconomics // Open Sys. & Information Dyn. – 2001. – N8. – P. 329–347.

178. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A., Berry R.S.* Finite-time thermodinamics: limiting performance of rectification and minimal entropy production in mass transfer // J. of Ph.Chem. – 1994. – N98. – P. 3330–3336.

179. *Tsirlin A.M., Mironova V.A., Amelkin S.A., Kazakov V.A.* Finite-time thermodynamics: Conditions of minimal dissipation for thermodynamic process with given rate // Physical Review. E. – 1998. – V.58, N1.

180. *Tsirlin A.M., Sofiev M.A., Kazakov V.* Finite-time thermodynamics. Active potentiostatting // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1998. – N31. – P. 2264–2268.

181. *Ville J.* The Existence Conditions of a Total Utility Function // Rev. Economics Studies. – 1951. – V.19. – P. 123–128.

182. *Von Neumann J. A* Model of General Economic Equilibrium // Review of Economic Studies. – 1945. – V.3. – P. 1–9.

183. *Yan Z., Chen J.* // Int.J. Energy Environment Economics. – 1992. – N2. – P. 63.

Оглавление

A.M. TSIRLIN

OPTIMIZATION METHODS IN THERMODYNAMICS AND MICROECONOMICS

PHYSICS AND MATHEMATICS PUBLISHERS
International Academic Publishing Company «Nauka»
Russian Academy of Sciences

Moscow, 2002, 416 pages

Author. Professor Anatolii Michailovich Tsirlin, head of the Research Center of System Analysis in the Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences. He published more than a hundred publications on the theory and application of optimization and optimal control, including more than 10 monographs (the latest are S.Berri, V.Kazakov, S. Sieniutycz, Z.Szwast, A.Tsirlin "Thermodynamic optimization of finite-time processes", Wiley, 1998; A. Tsirlin "Methods of averaged optimization and their applications" Moscow, Nauka, Fuzmatlit, 1997; V.Mironova, S. Amelkin, A.Tsirlin "Mathematical methods of finite time thermodynamics", Moscow, Chimia, 2000).

Abstract. A number of systems, which consist of a large number of elements, can be only controlled on a macro level. In particular, thermodynamic and microeconomic systems can only be macro controlled. This monograph is devoted to investigation of the limiting possibilities of these two classes of systems.

Minimal dissipation processes are considered in this book. These processes allow us to find lower estimates for entropy production subject to given rates of fluxes. In turn, these estimates together with thermodynamic balances allow us to single out realizability areas for thermodynamic systems, which are much sharper than the ones singled out by the first and second laws of thermodynamics. Limiting possibilities of thermomechanical systems, separation systems and some other systems are considered here.

The analogy between thermodynamic and microeconomic systems is considered. The economic analog of entropy is introduced, which characterizes the irreversibility factor in microeconomics. The rate of its increase (capital dissipation) is used in the microeconomic balance equations. The resource exchange processes and production processes, for which capital dissipation is minimal, define the limiting possibilities of microeconomic systems and their realizability areas. Extremal principles that determine equilibrium in close and open microeconomic systems are formulated.