А.М. Цирлин

Оптимизационная термодинамика экономических систем

НАУЧНЫЙ МИР

А.М. Цирлин Оптимизационная термодинамика экономических систем

ЦИРЛИН А.М.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Москва
Научный мир
2011

УДК 519.7
ББК 22.18
Ц70

Ц70 **Цирлин А.М.** Оптимизационная термодинамика экономических систем. — М.: Научный мир, 2011. — 200 с.
ISBN 978-5-91522-276-1

В книге рассмотрены математические модели необратимых процессов обмена ресурсами в открытых и изолированных экономических системах, выделены общие свойства и различия термодинамических систем физической и экономической природы. Введена количественная характеристика необратимости процессов в микроэкономике. Сформулированы и решены задачи об эффективном извлечении капитала в неравновесных системах, содержащих управляющую подсистему (посредника), а также задачи о минимизации затрат внешних ресурсов для поддержания в системе неравновесного состояния. Рассмотрены оптимальные процессы и предельные возможности управляющей подсистемы, экстремальный принцип, определяющий стационарное состояние в открытых системах. Предназначена для студентов и научных работников, занимающихся вопросами моделирования и оптимизации экономических систем.

Илл. 24 Библ. 110

Публикуется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-06-07004д)

This book is devoted to the mathematical modeling of irreversible economic exchange in open and closed economic systems. The major similarities and major differences between irreversible processes in economic systems and in traditional physical thermodynamic systems are considered. Economic entropy, an extension of the classic quantitative measure of irreversibility for economic systems, is constructed. It is then used to find the most efficient exchange regime in a non-equilibrium economic system that includes an economic intermediary. The problem of minimizing the cost of maintaining a system in a non-equilibrium state is also formulated and solved. The optimal processes and limiting possibilities of an economic agent are then found. The book is written for students and researchers who are interested in modeling and optimization of economic systems.

ISBN 978-5-91522-276-1

Посвящается светлой памяти
Надежды Цирлиной

Введение

Аналогия между термодинамическими и экономическими системами очевидна, что и объясняет большое число исследований, в которых эта аналогия прослеживалась. Основа такой аналогии в том, что как термодинамические, так и экономико-социальные системы состоят из большого числа элементарных частиц (молекул, элементарных субъектов экономики или социального поведения). Эти элементы систем не управляются и их поведение характеризуется только статистическими показателями. Иными словами, все упомянутые системы являются макросистемами.

Однако термодинамическое описание экономических и социальных процессов очень далеко от той степени законченности, до которой доведено аналогичное описание систем физической природы. Причин этому много, и прежде всего та, что стохастическое поведение каждого элемента в таких системах значительно сложнее, чем поведение молекулы вещества. В экономических системах нет такой базы, какой для систем физической природы является статистическая физика.

Общая методология феноменологической термодинамики может быть с пользой применена и для экономических систем с учетом наблюдаемых особенностей их поведения. Прежде всего — принципа добровольности, вследствие которого одна экономическая система не обменивается ресурсом с другой без компенсации этого обмена.

Главной особенностью макросистем является необратимость протекающих в них процессов, и эту необратимость нужно охарактеризовать количественно. Энтропия, как характеристика необратимости, является базовой характеристикой термодинамических систем физической природы, ее использование позволяет составлять уравнения энтропийного баланса столь же важных, как и уравнения материального и энергетического баланса. Аналогичные показатели требуется ввести и доказать их существование для систем экономической природы.

В последние тридцать лет в необратимой термодинамике было развито направление, которое с использованием методов оптимизации и оптимального управления изучало предельные возможности термодинамических систем, таких, как предельная производительность или предельный коэффициент эффективности при заданной производительности и некоторых естественных ограничениях. В более общем случае учет необратимости позволяет построить для термодинамической системы множество реализуемых режимов. Это направление называют «Термодинамикой при конечном времени» или «Оптимизационной термодинамикой». В книге сделана попытка построить термодинамическое описание экономических систем и использовать его для решения задач, аналогичных задачам оптимизационной термодинамики.

Исследования в области оптимизационной термодинамики после появления работ И.И. Новикова и Курзона–Альборна по термодинамическому циклу тепловой машины с максимальной мощностью были продолжены в разных странах мира. Следует назвать Р.С. Берри, П. Саламона, А. Бежана (США), Б. Андресена (Дания), К.-Х. Хоффмана (Германия), С. Синютича (Польша), Л. Чена (Китай) и др. Были получены новые результаты для широкого круга термодинамических систем при конечной продолжительности или при заданной интенсивности протекающих в них процессов.

Макросистемный подход к процессам нефизической природы, изучению их равновесия, взаимодействия с окружением с позиций равновесной термодинамики связан с именами Дж. Фон-Неймана, П.А. Самуэльсона, М. Лихнеровича, Ф.Дж. Вильсона, М. Море и др. Хотелось бы отметить К. Мартинаш, неустанно подчеркивающую в своих работах важность учета фактора необратимости экономических процессов.

В СССР, а затем в России в области оптимизации макросистем много сделали А.В. Малишевский, Ю.С. Попков, В.А. Миронова, В.А. Орлов и др. Особенно велика в развитии оптимизационной термодинамики и макросистемного подхода к экономике роль Л.И. Розоноэра, который со свойственной ему ясностью сформулировал проблему исследования предельных возможностей макросистем как задачу оптимального управления и получил в этом направлении основополагающие результаты.

Глава 1

Задачи оптимизации макросистем

Рассмотрены общие особенности макросистем, постановки и методология решения экстремальных задач в таких системах.

1.1. Общие особенности макросистем

Элементарные субъекты экономики, предприниматели, домашние хозяйства и пр., руководствуясь своими, часто неформализуемыми интересами, вступают между собой в контакты, обмениваются ресурсами и деньгами, производят те или иные товары. При этом они соблюдают одинаковые для всех правила, которые формируются сообществом в целом. Управление экономической деятельностью возможно посредством изменения этих общих правил, а не путем управления деятельностью каждого элементарного субъекта. Иногда политических деятелей охватывает желание управлять на элементарном уровне путем создания трудовых армий, лагерей и пр. Однако эти попытки, к счастью, всегда оканчивались крахом. Управлять каждым элементарным субъектом экономики нельзя, как нельзя управлять каждой молекулой газа или жидкости.

Системы, состоящие из большого числа элементов, поведение каждого из которых неуправляемо, называют *макросистемами*. Классическими и наиболее изученными системами такого рода являются термодинамические. Элементами этих систем являются молекулы веществ, составляющих систему. Управлять и контролировать состояние каждой молекулы на микроуровне невозможно, но на макроуровне термодинамические системы (тепловые и холодильные машины, системы разделения газов и жидкостей, процессы, протекающие в химических реакторах и др.) управляемы и подчиняются вполне определенным закономерностям. Эти закономерности могут быть получены на базе математического описания поведения отдельных элементов с последующим усреднением или на базе непосредственного изучения поведения системы на макроуровне с использованием эксперимента. Первый подход характерен для статистической физики, второй — для феноменологической термодинамики.

Результаты исследования термодинамических систем привели к появлению новых представлений и понятий, таких как необратимость и энтропия, позволили выяснить, чем принципиально отличаются процессы в термодинамических системах от процессов в системах механических. Все это побудило исследователей применить термодинамическое описание к широкому классу макросистем, таких как экономические, социальные и пр. При этом макросистемы каждого типа имеют свои особенности, порой весьма существенные. Однако для всех них характерно наличие протекающих самопроизвольно, «естественных», процессов, порожденных поведением большого числа микроэлементов системы.

Так, теплота переходит от подсистемы с высокой к подсистеме с низкой температурой, товары движутся от рынков, на которых их стоимость низка, к рынкам с высокими ценами, потоки миграции направлены из стран и регионов с низким уровнем жизни и безопасности в страны, где этот уровень выше и пр. Часто именно наличие такого самопроизвольного потока приводит к выбору порождающей его переменной. В статистической физике температуру определяют через среднюю энергию движущихся молекул. В феноменологической термодинамике температура в 100^0C соответствует показанию термометра в равновесии с кипящей водой при номинальном давлении. Аналогичный параметр, характеризующий условия жизни граждан той или иной страны (условно назовем его благосостоянием), можно было бы выразить через благосостояние гаждан некоторой номинальной страны. В Европейском Союзе можно сравнить благосостояние жителей, анализируя потоки мигрантов. Это, конечно, не столь ясно и определенно, как температура, но Берлинская стена была стеной только для жителей социалистической Германии, и кладбище жертв пограничной охраны, пытавшихся ее преодолеть, неопровержимо свидетельствует о том, с какой стороны стены показатель благосостояния был выше.

Термин «необратимость» очень точно характеризует связь этих самопроизвольных процессов с направлением «стрелы времени». Действительно, если изменить направление времени в процессе движения, например автомобиля, то мы увидим автомобиль, движущийся назад, что представляет собой вполне естественный процесс. Глядя на кинофильм, где такой автомобиль показан, мы не можем сказать, протекает ли процесс в прямом или в обратном времени. Однако если мы обратим внимание на движение газов, выходящих из выхлопной трубы, то их «неестественное» движение, направленное внутрь трубы, показывает, что кадры прокручивают в обратном времени. Столь же «неестественна» продажа товаров по ценам меньшим, чем их себестоимость, миграция населения из Южной Кореи в Северную и пр.

Необратимость процессов в макросистемах является следствием стохастического поведения элементов системы на микроуровне. Введение количественного показателя необратимости и выявление его связи с другими свойствами систем является центральным моментом их исследования. Подобный подход получил название термодинамического.

В книге изложено термодинамическое описание систем экономической природы и результаты использования методов оптимизации к исследованию возможностей подобных систем. При этом мы будем сопоставлять экономические системы с простейшими макросистемами физической природы для пояснения общей методологии их исследования.

В течение многих лет объектом приложения термодинамических методов были равновесные состояния систем, влияние на эти состояния внешних условий и начальных данных. Переходными состояниями равновесная термодинамика не интересовалась или предполагала процессы столь медленными, что каждое промежуточное состояние можно было считать равновесным. Термодинамика неравновесных процессов рассматривает процессы с потоками обмена ненулевой интенсивности, что, в частности, позволило исследовать открытые системы, непрерывно обменивающиеся с окружающей средой. В таких системах могут существовать установившиеся режимы, отличные от стационарных, возникать пространственные структуры (самоорганизация) и пр.

Оптимизационная ветвь термодинамики неравновесных процессов *(оптимизационная термодинамика)* формулирует и решает задачи об оптимальной организации управляемых термодинамических процессов и о предельных возможностях систем с заданной средней интенсивностью потоков.

1.2. Экономическая аналогия равновесного обмена

Продемонстрируем на простом примере аналогию в поведении систем различной природы с использованием подхода равновесной феноменологической термодинамики.

1. Тепловой контакт двух тел. Рассмотрим тепловой контакт двух изолированных от окружения тел с различными начальными температурами. Назовем одно из них «горячим», а другое «холодным».

Первый наблюдаемый факт: при установлении контакта температура горячего тела понижается, а холодного возрастает, теплота переходит от горячего тела к холодному до тех пор пока, не установится некоторая общая для них обоих температура T^0. Закон сохранения энергии (первый закон термодинамики) позволяет найти эту установившуюся температуру, хотя из него вовсе не следует, что такая общая температура установится, так как он не определяет направление потока теплоты.

Второй наблюдаемый факт: реализовать обратный процесс, чтобы вернуть систему в исходное состояние, разорвав контакт между телами, отобрав энергию от холодного тела и передав его горячему, невозможно без того, чтобы не внести те или иные изменения в состояние окружающей среды. Действительно, для такой операции придется использовать тепловой насос (устройство, отбирающее теплоту от холодного и передающее ее горячему телу). Он подобно водяному насосу требует для своего привода затрат внешней энергии.

Таким образом, процесс прямого теплообмена необратим. Для того чтобы охарактеризовать необратимость, приходится привлечь второй закон термодинамики. Он позволяет найти ту минимально-возможную работу A^0, которую требуется затратить в обратном процессе, и зависимость этой работы от начальных температур тел и от температуры окружающей среды.

В прямом процессе теплообмена суммарная энергия двух тел не изменяется. Необходимость затраты внешней работы в обратном процессе связана не с потерей, а с рассеянием (диссипацией) энергии в процессе прямого теплообмена. В обратном процессе «термического разделения» энергия передается разделяемой системе в форме работы A^0, а окружающая среда получает то же количество энергии в форме теплоты. Величина A^0 и определяет необратимость процесса.

Работу, необходимую для «термического разделения», A^*, можно уменьшить, введя в систему двух тел с различной температурой «посредника». В нашем примере таким «посредником» является идеальная тепловая машина. В этом случае в прямом процессе обмен теплотой происходит не непосредственно, а через тепловую машину. Если на продолжительность процесса не наложено ограничений, то тепловая машина сколь угодно медленно охлаждает горячее тело до некоторой заранее рассчитанной температуры $\overline{T}$, извлекая и запасая механическую энергию. Затем часть запасенной энергии машина передает холодному телу, нагревая его до той же температуры $\overline{T}$. Температура $\overline{T}$ ниже, чем T^0, она зависит от начальных температур и теплоемкостей тел (подробнее об этом в [32]). Если все процессы квазиравновесные (протекают сколь угодно медленно), то остатка энергии, запасенного тепловой машиной, достаточно для того, чтобы возвратить систему в исходное состояние. Таким образом, процесс в системе, содержащей идеального «посредника», оказывается обратимым.

2. Контакт двух экономических агентов (ЭА). Рассмотрим систему двух рынков, первоначально изолированных друг от друга. Цены некоторого ресурса на этих рынках различны. При наличии контакта между ними происходит обмен ресурсами, причем эти ресурсы перемещаются на тот рынок, для которого первоначальная цена их оказалась выше. Поток ресурса сопряжен со встречным потоком капитала. В результате обмена на рынках установятся одинаковые цены. Законы сохранения в такой системе справедливы для общего количества ресурса и для капитала, но они отнюдь не определяют направление их перемещения.

Если требуется вернуть систему в исходное состояние по запасам ресурсов, то потребуется разделить рынки, закупить ресурс на том из них, куда он перешел (где цены были выше) и продать тому, у которого они были ниже. Такую операцию может проделать «экономический насос», однако при этом он затратит капитал, взятый извне. Общее количество капитала в системе возрастет на величину этих затрат. Таким образом, процесс прямого ресурсообмена между ЭА необратим. Минимальная величина добавочного капитала, внесенного в систему при «ценовом разделении» и восстановлении исходного распределения ресурса, может служить мерой необратимости прямого ресурсообмена.

Подобно термодинамическим системам процесс ресурсообмена может быть сделан обратимым, если обмен производится не при прямом контакте подсистем, а через посредника, который покупает ресурсы на «дешевом», а продает их на «дорогом» рынке, извлекая и запасая прибыль. В системе установятся общие одинаковые для обоих рынков цены на ресурсы. Ниже показано, что эти цены будут выше, чем при прямом ресурсообмене. Посредник может вернуть систему в исходное состояние, затратив прибыль, извлеченную им в прямом процессе.

Эти и другие примеры будут рассмотрены ниже на количественном уровне. Сейчас подчеркнем особенности, характерные для всех макросистем:

— из неравновесной системы может быть извлечен некоторый базисный ресурс (работа, капитал ...);

— для такого извлечения необходим посредник;

— процесс выравнивания параметров системы с посредником и без него приводит к разным состояниям равновесия;

— в идеальном случае система с посредником может быть возвращена в исходное состояние за счет запаса базисного ресурса, извлеченного им в прямом процессе, а для системы без посредника (с прямым контактом подсистем) этого сделать нельзя без изменений в окружающей среде;

— эти изменения могут служить количественной характеристикой необратимости процесса, протекающего при прямом контакте макросистем.

1.3. Методология оптимизационной термодинамики

Чтобы подчеркнуть отличие оптимизационной термодинамики от равновесной, продолжим пример контакта двух тел с различной начальной температурой. Пусть продолжительность процесса возврата двух тел в исходное неравновесное состояние («термического разделения») ограничена и равна τ. Это ограничение повлияет на возможности системы. Возникают несколько задач:

Какова работа $A^*(\tau)$, необходимая для «термического разделения» системы?

Очевидно, она будет зависеть не только от продолжительности, но и от законов теплообмена, от протекания во времени процессов нагрева одного и охлаждения другого тела, от характеристик теплового насоса. Всякое добавочное ограничение, в том числе и ограничение на продолжительность, ведет к увеличению потребных затрат энергии.

Как должен быть организован процесс, чтобы эти дополнительные затраты были минимальны?

Подобная постановка приводит к необходимости решения задачи оптимального управления. Отсюда и термин «оптимизационная термодинамика», введенный Л.И. Розоноэром и В.Н. Орловым. Часто это направление исследований называют «термодинамикой при конечном времени», однако приведенные ниже задачи далеко не всегда связаны с ограничением продолжительности процессов. Поэтому мы будем в дальнейшем использовать термин «оптимизационная термодинамика».

Для задач оптимизационной термодинамики в той или иной форме характерна фиксация интенсивности потоков обмена веществом, энергией, ресурсами, капиталом и пр. В ряде случаев эта интенсивность может быть задана в среднем. Чтобы количественно исследовать системы с учетом интенсивности протекающих в них потоков, надо ввести в рассмотрение кинетику протекающих в них процессов.

Одним из важнейших объектов исследований в термодинамике для систем физической природы служит тепловая машина, поэтому остановимся подробнее на особенностях анализа ее возможностей методами оптимизационной термодинамики.

Задача Карно и ее обобщение

В «Размышлениях о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», вышедших в 1824 г., Сади Карно писал: «Часто поднимали вопрос: ограничена или бесконечна движущая сила тепла, существует ли определенная граница для возможностей улучшений, граница, которую природа вещей не может перешагнуть каким бы то ни было способом?». Карно показал, что такая граница существует, и получил предельное значение коэффициента превращения теплоты, отобранной у высокотемпературного источника, в работу. Результат, полученный Карно, стал основополагающим для развития термодинамики и теплотехники.

Карно построил упрощенную математическую модель тепловой машины, поставил задачу о максимуме ее термического КПД, т.е. о максимуме отношения полученной работы к затраченному теплу и нашел решение этой экстремальной задачи. Строгой математической постановки в его работе не было, так как ему был неизвестен закон сохранения энергии, а при решении он опирался на представление о тепле как об особого рода жидкости — теплороде. Тем замечательнее, что Карно удалось найти правильное решение. При этом оказалось, что в идеальной тепловой машине процессы передачи теплоты от одного тела к другому должны протекать со сколь угодно малой интенсивностью, при стремящейся к нулю разности температур, а значит, потоки теплоты и мощность машины Карно должны быть сколь угодно близкими к нулю. Отметим, что если бы Карно ставил задачу о максимуме КПД строго, считая искомой переменной и продолжительность цикла, то ему было бы нелегко ее решить, поскольку максимума в этой задаче нет, ее решение достигается лишь в пределе при продолжительности цикла, стремящейся к бесконечности. Иначе говоря, полученный им результат есть точная верхняя грань (супремум) для коэффициента полезного действия.

Пусть термодинамический процесс в системе заключается в преобразовании некоторого вида энергии, например тепловой, в работу. Если процесс обратим, то полученная работа достаточна для возврата системы в исходное состояние, если необратим, то недостаточна, и требуется подвод дополнительной энергии извне. Та дополнительная внешняя энергия, которая требуется при этом, может служить мерой необратимости, а тот факт, что работа, полученная в обратимом процессе, больше, чем в процессе необратимом, составляет содержание одного из центральных положений равновесной термодинамики — теоремы о максимальной работе [8].

Введение в задачу о предельных возможностях тепловой машины добавочного ограничения на ее мощность снизит величину достижимого в такой машине термического КПД.

С появлением ядерной энергетики, в которой капитальные затраты гораздо больше, чем на угольных или газовых электростанциях, а стоимость топлива меньше, возникла потребность в решении задачи о цикле тепловой машины предельной мощности при ограниченных коэффициентах теплообмена. Ее решение было получено в работе И.И. Новикова [88]. Независимо от Новикова и существенно позднее ту же задачу решали Ф.Л. Курзон и Б. Альборн [63]. Именно их публикация стала толчком к активному развитию оптимизационной термодинамики.

В экономике роль тепловой машины, извлекающей работу, играет посредник, извлекающий капитал. При ограничении на продолжительность процесса, он вынужден повышать цену закупок и снижать цену продаж, а значит, уменьшить извлекаемую прибыль. Возникают задачи о предельной величине прибыли в этих условиях, о ее зависимости от кинетики ресурсообмена, о максимальной интенсивности извлечения прибыли.

Как показано ниже, важную роль при ответе на подобные вопросы играет фактор необратимости. Скорость изменения меры необратимости процессов в макросистемах называют *диссипацией.* В физических системах это рассеяние (диссипация) энергии, характеризующее переход ее в неработоспособное состояние. В экономических — это диссипация (необратимые потери) капитала.

Проблематика оптимизационной термодинамики

Проблематику оптимизационной термодинамики характеризуют задачи следующего типа:

1. Как обеспечить заданную среднюю интенсивность целевого потока при минимальной средней диссипации?

2. Каков предельный коэффициент превращения одного вида энергии, ресурсов, ... в другой при ограниченной продолжительности процессов или при их фиксированной средней интенсивности?

3. Если параметры одной подсистемы меняются, то как нужно изменять параметры другой, чтобы обеспечить максимальную среднюю интенсивность потоков?

4. Как поддерживать заданное неравновесное стационарное состояние системы с минимальными затратами энергии или капитала?

В качестве примера перечислим некоторые *конкретные задачи* оптимизационной термодинамики, относящиеся к тепловым и экономическим системам:

1. Какую максимальную мощность может извлечь тепловая машина в системе заданной конфигурации (заданы температуры, теплоемкости под-

систем в начальный момент времени) при заданной кинетике теплообмена?

2. Какую минимальную мощность нужно затратить, чтобы поддерживать стационарное температурное поле заданной конфигурации, и какие температурные поля реализуемы?

Переменные, характеризующие термодинамические системы, связи этих переменных между собой, имеют смысл лишь для равновесных систем, например, применительно к процессам теплообмена для тел, температура которых одинакова в каждой точке. Поэтому оптимизационная термодинамика разбивает систему на конечное число равновесных подсистем, считая, что различия характеризующих подсистемы переменных (температур, давлений, составов, ...) сосредоточены на границах контакта.

Применительно к экономическим системам подход оптимизационной термодинамики позволяет сформулировать и решить такие задачи как:

1. Как менять цены закупок/продаж ресурса у ЭА, чтобы за заданное время закупить заданный объем ресурса с минимумом затрат капитала?

2. Какова максимальная интенсивность прибыли посредника в системе ЭА, находящихся в контакте друг с другом?

3. Каковы минимальные затраты капитала на поддержание заданного неравновесного стационарного состояния системы ЭА?

4. Какую максимальную прибыль может извлечь посредник, осуществляя процессы закупок и продаж в неоднородной изолированной системе ЭА с заданными начальными состояниями за заданное время?

Для решения этих и подобных им задач необходимо распространить на экономические системы термодинамические методы анализа, ввести количественные характеристики необратимости, выявить принципиальные различия между системами физической и экономической природы. Различия эти очень существенны. В первую очередь, необходимо учесть, что в физических системах поток энергии или вещества может переходить от одной системы к другой без какой-либо «компенсации». В экономике такое возможно лишь в исключительных случаях. Обмен ресурсом между экономическими подсистемами происходит только в том случае, если это выгодно каждой из них, а потому в этом процессе фигурируют как минимум два встречных потока. Важной особенностью является и наличие потребления ресурсов ЭА, при котором он в той или иной мере обесценивается.

Последовательность решения задач оптимизационной термодинамики

Для большинства рассмотренных в книге задач оптимальному решению соответствует минимум необратимости, полученный при тех или иных ограничениях. В связи с этим последовательность решения упомянутых выше и других подобных задач оптимизационной термодинамики такова:

1. Для рассматриваемой системы записывают уравнения термодинамических балансов, т.е. балансов по веществу, энергии и энтропии для физических систем, по ресурсам, капиталу и показателю необратимости в экономике. Последнее из этих уравнений содержит неотрицательное слагаемое (диссипацию энергии в физических или диссипацию капитала в экономических системах). Это слагаемое зависит от кинетики процессов, их продолжительности и интенсивности потоков.

2. Из уравнений балансов находят связь оптимизируемого показателя с диссипацией. Эта связь обычно монотонная.

3. Решают при введенных ограничениях и заданных внешних условиях задачу о минимальной диссипации. Решение этой задачи и определяет предельные возможности системы в классе необратимых процессов.

4. Если найдено минимальное при данных условиях значение диссипации, то требование, заключающееся в том, чтобы фактическое ее значение как функция организации процесса было не меньше, чем найденное, определяет область реализуемости системы в пространстве потоков сырья, энергии, капитала и пр. Границе области реализуемости соответствует такая организация процесса, при которой для заданных размеров и производительности затраты энергии или капитала на его проведение минимальны. Эта граница соответствует минимуму диссипации.

Глава 2

Термодинамические модели макросистем

Изложены основные соотношения феноменологической равновесной термодинамики для систем физической природы и их экономические аналоги. Дано доказательство существования функции благосостояния в экономике и приведены вытекающие из этого факта связи между переменными, характеризующими состояние ЭА.

2.1. Математическое описание термодинамических систем физической природы

Математические модели термодинамических систем физической природы должны объяснять следующие наблюдаемые факты:

1. Две или большее число термодинамических систем, изолированных от окружающей среды и имеющих разные температуры, давления, концентрации, ... после приведения в контакт друг с другом в силу самопроизвольно протекающих процессов меняют свое состояния так, что все упомянутые переменные выравниваются.

2. Потоки обмена веществом или энергией возрастают с ростом различия температур, давлений, концентраций подсистем и стремятся к нулю по мере сближения этих переменных.

3. Пусть рабочее тело, температуру и давление которого можно изменять, изолировано от окружения и контактирует только с одной термодинамической системой, обмениваясь с ней веществом и энергией. Если процесс организован так, что состояния термодинамической системы в начальный и в конечный момент одинаковы, то энергия рабочего тела не может возрасти. В противном случае мы получили бы возможность «выкачивать» сколь угодно много энергии, не меняя состояния термодинамической системы и окружающей среды.

Математические модели феноменологической термодинамики

Термодинамическую систему характеризуют переменные двух типов — *экстенсивные и интенсивные.* Величина экстенсивных переменных (объем, масса вещества, ...) пропорциональна масштабу системы. Так, при объединении двух одинаковых подсистем эти переменные удваиваются. Интенсивные переменные (давление, температура, концентрация, ...) не зависят от масштаба системы. Экстенсивные и интенсивные переменные связаны друг с другом уравнением состояния, зависящим от природы системы.

Переменные (объем, давление, температура и др.) и связи между ними, характеризующие термодинамическую систему на макроуровне, имеют смысл лишь для *равновесной* системы, т.е. для системы, интенсивные переменные которой одинаковы в любой точке ее объема. Однако неоднородную систему, в которой интенсивные переменные в различных точках отличны друг от друга, можно разбить на подсистемы, в каждой из которых в любой момент времени отклонения интенсивных переменных от их средних по объему значений пренебрежимо малы, а значит, отсутствуют связанные с этими отклонениями потоки внутри подсистем.

При таком подходе предполагают, что изменение интенсивных переменных происходит только на границах внутренне равновесных подсистем. Это допущение позволяет использовать при описании подсистем уравнения состояния, справедливые в условиях равновесия, а для описания переходных процессов в каждой подсистеме оказывается возможным применить обыкновенные дифференциальные уравнения.

С точки зрения взаимодействия между интенсивными и экстенсивными переменными можно выделить три типа систем:

1. Подсистемы с конечной емкостью, у них интенсивные переменные в равновесии представляют собой функции экстенсивных.

2. Резервуары — подсистемы, у которых значения экстенсивных переменных так велики, что потоки обмена с другими подсистемами не влияют на величину интенсивных переменных, которые у резервуаров постоянны.

3. Рабочие тела — подсистемы, интенсивные переменные которых можно менять, управляя ими непосредственно или через экстенсивные переменные. Например, температуру рабочего тела тепловой машины можно менять посредством изменения его объема за счет перемещения поршня.

Основные переменные и уравнения состояния. Термодинамическую равновесную систему выделяют контрольной поверхностью и для ее описания используют физические величины, характеризующие макроскопическое состояние системы в целом и составляющих ее подсистем.

Подсистемы взаимодействуют друг с другом. Эти взаимодействия могут быть различного рода — теплообмен (обмен тепловой энергией), массообмен (обмен веществом), механическое взаимодействие (совершение работы), деформационное (изменение объема подсистемы) и т.д. Каждому типу взаимодействия соответствуют две величины: координата и потенциал.

Координата и потенциал взаимодействия. Координатой называют величину, изменение которой свидетельствует о наличии взаимодействия данного рода. Если эта величина не изменяется, то взаимодействие данного рода отсутствует. Например, координатой деформационного взаимодействия является объем; если объем не изменяется, то деформационное взаимодействие отсутствует. Координатой массообменного взаимодействия является количество того или иного компонента в системе. Если количество ни одного из компонентов не изменяется, то массообмен отсутствует.

Потенциалом взаимодействия называют величину, различие в значениях которой для двух контактирующих подсистем является причиной взаимодействия между ними. Для деформационного взаимодействия потенциалом является давление, для теплообмена — температура. Различие температур тел вызывает обмен теплотой.

Отличие значений потенциалов — причина взаимодействия, а изменение координаты — его следствие. Координата взаимодействия — экстенсивная, а потенциал взаимодействия — интенсивная величина.

Равновесное и неравновесное состояния. Равновесное состояние подсистемы полностью характеризуется заданием значений потенциалов всех взаимодействий в одной точке объема. Если термодинамическая система выведена из состояния равновесия, например, в ней изменилось количество вещества или энергии, то возникает переходной процесс, в ходе которого значения потенциалов (температуры, давления) будут выравниваться. Такой процесс называют релаксацией. Он протекает с определенной скоростью и требует времени, называемого временем релаксации.

Обратимый и необратимый процессы. Если внешние условия для системы изменяются так, что скорость их изменения существенно меньше скорости релаксации, то в каждый момент времени состояние системы будет пренебрежимо мало отличаться от равновесного, так как значения переменных по объему успевают выравниваться. Такой процесс называют квазиравновесным или просто равновесным [8].

Равновесные процессы могут быть как обратимыми, так и необратимыми. Например, процессы прямого (без посредника) тепло- и массообмена, в результате которых энергию из системы не извлекают, а потенциалы подсистем сближаются, необратимы даже при сколь угодно медленном их протекании. Необратимы процессы смешения жидкостей или газов с разными начальными концентрациями, а также процесс непосредственного обмена теплотой тел с разными начальными температурами. Для возврата таких подсистем в исходное состояние нужно приложить дополнительную работу, которая не получена в прямом процессе.

Если в результате равновесного процесса из системы извлекают механическую или электрическую энергию в таком количестве, что, затратив ее, можно вернуть систему в прежнее состояние, то процесс обратим. Извлечь энергию может только активная подсистема — посредник. Интенсивные переменные такой подсистемы можно изменять извне. В частности, такой подсистемой является тепловая машина. Поэтому для проведения обратимого процесса он должен быть равновесным, а взаимодействие подсистем должно осуществляться через активную подсистему.

Неравновесный процесс — всегда необратим. Так, если тепловая машина должна вырабатывать некоторую заданную мощность, она не может получать теплоту сколь угодно медленно. Для создания потока потребуется конечная разность температур, а это приведет к необратимости.

Процессы теплообмена и деформационного взаимодействия. Наиболее простыми процессами в термодинамике являются процессы обмена теплом и деформационного взаимодействия, поэтому в качестве примеров термодинамического описания рассмотрим эти два типа взаимодействия.

Для взаимодействий всех видов в термодинамических системах существует количественная мера dQ, равная произведению потенциала Y на изменение координаты z:

$$dQ_i = Y_i dz_i,$$

и имеющая размерность энергии. Конкретизируем это выражение для двух рассматриваемых видов взаимодействий:

Деформационное взаимодействие. Рассмотрим деформационное взаимодействие, проявляющееся в изменении объема. Координатой этого взаимодействия является объем V, а потенциалом — давление p. Количество деформационного взаимодействия определяется величиной pdV, которая оценивает совершенную работу.

Теплообмен. Процесс теплообмена возникает, если отличаются температуры взаимодействующих тел, поэтому потенциалом взаимодействия является температура T. Координата этого взаимодействия должна быть такой, чтобы произведение потенциала на дифференциал координаты имело размерность энергии. Такую координату обычно обозначают через S и называют энтропией (от греческого $\tau\rho o\pi\eta$ — преобразование). Как и все координаты, она должна быть величиной экстенсивной. Энтропия, введена в 1865 г. Рудольфом Клаузиусом.

Количественная мера теплового взаимодействия

$$dQ = TdS, \tag{2.1}$$

откуда изменение энтропии определяется величиной

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{2.2}$$

Это — известное соотношение Р. Клаузиуса.

Координаты и уравнение состояния

В каждый момент времени состояние равновесной термодинамической системы может быть охарактеризовано набором различных макроскопических величин, таких, как внутренняя энергия E, объем V, энтропия S, вектор состава N с составляющими N_i (количество молей в системе i-го вещества), $i = 1, \ldots, m$, температура T, давление p, химические потенциалы μ_i, (энергия, содержащаяся в одном моле i-го вещества) $i = 1, \ldots, m$, и т.д.

Остановимся на одной из перечисленных величин — энтропии. Как и внутреннюю энергию, энтропию непосредственно нельзя измерить. Изменение энергии можно найти, зная значения температуры и давления, которые можно измерить. Аналогично и изменение энтропии системы может быть вычислено по непосредственно измеряемым переменным.

Первоначально энтропия была введена Клаузиусом как мера полноты преобразования теплоты в работу. Позднее был выявлен статистический смысл энтропии применительно к термодинамическим, информационным и другим системам. В этих системах, состоящих из множества элементарных подсистем (молекул, агрегатов), одному и тому же макросостоянию системы (давлению, температуре, объему и пр.) могут соответствовать различные микросостояния (состояния элементарных подсистем). Число таких микросостояний Ω и характеризует энтропия (она пропорциональна логарифму Ω). Таким образом, энтропия при данном макросостоянии характеризует неопределенность состояния системы на микроуровне. Если две назависимые системы, имеющие число возможных состояний Ω_1 и Ω_2, объединяются в одну, то для объединенной системы $\Omega = \Omega_1\Omega_2$, так как для каждого микросостояния первой возможно Ω_2 микросостояний второй подсистемы. Энтропия объединенной системы S как логарифм Ω равна сумме S_1 и S_2. Если к системе при температуре T подводится порция теплоты dQ, то энтропия системы возрастает (см. соотношение (2.2)).

Перечисленные величины не являются независимыми. Они связаны друг с другом уравнениями состояния. Обычно в качестве независимых переменных выбирают E, V, N или S, V, N, а остальные переменные выражают, используя уравнения состояния. Так, если в качестве независимых переменных приняты E, V и N, то энтропию выражают как функцию этих переменных[1]:

$$S = S(E, V, N). \tag{2.3}$$

Интенсивные же переменные — температура T, давление p, вектор химических потенциалов μ, могут быть выражены через экстенсивные переменные и функцию (2.3) с помощью соотношений

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}, \quad p = T\frac{\partial S}{\partial V}, \quad \mu_i = -T\frac{\partial S}{\partial N_i}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.4}$$

Выше отмечалось, что произведение TdS имеет размерность энергии, а ∂N_i — прирост числа молей i-го вещества. Так что химический потенциал имеет смысл энергии, отнесенной к одному молю i-го вещества.

Если в качестве независимых переменных принять S, V, N, то внутренняя энергия

$$E = E(S, V, N). \tag{2.5}$$

Связь между приращениями энтропии и внутренней энергии может быть записана в энергетической и в энтропийной формах

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i, \tag{2.6}$$

откуда

$$dS = \frac{1}{T}\left(dE + pdV - \sum \mu_i dN_i\right). \tag{2.7}$$

В выражении (2.6) перед вторым слогаемым стоит знак минус, так как росту внутренней энергии соответствует уменьшение объема (сжатие газа, например).

Интенсивные переменные могут быть выражены через экстенсивные переменные и функцию (2.5) с помощью соотношений

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}, \qquad p = -\frac{\partial E}{\partial V}, \qquad \mu_i = \frac{\partial E}{\partial N_i}, \tag{2.8}$$

(аналогично соотношениям (2.4) для производных энтропии).

[1]Тот факт, что существует энтропия, что она является экстенсивной переменной и функцией других таких переменных, вообще говоря, требует доказательства. Одно из них было дано Каратеодори.

Пусть мы объединили k одинаковых равновесных термодинамических систем, их температуры, давления, объемы и пр. При одновременном изменении всех аргументов в (2.3), (2.5) в k раз значения S или E изменятся во столько же раз, так что эти функции однородные первой степени. Интенсивные же переменные, найденные в силу равенств (2.8), также зависят от экстенсивных, но при изменении этих экстенсивных переменных в одно и то же число раз не изменяются, так что $T(S,V,N)$, $p(S,V,N)$, — однородные функции нулевого порядка[2].

Тот факт, что энтропия существует и является однородной функцией первой степени от других экстенсивных переменных накладывает определенные условия на уравнения состояния. Эти условия в термодинамике называют дифференциальными соотношениями. Приведем некоторые из них:

Так как E зависит от экстенсивных переменных, то dE — полный дифференциал, т.е. приращение E в некотором процессе зависит только от координат начального и конечного состояния, а не от траектории этого процесса.

Будем рассматривать E как функцию не только вектора экстенсивных переменных $x = (S, V, N)$, но и интенсивных $P = (T, p, \mu)$. При этом каждая составляющая вектора P представляет собой функцию от x. Тогда в силу однородности первой степени эту функцию можно записать по формуле Эйлера как скалярное произведение

$$E = (P, x) = TS - pV + \sum \mu_i N_i. \tag{2.9}$$

Действительно, в силу однородности первой степени

$$E(ax) = aE(x), \quad \partial E(ax)/\partial(ax) = \partial E(x)/\partial x,$$

а

$$\partial E(ax)/\partial a = E(x).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial E(ax)}{\partial a} = \frac{\partial E(ax)}{\partial(ax)}\frac{\partial(ax)}{\partial a} = \frac{\partial E(x)}{\partial x}x \Rightarrow E(x) = (P, x).$$

[2] Однородной функцией порядка r называют функцию, которая при изменении всех ее аргументов в k раз изменяется в k^r раз. Любая линейная функция — однородная первой степени, но обратное неверно. Например, $f(x_1, x_2) = x_1^{0,8}x_2^{0,2}$ — однородная первой степени, но нелинейная. По теореме Эйлера любая однородная функция первой степени может быть представлена как скалярное произведение своих частных производных на значения аргументов, т.е. она может быть представлена подобно любой дифференцируемой функции линейными слагаемыми ряда Тэйлора, но для дифференцируемой функции это представление справедливо в окрестности некоторой точки, а для однородной — во всей области ее определения.

Дифференциал этой функции

$$dE = \sum P_i dx_i + \sum x_i dP_i. \tag{2.10}$$

Из сравнения выражений (2.10) и (2.6) следует, что второе слагаемое в (2.10) равно нулю, т.е. справедливо равенство

$$SdT - Vdp + \sum N_i d\mu_i = 0, \tag{2.11}$$

связывающее друг с другом дифференциалы интенсивных переменных, которое называют уравнением Гиббса–Дюгема.

Из того, что dE — полный дифференциал, вытекает, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = \frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} = -\\ -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,N} = T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{S,N}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Аналогичные соотношения могут быть получены с использованием свойств фунции $S(E, V, N)$.

Энтропия системы и условия равновесия

Замечательным свойством энтропии является то, что в любом термодинамическом процессе, протекающем в изолированной системе, энтропия этой системы не уменьшается. Если процесс протекает обратимо, а это возможно только в том случае, когда система включает «посредника», суммарная энтропия системы S_Σ не возрастает, и она может быть возвращена в исходное состояние за счет только той энергии, которая была извлечена в прямом процессе. В необратимом же процессе величина S_Σ растет. Прирост энтропии может служить показателем необратимости процесса.

Если изолированная система состоит из нескольких подсистем, то в состоянии равновесия энтропия системы достигает своего максимально возможного значения.

Рассмотрим, например, изолированную систему, состоящую из двух подсистем, объемы которых V_1, V_2 и векторы составов N_1, N_2 фиксированы, а обмен энергией между ними может осуществляться только через теплопроводящую перегородку. Внутренняя энергия системы E равна сумме энергий подсистем:

$$E = E_1 + E_2;\ S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2).$$

Так как по окончании процесса системы находятся в равновесии, то их суммарная энтропия для заданного значения E максимальна, так что E_1 и E_2 должны быть таковы, чтобы доставлять решение следующей экстремальной задаче:

$$S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2) \to \max \Big/ E_1 + E_2 = E.$$

Необходимым условием оптимальности в этой задаче является стационарность по E_1 и E_2 функции Лагранжа

$$R = S_1(E_1) + S_2(E_2) + \lambda(E_1 + E_2 - E),$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}.$$

С учетом формулы (2.4) это равенство соответствует тому, что в тепловом равновесии температуры подсистем должны быть одинаковы.

Две системы находятся в механическом равновесии, если разделяющий их поршень неподвижен. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в этом случае объемы подсистем должны распределяться между ними так, чтобы производные энтропии каждой из подсистем по величине ее объема были одинаковы, а это соответствует равенству давлений (см. (2.4)).

При рассмотрении химического равновесия те же соображения о максимуме суммарной энтропии при заданном суммарном количестве каждого из компонентов в системе приводят к условию равенства производных энтропии каждой из подсистем по числу молей в ней i-го вещества, т.е. к равенству в равновесии химических потенциалов μ_i. Таким образом, если кроме теплового равновесия наблюдаются еще механическое и химическое, то равны не только температуры, но и давления и химические потенциалы подсистем.

Условия равновесия в изолированных термодинамических системах представляют собой условия максимума суммарной энтропии по экстенсивным переменным подсистем с учетом балансовых соотношений, наложенных на эти переменные.

2.2. Математическое описание экономических систем

Микроэкономика изучает взаимодействие экономических агентов (ЭА). *ЭА представляет собой совокупность элементарных участников экономической деятельности, усредненное поведение которых определяет характеристики ЭА на макроуровне.*

По анологии с термодинамикой можно рассматривать экономические системы (ЭС), в которых каждый из ЭА оказывается подсистемой. Перечислим наблюдаемые факты, которые должны найти отражение в математических моделях экономических систем:

1. В результате взаимодействия друг с другом ЭА обмениваются ресурсами, потребляют и производят их, при этом ЭА стремится максимизировать свою осознанную или неосознанную «полезность», выбирая, какой ресурс (товары, услуги, ...), в каком количестве и на что обменивать. Ресурс переходит в процессе обмена к тому ЭА, для которого он полезнее, а значит, ЭА готов за этот ресурс заплатить большую цену. Таким образом, ресурсы перетекают самопроизвольно в процессе стихийных обменов индивидуальных ячеек или через посредника от рынка с меньшей, к рынку с большей ценой.

2. Потоки обмена между несколькими ЭА, обладающими ограниченными запасами ресурсов и капитала и изолированными от окружения, при отсутствии производста и потреблния стремятся со временем к нулю, а цены, которые каждый из них готов заплатить за тот или иной ресурс, выравниваются.

3. Обмен ресурсами с ЭА, при котором он покупает и продает ресурсы так, чтобы в результате запасы ресурсов у ЭА в начале и в конце цикла обмена оказались одинаковыми, не может увеличить «полезность» ни ЭА, ни его окружения, если свойства окружения стационарны.

4. При увеличении закупочной цены увеличивается поток продаж от ЭА к покупателю, а при цене ниже некоторого значения, различного для каждого ЭА, этот поток становится равным нулю.

Перечисленные свойства во многом аналогичны свойствам термодинамических систем, так как и термодинамические, и микроэкономические системы являются макросистемами. Но есть и существенная разница. Если термодинамическая система физической природы передает теплоту любой другой, находящейся с ней в контакте и имеющей более низкую температуру, то ЭА «просто так» полезный для себя ресурс не отдает. Он делает это только в обмен на другой ресурс (бартер) или на базисный ресурс (продажа). Это и другие отличия должны быть учтены при составлении математической модели.

Экономические системы могут быть *изолированными* от окружения, в этом случае обмен происходит лишь внутри системы, или *открытыми* по всем или части ресурсов. Как в любой макросистеме процессы стохастического взаимодействия в экономике необратимы.

Здесь так же может быть введен некоторый показатель необратимости, принимающий подобно энтропии максимальное значение в равновесии для изолированной системы, и неотрицательная функция, аналогичная производству энтропии, и записаны уравнения экономических балансов, включающие эту функцию.

Далее приведено феноменологическое описание микроэкономических систем, использующее термодинамический подход и позволяющее формализовать перечисленные выше особенности экономических макросистем. При этом подчеркнуты близость и различия свойств систем экономической и физической природы.

Модели экономических агентов, необратимость

Состояние ЭА характеризуется вектором N запасов ресурсов и количеством базисного ресурса M. В качестве базисного может быть выбран любой ресурс, полезный всем ЭА. Чаще всего это деньги, так что M ассоциируют с запасом капитала. В некоторых случаях, нужно учесть и число индивидуальных ячеек I, содержащихся в ЭА, если ЭА могут обмениваться и этими ячейками. Ниже эти случаи будут отдельно оговорены.

Базисный ресурс измеряется в одних и тех же единицах для всех ЭА (золото, международная валюта). Переменные N и M — экстенсивные, т.е. при объединении (разделении) однородных ЭА они изменяются в одинаковой пропорции. Кроме того, ЭА характеризуется вектором интенсивных переменных — оценок $p = (p_1, ..., p_k)$ ресурсов, которые зависят от N и M. Однородные ЭС имеют одинаковые значения оценок ресурсов для всех ЭА.

Использование термодинамической терминологии применительно к экономике было предложено в середине XIX века Джоном фон Нейманом.

При обмене ресурсами нескольких изолированных от окружения ЭА оценки ресурсов выравниваются в состоянии равновесия, если все ресурсы являются необходимыми, т.е. если при стремлении запаса некоторого ресурса к нулю его оценка у всех ЭА стремится к бесконечности.

Оценка ресурса p_i (равновесная внутренняя цена) равна той минимальной цене в единицах базисного ресурса, по которой ЭА готов продать i-й ресурс, или той максимальной цене, по которой он готов его купить. Размерность вектора цен c, как и вектора оценок — единицы базисного ресурса, отнесенные к единице ресурса. Обмен ресурсом между двумя ЭА не имеет смысла, если оценки этого ресурса у них одинаковы.

Выделим три типа ЭА:

1. ЭА, у которых оценка ресурса p зависит от состояния ЭА (от запасов ресурсов и капитала). Обычно, но не всегда, с ростом запаса некоторого ресурса его оценка падает, а с ростом запаса капитала растет. ЭА

такого типа будем по аналогии с термодинамическими системами называть *экономическими подсистемами с конечной емкостью.* Могут быть и «вредные» для ЭА ресурсы, например отходы атомных электростанций, их оценки отрицательны.

ЭА может обмениваться с окружением не только материальным, но и базисным ресурсом M. Минимальная цена продажи (максимальная цена покупки) представляет собой оценку базисного ресурса для ЭА, обозначим ее $p_0(N, M)$. Эта оценка, как было упомянуто, положительна для всех ЭА. Обмен базисным ресурсом реализуется на валютной бирже.

2. ЭА, у которых запасы ресурсов сколь угодно велики. При обмене с таким ЭА количество закупаемого или продаваемого ему ресурса столь мало по сравнению с наличным запасом, что практически не влияет на его оценку p_i. ЭА такого типа аналогичны термодинамическим системам бесконечной емкости (резервуарам). Поэтому их естественно назвать *экономическими резервуарами.* К ним относятся рынки, цены на которых не зависят от потоков закупок и продаж, но могут изменяться во времени под влиянием внешних по отношению к системе факторов. ЭА может быть резервуаром не по всем, а по некоторым ресурсам, обладая конечной емкостью по остальным.

Запасы некоторых видов ресурсов ЭА не изменяются при передаче их другим ЭА, к таким видам ресурсов относятся информационные. Их полезность определяется характеристиками ЭА, приобретающего данный ресурс, на них не распространяются балансовые соотношения. Обмен такими ресурсами требует специального рассмотрения.

3. *Активные ЭА — посреднические фирмы*, которые назначают цену или интенсивность продажи (покупки) ресурсов независимо от их запаса и стремятся сделать это таким образом, чтобы извлечь максимум или затратить минимум базисного ресурса. Фирмы аналогичны рабочему телу тепловой машины в термодинамике. Они могут контактировать одновременно с несколькими ЭА, назначая для каждого из них свои цены или потоки. Цены посредника или назначаемая им интенсивность закупок (в частности, функции установка или прерывание контакта с тем или иным ЭА) являются управляющими переменными.

Фирма может быть производственной, в этом случае она закупает ресурсы (сырье, рабочую силу, производственные фонды) и продает продукцию, выпуск которой определяется производственной функцией того или иного типа [21] и ценой, которую фирма устанавливает. Цену, устанавливаемую фирмой на i-й вид ресурса, обозначим c_i.

Существование функции благосостояния и ее свойства

Вопрос о том, как количественно охарактеризовать полезность для ЭА того или иного ресурса, существует ли функция полезности, которую ЭА стремится максимизировать при тех или иных ограничениях, зависит ли эта функция от количества ресурсов или от потоков их потребления, ... обсуждался в экономике давно. Многие задачи можно было решать, не делая допущения о существовании функции полезности, а используя лишь кривые безразличия, которые выделяют наборы ресурсов, имеющие одинаковую ценность для ЭА.

Подход к ЭА-ту как к макросистеме позволяет ввести и доказать существование такой функции. Следуя [81], будем называть ее *функцией благосостояния*. Эта функция была введена в более ранних работах (см. [77], [27]), где она названа структурной функцией. Термин, использованный К. Мартинаш, как представляется, в большей степени соответствует экономическому смыслу.

При обмене ЭА закупает и продает ресурсы, изменяя одновременно запасы ресурсов N и капитала M. Введем функцию U, дифференциал которой равен

$$dU = dM + \sum_i p_i dN_i. \tag{2.13}$$

Эту функцию называют *капитализацией* или *полным капиталом* ЭА, так как ее изменение учитывает изменение как базисного ресурса M, так и *связанного капитала* с дифференциалом $dF = \sum\limits_i p_i dN_i$. При покупке (продаже) по минимально возможной (равновесной) цене p_i i-го ресурса $p_i dN_i = -dM$ и $dU = 0$. Знак минус связан с тем, что при покупке ресурса ЭА тратит капитал, а при продаже увеличивает.

dU является полным дифференциалом, а капитализация U зависит от N, M тогда и только тогда, когда смешанные производные этой функции по любым двум переменным не зависят от порядка дифференцирования, т.е

$$\frac{\partial^2 U}{\partial M \partial N_i} = \frac{\partial 1}{\partial N_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial N_i \partial M} = \frac{\partial p_i}{\partial M} = 0. \tag{2.14}$$

Аналогично для двух разных ресурсов

$$\frac{\partial p_i}{\partial N_j} = \frac{\partial p_j}{\partial N_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial N_j \partial N_i}. \tag{2.15}$$

Эти условия не всегда выполнены, ниже будет показано, в каком случае они справедливы.

Доказательство существования функции благосостояния $S(N, M)$ сводится к доказательству существования интегрирующего множителя $p_0(N, M)$, такого, что $dS = p_0(N, M)dU$ является полным дифференциалом. Этот множитель по аналогии с p может быть назван оценкой базисного ресурса (капитала). Для всех ЭА он строго положителен.

Пусть некоторая фирма осуществляет равновесный обмен с ЭА, меняя посредством закупок и продаж одни виды ресурсов на другие, в том числе на базисный. Обмен происходит обратимо, т.е. по ценам сколь угодно близким к оценкам, и таким образом, что начальное и конечное состояния ЭА в пространстве с координатами N_i совпадают, то есть фирма не извлекла при такой торговле материальных ресурсов. При обмене используется валюта, характерная для данного рынка. Если стоимость r базисного ресурса в единицах используемой валюты оставалась во время цикла неизменной, то фирма не может извлечь и базисного ресурса. В противном случае возможности извлечения базисного ресурса были бы не ограничены. Ведь его можно получать лишь от одного ЭА, не вызывая ни в его состоянии, ни в состоянии окружения никаких изменений. Из невозможности такого экономического «вечного двигателя» следует, что при $r = \mathrm{const}$

$$\oint \sum_i p_i(N, M)\, dN_i = 0. \tag{2.16}$$

Из этого равенства, в свою очередь, вытекает, что существует такая функция $Q(N, r)$, частные производные которой по N_i равны p_i. В силу (2.16) при $r = \mathrm{const}$ dQ является полным дифференциалом. В общем же случае

$$dQ = \sum_i p_i\, dN_i + \frac{\partial Q}{\partial r}\, dr.$$

Выражение (2.14) можно переписать как

$$dU = dM + dQ - \frac{\partial Q}{\partial r}\, dr = d(M + Q) - \frac{\partial Q}{\partial r}\, dr.$$

Обозначая $M + Q = Y$, а $-\dfrac{\partial Q}{\partial r} = \gamma$, получим, что

$$dU = dY + \gamma\, dr. \tag{2.17}$$

Выражение (2.17) зависит от трех переменных: Y, γ и r. Эти переменные связаны друг с другом. Если бы это было не так, то на плоскости с координатами Y, r можно было бы при неизменной капитализации перейти из заданного начального состояния в любое другое за счет выбора γ.

Между тем возможности такого перехода ограничены. Действительно, пусть на плоскости Y, r начальному состоянию соответствует точка 1, а конечному — точка 2, такая, что при обратимом обмене с окружением, приводящим из 1 в 2, при постоянном значении r капитализация ЭА уменьшается ($dU < 0$). Если бы можно было попасть в ту же точку при $dU = 0$, то ЭА мог бы организовать циклический процесс обмена, при котором его состояние менялось бы от точки 1 к точке 2 вдоль траектории с $dU = 0$, а возвращалось бы из точки 2 в точку 1 с постоянным значением r и приростом капитализации ($dU > 0$). Повторяя такой цикл, он мог бы в обратимом обмене повысить свою капитализацию на любую величину, что невозможно. Так что эти три переменные зависимы и γ — функция Y и r. Дифференциал dU полного капитала является, таким образом, пфаффовой формой не трех, а двух переменных, которая всегда имеет интегрирующий множитель.

Прежде чем найти интегрирующий множитель p_0, уточним зависимость γ от Y и r. Для этого рассмотрим систему, состоящую из двух ЭА, у которых $r_1 = r_2 = r$. Капитализация U, переменная Y и запасы базисного ресурса для системы аддитивны, так что $U = U_1 + U_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, а значит, и $Q = Q_1 + Q_2$. Соответственно, $\gamma(Y_1 + Y_2, r) = \dfrac{\partial Q}{\partial r} = \gamma_1(Y_1, r) + \gamma_2(Y_2, r)$. Из этого равенства следует, что частные производные $\gamma_1(Y_1, r)$ по Y_1 и $\gamma_2(Y_2, r)$ по Y_2 равны друг другу и равны производной γ по Y, т. е. эти производные могут зависеть только от r, но не от Y. Таким образом, функция γ имеет вид

$$\gamma(Y, r) = G(r)Y + l(r), \tag{2.18}$$

а для дифференциала капитализации получим выражение

$$dU = dY + (G(r)Y + l(r))\,dr.$$

Интегрирующим множителем может быть любая функция p_0, такая, что $dS = p_0 dU = p_0 dY + p_0(G(r)Y + l(r))dr$ — полный дифференциал.

Так как смешанная производная функции S не зависит от порядка дифференцирования, то функция p_0 должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial [p_0(G(r)Y + l(r))]}{\partial Y}. \tag{2.19}$$

Будем искать p_0 как функцию r, тогда условие (2.19) приводит к уравнению

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = p_0 G(r), \tag{2.20}$$

определяющему зависимость $p_0(r)$, которая наряду с r может служить оценкой базисного ресурса и так же, как и r, зависит от M и N.

Таким образом, доказано У т в е р ж д е н и е:

Существует некоторая функция состояния (экстенсивных переменных) $S(N, M)$, *такая, что ее дифференциал имеет вид*

$$dS = p_0(N, M)dU = p_0(N, M)\left[dM + \sum_i p_i(N, M)dN_i\right]. \tag{2.21}$$

В обратимом, то есть осуществляемом по ценам, совпадающим с оценками ресурсов цикле обмена, функция S не изменяется, так как

$$\oint dS = 0. \tag{2.22}$$

Оценки ресурсов могут быть выражены через функцию S как:

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial N_i}\bigg/\frac{\partial S}{\partial M}, \quad i = 1, 2, ... \tag{2.23}$$

При этом оценка базисного ресурса p_0 положительна для всех ЭА, а p_i могут быть и отрицательными, если i-й ресурс требует, например, утилизации или затрат на хранение. Из выражений (2.23) следует, что оценки всех ресурсов, кроме базисного, не изменяются при умножении функции S на постоянное число, а оценка базисного ресурса умножается на то же число. Добавление константы к функции благосостояния не влияет на значения оценок.

При объединении двух ЭА с одинаковыми оценками всех ресурсов, включая базисный, естественно считать, что оценки ресурсов не изменятся. В этом случае функция благосостояния S возрастет во столько же раз, во сколько вырастут запасы ресурсов, то есть она, как N и M, является экстенсивной переменной и представляет собой однородную функцию первой степени. По теореме Эйлера однородная функция первой степени может быть записана в форме

$$S(N, M) = p_0(M, N)\left(\sum_i p_i(M, N)N_i + M\right). \tag{2.24}$$

Зависимость $p(N, M)$ может быть найдена по формулам (2.23), а также экспериментально по поведению ЭА в процессах обмена. При этом она является однородной функцией нулевого порядка. Условие однородности первого порядка справедливо и для связанного капитала

$$F = \sum_i p_i(M, N)N_i.$$

Таким образом, потенциалом ресурсообмена является оценка ресурса p, а координатой его запас N. Произведение pdN имеет размерность базисного ресурса M. Функция благосостояния измеряется в валюте ЭА, так что величина p_0 характеризует ценность для ЭА базисного ресурса и имеет размерность [единицы валюты ЭА/единицы базисного ресурса]. Если ЭА функционируют на рынке с одинаковой валютой, то их функции благосостояния имеют одинаковую размерность и эти функции можно складывать. В этом случае в состоянии равновесия изолированной системы ЭА возрастает не только каждая из функций благосостояния, но и достигается максимум суммарной функции благосостояния совместимый, с наложенными ограничениями. Условию максимума соответствует равенство оценок ресурсов.

Действительно, условия оптимальности задачи

$$[S_1(N_1, M_1) + S_2(N_2, M_2)] \to \max, \text{ при } \quad N_1 + N_2 = N, \quad M_1 + M_2 = M,$$

где N и M суммарные запасы ресурсов и капитала до установления равновесия, сводятся к равенству значений частных производных функций благосостояния по равновесным запасам ресурсов и капитала, что с учетом (2.21) соответствует равенству оценок. Если взаимодействуют ЭА, использующие разную валюту, то их функции S_j имеют разную размерность и их нельзя складывать.

В отличие от S_j капитализация U_j каждой из подсистем — сумма базисного ресурса и связанного капитала, имеет одинаковую размерность с капитализацией других ЭА. $\sum\limits_j U_j$ представляет собой капитализацию (сумму базисного ресурса и связанного капитала) для системы в целом в условиях внутреннего равновесия каждого из входящих в нее ЭА-в. В равновесии ресурсы и капитал распределяются между ЭА так, что достигает максимума суммарная капитализация. Для двух ЭА

$$U(N, M) = U_1(M_1, N_1) + U_2(N_2, M_2) \to \max .$$

Так как выполнено балансовое соотношение по базисному ресурсу M, то максимуму капитализации соответствует максимум суммарного связанного капитала

$$F = \sum_j p_j N_j = \sum_j p_j(N, M) \sum_i N_{ji} \to \max .$$

Система может содержать валютную биржу, на которой в каждый момент времени определены коэффициенты обмена одной валюты на другую. Любая из них может быть принята за базисный ресурс, а функция благосостояния ЭА нормирована посредством умножения на стоимость v базисного ресурса в единицах валюты ЭА на бирже. Такие нормированные функции $\overline{S}_j = v_j S_j$ аддитивны. Коэффициенты v_j естественно назвать *внешними нормирующими коэффициентами.* Функция

$$\overline{S} = \sum_j \overline{S}_j$$

представляет собой нормированную функцию благосостояния системы. Если система неоднородна и входящие в нее ЭА обмениваются ресурсами, то $\overline{S}$ возрастает и в состоянии равновесия достигает своего максимального значения при тех или иных ограничениях, наложенных на систему. Отметим, что суммарная функция благосостояния равна сумме функций благосостояния каждой из подсистем только в том случае, когда вид этих функций и значения оценок до их объединения были одинаковы. В остальных случаях ее значение будет больше этой суммы.

Приведенное выше доказательство существования функции благосостояния $S(N, M)$, как следствие невозможности извлечения прибыли от торговли с одним ЭА, следует схеме доказательства Каратеодори существования энтропии в термодинамике.

В микроэкономике часто характеризуют предпочтения экономического агента кривыми (поверхностями) безразличия. Каждая из них выделяет множество одинаково предпочтительных состояний. Получение ЭА-ом некоторого количества базисного или иного ресурса без изменения запасов остальных переводит его состояние на более высокую кривую безразличия, оно становится предпочтительнее. В работе [73] существование S было доказано, исходя из аксиомы Вилла [108], использующей понятие предпочтения экономического агента: *в пространстве состояний* $X = (N, M)$ *ЭА не существует такой последовательности состояний* $X_1, X_2, ..., X_m$, *что* X_i *предпочтительнее, чем* X_{i-1} *для* $i = 2, ..., m$, *а конечное и начальное состояния совпадают (* $X_1 = X_m$*).*

Такое доказательство нельзя считать строгим, так как само понятие предпочтения и допущение о существовании кривых безразличия подразумевает существование функции S, для которой эти кривые являются линиями уровня.

Потоки обмена ресурсами и капиталом возникают при контакте ЭА с различающимися оценками ресурсов. При этом потоки капитала сопряжены с потоками ресурса и без обмена ресурсами в системе, не содержащей валютной биржи, отсутствуют. Поведение ЭА в процессах ресурсообмена и условия равновесия не изменяются при умножении его функции благосостояния на постоянный множитель или при добавлении к ней постоянного слагаемого, так как оценки ресурсов $p_i (i = 1, ..., k)$ инвариантны к этим операциям.

В литературе часто постулируют существование функции благосостояния S, а оценки определяют через экстремальную задачу потребительского спроса, в которую они входят как параметры:

$$S(N, M) \to \max \Bigg/ \left(\sum_i p_i N_i + M \right) = U, \tag{2.25}$$

где величина U фиксирована.

Функция Лагранжа задачи (2.25)

$$L = S(N, M) - p_0 \left(\sum_i p_i N_i + M \right),$$

где p_0 — неопределенный множитель Лагранжа. Условия стационарности L по M и N приводят к соотношениям, которые совпадают с выражениями (2.23).

Оптимальные значения экстенсивных переменных N^*, M^* как функции от оценок и величины U не изменяются при умножении всех их аргументов на одно и то же число (изменение масштаба цен), т.е. являются однородными функциями нулевой степени. Это следует из того, что при изменении масштаба цен левая и правая части ограничения в (2.25) умножаются на одно и то же число, а целевая функция не изменяется.

Функцию S в задаче (2.25) предполагают дважды непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей по каждому из аргументов, строго выпуклой вверх и равной нулю в начале координат. Ее частные производные стремятся к бесконечности, когда соответствующая переменная стремится к нулю (условие необходимости каждого из ресурсов). Как следствие этих предположений решение задачи (2.25) единственно и положительно, а p_i падает с ростом N_i. При таком описании ЭА подобен термодинамической подсистеме конечной емкости.

Для экономического резервуара оценки ресурсов p_i и p_0 постоянны, а функция благосостояния линейна по M и N.

Условия добровольности и следствия из существования функции S

При обмене ресурсами между экономическими агентами должны соблюдаться *условия добровольности*, заключающиеся в том, что ни одна из функций благосостояния S_ν не уменьшается (исключение — ассоциированный обмен, благотворительность). Условия добровольности делают невозможным прямой обмен одним видом ресурса, если его оценки у контактирующих друг с другом ЭА имеют одинаковый знак.

Дифференциальные соотношения между оценками, аналог уравнения Гиббса-Дюгема. Существование функции благосостояния и условие ее однородности первой степени приводят к тому, что оценки ресурсов должны отвечать определенным требованиям.

Запишем дифференциал функции S

$$dS = p_0 \left(dM + \sum_{i=1}^{n} p_i dN_i \right) = p_0 dU. \tag{2.26}$$

Разрешив (2.26) относительно dM, получим

$$dM = \frac{dS}{p_0} - \sum_{i=1}^{n} p_i dN_i. \tag{2.27}$$

Из равенства (2.24) следует, что

$$M = \frac{S}{p_0} - \sum_{i=1}^{n} p_i N_i = \frac{S}{p_0} - F, \tag{2.28}$$

а

$$dM = \frac{dS}{p_0} + Sd\left(\frac{1}{p_0}\right) - \sum_{i=1}^{n} (p_i dN_i + N_i dp_i). \tag{2.29}$$

После дифференцирования (2.24) по N_j и по M получим с учетом (2.23)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (p_0 p_i)}{\partial N_j} N_i + \frac{\partial p_0}{\partial N_j} M = 0, \quad j = 1, ..., n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (p_0 p_i)}{\partial M} N_i + \frac{\partial p_0}{\partial M} M = 0.$$

Сравнивая равенства (2.29) и (2.27), найдем соотношение, связывающее оценки ресурсов и капитала

$$Sd\left(\frac{1}{p_0}\right) - \sum_{i=1}^{n} N_i dp_i = 0. \tag{2.30}$$

Аналогично, сравнивая дифференциал S, найденный из равенства (2.24), с выражением (2.26), получим

$$Mdp_0 + \sum_{i=1}^{n} N_i d(p_0 p_i) = 0. \tag{2.31}$$

Вывод условий (2.30), (2.31), вытекающих из существования функции S и ее однородности первой степени, совершенно аналогичен доказательству равенства (2.11). Они являются экономическими аналогами уравнений Гиббса-Дюгема в термодинамике. Из них, например, следует, что если состояние системы изменяется так, что оценки ресурсов постоянны, то неизменна и оценка капитала p_0.

В силу симметрии матрицы вторых производных для дважды дифференцируемой функции S чувствительности оценок к изменениям запасов ресурсов и капитала связаны равенствами

$$\frac{\partial(p_0 p_i)}{\partial N_j} = \frac{\partial(p_0 p_j)}{\partial N_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial N_i \partial N_j}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial N_j} = \frac{\partial(p_0 p_j)}{\partial M} = \frac{\partial^2 S}{\partial M \partial N_j}. \tag{2.33}$$

Из условий (2.32), (2.33), как нетрудно показать, следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial N_j} + p_i \frac{\partial p_j}{\partial M} = \frac{\partial p_j}{\partial N_i} + p_j \frac{\partial p_i}{\partial M}, \quad i, j = 1, ..., n. \tag{2.34}$$

Равенства (2.32) и (2.33) — экономический аналог соотношений Максвелла.

Обсуждение проблемы существования условий взаимности в экономике (часто ее называют проблемой интегрируемости) относится к первой половине XX столетия (см. [71]). Эти условия проверялись экспериментально (см. [99], [21]). Проблеме интегрируемости Пол Самуэльсон посвятил значительную часть своей нобелевской лекции [94]. В ней он комментировал справедливость условий взаимности следующим утверждением: «Если повышение цены удобрений (только их одних) всегда приводит к увеличению закупок некой фирмой черной икры, то можно предсказать, что повышение цен на икру приведет к росту закупок фирмой удобрений».

В переводе на язык формул это утверждение соответствует тому, что равенство (2.15) справедливо хотя бы с точностью до знака. В действительности справедливо равенство (2.34), из которого можно получить условия, при которых знак первых слагаемых в левой и в правой части этого равенства совпадает, а значит, при этих условиях «из того, что рост цен на удобрения приводит к росту запасов черной икры, следует, что рост цен на икру приведет к росту запасов удобрений».

В том случае, когда множитель $p_0 = \text{const}$ (запас капитала велик и его оценка не зависит от запасов ресурсов), капитализация U является полным дифференциалом и равенства (2.14), (2.15) выполнены.

2.3. Кинетика процессов обмена, диссипация капитала

В процессах обмена ЭА выступает как покупатель и как продавец, он характеризуется функцией спроса и предложения. Функция спроса показывает, сколько i-го ресурса ЭА готов приобрести по цене c_i. Чем выше эта цена, тем, как правило, меньше спрос. Наконец, при некоторой цене $c_i = p_i$ ЭА прекращает закупки, а при $c_i > p_i$ он готов продавать i-й ресурс, причем в тем большем количестве, чем больше c_i.

Обмен потоками энергии, вещества в макросистемах физической природы и обмен потоками ресурсов и капитала в экономических системах возникает за счет различия интенсивных переменных. Движущей силой для потока теплоты, например, является разность температур, а для потока вещества — разность химических потенциалов. В экономике обмен тем или иным ресурсом между ЭА возникает в том случае, когда оценки этих ресурсов у контактирующих ЭА различны.

При этом направление потока зависит от знака разности соответствующих интенсивных переменных. Но он не всегда пропорционален этой разности. Так, поток лучистого теплообмена пропорционален разности четвертых степеней абсолютных температур контактирующих тел. Коэффициент пропорциональности между потоком и движущей силой (кинетический коэффициент) зависит от свойств материалов и увеличивается с ростом «поверхности контакта». Под ней в физических системах можно понимать площадь теплообменников или мембран, в экономических системах кинетические коэффициенты определяются «размерами» рынков, возможностью доставки товаров и пр.

При анализе процессов, протекающих во времени, роль функции спроса — зависимости объема закупаемого ресурса от цены продажи (объема продаваемого от цены покупки), играет функция, характеризующая кинетику ресурсообмена $n_i(p_i, c_i)$, она связывает с ценой не количество, а поток ресурса. Если положительным считать поток, направленный в сторону ЭА, то кинетические функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \operatorname{sign} n_i(c_i, p_i) = \operatorname{sign}\,(p_i - c_i), \\ n_i(c_i, p_i) = 0 \quad \text{при} \quad c_i = p_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial c_i} < 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial p_i} > 0. \end{gathered} \tag{2.35}$$

При цене, сколь угодно близкой к оценке, интенсивность потока сколь угодно мала, процесс называют квазиравновесным. Для закупки конечного объема ресурса квазиравновесный процесс требует сколь угодно большого времени.

Зависимость $n(c, p)$ удовлетворяет условиям (2.35). Если покупатель управляет ценой покупки, то рынок называют *монопольным.* Если оценки рынка не зависят от потоков закупок каждого покупателя (число покупателей столь велико, что влияние каждого пренебрежимо мало), рынок называют *рынком совершенной конкуренции.* Он представляет собой аналог термодинамического резервуара.

При обмене потоками ресурсов и капитала функции благосостояния контактирующих ЭА изменяются. Для простоты записи будем считать ресурс скалярным. В силу (2.26), (2.31)

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial N}\dot{N} + \frac{\partial S}{\partial M}\dot{M} = p_0 p n(p, c) - p_0 c n(p, c) = p_0 n(p, c)(p - c) = p_0 \dot{U}. \tag{2.36}$$

Здесь учтено, что поток базового ресурса противоположен потоку ресурса, умноженному на c — цену продажи или покупки ресурса ЭА.

При продаже ресурса в силу принципа добровольности $c > p$, при покупке ресурса ЭА $p > c$. В свою очередь, в первом случае поток n отрицателен, а во втором случае положителен. Поэтому скорость изменения функции благосостояния всегда больше нуля.

Если обмен производится между несколькими ЭА, то скорость роста функции благосостояния, как и капитализации, положительна для каждого из них. При этом в изолированной системе суммарный объем базового ресурса не изменяется и рост суммарной капитализации связан только с возрастанием связанного капитала F.

Заметим, что в отличие от экономических систем энтропия для процессов физической природы при взаимодействии подсистем возрастает только для системы в целом. Для части взаимодействующих подсистем она может убывать. В этом смысле к энтропии физических систем ближе связанный капитал F. При взаимодействии двух ЭА связанный капитал одного из них (продавца) уменьшается, а другого (покупателя) увеличивается. Но при этом суммарное значение F возрастает, так как поток всегда направлен в сторону ЭА с большей оценкой ресурса.

В равенстве (2.36) фигурирует цена ресурса c. При обмене между двумя ЭА, у которых $p_1 < p_2$ цена определяется по условию равенства потока продаж $n_1(p_1, c)$ потоку покупок $n_2(c, p_2)$, т.е. из уравнения

$$n_1(p_1, c) = n_2(c, p_2), \tag{2.37}$$

которое связывает цену с оценками ресурса контактирующих ЭА. Исключая из (2.37) $c(p_1, p_2)$, получим зависимость потока обмена от оценок ресурса $n(p_1, p_2)$.

Например, при $n_1 = \alpha_1(c - p_1), \quad n_2 = \alpha_2(p_2 - c)$ нетрудно видеть, что

$$n(p_1, p_2) = \bar{\alpha}(p_2 - p_1), \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{2.38}$$

Свойства (2.36) потоков обмена приводят к тому, что для цены обмена справедливы неравенства $p_1 < c < p_2$.

Сумма по всем подсистемам

$$\sigma = 0,5\sum_{\nu j} n_{\nu j}(p_\nu, p_j)(p_j - p_\nu) \tag{2.39}$$

характеризует скорость роста суммарного связанного капитала F изолированной системы. Множитель 0,5 в (2.39) связан с тем, что значение каждого из слагаемых не зависит от порядка индексов и входит в сумму дважды; n и p — векторы, а их произведение равно

$$p_j n_{\nu j} = \sum_i p_{ji} n_{\nu ji}.$$

Величина σ неотрицательна и равна нулю только в состоянии равновесия (равенства оценок ресурсов для всех подсистем). В такой системе посредник не может извлечь базисный ресурс за счет покупки ресурсов у одних и продажи другим ЭА. Базисный ресурс в этой системе частично обесценился, так как при необратимом обмене объемы ресурсов не изменились, а их суммарная стоимость (связанный капитал) F возросла, или иначе, возросла средняя стоимость ресурсов.

Рассмотрим циклический процесс взаимодействия фирмы с ЭА и потребуем, чтобы средняя интенсивность потоков обмена или, что то же самое, продолжительность процесса и объем закупаемого ресурса были фиксированы. В этом случае процесс необратим, так как фирма при закупке ресурса вынуждена повышать цены по сравнению с оценками p_i, а продавать по ценам, которые ниже, чем оценки.

$$\Delta U = \oint \sum (p_i(N, M) - c_i)\, dN_i \geq 0, \tag{2.40}$$

Фирма понесет убытки в количестве ΔU по сравнению с обратимым процессом.

Интенсивность потерь фирмы за счет необратимости

$$\sigma(t) = \sum_i n_i(p,c)(p_i - c_i) \geq 0. \tag{2.41}$$

Это выражение совпадает с (2.39) с той разницей, что цена определена фирмой, а не является функцией оценок; σ в данном случае имеет смысл торговых издержек.

Условие (2.40) неубывания капитализации (значит, и благосостояния) при экономическом обмене являются аналогом интеграла Клаузиуса, а закон, согласно которому при контакте двух ЭА ресурс переходит от ЭА, для которого его оценка меньше, к ЭА, у которого его оценка больше, и при этом суммарная величина связанного капитала не убывает ($\Delta(F_1 + F_2) \geq 0$), является аналогом второго начала термодинамики и позволяет построить необратимую микроэкономику, во многом, но далеко не во всем, аналогичную необратимой термодинамике. Будем называть величину σ — *диссипацией капитала.*

Прибыльность. Закупая ресурсы у одних и продавая их другим экономическим агентам, посредническая фирма извлекает базисный ресурс. *Максимальное количество E базисного ресурса, которое фирма может извлечь в изолированной неоднородной системе, естественно назвать прибыльностью.* Если на продолжительность процесса не наложено никаких ограничений, то очевидно, что прибыльности соответствует закупка по самым низким ценам (оценкам) у одних ЭА и продажа по самым высоким ценам (тоже оценкам) другим ЭА, у которых эти оценки выше. Объемы же закупок и продаж определяются условиями равенства оценок у всех ЭА в конце процесса. При таком определении прибыльность является прямым аналогом понятия «работоспособности» (эксергии) в термодинамике физических систем.

Ниже в гл.3 мы обобщим это понятие на процессы с ограниченной продолжительностью τ. В этом случае объем извлекаемого базисного ресурса будет меньше, но можно ставить задачу о таком выборе τ, для которой средняя интенсивность получения прибыли максимальна.

Второй закон микроэкономики

Аналогом законов сохранения материи и энергии в микроэкономике являются законы сохранения ресурсов, в том числе базисного. Остановимся на экономической аналогии второго закона термодинамики.

Т а б л и ц а 2.1. **Некоторые аналогии между макросистемами физической и экономической природы и характеризующими их переменными** [3]

Физическая система		Экономическая система	
Название	Обозначение	Название	Обозначение
Резервуар (обратимый теплообмен)	T_-	Экономический резервуар	p_-
Резервуар (необратимый теплообмен)	$q = \alpha(T - T_-)$	Монопольный рынок	$n = \alpha(c - p_-)$
Количество вещества	N	Запас ресурса	N
Химический потенциал	$\mu(N)$	ЭА, оценка ресурса	$p(N)$
Температ. раб. тела тепловой машины	$T(t)$	Цена фирмы-посредника	$c(t)$
Свободная энергия, работа	A	Базисный ресурс, капитал	M
Работоспособность системы	E	Прибыльность системы	E
Энтропия	S	Связанный капитал	F
Производство энтропии	σ	Диссипация капитала	σ
Внутренняя энергия	U	Капитализация	$U = M + F$
Уравнение состояния	$S(E, V, ..)$	Функция благосостояния	$S(N, M)$

Для второго закона термодинамики имеется несколько формулировок, каждая из которых может считаться следствием других. Обсудим аналоги некоторых из этих формулировок применительно к микроэкономике.

Среди многочисленных формулировок второго начала выделим две: формулировку Клаузиуса с уточнением Планка: *«Теплота сама собой не может переходить от тела холодного к телу более горячему без того, чтобы не осталось других изменений»*, а также формулировку Леонтовича: *«Невозможно построить устройство, в результате действия которого производилась бы положительная работа только за счет охлаждения одного тела без каких либо других изменений»*.

[3] Обозначения, принятые в таблице: T_- и T — температуры резервуара и контактирующей с ним системы, p_- — цена ресурса на рынке совершенной конкуренции, c — цена ресурса, назначаемая фирмой-монополистом, N — запас ресурса, U — внутренняя энергия системы и полный капитал, q и n — потоки теплоты и ресурса, M и F — базисный ресурс и связанный капитал.

М. Планк сформулировал как следствие из второго закона термодинамики следующее утверждение: *В необратимом процессе в замкнутой термодинамической системе энтропия может только возрастать, а эксергия системы уменьшаться. Состоянию равновесия такой системы соответствует максимум энтропии и минимум эксергии при условиях, отвечающих наложенным ограничениям.*

В экономике приведенным формулировкам соответствуют следующие утверждения:

1. *Поток скалярного ресурса не может переходить от ЭА, у которого его оценка выше, к ЭА с более низкой оценкой без того, чтобы не осталось других изменений.*

2. *Невозможно извлечь капитал за счет обмена ресурсами с одним ЭА без каких-либо других изменений.*

3. *Процессы ресурсообмена в изолированных микроэкономических системах протекают в таком направлении, что суммарный связанный капитал экономических агентов увеличивается и в состоянии равновесия достигает максимума, а потенциальная возможность извлечения басисного ресурса (прибыльность) уменьшается и достигает минимума, которые совместимы с наложенными на систему ограничениями. В число последних входят и условия добровольности.*

В табл. 2.1 сведены аналогии между экономическими и термодинамическими системами и характеризующими их переменными [44].

2.4. Термодинамические балансы систем физической природы

Открытая система. Термодинамические балансы записывают для открытой системы. В изолированной системе внешние потоки отсутствуют, а в замкнутой отсутствует часть из них, так что термодинамические балансы для них вытекают из общего вида этих условий для открытой системы.

Термодинамические балансы для систем физической природы устанавливают связь между потоками каждого из веществ, энергии и энтропии, которыми система обменивается с окружающей средой, возникновением этих величин в системе и скоростью их накопления. Все потоки далее будем суммировать, считая входящие потоки положительными, а выходящие — отрицательными.

Будем использовать следующие обозначения: j — индекс потока; e_j, v_j, — внутренняя энергия и обьем одного моля соответствующего потока; а p_j — его давление; $h_j = e_j + p_j v_j$ — молярная энтальпия; q_j – j-й поток теплоты; N_a — мощность, производимая системой; g_j — молярный расход j-го вещества.

Приведем общий вид балансовых уравнений.

Энергетический баланс. Скорость изменения внутренней энергии E системы определяется потоками энергии, приносимой и уносимой вместе с конвективными и диффузионными потоками вещества; потоками теплоты и мощностью совершаемой работы:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_j g_j h_j + \sum_j q_j - N_a. \tag{2.42}$$

Материальный баланс. Изменение количества N_i молей i-го компонента в системе определяется потоками вещества, а также протеканием химических реакций:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j g_j x_{ij} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{2.43}$$

Здесь x_{ij} — молярная доля i-го компонента в j-м потоке, $\alpha_{i\nu}$ — стехиометрический коэффициент, с которым i-й компонент входит в уравнение ν-й реакции, W_ν — скорость ν-й реакции.

Энтропийный баланс. Изменение энтропии S системы происходит вследствие притока энтропии вместе с веществами, поступающими в систему и покидающими ее, притока или отвода теплоты (q_j/T_j — изменение энтропии под влиянием j-го потока теплоты с температурой T_j) и производства энтропии σ вследствие необратимости процессов обмена, протекающих внутри системы:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j g_j s_j + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} + \sigma, \tag{2.44}$$

где $n_{i\nu} = -\alpha_{i\nu} W_\nu$ — интенсивность образования i-го вещества в ν-й реакции; T_ν — температура ν-й реакции.

При записи этих уравнений в число тепловых потоков включены потоки теплоты, выделяющейся или поглощаемой при химических реакциях, и зависящие от скоростей реакций.

Если рассматривается стационарный режим процесса, когда

$$dE/dt = dN_i/dt = dS/dt = 0,$$

то термодинамические балансы из дифференциальных уравнений превращаются в конечные соотношения. При рассмотрении циклического процесса балансы можно записать не для каждого момента времени, а в среднем за цикл. Так как в начале и конце цикла состояние системы одинаково, то общее изменение энергии, количества вещества и энтропии за цикл равно нулю. Балансы в этом случае также сводятся к системе интегральных равенств, связывающих друг с другом средние за цикл значения слагаемых, стоящих в правых частях уравнений (2.42)–(2.44).

Расчет производства энтропии

Будем предполагать, что система, состоящая из нескольких внутреннеоднородных подсистем, изолирована. В этом случае между i-й и j-й подсистемами, которые предполагаем внутренне равновесными, возникают потоки теплоты, потоки вещества, протекают химические реакции... Внешние потоки отсутствуют и изменение энтропии j-й подсистемы с учетом ее внутреннего равновесия ($\sigma_j = 0$) имеет вид

$$\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{T_j}\left[\sum_i \left(q_{ij} + \sum_k g_{ij} x_{ijk} \mu_{jk}\right) + \sum_{k\nu} \mu_{k\nu} n_{k\nu}\right], \qquad (2.45)$$

где $n_{k\nu}$ — поток k-го вещества, образующегося в ν-й реакции. Скорость изменения энтропии в такой системе связана с ее неоднородностью. Так как энтропия аддитивна, то эта скорость равна

$$\sigma = \sum_j \frac{dS_j}{dt}. \qquad (2.46)$$

Производство энтропии неотрицательно и в том случае, когда те или иные процессы отсутствуют, так что зависимости потоков от интенсивных переменных подсистем $q_{ij}(T_i, T_j, \mu_i, \mu_j, p_i, p_j)$, $n_{kj\nu}(p_j, T_j, \mu_j)$ должны быть таковы, чтобы сумма по j определяющихся ими слагаемых в (2.46) была неотрицательна при отсутствии остальных потоков.

Отметим, что для записи термодинамических балансов не требуется знания уравнения состояния подсистем $S_j(E_j, V_j, N_j)$, нужно лишь, чтобы такая зависимость существовала. Тогда (индекс j для простоты записи опускаем)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial S}{\partial V}\dot{V} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial N_i}\dot{N}_i,$$

что совпадает с выражением (2.45) для равновесной подсистемы, если учесть, что частные производные имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial N_i} = -\frac{\mu_i}{T}, \quad \dot{E} = q - N_a = q - P\dot{V}.$$

В качестве примеров, используя термодинамические балансы, найдем выражения для производства энтропии σ при различных взаимодействиях между подсистемами.

Теплообмен. Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух равновесных подсистем с температурами T_1 и T_2. Поток теплоты q между ними зависит от T_1 и T_2, так что

$$\operatorname{sign} q(T_1, T_2) = \operatorname{sign}(T_1 - T_2), \quad q(T_1, T_2) = 0 \quad \text{при} \quad T_1 = T_2. \tag{2.47}$$

В соответствии с (2.45) имеем

$$\dot{S}_1 = -\frac{q}{T_1}, \quad \dot{S}_2 = \frac{q}{T_2},$$

так что

$$\dot{S} = \sigma = q(T_1, T_2)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right). \tag{2.48}$$

В силу условия (2.47) производство энтропии неотрицательно.

Изотермический массоперенос. Для двух однородных подсистем, имеющих температуру T и химические потенциалы μ_1 и μ_2, g_k — поток k-го вещества. Согласно (2.45)

$$\dot{S}_j = -\frac{1}{T}\sum_k g_k(\mu_1, \mu_2)\mu_{kj}, \quad j = 1, 2.$$

Скорость изменения суммарной энтропии

$$\sigma = \dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \frac{1}{T}\sum_k g_k(\mu_1, \mu_2)(\mu_{2k} - \mu_{1k}). \tag{2.49}$$

При этом законы массопереноса удовлетворяют условию неотрицательности σ при μ_1, не равном μ_2.

Деформационное взаимодействие. Рассмотрим две подсистемы, разделенные поршнем; p_1 и p_2 — давления в подсистемах, T — их температура. Разность давлений вызывает перемещение поршня. Обозначим через v скорость изменения объема каждой из подсистем, связанную с перемещением поршня.

Производство энтропии определяется отношением энергии, превращающейся в тепло (рассеивающейся) при перемещении поршня, к температуре:

$$\sigma = \frac{v(p_1, p_2)}{T}(p_1 - p_2). \tag{2.50}$$

Вид зависимости скорости от перепада давлений определяется характером трения поршня о стенки.

Процесс химического превращения. Рассмотрим термодинамическую систему, в которой при постоянных температуре T и давлении p происходит химический процесс вида

$$\sum_{i\in I_{j1}} \alpha_{ij} B_i, \quad \underset{k_{2j}}{\overset{k_{1j}}{\rightleftharpoons}} \quad \sum_{i\in I_{j2}} \alpha_{ij} B_i, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{2.51}$$

где j — номер реакции; B_i — участвующие компоненты; I_{j1} и I_{j2} — множество индексов исходных компонентов и конечных продуктов реакции; α_{ij} — стехиометрические коэффициенты (они положительны для продуктов реакции и отрицательны для исходных компонент); k_{1j} и k_{2j} — константы скоростей прямых и обратных реакций.

Если через W_j обозначить скорость j-й реакции, то изменение числа молей i-го вещества в реакционном объеме определяется как

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_j \alpha_{ij} W_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.52}$$

Производство энтропии вследствие химического превращения имеет вид

$$\sigma_x = -\frac{1}{T} \sum_i \mu_i \frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{T} \sum_j W_j A_j, \tag{2.53}$$

где $A_j = -\sum_i \alpha_{ij} \mu_i$ — химическое сродство j-й реакции. В обратимой реакции в состоянии равновесия $A_j = 0$. Скорости реакций в свою очередь зависят от концентраций, температуры и давления.

Уравнения термодинамических балансов позволяют качественно проследить связь показателей эффективности процесса с производством энтропии σ, внешними потоками и структурой системы. Для этого показатель эффективности системы нужно выразить через потоки, фигурирующие в балансовых соотношениях. Если, например, показателем эффективности тепловой машины является ее мощность, то она входит в эти уравнения непосредственно, если — коэффициент полезного действия, то он представляет собой отношение мощности к потоку затрачиваемой теплоты. Как правило, показатели эффективности монотонно ухудшаются с ростом диссипации или прироста энтропии в периодических процессах. В силу этого задача сводится к выбору такой структуры и параметров систем, которые бы при тех или иных внешних ограничениях обеспечили минимум производства энтропии.

Использование уравнений термодинамических балансов для выделения области реализуемых состояний. Рассмотрим стационарный процесс, в котором $\dot{E} = \dot{N} = \dot{S} = 0$. В этом случае из уравнений термодинамических балансов (2.42)–(2.44) и неравенства $\sigma \geq \sigma_{\min}$ вытекают условия, которым должны удовлетворять реализуемые значения переменных в стационарном режиме термодинамического процесса:

$$\sum_j g_j h_j + \sum_j q_j - N_a = 0, \tag{2.54}$$

$$\sum_j g_j x_{ij} + \sum_\nu \alpha_{i\nu} W_\nu = 0, \tag{2.55}$$

$$\sum_j g_j s_j + \sum_{i\nu} \frac{\mu_{i\nu} n_{i\nu}}{T_\nu} + \sum_j \frac{q_j}{T_j} \leq -\sigma_{\min}. \tag{2.56}$$

При этом нужно учесть, что величина $\sigma_{\min}$ в свою очередь зависит от значений потоков, коэффициентов тепло- и массопереноса, гидродинамики аппаратов и пр.

Важно, что условия минимума производства энтропии (условия минимальной диссипации) позволяют выяснить, близок ли процесс в реальной системе к процессу в системе, которая при данных ограничениях на размеры аппаратов и на интенсивности потоков термодинамически совершенна.

Оценки совершенства систем в классе обратимых процессов зависят только от параметров входных и выходных потоков и внешних источников и не зависят от организации системы, коэффициентов и кинетики тепло- и массопереноса. А значит, обратимые оценки не позволяют оптимизировать системы по эти факторам. Нельзя воспользоваться обратимыми соотношениями и для важного класса задач о минимальных расходах энергии, потребных для поддержания неравновесного поля температур, концентраций и пр. Например, в задачах об оптимальном отоплении зданий, выборе последовательности разделения смесей и др.

2.5. Термодинамические балансы систем экономической природы

Подобно тому, как для систем физической природы термодинамические балансы включают наряду с балансами по веществу и энергии баланс по энтропии, в экономических системах балансовые уравнения наряду с балансами по ресурсам и капиталу должны включать балансовое уравнение по фактору необратимости. В этом разделе логика составления и использования термодинамических балансов перенесена на экономические системы с учетом тех их особенностей, о которых говорилось выше.

Изолированная система, условия равновесия

В изолированной системе объем всех ресурсов, включая базисный, остается неизменным, если система не содержит производственной фирмы, преобразующей одни виды ресурсов в другие. В общем случае объем i-го ресурса в системе изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{N}_i = \sum_j W_j(p_j)\alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., \tag{2.57}$$

где $W_j(p_j)$ — интенсивность процесса преобразования ресурсов в j-й подсистеме; коэффициенты $\alpha_{ij} > 0$, если i-й ресурс возникает в j-й подсистеме и $\alpha_{ij} < 0$, если этот ресурс расходуется. Они определяют, сколько i-го ресурса возникает (расходуется) в единицу времени.

Суммарный запас ресурса и капитала в изолированной системе не изменяется в силу процессов обмена, так что для потоков обмена ресурсами и капиталом между подсистемами имеем

$$\sum_j n_{ij}(p_i, p_j) = 0, \quad \sum_j c_{ij}(p_i, p_j) n_{ij}(p_i, p_j) = 0, \quad i = 1, 2, ... \tag{2.58}$$

Будем предполагать, что в системе имеется валютная биржа, тогда в равновесии нормированная функция благосостояния достигает максимума. Если производство в системе отсутствует, то условия максимума $\overline{S}$ или при отсутствии валютной биржи суммарного связанного капитала F определяют равновесное распределение ресурсов и капитала между ЭА. Для простоты покажем это на системе из двух ЭА, обменивающихся скалярным ресурсом.

Равновесию в такой системе соответствует решение следующей задачи:

$$[\overline{S}_1(N_1, M_1) + \overline{S}_2(N_2, M_2)] \Rightarrow \max \tag{2.59}$$

при условиях

$$M_1 + M_2 = M_0, \quad N_1 + N_2 = N_0.$$

Здесь в правых частях равенств фигурируют суммарные запасы ресурсов до начала процесса ресурсообмена.

Условия оптимальности задачи (2.59) очевидно приводят к равенствам

$$\frac{\partial \bar{S}_1(N_1, M_1)}{\partial M_1} = \frac{\partial \bar{S}_2(N_2, M_2)}{\partial M_2}, \quad \frac{\partial \bar{S}_1(N_1, M_1)}{\partial N_1} = \frac{\partial \bar{S}_2(N_2, M_2)}{\partial N_2}, \tag{2.60}$$

или с учетом характера зависимости функций благосостояния от запасов ресурса и капитала

$$v_1 p_{01} = v_2 p_{02} = \bar{p_0} \quad , p_1 = p_2. \tag{2.61}$$

Мы получили четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Тем же условиям соответствует равновесие для любого числа ЭА и векторного ресурса.

Наличие валютной биржи приводит к возможности прямого обмена базовым ресурсом. Так как условия такого обмена значительно проще, чем при обмене материальным ресурсом, его можно считать обратимым, при этом первое из равенств (2.61) выполнено в любой момент времени.

Таким образом, равновесию в изолированной системе, не содержащей производства, соответствует равнство оценок ресурсов и нормированных оценок капитала. Эти же условия справедливы и при наличии производства, если начальные запасы ресурсов ограничены, все ресурсы «необходимы», а функции благосостояния и производственные функции W_j выпуклы вверх. В этом случае оценки вырабатываемых ресурсов с увеличением их обьема падают, а потребляемых растут, так что поток производства стремится к нулю.

Процесс прямого ресурсообмена в изолированной неоднородной системе необратим. Показателем необратимости может служить прирост нормированной функции благосостояния $\Delta\bar{S}$, либо прирост связанного капитала ΔF.

$$\Delta\bar{S} = \left(\bar{p_0} M - \sum_j p_{0j} v_j M_j\right) + \Delta F.$$

В силу (2.61) и неизменности базового ресурса в системе первое слагаемое в этом выражении равно нулю и $\Delta\bar{S} = \Delta F$

$$\Delta F = \sum_i p_i(N_i, M) N_i - \sum_{ijp_{ij}(N_j, M_j)N_{ij}} , \tag{2.62}$$

где $N_i = \sum\limits_j N_{ij}, M = \sum\limits_j M_j, p_i$ — равновесная оценка i-го ресурса, p_{ij} — начальная оценка i-го ресурса в j-й подсистеме.

Чтобы вернуть систему в исходное состояние, закупив ресурсы по равновесным ценам и продав его подсистемам, оценки которых ниже равновесных, нужно затратить капитал $\Delta M = \Delta F$.

При отсутсвии валютной биржы возможна неединственность состояния равновесия. Причина иэтого состоит в том, что при равенстве оценок ресурсов в зависимости от кинетики обмена запасы базового ресурса в равновесии оказываются разными, а прямой обмен этим ресурсом невозможен.

Открытая система

Запишем уравнения балансов для неоднородной экономической системы, обменивающейся с окружением потоками ресурсов и капитала. При этом индекс i припишем i-му виду ресурса, а индекс j — j-й подсистеме. Каждая из подсистем обменивается потоками ресурсов с внешними продавцами и покупателями и с другими подсистемами, входящими в рассматриваемую систему. Потоки ресурсов и капитала (базисного ресурса), поступающие в подсистему, будем считать положительными, а покидающие ее — отрицательными.

Внешние потоки подразделяют на две категории:

а) принудительно поступающие в систему и меняющие свою интенсивность во времени под влиянием внешних факторов, и

б) зависящие от цен, назначаемых внешними по отношению к подсистеме продавцами и покупателями, и от оценок контактирующих с ней подсистем, а также от оценок ресурса в рассматриваемой подсистеме. В термодинамике первые из них принято называть *конвективными*, а вторые — *диффузионными*. В соответствии с этим будем присваивать конвективным потокам индекс k, а диффузионным — индекс d. Потоки и оценки в тех выражениях, где у них отсутствует индекс ресурса i, для упрощения записи будем, как в (2.39), предполагать векторными.

Запишем балансовые соотношения по каждому из видов ресурсов, капиталу и фактору необратимости:

Уравнения баланса по ресурсам:

$$\dot{N}_i = \sum_j \left(n_{ij}^k(t) + \sum_\nu n_{ij\nu}^d(p_j, p_\nu) + W_j(p_j)\alpha_{ij} \right), \quad i = 1, 2, ..., \qquad (2.63)$$

где суммирование ведется по всем подсистемам; $W_j(p_j)$, как и выше — интенсивность процесса преобразования ресурсов в j-й подсистеме; коэффициенты $\alpha_{ij} > 0$, если i-й ресурс возникает в j-й подсистеме и $\alpha_{ij} < 0$, если этот ресурс расходуется.

Во многих случаях ЭА даже без взаимодействия с другими ЭА-ми представляет собой открытую систему, так как потребляет имеющиеся у него ресурсы и получает конвективный доход извне, не зависящий от потоков ресурса. К потреблению можно отнести выплаты по налогам, а к доходу — получение процента по банковским вкладам. Так что в уравнениях (2.63) к конвективным потокам могут быть отнесены потоки потребления, ресурсы, поступающие в систему как гуманитарная помощь, или изымаемые из системы принудительно в форме натуральных налогов.

Уравнение баланса по базисному ресурсу:

$$\dot{M} = \sum_j \left(m_j^k(t) - \sum_k c_{kj} n_{kj}^d(p_j, c_{kj}) \right). \tag{2.64}$$

Здесь учтено, что изменение базисного ресурса связано только с обменом между ЭА, входящими в систему, и ее окружением или с экономическими резервуарами. Внутренний ресурсообмен не меняет суммарного запаса базисного ресурса, c_{kj} — цена k-го диффузионного потока, поступающего в j-ю подсистему.

Уравнение баланса по связанному капиталу:

$$\dot{F} = \sum_j p_j \left[n_{ij}^k(t) + \sum_k n_{kj}^d(p_j, c_{kj}) \right] + \sigma. \tag{2.65}$$

Здесь первое слагаемое соответствует изменению связанного капитала за счет обмена системы с окружением, а второе — (диссипация капитала σ), скорость его роста за счет внутреннего ресурсообмена между подсистемами и преобразования ресурсов в процессе производства. Она равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_j \sum_\nu n_{j\nu}(p_j, p_\nu)(p_j - p_\nu) + \sum_j W_j(p_j) A_j, \tag{2.66}$$

где p_j и p_ν — векторы оценок ресурсов j-й и ν-й подсистем с составляющими p_{ij} и $p_{i\nu}; A_j = \sum\limits_i \alpha_{ij} p_{ij}$; $n_{j\nu} = -n_{\nu j}$ — вектор-функция потока ресурсов.

Величина $\sigma(p) \geq 0$, так что в неоднородной открытой системе в отсутствие конвективных потоков связанный капитал в выходящих потоках не меньше, чем в потоках, поступающих в систему. Знак равенства соответствует однородной системе.

Как и в термодинамике, условие $\sigma(p_1, p_2) \geq 0$ вместе с балансовыми соотношениями (2.63)–(2.65) выделяет границу области реализуемости экономической системы в классе обратимых процессов. Наложенные на интенсивность того или иного потока ограничения, позволяют поставить и решить задачу о величине $\sigma_{\min} > 0$, достижимой при этих условиях. Область реализуемости в этом случае сужается, так как вместо неравенства $\sigma \geq 0$ справедливо неравенство $\sigma \geq \sigma_{\min}$.

Если $\Delta p_{j\nu} = p_j - p_\nu$ мало, а кинетическая функция $n_{i\nu}$ дифференцируема по совокупности аргументов, то в окрестности нуля кинетику можно линеаризовать, приняв потоки пропорциональными разности оценок.

Тогда σ представляет собой положительно-определенную квадратичную форму переменных $\Delta p_{j\nu}$.

В отличие от систем физической природы, в которых при стационарных внешних условиях и линейной кинетике устанавливается режим, с постоянными значениями интенсивных переменных и потоков обмена, в экономике при стационарных внешних условиях в отсутствие потоков потребления в силу принципа добровольности происходит накопление базисного ресурса в каждой из подсистем, что меняет значения оценок, если они зависят от M.

Условие добровольности обмена накладывает дополнительные ограничения на множество возможных состояний открытой системы. Чтобы найти эти ограничения, запишем балансовые соотношения по ресурсу и капиталу для j-й подсистемы:

$$\dot{N}_{ij} = n_{ij}^k(t) + n_{ij}^d(p_j, p_\nu) + \sum_\nu n_{ij\nu}(p_j, p_\nu) + W_j(p_j)\alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., \tag{2.67}$$

$$\dot{M}_j = m_j^k(t) - \sum_i \left[c_{ij} n_{ij}^d(p_j, c_j) + \sum_\nu c_{ij\nu}(p_j, p_\nu) n_{ij\nu}(p_j, p_\nu) \right]. \tag{2.68}$$

Для любого ЭА в силу условий добровольности скорость изменения функции благосостояния, а значит и его капитализации, неотрицательна

$$\dot{U}_j = \dot{S}_j / p_{0j} = \sum_i (p_{ij}\dot{N}_{ij} + \dot{M}_j) \geq 0,$$

что с учетом (2.67), (2.68) приводит к ограничениям на оценки и потоки в системе

$$\begin{aligned} &\sum_i \Bigg[p_{ij}[n_{ij}^k(t) + W_j(p_j)\alpha_{ij}] + \sum_\nu [n_{ij\nu}(p_j, p_\nu)(p_{ij} - c_{ij\nu}(p_j, p_\nu))] + \\ &+ n_{ij}^d(p_j, c_j)(p_{ij} - c_{ij}) \Bigg] + m_j^k(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{2.69}$$

Условия (2.69) существенно отличают макросистемы экономической от макросистем физической природы.

Глава 3

Термодинамическое описание процессов и задачи оптимизации в изолированных экономических системах

Модели, рассмотренные в предыдущей главе, позволяют найти состояние равновесия в экономических системах, количественно оценить и минимизировать необратимость протекающих процессов. Они же позволяют формулировать и решать целый класс экстремальных задач, возникающих в том случае, когда экономическая система содержит активную подсистему. Это задачи о максимальном извлечении базисного ресурса в изолированной системе при тех или иных условиях, задачи о максимальной интенсивности потока извлечения базисного ресурса в стационарном режиме открытой системы, о поддержании неравновесного состояния такой системы с минимальной затратой базисного ресурса. В главе рассмотрены задачи, относящиеся к изолированным системам.

3.1. Процессы ресурсообмена и равновесие в изолированной системе

Систему называют *замкнутой* по тому или иному виду ресурса, если не существует обмена этим ресурсом с окружением. Система *изолированная*, если она замкнута по всем ресурсам.

Остановимся на обмене ресурсами в изолированных системах. В таких системах суммарный объем ресурсов и капитала не изменяется, они только перераспределяются между подсистемами, при этом функция благосостояния и капитализация каждой подсистемы, как в любых процессах обмена, не убывает. Скорость роста суммарной капитализации U с учетом неизменности суммарного базисного ресурса равна скорости роста связанного капитала системы

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dF}{dt} = \sigma = \sum_j \sum_i p_{ji} \frac{dN_{ji}}{dt} \geq 0. \tag{3.1}$$

В состоянии равновесия, которое в силу свойств функций благосостояния всегда устойчиво, капитализация системы максимальна, а потоки обмена $n_{ij} = dN_{ji}/dt$ равны нулю.

В термодинамике условия равновесия можно получить из задачи о максимуме суммарной энтропии системы при заданном суммарном значении той или иной экстенсивной переменной. Например, если задан суммарный объем подсистем, а остальные экстенсивные переменные неизменны, то максимуму суммарной энтропии соответствует такое распределение объемов, при котором производные энтропии каждой системы по ее объему одинаковы, а это приводит к равенству давлений. Аналогично распределение общего количества тепловой энергии в равновесии приводит к равенству температур и т.д.

В микроэкономике условия равновесного распределения ресурсов также можно получить из требования максимума суммарного связанного капитала при заданном суммарном запасе каждого из ресурсов. Оно приводит к распределению, при котором производные капитализации каждой подсистемы по запасам распределяемого ресурса одинаковы. Эти производные равны оценкам ресурсов.

Важное отличие экономических систем от систем физической природы состоит в том, что оценки базисного ресурса в состоянии равновесия могут быть разными. При контакте нескольких подсистем эти оценки изменяются и их равновесные значения зависят от кинетики ресурсообмена.

Продажа и покупка ресурсов

Рассмотрим систему, в которой товары обменивают на базисный ресурс. Покажем, что в этом случае при отсутствии валютной биржи состояние равновесия не единственно.

В состоянии равновесия справедливы балансовые соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{N_{ij}} = N_{i0}, \quad i = 1, ..., m, \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{M_j} = M_0. \tag{3.3}$$

Здесь i и j — индексы вида ресурса и ЭА соответсвенно, а чертой отмечены равновесные величины ресурсов. К уравнениям балансов нужно добавить условия равновесия (равенства оценок ресурсов для всех ЭА)

$$p_{ij}(\overline{N_j}, \overline{M_j}) = \overline{p_i}, \quad i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n. \tag{3.4}$$

Общее число неизвестных (векторы $\overline{N}, \overline{M}$ и $\overline{p}$) равно $(m+1)n+m$. Число уравнений (3.2)–(3.4) равно $m(n+1)+1$ с учетом того, что $n \geq 2$, число неизвестных всегда больше числа уравнений (не хватает $(n-1)$-го условия). Так что равновесие не определено однозначно.

Из свойств кинетических функций следует, что в процессе ресурсообмена капитализация каждого из ЭА не уменьшается, т.е. справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{k}(\overline{p_{ij}}\,\overline{N_{ij}} - p_{ij0}N_{ij0}) + \overline{M_j} - M_{j0} \geq 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{3.5}$$

Состояние равновесия, удовлетворяющее условиям (3.2)–(3.5), доопределено, если известна кинетика ресурсообмена. Она позволяет найти промежуточную цену $c_{ij\nu}$ по условию равенства потоков продажи и покупки ресурса

$$n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}) = -n_{i\nu j}(c_{ij\nu}, p_{i\nu}). \tag{3.6}$$

При этом поток капитала направлен навстречу потоку ресурса и равен

$$m_{j\nu} = \sum_{i=1}^{k} c_{ij\nu} n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}) = -m_{\nu j}, \quad j, \nu = 1, ..., n. \tag{3.7}$$

Динамику изменения состояния системы характеризуют уравнения

$$\frac{dM_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n} c_{ij\nu} n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}), \tag{3.8}$$

$$\frac{dN_{ij}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}), \quad j = 1, ..., n, \quad i = 1, ..., k \tag{3.9}$$

с фиксированными начальными условиями. При этом $c_{ij\nu}$ выражена через оценки ресурса с использованием равенства (3.6). Решение этих уравнений при $t \to \infty$ стремится к состоянию равновесия, удовлетворяющему всем записанным выше условиям.

Случай скалярного ресурса и двух ЭА

Прирост капитализации каждого из ЭА зависит от того, по какой цене ведется обмен. Промежуточная цена c определяется условием равенства спроса и предложения

$$n_1(p_1, c) = n_2(p_2, c) \tag{3.10}$$

и должна удовлетворять неравенству

$$p_1 \geq c \geq p_2, \tag{3.11}$$

в противном случае будет нарушен принцип добровольности (цена меньше оценки, когда ресурс продают ЭА, и больше, когда у него ресурс покупают).

Как показано в предыдущей главе, для кинетики обмена двух ЭА линейной относительно разности между ценой и оценкой

$$n_1(p_1, c) = \alpha_1(p_1 - c), \tag{3.12}$$

$$n_2(p_2, c) = \alpha_2(p_2 - c). \tag{3.13}$$

После исключения промежуточной цены по условию $-n_1 = n_2 = n$ получим

$$c(p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{3.14}$$

При этом

$$\frac{dM_1}{dN_1} = \frac{dM_2}{dN_2} = -c, \quad dN_2 = -dN_1, \tag{3.15}$$

$$N_1(0) = 0, \quad M_1(0) = M_0, \quad N_2(0) = N_0, \quad M_2(0) = 0.$$

Условия (3.15) при заданной цене $c(N_1)$ позволяют выразить M_1, M_2 и N_2 через N_1. Изменение капитализации ЭА можно найти как

$$\Delta U_1 = \int_0^{\overline{N_1}} (p_1(N) - c(N))dN, \tag{3.16}$$

$$\Delta U_2 = \int_0^{\overline{N_1}} (c(N) - p_2(N))dN. \tag{3.17}$$

Для системы в целом

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \Delta F = \int_0^{\overline{N_1}} (p_1(N_1) - p_2(N_1))dN_1. \tag{3.18}$$

В равенствах (3.16)–(3.18) p_1, p_2 зависят только от N_1, так как M_1, M_2 и N_2 выражены через N_1 и $c(N_1)$ с использованием уравнений (3.15).

При $N_1 \to \overline{N_1}$ цена c стремится к $\overline{p}$. Если $c = p_2$, то $\Delta U_2 = 0$, а прирост капитализации системы $\Delta U = \Delta U_1$ и может быть найден согласно выражению (3.18); если $c = p_1$, то $\Delta U = \Delta U_2$. Равновесные состояния в каждом из этих случаев отличны друг от друга.

Нанесем сплошными линиями на плоскости с координатами N_1, M_1 и началом координат в точке 1 линии уровня функции $S_1(N, M)$.

Аналогично для второго ЭА отложим его капитал M_2 и ресурс N_2 от точки 2, причем запас ресурса N_2 откладывают влево, а капитал вниз, и нанесем пунктиром линии постоянных значений S_2. Подобный рисунок носит название диаграммы (ящика) Эджуорта (рис. 3.1).

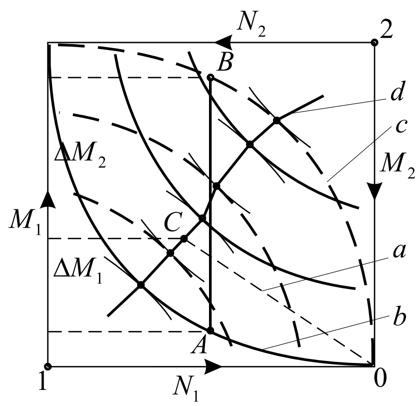

Рис. 3.1: Диаграмма Эджуорта

Так как вдоль линии уровня дифференциал каждой из функций благосостояния равен нулю

$$dS = \frac{\partial S}{\partial N} dN + \frac{\partial S}{\partial M} dM = 0,$$

а оценка ресурса p равна отношению производной S по ресурсу к ее производной по капиталу, то наклон касательной к линии уровня

$$\frac{\partial M}{\partial N} = -\frac{S_M}{S_N} = -p.$$

Таким образом, все точки, в которых линии уровня касаются друг друга, удовлетворяют условиям равновесия (3.4). Множество таких точек образует множество равновесия d. Начальному состоянию системы соответствует правый нижний угол диаграммы Эджуорта, а любая ее точка удовлетворяет балансовым соотношениям (3.2). Поскольку с уменьшением N_1 его оценка растет, наклон линий уровня уменьшается (они выпуклы вниз); базовый ресурс $M_1 \leq M^0$.

Из заданного начального состояния не в каждую точку кривой равновесия можно попасть без нарушения условий добровольности. Достижимые точки выделяют неравенства (3.11). Они гарантируют, что ни для одного из ЭА функция благосостояния, а значит и капитализация, не уменьшится. Достижимый участок кривой равновесия Q лежит на рис. 3.1 между линиями уровня b и c.

Перейти из любого состояния равновесия, достигнутого при выборе той или иной цены c, удовлетворяющей неравенствам (3.11), *в другое равновесное состояние нельзя, не уменьшив капитализацию и функцию благосостояния у одного из ЭА. Таким образом, множество равновесных состояний Q является Парето-оптимальным (множеством компромиссов).*

Бесприбыльный аукцион

Пусть цена c фиксирована на некотором значении $\overline{c} = \overline{p}$. Траектория изменения состояния системы соответствует линейной зависимости между изменением ресурсов (пунктирная прямая ОС). Система достигает равновесия только в случае, когда величина c выбрана таким образом, что она равна оценкам ресурсов в состоянии равновесия. Такому выбору соответствует «бесприбыльный аукцион», то есть аукцион, в котором базовый ресурс полностью остается у участников обмена.

Условия равновесия включают в себя балансовые соотношения по ресурсам (3.2) и условия (3.4), в правой части которых стоят цены $\overline{c}$. Для запасов базисного ресурса в состоянии равновесия справедливы равенства

$$\overline{M_j} = M_j(0) - \sum_{i=1}^{k} \overline{c}(\overline{N_{ji}} - N_{ji}(0)), \quad j = 1, ..., n, \tag{3.19}$$

из которых с учетом (3.2) вытекают условия (3.3).

Число уравнений, определяющих состояние равновесия, $k(1+n)+n$, равно числу неизвестных, так что состояние равновесия при бесприбыльном аукционе не зависит от кинетики и определено зависимостью оценок ЭА от запасов ресурсов, т.е. видом функций благосостояния.

Примером бесприбыльного аукциона являются рынки электрической мощности или тепловой энергии, на которых генерирующие компании и потребители выставляют ценовые заявки (зависимость количества вырабатываемой и потребляемой энергии от стоимости), а диспетчер или программа, выполняющая роль диспетчера, назначает цену, при которой спрос равен предложению (см. гл. 4), и распределяет потоки между производителями и потребителями.

Для изолированных экономических систем справедливо следующее Утверждение: *При каждом начальном распределении ресурсов между подсистемами в состоянии равновесия ресурсы распределяются таким образом, что суммарная капитализация или, что то же самое, величина связанного капитала системы, достигает максимума, совместимого с наложенными на систему ограничениями:*

$$U(M^0, \overline{N}) = M^0 + \sum_i \sum_j p_{ij}(\overline{N}_{ij}, \overline{M}_j)\overline{N}_{ij} \to \max_{\overline{N}_{ij}}, \tag{3.20}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\sum_i \overline{N}_{ij} = N_i^0, \quad \overline{N}_{ij} \geq 0, \quad \overline{M}_j = M_j^0 - \\ - \sum_i p_{ij}(\overline{N}_{ij}, \overline{M}_j)(\overline{N}_{ij} - N_{ij}^0) \geq 0, \forall i, j.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Если равновесные запасы каждой подсистемы по каждому виду ресурсов положительны, то этот максимум равен

$$U^*(M^0) = M^0 + \sum_i \overline{p_i} N_i^0, \tag{3.22}$$

где $\overline{p_i}$ — равновесная оценка i-го ресурса, общая для всех ЭА.

Системы, включающие валютную биржу

На валютной бирже каждый j-й ЭА обменивает свою валюту на базисный ресурс по некоторому установившемуся курсу v_j. Будем предполагать, что оборот валютной биржи столь велик, что потоки обмена между биржей и каждым из ЭА не оказывают влияния на курсы валют. Так что оценка p_{0j} базисного ресурса постоянна или изменяется под влиянием внешних по отношению к системе факторов.

Наличие биржи существенно влияет на равновесие в системе и множество состояний каждого из ЭА. Действительно, условие

$$p_{0j}(N_j, M_j) = 1/v_j, \quad j = 1, ..., n \tag{3.23}$$

накладывает ограничение на множество состояний ЭА, связывая запас базисного ресурса с N_j. Дифференциал капитализации

$$dU_j = dS_j v_j = dM_j + \sum_i p_i(N_j, M_j) dN_{ji}$$

на этом множестве оказывается полным дифференциалом. Если из условия (3.23) выразить $M_j(N_j)$ и подставить в p_{ji}, то для получившихся оценок $\tilde{p}_j = p_j[N_j, M_j(N_j)]$ справедливы $\dfrac{n(n-1)}{2}$ соотношений, вытекающих из условий полного дифференциала U_j,

$$\frac{\partial \tilde{p}_{ji}}{\partial N_{jl}} = \frac{\partial \tilde{p}_{jl}}{\partial N_{ji}}, \quad i, l = 1, 2, ..., k, \quad j = 1, ..., n. \tag{3.24}$$

Равновесие в замкнутой системе ресурсообмена при наличии валютной биржи единственно, оно определено условиями (3.2), (3.4), к которым добавляются требования (3.23). В состоянии равновесия достигает максимума сумма нормированных функций благосостояния

$$\bar{S} = \sum_j S_j(\overline{N_j}, \overline{M_j}) v_j \to \max \tag{3.25}$$

при условиях (3.2).

Обмен с резервуаром. Оценки резервуара p^0 постоянны, так что линии $U = \text{const}$ на рис. 3.1 имеют вид прямых. Максимальному приросту ΔU для ЭА соответствует обмен по ценам, равным p^0. В этом случае в состоянии равновесия капитал M и запасы ресурса N подчиняются условиям

$$p_i(M, N) = p_i^0, \quad i = 1, ..., m, \tag{3.26}$$

$$M - M_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 (N_{i0} - N_i), \tag{3.27}$$

$$M > 0, \quad N_i > 0, \quad i = 1, ..., m, \tag{3.28}$$

где M_0 и N_0 — начальные значения M и N. Условия (3.26), (3.27) определяют состояние равновесия системы, если выполнены ограничения (3.28). Если же они не выполнены, то часть переменных приравнивают к нулю, уменьшая число условий (3.26), (3.27) для расчета оставшихся переменных.

Подсчитаем прирост капитализации ЭА при $m = 1$:

$$\Delta U = \int_{N_0}^{N} \frac{dU}{dN} dN = \int_{N_0}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial M} \frac{dM}{dN} + \frac{\partial U}{\partial N} \right) dN.$$

Так как

$$\frac{dM}{dN} = -p^0, \quad \frac{\partial U}{\partial N} = p(M, N), \quad M = M_0 - p^0(N - N_0),$$

то

$$\Delta U = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} \Big[p(M_0 - p^0(N - N_0), N) - p^0 \Big] \, dN. \qquad (3.29)$$

Если $p \geq p^0$, то $dN \geq 0$, а если меньше, то $dN \leq 0$, так что прирост ΔU неотрицателен.

Покажем, что при обмене по ценам резервуара прирост функции благосостояния ЭА максимален. Действительно

$$S(N, M) = S\left(N_1, ..., N_m, M(0) - \sum_{i=1}^{m} p_i^0 (N_i - N_i(0))\right) \to \max_N .$$

Условия максимума $S(N)$

$$\frac{\partial S}{\partial N_i} = \frac{\partial S}{\partial M}\,\frac{\partial M}{\partial N_i} + \frac{\partial S}{\partial N_i} = p_0(p_i - p_i^0) = 0, \quad i = 1, ..., m \qquad (3.30)$$

совпадают с условиями равновесия (3.26). Таким образом, в равновесии с экономическим резервуаром достигается максимум функции благосостояния ЭА.

Конкретизируем записанные выше соотношения для случая, когда функция благосостояния ЭА имеет форму Кобба–Дугласа

$$S = (M, N_1, N_2) = M^{\gamma_0} \prod_{i=1}^{m} N_i^{\gamma_i} .$$

Условия равновесия (3.26) приводят к системе линейных уравнений

$$N_i c_i \left(1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_i}\right) + \sum_{\nu=1,\, \nu \neq i}^{m} c_\nu N_\nu = U_0 = M(0) + \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu N_\nu(0), \quad i = 1, ..., m. \qquad (3.31)$$

Здесь U_0 — капитализация ЭА в начальном состоянии по ценам рынка. Решение уравнений (3.31) имеет вид

$$M = U_0 \gamma_0, \quad N_i = U_0 \frac{\gamma_i}{c_i}, \quad i = 1, ..., m. \qquad (3.32)$$

Значение функции благосостояния в равновесии с рынком

$$S = S(N) = U_0 \gamma_0^{\gamma_0} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\gamma_i}{c_i}\right)^{\gamma_i} . \qquad (3.33)$$

П р и м е р. Пусть

$$S = (M, N_1, N_2) = M^{1/3}\, N_1^{1/2}\, N_2^{1/6}. \tag{3.34}$$

Начальные запасы ресурсов и цены

$$M(0) = 1, \quad N_1(0) = 2, \quad N_2(0) = 3, \quad c_1 = 10, \quad c_2 = 20.$$

Условия равновесия и баланса по капиталу примут вид

$$\frac{M}{N_1} = \frac{20}{3}, \quad \frac{M}{N_2} = 40, \quad M = 1 - 10(N_1 - 2) - 20(N_2 - 3).$$

По условиям (3.32), (3.33) находим

$$U_0 = 81, \quad N_1 = 81/20 = 4.05, \quad N_2 = 81/120 = 0.675, \quad M = 27,$$

$$S = M^{1/3}\, {N_1}^{1/2}\, {N_2}^{1/6} = 5.65, \quad S(0) = 1.69.$$

Прирост функции благосостояния ЭА $\Delta S = S(N) - S(0) = 3.96$.

Для $m > 1$

$$\Delta U = \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{N_{0\nu}}^{N_\nu} [p_\nu(M(N), N) - p_\nu^0] dN_\nu, \tag{3.35}$$

где

$$M(N) = M_0 + \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu^0 (N_{0\nu} - N_\nu).$$

Бартер. При бартере базисный ресурс не участвует в процессе ресурсообмена. Его роль может играть любой из ресурсов, оценка которого положительна у всех участвующих в процессе обмена ЭА. При числе ресурсов большем трех может оказаться, что бартерный обмен не приводит систему в состояние равновесия.

Рассмотрим систему из двух ЭА, каждый из которых обладает двумя видами ресурсов и не обладает базисным ресурсом или не использует его при обмене. В начальном состоянии запасы ресурсов и их оценки заданы и равны

$$N_1^0 = (N_{11}^0, N_{12}^0), \quad N_2^0 = (N_{21}^0, N_{22}^0), \quad p_{1\nu}^0(N_\nu^0), \quad p_{2\nu}^0(N_\nu^0), \quad \nu = 1, 2,$$

причем распределение базисного ресурса M фиксировано. Пусть оценки второго из ресурсов положительны. Тогда обмен по первому ресурсу происходит от ЭА, у которого отношение оценок $\dfrac{p_{1\nu}^0}{p_{2\nu}^0}$ меньше, к тому, у которого это отношение больше. Он прекращается при выполнении условия

равновесия
$$\frac{p_{11}(\overline{N_1})}{p_{21}(\overline{N_1})} = \frac{p_{12}(\overline{N_2})}{p_{22}(\overline{N_2})}. \tag{3.36}$$
Оценки в этом равенстве зависят от равновесного распределения ресурса. Будем называть отношения оценок ресурсов каждого ЭА *относительными оценками.* В равновесии двух ЭА с двумя видами ресурсов у каждого относительные оценки выравниваются.

Условие (3.36) совместно с балансовыми соотношениями
$$\overline{N_{11}} + \overline{N_{21}} = N_{11}^0 + N_{21}^0, \quad \overline{N_{12}} + \overline{N_{22}} = N_{12}^0 + N_{22}^0 \tag{3.37}$$
не определяет однозначно распределение ресурсов в равновесии, т.е. значения четырех переменных. Чтобы его доопределить, необходимо, как и при продаже ресурса, привлечь кинетику обмена.

Рассмотрим более общий случай бартера, в котором участвует n ЭА, каждый из них обладает m видами ресурсов и будем считать оценки всех ресурсов положительными. Совсем не обязательно, чтобы роль базового ресурса выполнял один и тот же ресурс. Бартер по той или иной паре ресурсов между любыми двумя ЭА не противоречит принципу добровольности, если векторы соответствующих этой паре относительных оценок не равны друг другу.

Для каждого ЭА число независимых относительных оценок равно $(m-1)$. Если потребовать, чтобы в равновесии для всех ЭА соблюдались условия равенства относительных оценок и условия баланса по каждому из m ресурсов, то получим $(m-1)(n-1)+m = mn-(n-1)$ условий. Число же неизвестных, определяющих равновесное состояние системы, равно nm. Разница между числом неизвестных и числом условий $\Delta = (n-1)$, $n \geq 2$. Таким образом, условия равновесия и в этом случае выполнены на многообразии, размерность которого на единицу меньше числа ЭА, участвующих в бартере. Для однозначного определения равновесия необходимо знать кинетику бартерных обменов.

П р и м е р. В качестве примера рассмотрим бартерный обмен двух ЭА, имеющих одинаковую функцию благосостояния (3.34), но различные начальные запасы ресурсов. Для первого из них $M_1(0) = 1, N_{11}(0) = 4, N_{12}(0) = 2$; для второго $M_2(0) = 2, N_{21}(0) = 1, N_{22}(0) = 2$. Таким образом, суммарные запасы ресурсов $N_1 = 7, N_2 = 3$.

Равновесные запасы ресурсов найдем по условиям (3.36)–(3.37). При этом оценки для первого и второго ресурсов в равновесии равны соответственно
$$p_{11} = \frac{3M_1}{2\overline{N_{11}}}, \quad p_{21} = \frac{3M_1}{6\overline{N_{12}}}, \quad p_{12} = \frac{3M_2}{2\overline{N_{21}}}, \quad p_{22} = \frac{3M_2}{6\overline{N_{22}}}.$$

Приравнивая относительные оценки ресурсов, получим, что

$$\overline{N_{11}N_{22}} = \overline{N_{12}N_{21}}. \tag{3.38}$$

Учет суммарных запасов ресурсов добавляет еще два уравнения:

$$\overline{N_{11}} + \overline{N_{21}} = 5, \quad \overline{N_{12}} + \overline{N_{22}} = 4. \tag{3.39}$$

Знание зависимости потока первого и встречного потока второго ресурса от разности относительных оценок позволяет найти равновесное распределение на множестве, удовлетворяющем условиям (3.38), (3.39).

Равновесие с резервуаром, влияние изменения оценок

Пусть ЭА находится в равновесии с резервуаром, оценки базового ресурса постоянны и могут быть приняты за единицу. Вектор оценок ресурсов ЭА в равновесии равен оценкам резервуара p. Ресурсы перераспределятся между резервуаром и ЭА так, чтобы оценки их стали одинаковы (суммарная функция благосостояния максимальна). Вектор равновесных запасов ресурсов ЭА обозначим через N^*, функцию благосостояния резервуара — через $\overline{S} = S_0 - F = S_0 - pN$, где S_0 — значение функции благосостояния резервуара до контакта с ЭА, а функцию благосостояния ЭА через $S_a(N)$.

Запасы ресурсов в равновесии зависят от p и от связанного капитала ЭА $F = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i N_i$. Пусть при некоторых значениях оценок достигнуто равновесие, которому соответствует значение S_a^0. Задача состоит в том, чтобы оценить влияние изменения оценок ресурсов в системе на перераспределение их запасов между резервуаром и ЭА в условиях неизменности функции S_a.

Пусть под влиянием внешних по отношению к системе факторов изменилось значение оценки j-го ресурса. Чувствительность равновесного запаса i-го ресурса $N_i^*(p, F)$ к изменению p_j удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial N_i^*}{\partial p_j}\right)_{S_a} = \left(\frac{\partial N_i^*}{\partial p_j}\right)_F + \frac{\partial N_i^*}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial p_j}. \tag{3.40}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial F}{\partial p_j} = N_j^*$, получим из условия (3.40) равенство, связывающее чувствительность запаса каждого из ресурсов ЭА, находящегося в равновесии с резервуаром, к изменению оценок резервуара

$$\left(\frac{\partial N_i^*}{\partial p_j}\right)_F = \left(\frac{\partial N_i^*}{\partial p_j}\right)_{S_a} - \frac{\partial N_i^*}{\partial F} N_J^*, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{3.41}$$

Здесь, как это принято в термодинамике, нижние индексы F и S_a при производных означают, что эти производные вычисляют в условиях постоянства соответствующих переменных. Уравнение (3.41) было получено Е.Е. Слуцким в 1915 году, при этом существование функции благосостояния (поверхностей безразличия) постулировалось.

Отметим, что для справедливости уравнения Слуцкого требуется, чтобы вид функции S_a обеспечивал существование фигурирующих в этом уравнении производных, т.е., чтобы зависимость $N^*(p, F)$ была гладкой (соответствующие ей поверхности безразличия должны быть гладкими и строго выпуклыми). В остальном эта функция может быть любой. Поэтому уравнение Слуцкого справедливо и в том случае, когда ресурсы с индексами i и j дополняют и когда они замещают друг друга.

3.2. Извлечение капитала в замкнутых системах, прибыльность

Среди различных видов ресурсов в экономике особое место занимает капитал (базовый ресурс), который свободно принимается в обмен на любой другой. Базовый ресурс аналогичен работе. Классической задаче термодинамики об извлечении максимальной работы в неоднородной системе соответствует в экономике задача об извлечении максимального капитала.

Определение: Будем называть *прибыльностью* экономической системы максимальный объем базового ресурса, который может быть извлечен из системы в процессе ресурсообмена при тех или иных ограничениях.

При этом система может содержать некоторое число экономических агентов и не более одного экономического резервуара.

Ограничения, наложенные на систему, уменьшают значения прибыльности. К ним можно отнести:

— Ограничения на продолжительность процесса.

— Ограничения на множество конечных состояний ЭА.

— Требования неотрицательности значений тех или иных переменных системы.

Для системы, которая содержит несколько резервуаров, задача о расчете прибыльности при отсутствии ограничений на продолжительность не имеет решения, так как посредник в такой системе может извлечь сколь угодно большое количество базового ресурса.

Прибыльность является аналогом работоспособности, использующейся при анализе термодинамических систем физической природы. Работоспособность же представляет собой обобщение эксергии и совпадает с последней, если выполнены три условия:

— ограничение на продолжительность процесса отсутствует,

— в системе имеется экономический резервуар,

— задано начальное состояние ЭА-в.

Рассмотрим задачи о нахождении прибыльности при различных ограничениях и конфигурациях систем.

Постановка задачи о получении максимальной прибыли в экономике. Условие минимальной диссипации

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из k ЭА, каждый из которых располагает некоторым запасом ресурса N_i $(i = \overline{1,k})$ и капитала M_i. Оценка ресурса p_i зависит от N_i и M_i. Одной из подсистем может быть экономический резервуар, для которого оценка ресурса p_- постоянна.

Будем предполагать, что система замкнута, то есть может обмениваться с окружением только капиталом, но не ресурсом. При контакте i-й и j-й подсистем возникают потоки ресурса n_{ij} и капитала m_{ij}. При этом поток ресурса направлен от подсистемы с меньшей оценкой к подсистеме с большей оценкой, а поток капитала направлен навстречу потоку ресурса.

В системе имеется фирма (посредник), ее целью является такая организация ресурсообмена, при которой фирма извлекает из системы максимальное количество капитала M. В дальнейшем мы будем предполагать, что непосредственный обмен ресурсами между экономическими агентами невозможен, что фирма назначает цены покупки и продажи ресурса, стремясь при этом добиться максимума M, а потоки закупок и продаж зависят от цены c_i, предложенной фирмой i-й подсистеме, и оценки p_i подсистемой i-го ресурса, то есть

$$n_i = n_i(p_i, c_i), \quad n_i = 0 \quad \text{при} \quad p_i = c_i, \qquad (3.42)$$
$$\operatorname{sign}(n_i) = \operatorname{sign}(c_i - p_i), \quad i = \overline{1,k}.$$

Для резервуара

$$n_0 = n_0(p_-, c_0). \qquad (3.43)$$

Знак потока будем считать положительным, если он направлен в сторону фирмы. Очевидно, что поток капитала

$$m_i(p_i, c_i) = -c_i n_i(p_i, c_i), \quad i = \overline{0,k}. \qquad (3.44)$$

Запасы ресурса и капитала в i-й подсистеме изменяются как

$$\dot{N}_i = -n_i(p_i, c_i), \quad N_i(0) = N_{i0},$$
$$\dot{M}_i = c_i n_i(p_i, c_i), \quad M_i(0) = M_{i0}, \qquad (3.45)$$

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -c_i, \quad i = \overline{1,k}.$$

Будем предполагать, что оценки $p_i(N_i, M_i)$ монотонно уменьшаются с ростом N_i при фиксированном M_i и растут или не изменяются с ростом M_i при фиксированном N_i. Выясним, какой объем базового ресурса может извлечь фирма за сколь угодно большое и за конечное время для случаев, когда в системе имеется резервуар и когда он отсутствует.

Продолжительность процесса не ограничена

В системе имеется экономический резервуар. Обозначим через p_{j-} стоимость j-го ресурса на рынке, тогда фирма сможет извлекать капитал до тех пор, пока оценки j-го ресурса в любой из подсистем не окажутся равными p_{j-}. Процесс ресурсообмена заканчивается в состоянии равновесия, когда оценки всех подсистем равны оценкам рынка

$$p_{ji}(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = p_{j-}, \qquad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{3.46}$$

Здесь через $\overline{N_i}$, $\overline{M_i}$ обозначены равновесные запасы ресурса и капитала. Начальные запасы капитала ЭА-в заданы, запас капитала экономического резервуара изменяется как

$$\Delta M_- = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(\overline{N_{ji}} - N_{ji}(0))p_{j-}. \tag{3.47}$$

Фирма при отсутствии ограничения на продолжительность процесса закупает ресурс по самой низкой цене p_i, а продает по самой высокой, поэтому

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -p_i(N_i, M_i), \qquad M_i(N_{i0}) = M_{i0}. \tag{3.48}$$

Эти уравнения позволяют найти $M_i(N_i, N_{i0}, M_{i0})$. Если задана функция благосостояния для подсистемы, то ее прирост в процессе обмена равен нулю, так как процесс обратим

$$S_i(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = S_i(N_i(0), M_i(0)), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.49}$$

Состояние равновесия определяется условиями (3.46), (3.49). Капитал, извлеченный при контакте с i-м ЭА, равен разности между суммарным начальным и конечным капиталом ЭА, как следует из (3.48)

$$E_i = M_{i0} - \overline{M_i} = -\int_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} p_i(N_i, M_i(N_i))dN_i. \tag{3.50}$$

Прибыльность системы в целом равна сумме E_i за вычетом приращения капитала экономического резервуара (3.47)

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{k} (M_{i0} - \overline{M_i}) - \Delta M_- \tag{3.51}$$

Условия (3.46), (3.48) (или (3.49)) определяют $2n$ неизвестных $\overline{N_i}$ $\overline{M_i}$, а значит и E_∞.

Следует отметить, что функция E_∞ является функцией начального состояния, то есть зависит от начального распределения ресурсов и не зависит от кинетики. Она всегда больше или равна нулю. Случай, когда $E_\infty = 0$ соответствует системе, которая равновесна при $t = 0$.

П р и м е р: Рассмотрим систему, состоящую из двух ЭА-в, экономического резервуара и фирмы. Заданы начальные запасы ресурса и капитала для ЭА-в — N_{i0}, M_{i0} $(i = 1, 2)$, и стоимость ресурса на рынке p_-.

Пусть оценки ресурса для ЭА-ов имеют вид

$$p_i = \gamma_i \frac{M_i}{N_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{3.52}$$

Система (3.48) перепишется как

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\gamma_i \frac{M_i}{N_i}, \qquad M_i(N_{i0}) = M_{i0},$$

отсюда находим $M_i(N_i)$

$$M_i = \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\gamma_i}}{N_i^{\gamma_i}}, \qquad i = 1, 2. \tag{3.53}$$

Равновесные запасы ресурса $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ определим из условия (3.46), которое с учетом (3.52), (3.53) примет вид

$$\gamma_i \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\gamma_i}}{\overline{N_i}^{\gamma_i + 1}} = p_-, \qquad i = 1, 2.$$

Получим

$$\overline{N_i} = \left(\frac{\gamma_i}{p_-} M_{i0} \cdot N_{i0}^{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i + 1}}, \qquad i = 1, 2, \tag{3.54}$$

и соответствующие им равновесные запасы капитала:

$$\overline{M_i} = \frac{p_-}{\gamma_i} \overline{N_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{3.55}$$

Условия (3.51), (3.55) определяют предельный объем извлеченного капитала E_∞ для рассматриваемой системы. Прибыльность системы находим по условия (3.51). С учетом (3.54) она равна

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{2} \left(M_{i0} + p_- \left[N_{i0} - \frac{(\gamma_i + 1)}{\gamma_i} \left(\frac{\gamma_i}{p_-} M_{i0} N_{i0}^{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i+1}} \right] \right). \tag{3.56}$$

Построим зависимость прибыльности от оценки ресурса на рынке $E_\infty(p_-)$. Зададим следующие начальные данные:

$$N_{10} = 50, M_{10} = 500, \gamma_1 = 0.6,$$

$$N_{20} = 200, M_{20} = 100, \gamma_2 = 0.2.$$

На рис. 3.2 представлен график прибыльности в зависимости от оценки $E_\infty(p_-)$ для заданного начального состояния системы. Здесь точка A соответствует минимально возможному значению прибыльности $E_{\infty\,\min} = 250.822$. А значение оценки ресурса на рынке, при котором прибыльность системы минимальна, равно $p_{-\,\min} = 0.621$.

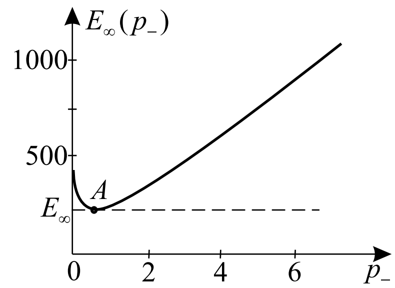

Рис. 3.2: Зависимость извлеченного капитала от оценки ресурса экономического резервуара

П р и м е р: Рассмотрим экономическую систему, состоящую из экономического резервуара, подсистемы конечной емкости (ЭА) и посредника. Пусть функция благосостояния для ЭА имеет форму функции Кобба-Дугласа

$$S = M^{1/3} N_1^{1/2} N_2^{1/6}. \tag{3.57}$$

Заданы начальные запасы ресурсов и капитала

$$M(0) = 150, \quad N_1(0) = 20, \quad N_2(0) = 30, \quad S(0) = 42,$$

и равновесные цены экономического резервуара

$$p_{1-} = 5, \quad p_{2-} = 2.$$

В этом случае, из условия (3.57) оценки ресурсов для ЭА имеют вид

$$p_1(M, N_1) = \frac{3}{2}\frac{M}{N_1}, \qquad p_2(M, N_2) = \frac{1}{2}\frac{M}{N_2}. \tag{3.58}$$

Из уравнений (3.46), (3.49) с учетом (3.58) и начальных данных получаем систему уравнений, из которой определяем равновесное состояние подсистемы

$$\overline{M}^{1/3}\overline{N}_1^{1/2}\overline{N}_2^{1/6} = 42, \tag{3.59}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\overline{M}}{\overline{N}_1} = 5, \qquad \frac{1}{2}\frac{\overline{M}}{\overline{N}_2} = 2. \tag{3.60}$$

Подставляя найденные значения $\overline{M}, \overline{N}_1, \overline{N}_2$ в уравнения (3.51), получаем максимум извлеченного базового ресурса. Он равен $E_\infty = 20,95$. Введем коэффициент a изменения цен экономического резервуара, т.е. $p_{1-} = 5a$, $p_{2-} = 2a$, и построим зависимость $E_\infty(a)$ извлеченного капитала от масштаба цен (рис. 3.3).

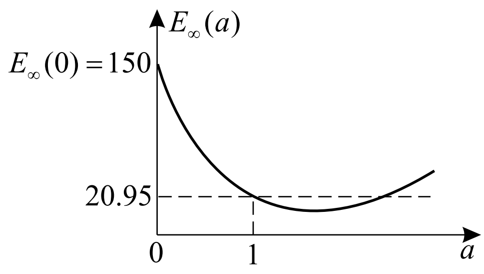

Рис. 3.3: Зависимость извлеченного капитала от масштаба цен экономического резервуара

В системе отсутствует экономический резервуар

В этом случае при $t \to \infty$ оценки ресурса в подсистеме оказываются одинаковыми и равными некоторому значению $\overline{p}$. Вместо равенства (3.46) имеем

$$p_i(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = \overline{p}, \qquad i = \overline{1, k}. \tag{3.61}$$

Значение $\overline{p}$ определено условием равенства нулю изменения запаса ресурса фирмы (она продает все, что покупает), то есть

$$\sum_{i=1}^{k}(\overline{N_i} - N_{i0}) = 0. \tag{3.62}$$

Равенства (3.61), (3.62) наряду с уравнениями (3.48), (3.49) позволяют найти векторы $\overline{N}$, $\overline{M}$ и $\overline{p}$, определяющие прибыльность системы E_∞ в этом случае

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{k}(M_i(0) - \overline{M}_i). \tag{3.63}$$

П р и м е р: Рассмотрим ту же систему, что и в предыдущем примере, но без резервуара. Начальные запасы ресурса и капитала заданы — N_{10}, N_{20}, M_{10}, M_{20}. Зависимости оценок от текущих запасов M_i и N_i $(i = 1, 2)$ имеют вид

$$p_1 = \alpha\frac{M_1}{N_1}, \qquad p_2 = \beta\frac{M_2}{N_2}. \tag{3.64}$$

С учетом этих зависимостей уравнения (3.48) примут форму

$$\frac{dM_1}{dN_1} = -\alpha\frac{M_1}{N_1}, \quad M_1(N_{10}) = M_{10},$$
$$\frac{dM_2}{dN_2} = -\beta\frac{M_2}{N_2}, \quad M_2(N_{20}) = M_{20}.$$

Решая эти уравнения, находим $M_1(N_1)$ и $M_2(N_2)$

$$M_1 = \frac{M_{10}\cdot N_{10}^{\alpha}}{N_1^{\alpha}}, \quad M_2 = \frac{M_{20}\cdot N_{20}^{\beta}}{N_2^{\beta}}. \tag{3.65}$$

Пользуясь условиями (3.61) и (3.62), найдем количество ресурса $\overline{N}_i$ у каждого агента после завершения обмена. Эти условия перепишутся как

$$\begin{cases} N_{10} + N_{20} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2, \\ \alpha\dfrac{M_{10}N_{10}^{\alpha}}{\overline{N}_1^{\alpha+1}} = \beta\dfrac{M_{20}N_{20}^{\beta}}{\overline{N}_2^{\beta+1}}. \end{cases} \tag{3.66}$$

Для частного случая, когда $\alpha = \beta = \gamma$, получим аналитическое решение этой системы

$$\overline{N}_1 = \frac{(N_{20}+N_{10})\cdot(M_{10}N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}{(M_{10}N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} + (M_{20}N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}},$$
$$\overline{N}_2 = \frac{(N_{20}+N_{10})\cdot(M_{20}N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}{(M_{10}N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} + (M_{20}N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}.$$

Значения $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ определяют равновесные запасы капитала

$$\overline{M}_1 = (M_{10} \cdot N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} \cdot W,$$
$$\overline{M}_2 = (M_{20} \cdot N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} \cdot W,$$

где

$$W = \left(\frac{(M_{10}N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} + (M_{20}N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}{N_{20} + N_{10}} \right)^{\gamma}.$$

Подстановка этих выражений в (3.63) определяет прибыльность системы.

Рассчитаем прибыльность системы без экономического резервуара для начальных данных из первого примера. Значение прибыльности в этом случае будет $E_\infty = 250.822$, что равно минимальному по ценам резервуара значению прибыльности в системе, содержащей резервуар. На рис. 3.2 изображена зависимость прибыльности от оценки экономического резервуара, а пунктирной линией обозначено значение E_∞ для случая, когда резервуар в системе отсутствует.

Проведем сравнение равновесного состояния в системе с посредником и в системе, где происходит обмен ресурсами между ЭА-ми через бесприбыльный аукцион. Обмен через бесприбыльный аукцион предполагает обмен по постоянной цене $\overline{p}$, такой, что суммарный капитал ЭА-в не изменяется (то есть «аукционист» не извлекает прибыли). Уравнения (3.48) примут форму

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\overline{p}, \qquad i = \overline{1,k},$$

Так что

$$\overline{M_i} = M_{i0} - \overline{p}(\overline{N_i} - N_{i0}), \qquad i = \overline{1,k}.$$

После подстановки этих выражений в условия (3.61), (3.62) они определяют $\overline{N_i}$ и $\overline{p}$.

П р и м е р: Рассмотрим обмен через аукцион между двумя ЭА-ми и сравним этот процесс с обменом через посредника рассмотренный в предыдущем примере. Пусть оценки ресурса имеют вид (3.64) и $\alpha = \beta = \gamma$. Начальное состояние системы задано. Тогда из условий (3.61), (3.62) получим значение цены аукциона $\overline{p}$

$$\overline{p} = \gamma \frac{M_{10} + M_{20}}{N_{10} + N_{20}} \tag{3.67}$$

и значения объемов ресурсов у подсистем в конце процесса

$$\overline{N}_i = \gamma \frac{M_{i0+\overline{p}N_{i0}}}{\overline{p} + \gamma\overline{p}}, \qquad i = 1, 2. \tag{3.68}$$

Зададим следующие начальные данные

$$M_{10} = 200, \quad M_{20} = 700, \quad N_{10} = 50, \quad N_{20} = 80, \gamma = 3.$$

Для системы с посредником прибыльность будет равна $E = 13.852$, в системе без посредника $E = 0$. Конечные состояния также отличаются: в системе с посредником $\overline{M}_1 = 228.51, \overline{M}_2 = 657.638, \overline{N}_1 = 33.523, \overline{N}_2 = 96.477$, при обмене через аукцион — $\overline{M}_1 = 236.538, \overline{M}_2 = 663.462, \overline{N}_1 = 34.167, \overline{N}_2 = 95.833$.

Равновесие в системе из двух ЭА иллюстрирует диаграмма Эджуорта (см. рис. 3.1). На этом рисунке по оси абсцисс вправо отложен запас ресурса первого ЭА, а по оси ординат вверх — его капитал; по оси абсцисс в левую сторону запас ресурса второго ЭА, а по оси ординат вниз — его капитал. Эта традиционная в экономике диаграмма позволяет проиллюстрировать графически равновесие в системе при разных типах контакта.

Линии уровня функции благосостояния первого ЭА сплошные, а второго пунктирные. Линию, соединяющую точки, в которых оценки ресурсов одинаковы $\dfrac{dN_1}{dM_1} = \dfrac{dN_2}{dM_2}$, называют линией компромиссов (кривая равновесия d). Начальному состоянию системы соответствует правый нижний угол диаграммы. Как показано выше, при обмене через аукцион наклон траектории $\overline{p}$ постоянен и нормален при $t \to \infty$ к линии компромиссов. Траектория такого обмена, таким образом, представляет собой прямую нормальную к линии компромиссов в точке пересечения с ней (рис. 3.1, кривая «a»).

При обмене через посредника для неограниченной продолжительности функции благосостояния каждого из ЭА не изменяются, а значит, изменение состояния каждого ЭА происходит вдоль линии уровня его функции благосостояния. Суммарный ресурс в конце процесса $\overline{N_1} + \overline{N_2}$ равен суммарному ресурсу в начале $N_{10}+N_{20}$, что справедливо для любой вертикали диаграммы Эджуорта (рис. 3.1, кривые «b» и «c»). Тангенс угла наклона касательной к линии уровня функции благосостояния представляет собой с точностью до знака оценку ресурса N в данной точке.

Оценки $p_1 = \dfrac{\partial N_1}{\partial M_1}$ и $p_2 = \dfrac{\partial N_2}{\partial M_2}$ в конце процесса равны. Это означает, что наклоны касательных в конечных точках одинаковы. Таким образом, состоянию равновесия соответствуют точки A (для первого ЭА) и B (для второго), лежащие на такой вертикали, для которой касательные к линиям уровня параллельны. Такая точка всегда найдется и она единственна, так как с ростом $\overline{N}_1$ (уменьшением $\overline{N}_2$) наклоны линий уровня «b» и «c» изменяются монотонно и в разные стороны.

Длина отрезка AB представляет собой капитал, извлеченный посредником, E_∞. Проекции точек B, A и C на ось ординат позволяют найти потенциальную выгоду ЭА ΔM_1 и ΔM_2 от обмена через бесприбыльный аукцион.

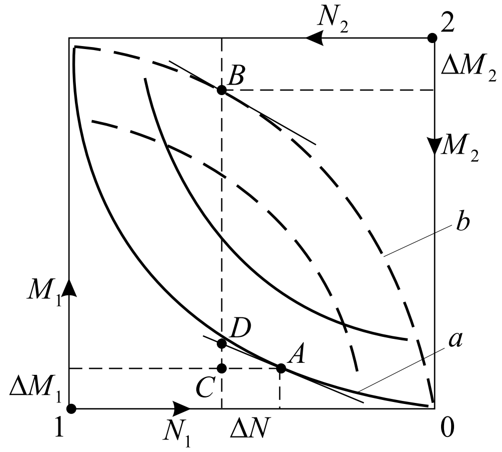

Рис. 3.4: Диаграмма Эджуорта для системы из двух ЭА, экономического резервуара и посредника

Построим диаграмму Эджуорта для случая, когда в системе имеется экономический резервуар и продолжительность процесса не ограничена (рис. 3.4). Изменение состояния ЭА-ов будет происходить по кривым «a» и «b» соответственно. Оценки ресурса ЭА в конце ресурсообмена станут равными заданному значению — оценке ресурса на рынке p_-, то есть касательные в конечных точках параллельны и имеют заданный наклон.

Таким образом, конечное состояние первого ЭА соответствует точке A, второго ЭА — точке B. И в этом случае точки A и B не будут находиться на одной вертикали, так как суммарный ресурс в конце процесса будет отличаться от суммарного ресурса в начале из за того, что часть ресурса перейдет из резервуара. Прибыльность системы будет равна длине отрезка $BD = BC - DC$. Отрезок BC характеризует изменение количества базового ресурса у ЭА-в, а отрезок DC — прирост капитала у экономического резервуара, так как его длина равна $p_-\Delta N$.

Продолжительность ресурсообмена ограничена

Будем предполагать, что продолжительность ресурсообмена задана и равна τ. В этом случае фирма вынуждена повышать цены закупки ресурса и снижать цену продажи по сравнению с равновесными оценками p_i. Это приведет к необратимым потерям (диссипации капитала) и уменьшит величину извлеченного капитала. Его максимально возможное значение E_τ окажется меньше, чем E_∞. Их различие

$$\Delta E = (E_\infty - E_\tau) > 0 \tag{3.69}$$

характеризует необратимость процесса ресурсообмена, а величина

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \sigma(t) \tag{3.70}$$

характеризует диссипацию капитала.

Условие оптимальности закупок (продаж)

Рассмотрим обмен между фирмой и ЭА, в котором последний выступает как покупатель, и выясним, как следует менять цену продажи ресурса, чтобы за фиксированное время τ продать количество ресурса ΔN с максимальной выручкой. Ясно, что тем же условиям будет отвечать и цена покупки ресурса у ЭА, если фирма стремится затратить как можно меньше капитала. И в том и в другом случае объем капитала ЭА в конце процесса $M(\tau)$ при заданных граничных условиях должен быть минимален.

Задача формулируется как

$$\overline{M} = M(\tau) \to \min_c \tag{3.71}$$

при условиях

$$\overline{N} = N(\tau) = N_0 - \Delta N, \tag{3.72}$$

$$\frac{dN}{dt} = n(p, c), \qquad N(0) = N_0, \tag{3.73}$$

$$\frac{dM}{dt} = -cn(p, c), \qquad M(0) = M_0, \tag{3.74}$$

Перейдем от dt к dN, используя зависимость (3.73), в которой поток n на интервале $(0, \tau)$ не обращается в ноль. Ограничение на продолжительность и условие (3.74) перепишутся как

$$\int\limits_0^\tau dt = \int\limits_{\overline{N}}^{N_0} \frac{dN}{n(p(N, M), c)} = \tau, \tag{3.75}$$

$$\frac{dM}{dN} = -c. \tag{3.76}$$

В задаче (3.71), (3.75), (3.76) требуется найти такую зависимость $c^*(N)$, при которой капитал ЭА в момент τ окажется минимальным.

Запишем условия оптимальности для задачи (3.71)–(3.76) в форме принципа максимума в предположении невырожденности решения ($\psi_0 = 1$): функция Гамильтона

$$H = -\psi c + \lambda \frac{1}{n(c, p(N, M))}.$$

уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\psi}{dN} = -\frac{\partial H}{\partial M} = \lambda \frac{\partial n/\partial p(\partial p/\partial M)}{n^2(c, p(N, M))}, \quad \psi(\overline{N}) = 0. \tag{3.77}$$

Функцию H считаем выпуклой вверх и дифференцируемой. Условие максимума H по c

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\psi + \lambda \frac{\partial n/\partial c}{n^2(c, p(N, M))} = 0. \tag{3.78}$$

Из равенства (3.78) выражаем ψ и подставляем в выражение (3.77). Получим условие оптимальности закупок (продаж) — *условие минимальной диссипации капитала в процессах ресурсообмена*:

$$\frac{d}{dN}\left[\frac{\partial n/\partial c}{n^2(p, c)}\right] = \frac{\partial n/\partial p \cdot (\partial p/\partial M)}{n^2(p, c)}. \tag{3.79}$$

Условие (3.79) определяет $c(N, M)$ с точностью до константы, вычисляемой из равенства (3.75).

Таким образом, цена закупок/продаж, для которой диссипация капитала (торговые издержки) минимальна при заданном объеме закупок и заданной продолжительности процесса, должна удовлетворять условию (3.79).

В случае когда оценка ресурса p зависит только от его запаса N, $\partial p/\partial M = 0$ и условие минимума диссипации (3.79) примет форму

$$\frac{\partial n/\partial c}{n^2(p, c)} = \text{const}. \tag{3.80}$$

Так, в случае когда

$$n(p, c) = \alpha(c - p), \tag{3.81}$$

получим

$$\frac{\partial n}{\partial c} = \alpha$$

и в этом случае

$$\frac{1}{\alpha(c-p)^2} = \text{const} \Rightarrow c^* - p^* = r,$$

где r — постоянная.

Так как из (3.75)

$$\int\limits_{N_0}^{\overline{N}} \frac{dN}{r} = \alpha\tau,$$

получим

$$r = \frac{\Delta N}{\alpha\tau},$$

где $\Delta N = \overline{N} - N_0$. Из условия (3.80) при продаже ресурса следует, что

$$c_\tau^*(N, \overline{N}) = p(N) - \frac{\Delta N}{\alpha\tau}. \tag{3.82}$$

Максимум вырученного при продаже капитала

$$E_\tau(\overline{N}) = E_\infty(\overline{N}) - \frac{(\Delta N)^2}{\alpha\tau}, \tag{3.83}$$

где E_∞ — капитал, который фирма могла бы извлечь при $\tau \to \infty$, продавая ресурс по равновесным ценам $c(N) = p(N)$. Чтобы найти E_∞, надо воспользоваться формулами (3.51)–(3.63). Функция $E(\tau)$ показана на рис. 3.5. Здесь $\tau^0 = \dfrac{\Delta N^2}{\alpha E_\infty}$.

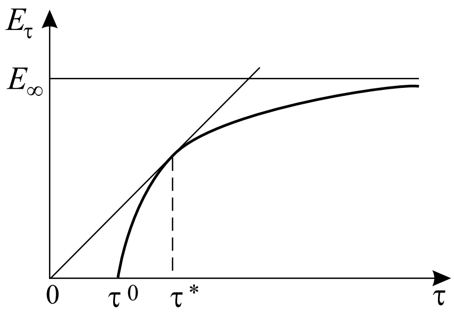

Рис. 3.5: Зависимость прибыльности системы от продолжительности процесса

Моменту $\tau = \tau^0$ соответствует бесприбыльная продажа ресурса. При $\tau < \tau^0$ фирма вынуждена доплачивать покупателю. При $\tau^* = 2\tau^0$ средняя интенсивность прибыли $e(\tau) = \dfrac{E(\tau)}{\tau}$ максимальна и с учетом равенства (3.83) равна

$$e^* = \frac{\alpha}{4}\left[\frac{E_\infty(\overline{N}, N_0)}{\overline{N} - N_0}\right]^2. \tag{3.84}$$

При этом объем извлеченного капитала вдвое меньше, чем E_∞.

Потери капитала по сравнению с равновесным процессом оценивает уменьшение прибыльности (диссипация капитала)

$$\sigma = n(p, c)(p - c). \tag{3.85}$$

Величина диссипативных потерь определяется как

$$\Delta E(\tau) = \int\limits_0^\tau \sigma(t)dt = \int\limits_0^\tau n(p, c)(p - c)dt. \tag{3.86}$$

Для примера, рассмотренного выше, эти потери равны

$$\Delta E(\tau, \overline{N}) = \int\limits_0^\tau \alpha(p(N) - c(N))^2 dt = \frac{(\overline{N} - N_0)^2}{\alpha\tau},$$

так что

$$E(\tau) = E_\infty(\overline{N}) - \Delta E(\tau, \overline{N}) = E_\infty(\overline{N}) - \int\limits_0^\tau n(p, c)(p - c)dt. \tag{3.87}$$

Покажем, что выражение (3.87) справедливо для произвольной зависимости $n(p, c)$. Действительно, при переходе от dt к dN интеграл в (3.86) перепишется как

$$\Delta E(\overline{N}) = E(\overline{N}) - E(N_0) = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} (p(N) - c_\tau(N, \overline{N}))dN.$$

В свою очередь, извлеченный капитал

$$E(\tau, \overline{N}) = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} c_\tau(N, \overline{N})dN, \quad E_\infty(\overline{N}) = \int\limits_{N_0}^{\overline{N}} p(N)dN. \tag{3.88}$$

Из сравнения этих равенств следует выражение (3.87).

Извлечение максимальной прибыли в системе ЭА

В этом случае задача сводится к закупке (продаже) ресурса у каждого из экономических агентов, так чтобы получить максимальную прибыль, что соответствует минимуму суммарного объема капитала ЭА-в в конце процесса $M(\tau)$ при заданных граничных условиях.

Процесс закупки (продажи) должен протекать оптимально с точки зрения извлечения (затрат) капитала, так что цена c и оценка ресурса p должны в любой момент времени удовлетворять условиям минимальной диссипации (3.79), (3.80). Объемы закупок ΔN_i у каждой из k подсистем должны выбираться оптимально и удовлетворять требованию

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{N_i} = \sum_{i=1}^{k} N_{i0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \Delta N_i = 0. \tag{3.89}$$

Экономический резервуар можно считать одной из подсистем, у которой оценка ресурса p_- не зависит от запасов ресурса и капитала, а значит, для любых зависимостей $n(c, p_-)$ оптимальная цена c при закупке и продаже на таком рынке должна быть неизменна во времени.

Формулировка задачи.

Критерий оптимальности

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{M}_i(\tau) \to \min_{c_i} \tag{3.90}$$

при условиях

$$\frac{dN_i}{dt} = -n_i(p_i, c_i), \qquad N_i(0) = N_{i0}, \qquad i = \overline{1, k}, \tag{3.91}$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -c_i n_i(p_i, c_i), \qquad M_i(0) = M_{i0}, \qquad i = \overline{1, k} \tag{3.92}$$

и условии (3.89).

Решение. Перейдем от dt к dN_i, используя зависимости (3.91), в которых потоки n_i на интервале $(0, \tau)$ не обращаются в ноль. Условия (3.91), (3.92) перепишутся как

$$\int_0^\tau dt = \int_{\overline{N_i}}^{N_{i0}} \frac{dN_i}{n_i(p_i(N_i, M_i), c_i)} = \tau, \qquad i = \overline{1, k}, \tag{3.93}$$

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -c_i, \qquad i = \overline{1, k}. \tag{3.94}$$

Решим задачу (3.89), (3.92), с учетом (3.93)–(3.94) в два этапа. На первом этапе задача об извлечении максимума капитала за ограниченное время в замкнутой микроэкономической системе сводится к решению k задач

(3.71)–(3.76) об оптимальных закупках (продажах) для каждой из подсистем при фиксированных начальных и конечных запасах ресурса (N_{i0} и $\overline{N_i}$). Максимальное количество полученного капитала (минимальное количество затраченного) $E_i(\tau)$ зависит от $\overline{N_i}$. На втором этапе найдем оптимальные значения $\overline{N_i}$ из решения экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{k} E_i^*(\tau, \overline{N_i}) \to \max_{\overline{N_i}} \tag{3.95}$$

при условии (3.89). Условия оптимальности этой задачи приводят к равенству

$$\frac{\partial E_i^*(\tau, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} = \Lambda, \qquad i = \overline{1,k},$$

в котором значение Λ находят из (3.89).

С учетом выражения (3.88) получим

$$\frac{\partial E_i(\tau, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} = c_{i\tau}(\overline{N_i}, \overline{N_i}) + \int\limits_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} \frac{\partial c_{i\tau}(N_i, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} dN_i = \overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}). \tag{3.96}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой оптимальную цену в момент τ, второе слагаемое корректирует эту цену. Оно определяется усредненным значением чувствительности оптимальной цены к количеству реализованного ресурса. Выражение (3.96) назовем *скорректированной ценой*. Условие оптимального выбора объемов закупок (продаж) примет форму равенства скорректированных цен для всех подсистем:

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}) = \Lambda, \quad i = \overline{1,k}. \tag{3.97}$$

П р и м е р: Проиллюстрируем последовательность решения задачи извлечения максимальной прибыли на примере, когда для каждой из подсистем оценка ресурса

$$p_i(N_i) = \frac{h_i}{N_i}, \qquad i = \overline{1,k}, \tag{3.98}$$

$$n_i(c_i, p_i) = \alpha_i(c_i - p_i), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.99}$$

Найдем капитал, который можно извлечь из i-й подсистемы за сколь угодно большое время. Из выражения (3.88) с учетом (3.98) имеем

$$E_{i\infty}(\overline{N_i}) = h_i \int\limits_{N_i 0}^{\overline{N_i}} \frac{dN_i}{N_i} = h_i \ln \frac{\overline{N_i}}{N_{i0}}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Согласно равенству (3.83)

$$E_i(\tau, \overline{N_i}) = h_i \ln \frac{\overline{N_i}}{N_{i0}} - \frac{(\overline{N_i} - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}. \tag{3.100}$$

Условие (3.97) оптимального выбора $\overline{N_i}$ примет форму (см. (3.82))

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}) = \left[p_i(\overline{N_i}) - \frac{\overline{N_i} - N_{i0}}{\alpha_i \tau}\right] - \frac{\overline{N_i} - N_{i0}}{\alpha_i \tau} = \Lambda. \tag{3.101}$$

Таким образом, из уравнения (3.101) и условия ненакопления ресурсов (3.89) получаем оптимальные значения количества ресурсов у подсистем в конце процесса $\overline{N_i^*}$. Прибыльность системы

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^{k} \left[h_i \ln \frac{\overline{N_i^*}}{N_{i0}} - \frac{(\overline{N_i}^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}\right]. \tag{3.102}$$

Найдем прибыльность системы, состоящей из трех ЭА и фирмы-посредника для следующих начальных данных:

$$N_{10} = 300, N_{20} = 200, N_{30} = 500,$$

$$h_1 = 10, h_2 = 0.2, h_3 = 0.5,$$

$$\alpha_1 = 100, \alpha_2 = 200, \alpha_3 = 500, \tau = 1000.$$

Решая систему (3.101), (3.89) для заданного начального состояния, получим значение прибыльности $E^* = 6.861$. На рис. 3.6 построена зависимость $E_\tau^*(\tau)$, отмечено значение прибыльности для заданной продолжительности и значение $\tau_0 = 278.961$, соответствующее нулевой прибыльности.

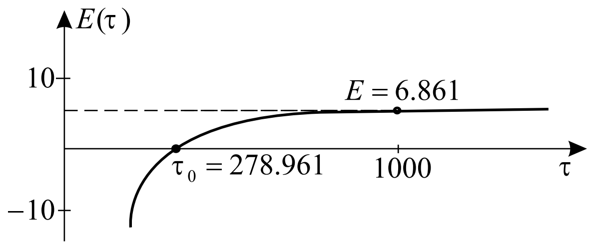

Рис. 3.6: Зависимость прибыльности от продолжительности процесса

Задача сильно упрощается, когда все подсистемы имеют постоянные оценки $p = \mathrm{const}$, то есть являются экономическими резервуарами. Тогда условие оптимальности (3.101) приводит к равенствам

$$p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau}(\overline{N_i} - N_{i0}) = \Lambda \to \Delta N_i = \frac{\alpha_i \tau}{2}(p_i - \Lambda). \tag{3.103}$$

Здесь приведенная цена $\overline{c}_{i\tau} = p_i - \dfrac{2}{\alpha_i \tau}(\overline{N_i} - N_{i0})$. Из условия (3.89) значение Λ равно средневзвешенной оценке ресурса

$$\Lambda = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i},$$

а

$$\overline{N_i^*} = \frac{\tau \alpha_i}{2}\left(p_i - \frac{\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu}\right) + N_{i0}. \tag{3.104}$$

После подстановки в (3.103) $\overline{N_i^*}$ получим значение максимально возможного капитала $E_i(\tau, \overline{N_i^*})$, который может быть извлечен из подсистемы за время τ. Прибыльность системы (см. (3.83))

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^{k}\left[p_i(\overline{N_i^*} - N_{i0}) - \frac{(\overline{N_i}^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}\right] = E_\infty^* - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta N_i^{*2}}{\alpha_i}. \tag{3.105}$$

Пусть заданы начальные данные для системы из трех ЭА и фирмы-посредника:

$$p_1 = 10, p_2 = 15, p_3 = 12,$$

$$N_{10} = 300, N_{20} = 200, N_{30} = 500,$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5, \tau = 100.$$

По формуле (3.104) получим значения объемов ресурса в конце процесса у каждого из ЭА:

$$\overline{N_1^*} = 175, \overline{N_2^*} = 450, \overline{N_3^*} = 375.$$

Прибыльность в этом случае будет $E^* = 500$. На рис. 3.7 построен график прибыльности в зависимости от продолжительности процесса для заданных начальных данных. Значение прибыльности в случае неограниченной продолжительности процесса $E_\infty = 1000$.

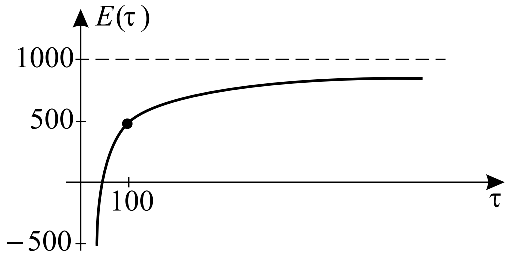

Рис. 3.7: Зависимость прибыльности от продолжительности процесса для системы экономических резервуаров

Извлечение базового ресурса при отсутствии дискриминации цен

Выше была рассмотрена задача извлечения максимальной прибыли, в которой посредник мог при контакте с каждым ЭА-м устанавливать различные цены покупок и продаж, зависящие от функций спроса каждого ЭА. Такой индивидуальный выбор (дискриминация) цен расширяет возможности посредника и позволяет увеличить извлекаемую прибыль. С дискриминацией цен мы сталкиваемся, наблюдая различие цен на одни и те же товары в магазинах, расположенных в центре и на окраинах города, при продаже авиабилетов по льготным ценам, продаже лекарств и продовольственных товаров со скидкой для некоторых категорий покупателей и пр. Такая дискриминация увеличивает объем продаж и прибыль продавца. Ведь нераспроданные билеты на самолет или лекарства вообще не приносят дохода.

В некоторых случаях, например по требованию изготовителя, посредник должен устанавливать одну и ту же цену покупки или продажи для всех ЭА-в, с которыми он контактирует. Ясно, что максимальная извлекаемая им прибыль в этих условиях окажется меньше.

Пусть требуется найти изменение во времени цен закупки и продажи общих для всех ЭА-в, у которых фирма приобретает или продает ресурс, а также состав подсистем, продающих и закупающих ресурс. Обозначим через $c_1(t)$ и $c_2(t)$ цены закупки и продажи. Законы изменения цен определяют и состав подсистем, участвующих в процессе. Все подсистемы в каждый момент $t \in [0, \tau]$ могут быть разбиты на три категории: подсистемы, у которых посредник закупает ресурс ($p_i(t) < c_1(t)$); подсистемы, которым он ресурс продает ($p_i(t) > c_2(t)$); и подсистемы, с которыми посреднику контактировать нецелесообразно ($c_1(t) \leq p_i(t) \leq c_2(t)$). Назовем первую категорию систем «продавцы», вторую — «покупатели», а третью — «нейтральные подсистемы».

В общем случае определение оптимальных цен с одновременным изменением состава подсистем достаточно сложно. Задача существенно упрощается, когда фирма осуществляет ресурсообмен с несколькими экономическими резервуарами. В этом случае c_1, c_2 и p_i постоянны, и задача сводится к такому их выбору, чтобы получить максимальную прибыль.

Зависимость потока закупаемого ресурса от c_1 может быть записана в форме

$$n_+(c_1, p_i) = \sum_{\nu=1}^{j} n_\nu(c_1, p_\nu), \tag{3.106}$$

где суммирование ведется по всем резервуарам, оценки которых ниже, чем c_1.

Аналогично для потока продаж имеем c_2

$$n_-(c_2, p_i) = \sum_{\nu=i}^{n} n_\nu(p_\nu, c_2), \tag{3.107}$$

где p_i — минимальная оценка, большая, чем c_2.

Интенсивность получения прибыли должна быть максимальна:

$$s = [c_2 n_-(c_2, p) - c_1 n_+(c_1, p)] \to \max_{c_1, c_2}. \tag{3.108}$$

при условии ненакопления ресурса посредником

$$n_+(c_1, p) = n_-(c_2, p) = n. \tag{3.109}$$

Условие (3.109) позволяет выразить c_1 и c_2 через n. Подставляя эти зависимости в (3.108), получим задачу безусловной оптимизации по n. Найдя ее решение n^*, вычислим c_1^*, c_2^*; они определяют разбиение подсистем на «продавцов» и «покупателей».

Конкретизируем зависимости n_ν как

$$n_\nu = \alpha_\nu (c - p_\nu), \quad \nu = 1, ..., n$$

и перепишем (3.109) в форме двух равенств

$$n_+ = \sum_{\nu=1}^{j} \alpha_\nu (c_1 - p_\nu) = n, \quad n_- = \sum_{\nu=i}^{n} \alpha_\nu (p_\nu - c_2) = n,$$

откуда, введя обозначения

$$M_1(j) = \sum_{\nu=1}^{j} \alpha_\nu p_\nu, \quad M_2(i) = \sum_{\nu=i}^{n} \alpha_\nu p_\nu, \quad A_1(j) = \sum_{\nu=1}^{j} \alpha_\nu, \quad A_2(i) = \sum_{\nu=i}^{n} \alpha_\nu,$$

получим

$$c_1(n,j) = \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)}, \quad c_2(n,i) = \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)}. \tag{3.110}$$

Критерий оптимальности (3.108) как функция n примет вид

$$s = n\Big[c_2(n,i) - c_1(n,j)\Big] \to \max. \tag{3.111}$$

При фиксированном n значения i и j нужно выбирать по условию максимума c_2 и минимума c_1 соответственно.

Условие минимума c_1 по j приводит к неравенствам

$$p_{j+1} > \frac{n + M_1(j)}{A_1(j)} > p_j. \tag{3.112}$$

Аналогично из условий максимума c_2 по i следует, что

$$p_i > \frac{M_2(i) - n}{A_2(i)} > p_{i-1}. \tag{3.113}$$

Максимум (3.111) по n с учетом (3.110), (3.112), (3.113) определяет максимальную интенсивность извлечения базового ресурса в системе с общими ценами. Для выпуклой вверх функции s получим

$$c_2(n^*,i) - c_1(n^*,j) = n^* \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} - \frac{\partial c_2}{\partial n}\right)_{n=n^*}. \tag{3.114}$$

Для двух ЭА ($j = 1$, $i = 2$) задача предельно упрощается. Оптимальные цены закупки и продажи для любого момента t удовлетворяют равенствам

$$c_1 = \frac{2\alpha_1 p_1 + \alpha_2(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad c_2 = \frac{2\alpha_2 p_2 + \alpha_1(p_1 + p_2)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

а предельная интенсивность извлечения прибыли равна

$$s^*(t) = \frac{\alpha_1\alpha_2(p_2 - p_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

В том случае, когда оценки p_ν ресурсов для каждого из ЭА зависят от времени, оптимальное решение $c_1^*(t), c_2^*(t)$ определяется этими же соотношениями для каждого момента t.

Закупка ресурса в условиях конкуренции. Найдем условия оптимального выбора цен при закупке (продаже) ресурса у ЭА (рынка конечной емкости) несколькими фирмами за ограниченное время (рис. 3.8).

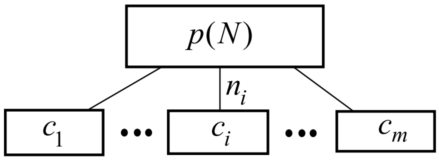

Рис. 3.8: Структура системы обмена ресурсами ЭА конечной емкости с несколькими фирмами

При этом предположим, что оценка ресурса p зависит только от его запаса N и не зависит от запаса базового ресурса. Функцию $p(N)$ предполагаем известной.

Выбор цен сводится к решению следующей задачи:

Затраты (суммарные торговые издержки)

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} n_i(c_i, p)(c_i - p)dt \to \min_{c_i} \tag{3.115}$$

при заданных объемах закупок

$$\int_0^{\tau} n_i(c_i, p)dt = \Delta N_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.116}$$

Запас ресурса изменяется как

$$\frac{dN}{dt} = -\sum_{i=1}^{m} n_i(c_i, p), \quad N(0) = a. \tag{3.117}$$

Обозначим $a - \sum\limits_{i=1}^{m} \Delta N_i = b > 0$ и трансформируем задачу, приняв ресурс N в качестве независимой переменной.

Получим

$$\int_b^a \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(c_i - p)n_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i} dN \to \min_{c_i}, \tag{3.118}$$

$$\int_b^a \frac{n_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i} dN = \Delta N_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3.119}$$

$$\int\limits_b^a \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m n_i} dN = \tau. \tag{3.120}$$

Функция Лагранжа задачи (3.118)–(3.120)

$$L = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m n_i} \left[\sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i) n_i - \zeta \right]. \tag{3.121}$$

Необходимые условия оптимальности принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^m n_i\right)^2} \frac{\partial n_i}{\partial c_i} \left[\sum_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i) n_i - \zeta \right] +$$
$$+ \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m n_i} \left[n_i + (c_i - p + \lambda_i) \frac{\partial n_i}{\partial c_i} \right] = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Так что для всех i должны быть выполнены условия

$$\frac{n_i(c_i, p)}{\dfrac{\partial n_i}{\partial c_i}} + c_i + \lambda_i = p + \frac{\sum\limits_{i=1}^m (c_i - p + \lambda_i) - \zeta}{\sum\limits_{i=1}^m n_i(c_i, p)}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.122}$$

которые совместно с (3.119), (3.120) определяют искомое решение $c^*(N)$ через известную зависимость $p(N)$. Это решение нужно подставить в уравнение (3.117), чтобы найти изменения цен закупки во времени.

Заключительные замечания

Подчеркнем отличия в поведении изолированных систем физической и экономической природы. Для простоты будем рассматривать физические системы, характеризующиеся отличием только температур, между которыми реализуется теплообмен, и ЭА с одним видом ресурса.

При отсутствии посредника и неограниченной продолжительности процесса.

В системе тел с различной начальной температурой и различной теплоемкостью в равновесии устанавливается единая температура, равная средневзвешенной из начальных температур контактирующих тел. Весовой коэффициент γ_i при начальной температуре i-го тела равен отношению его теплоемкости к суммарной теплоемкости системы. Внутренняя энергия в равновесии распределяется между телами пропорционально теплоемкости каждого из них. Энтропия системы достигает максимума. Состояние равновесия единственно и не зависит от кинетики теплообмена.

В системе ЭА при различных начальных оценках ресурса и начальных запасах ресурса и капитала реализуется ресурсообмен, при котором перераспределяется и ресурс и капитал (базовый ресурс). В равновесии оценки ресурса одинаковы у всех ЭА. При этом состояние равновесия, т.е. распределение между ЭА ресурса и капитала не единственно, оно зависит от кинетики ресурсообмена. Причина здесь в том, что от кинетики зависит промежуточная цена, она может быть дальше или ближе к одной из оценок контактирующих ЭА, хотя всегда лежит между ними. От цен же зависят потоки, а значит и распределение капитала. Функция благосостояния каждого из ЭА возрастет, а величина связанного капитала F достигает максимума при ограничениях на балансы по ресурсу, этот максимум так же зависит от кинетики ресурсообмена.

При наличии посредника и неограниченной продолжительности процесса.

Пусть в той же системе имеется посредник — тепловая машина, которая может извлекать работу, или фирма, которая может извлекать капитал. Будем считать, что этот посредник идеален, т.е. тепловая машина внутренне обратима, а фирма не тратит капитала на свое существование.

Если продолжительность не ограничена, то в системе тел с разной температурой машина может извлечь некоторую энергию, и в состоянии равновесия температура всех тел окажется одинаковой, но равной (это нетрудно показать) средней геометрической из начальных температур, причем коэффициенты γ_i оказываются показателями степени.

Так как среднее геометрическое всегда меньше, чем среднее арифметическое, если начальные температуры не равны друг другу, то при наличии тепловой машины температура окажется ниже, энергия распределяется между телами пропорционально их теплоемкости, но она меньше, чем в системе без посредника. Максимум извлеченной энергии (работы тепловой машины) равен произведению суммарной теплоемкости на разность равновесных температур. Энтропия такой идеальной системы не изменится по сравнению с начальной.

В системе ЭА фирма покупает ресурс у одних (с низкой оценкой) и продает другим (с высокой оценкой) ЭА. Так как продолжительность не ограничена, она делает это по ценам, равным оценкам ресурса каждым из ЭА. В равновесии оценки ресурса оказываются одинаковыми для всех ЭА, но значение равновесной оценки ниже, чем в системе без посредника. Распределение ресурсов и капитала в равновесии между фирмой и

ЭА-ми не зависит от кинетики обмена и определено только видом функций благосостояния и начальным состоянием каждого из них. Функция благосостояния S_i каждого из ЭА не изменится, а связанный капитал F достигает максимума не только при балансовых ограничениях по ресурсу, но и требованиях постоянства S_i.

При наличии посредника и ограниченной продолжительности процесса.

При ограниченной продолжительности процесса τ в системе тел с разными начальными температурами идеальная тепловая машина может извлечь работу, естественно меньшую, чем в задаче с неограниченной продолжительностью. Верхняя граница этой работы $A^*(\tau)$ определена условиями минимальной диссипации теплообмена и зависит от его кинетики. Существует значение продолжительности, при которой достигается максимум средней мощности $A^*(\tau)/\tau$. При этом с некоторыми из тел, тепловая машина не контактирует.

В системе ЭА фирма получает максимум прироста своего капитала, если в процессах закупки и продажи ресурса руководствуется условиями минимума диссипации капитала, полученными выше. Существует значение продолжительности, при котором максимальна интенсивность получения прибыли. При этом в оптимальном процессе фирма осуществляет покупки и продажи ресурса не у всех, а только у части ЭА, начальные оценки которых достаточно сильно отличаются друг от друга.

3.3. Классификация кинетики ресурсообмена по типу условий минимальной диссипации

Для экономических систем функция $n(c,p)$ характеризует закон ресурсообмена, а равенства (3.79), (3.80) — условия минимальной диссипации капитала. Одному и тому условию минимальной диссипации могут соответствовать различные виды кинетики ресурсообмена. Ниже покажем, как выделить кинетические зависимости интенсивности потоков обмена от цены и оценки ресурса, для которых условия минимальной диссипации приводят к однотипным решениям.

Задача такого выделения в определенном смысле является обратной задачей оптимального управления. Действительно, в прямой задаче по известной модели ищут условия оптимальности процесса, в этой же задаче по условиям оптимальности ищут класс задач, для которых условия оптимальности имеют заданную форму. Если такая классификация проделана, достаточно выяснить, к какому классу относятся уравнения кинетики, чтобы найти оптимальное решение задачи об оптимальном изменении цен.

Условие оптимальности закупок для случая, когда оценка ресурса не зависит от запаса капитала, имеет вид

$$F(c,p) = \frac{\partial n/\partial c}{n^2(p,c)} = \mathrm{const}. \tag{3.123}$$

Оптимальное решение получают с учетом вида функции n и во многих случаях оно имеет форму

$$\varphi(c,p) = \mathrm{const}. \tag{3.124}$$

Одновременное выполнения требований (3.123), (3.124) возможно только в том случае, когда функции F и φ связаны соотношением

$$F(c,p) = W[\varphi(c,p)],$$

в котором W произвольная непрерывная и дифференцируемая функция. Из этого равенства следует, что [107], выполнено равенство

$$\frac{F_c}{F_p} = \frac{\varphi_c}{\varphi_p}, \tag{3.125}$$

определяющее кинетику ресурсообмена для каждого вида зависимости φ оптимальной цены от оценки ресурса. Индексами c и p обозначены частные производные функций F и φ по соответствующим переменным.

Условия постоянства оптимальной надбавки. Формальная постановка задачи об оптимальной закупке ресурса имеет вид

$$I = \int_0^\tau n(c,p)c\,dt \to \min_c$$

при условиях

$$\int_0^\tau n(c,p)dt = \Delta N, \quad n > 0, \quad \dot{N} = -n(c,p), \quad N(0) = N_0,$$

где оценка $p(N)$ — заданная функция. Условия оптимальности этой задачи получены выше.

Найдем, каковы законы ресурсообмена $n(p,c)$, для которых оптимальная цена закупки ресурса c для любого момента времени t отличается от оценки этого ресурса p на постоянную величину (надбавка $\varphi(c,p) =$

$c - p = \text{const}$). Как следует из условия оптимальности закупки, в случае необратимого ресурсообмена

$$F = \frac{1}{n^2(p,c)} \frac{\partial n}{\partial c} = \text{const}, \quad n(c,p) = 0 \quad \text{при} \quad c = p. \tag{3.126}$$

Чтобы на оптимальном решении было выполнено условие постоянства надбавки, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{F_c}{F_p} = \frac{nn_c c - 2n_c^2}{nn_c p - 2n_p n_c} = \frac{\varphi_c}{\varphi_p}, \tag{3.127}$$

определяющего кинетику ресурсообмена.

Из условия (3.127) следует, что постоянству оптимальной надбавки соответствуют такие зависимости $n(p,c)$, что

$$n(c,p) = \frac{\mu(c-p)}{1 + R(p)\mu(c-p)}. \tag{3.128}$$

Здесь $\mu(c-p)$ и $R(p)$ произвольные функции $c-p$ и p , причем $\mu(0) = 0$.

Чтобы выяснить, как зависит величина этой надбавки от продолжительности закупки и объема закупаемого ресурса, обозначим величину надбавки $c - p = \delta$. Выражение (4.102) примет вид

$$n(c,p) = \frac{\mu(\delta)}{1 + R(p)\mu(\delta)}.$$

Так как

$$\int_0^\tau n(c,p)dt = \Delta N,$$

то

$$\mu(\delta) = \frac{\Delta N}{\int_0^\tau \frac{dt}{1 + R(p(t))\mu(\delta)}}. \tag{3.129}$$

Это условие определяет надбавку δ.

Необратимость процесса характеризуется при постоянной надбавке интегралом

$$\Delta F = \int_0^\tau \delta n(c,p)dt = \delta \Delta N.$$

Средняя величина диссипации капитала

$$\overline{\sigma} = \frac{\Delta F}{\tau} = \frac{\delta \Delta N}{\tau}. \tag{3.130}$$

Равенства (4.103), (4.104) определяют необратимость процесса для любой функции $n(c, p)$ вида (4.102).

Условия постоянства оптимального потока ресурса. Условие оптимальности закупок (4.101) приводит к условию постоянства потока ресурса $n(p, c)$ на оптимальном решении $c^*(p)$ тогда, когда левая часть равенства (4.101) зависит только от n:

$$F(p, c) = \varphi(n(p, c)),$$

где φ — произвольная функция, или, что то же самое, когда $\dfrac{\partial n}{\partial c}$ представляет собой некоторую функцию от n:

$$\frac{\partial n}{\partial c} = n_c(p, c^*) = \zeta(n(p, c^*)) \quad \forall p. \tag{3.131}$$

Справедливо

У т в е р ж д е н и е: *Минимальной стоимости закупок соответствует постоянный во времени поток ресурса в том и только в том случае, когда закон ресурсообмена может быть представлен в форме*

$$n(c, p) = (c - p)\mu(c - p). \tag{3.132}$$

Здесь μ — произвольная неотрицательная функция разности цен.

Оптимальная зависимость $c^*(p)$ определяется условием

$$(c^* - p)\mu(c^* - p) = n^* = \frac{\Delta N}{\tau}. \tag{3.133}$$

П р и м е р. Зададим зависимость $n(c, p)$ следующим образом

$$n(c, p) = \alpha \cdot \operatorname{arctg}(c - p), \qquad \text{при} \quad c > p.$$

Так как это выражение удовлетворяет условию (4.106), получим закон изменения оптимальной цены во времени $c^*(t)$

$$c^*(t) = p(N^*) + \operatorname{tg}\frac{\Delta N}{\tau\alpha},$$

при этом

$$N^*(t) = N_0 - \frac{\Delta N}{\tau}t.$$

Оптимальный поток ресурса будет постоянным и равным $\dfrac{\Delta N}{\tau}$.

Доказательство: Из требования (4.105) получаем

$$\frac{n_{cc}}{n_{cp}} = \frac{n_c}{n_p} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial c} \ln \left| \frac{n_c}{n_p} \right| = 0 \Rightarrow \frac{n_c}{n_p} = r(p),$$

где r — произвольная функция. Уравнение, определяющее вид функции n:

$$n_c - r(p) n_p = 0, \quad n(p, c) = 0 \quad \text{при} \quad p = c. \tag{3.134}$$

Будем решать это уравнение методом характеристик. Уравнения характеристик имеют вид

$$\dot{c} = 1, \quad \dot{p} = -r(p),$$

откуда

$$c(t) = c_0 + t, \quad l(p) = t - t_0, \tag{3.135}$$

где $l(p)$ — произвольная дифференцируемая функция, такая, что

$$\frac{dl}{dp} = -\frac{1}{r(p)}.$$

Исключая t из (3.135), получим первый интеграл уравнения (3.134)

$$l(p) - c = t_0 - c_0 = \text{const},$$

так что общее решение

$$n(c, p) = \mu[l(p) - c].$$

С учетом требования $n(p, c) = 0$ при $c = p$ получим класс законов ресурсообмена (4.106), для которых на оптимальном решении поток ресурса постоянен.

Глава 4

Термодинамическое описание и оптимальные процессы в открытых экономических системах

При контакте экономических агентов через посредника уменьшается необратимость процессов ресурсообмена, а устанавливаемые посредником цены ресурсов при обмене с ЭА являются управляющими воздействиями в оптимизационных задачах микроэкономики. Задачу о максимальном извлечении базового ресурса (максимальной прибыли) решают торговые, финансовые посредники и производственные фирмы. Они закупают сырье, оборудование, рабочую силу и продают свою продукцию. Ниже для краткости базовый ресурс M будем называть свободным капиталом или просто капиталом. В отличие от связанного капитала F он не зависит от запасов ресурсов. Посредник может функционировать как в замкнутой, так и в открытой системе. Для экономики открытые системы являются наиболее распространенными. Ниже мы будем рассматривать преимущественно квазистационарные режимы таких систем. В этом режиме запасы ресурсов ЭА не изменяются, а запасы капитала в отсутствие потребления растут. Оценки ресурсов постоянны либо в том случае, когда они не зависят от M, либо когда накапливающийся капитал тратится на уплату налогов или потребление.

4.1. Ресурсообмен вблизи равновесия, стационарное состояние открытой системы

Условия взаимности для потоков, линейно зависящих от разности цен

Причиной, вызывающей потоки обмена ресурсами, является различие между оценками ресурса обменивающихся подсистем или между ценой фирмы и оценкой ЭА (для определенности будем рассматривать последний случай). Вектор движущих сил $\Delta = p - c$. При малом отклонении от равновесия это различие мало и потоки g можно принять линейно зависящими от разности цены и оценки. В том случае, когда происходит обмен между двумя ЭА, как показано в гл.2, промежуточная цена обмена может быть выражена через оценки, и когда поток ресурса пропорционален разности оценок, задача примет тот же вид, что и при обмене между ЭА и фирмой.

Примем за положительное направление потока, направление в сторону ЭА, тогда для i-го ресурса

$$g_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}\Delta_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}(p_\nu - c_\nu), \quad i = 1, ..., n. \tag{4.1}$$

Матрицу A с элементами $a_{\nu i}$ будем называть матрицей кинетических коэффициентов ЭА, она определяет кинетику обмена ЭА с окружением.

Поток ресурсообмена вызывает встречный поток базового ресурса, такой что

$$\frac{dM}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} c_i g_i. \tag{4.2}$$

Изменение функции благосостояния ЭА при этом

$$\begin{gathered}\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial M}\frac{dM}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial N_i}g_i = -p_0\sum_{i=1}^{n} c_i g_i + \\ +p_0\sum_{i=1}^{n} p_i g_i = p_0\sum_{i=1}^{n}(p_i - c_i)g_i = p_0\Delta^T A\Delta.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Так как оценка базового ресурса $p_0 > 0$ и в силу добровольности ресурсообмена функция благосостояния не уменьшается, матрица A положительно определенная. Покажем, что при некоторых условиях она еще и симметрическая.

Действительно, если разрешить систему уравнений (4.1) относительно Δ, выразив движущие силы через потоки g, то для каждого сколь угодно малого интервала времени выражение (4.3) примет вид

$$\frac{dS}{p_0} = dN^T B dN, \tag{4.4}$$

где $dN = gdt$ — вектор-столбец прироста объема ресурсов за время dt, а $B = A^{-1}$. Элементы $b_{i\nu}$ этой матрицы равны вторым производным отношения S/p_0. В том случае, когда p_0 не зависит от N или в системе имеется валютная биржа и $p_0 = \mathrm{const}$,

$$b_{i\nu} = \frac{\partial^2 \left(\dfrac{S}{p_0}\right)}{\partial N_i \partial N_\nu} = b_{\nu i}, \quad i, \nu = 1, ..., n. \tag{4.5}$$

Таким образом, матрица B положительно определенная и симметрическая, а значит, при малом отклонении от равновесия симметрической является и обратная B матрица кинетических коэффициентов A.

В рассматриваемом случае справедливы

Условия взаимности: *кинетический коэффициент, связывающий движущую силу Δ_ν с потоком i-го ресурса, равен коэффициенту связи движущей силы Δ_i с потоком ν-го.*

В частности, если разность оценок по одному из ресурсов не влияет на поток второго, то отсутствует и обратное влияние.

Принцип минимальной диссипации капитала

Будем рассматривать режим открытой микроэкономической системы, в котором соблюдаются условия постоянства оценок ресурсов. Для каждого ν-го ЭА условия баланса по ресурсам в векторной форме примут вид

$$\sum_j n_{\nu j} + n_\nu^e + \sum_i W_{\nu i} \alpha_{\nu i} = 0, \quad \nu = 1, 2, ... \tag{4.6}$$

где j — индекс j-й подсистемы. Здесь первое слагаемое отражает обмен с другими ЭА, $n_\nu^e(p_\nu, c_\nu)$ соответствуют обмену ν-го ЭА с посредником, устанавливающим цены c_ν, а третье — процессам преобразования ресурсов. Ниже будем предполагать, что посредники в системе отсутствуют.

Если режим близок к равновесию, то потоки ресурсообмена линейно зависят от разности оценок двух контактирующих подсистем или от разности цены и оценки при ресурсообмене с внешней подсистемой, а интенсивности преобразования ресурсов $W_{\nu i}$ постоянны. В этом случае диссипация капитала запишется в форме

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\nu, j, i} \overline{a}_{\nu j i} (p_{\nu i} - p_{j i})^2 + \sum_{i, \nu} p_{\nu i} W_{\nu i} \alpha_{\nu i}, \tag{4.7}$$

где ν, j — индексы подсистем, i — индекс ресурса, множитель $1/2$ введен потому, что каждое слагаемое входит в сумму потоков обмена дважды.

Первое слагаемое соответствует обмену между подсистемами, второе—производству ресурса в подсистемах.

Условия минимума σ (см. (4.7)) по оценкам $p_{\nu i}, (\nu = 1, ..., k)$ каждого из ЭА приводят к равенствам

$$\sum_j \overline{a}_{\nu ji}(p_{\nu i} - p_{ji}) + W_{\nu i}\alpha_{\nu i} = 0, \quad \forall\, i, \nu,$$

что для линейных потоков совпадает с условиями баланса каждой из подсистем по ресурсам (4.6). В силу выпуклости вниз выражения для σ в точке стационарности диссипация капитала достигает минимума.

Таким образом, справедливо У т в е р ж д е н и е: *В открытой микроэкономической системе для законов ресурсообмена, близких к линейным, в стационарном состоянии запасы ресурса и капитала между экономическими подсистемами распределяются таким образом, что диссипация капитала σ минимальна.*

Это утверждение следует из симметричности матрицы кинетических коэффициентов и является аналогом теоремы Пригожина в термодинамике необратимых процессов [26].

4.2. Извлечение капитала в открытых системах

В предыдущей главе речь шла о процессах, соответствующих максимальному извлечению базового ресурса посредником, в экономических системах, замкнутых по ресурсам. Здесь мы рассмотрим открытые системы, в которых задачей фирмы является достижение максимального потока извлекаемого базового ресурса при тех или иных условиях в установившемся режиме.

Под установившимся можно понимать не только стационарный режим, в котором все потоки постоянны, а состояние каждого из ЭА не изменяется, но и режим, в котором эти переменные изменяются во времени периодически с одним и тем же или даже с разными периодами.

Экономические резервуары

Рассмотрим осуществляемый через посредника процесс обмена ресурсами между двумя экономическими резервуарами (рынками). Требуется определить интенсивность такого обмена, а также цены, которые назначает посредник при покупке ресурса на одном и при продаже на другом рынке в тех или иных условиях.

При этом возможны два случая. В первом посредник поочередно взаимодействует с каждой из подсистем. Здесь он может назначать не только цены, но и продолжительность взаимодействия с каждой из них. Во втором случае закупка и продажа ресурса происходят непрерывно, и посредник-монополист распоряжается лишь ценами. Оценки первого и второго резервуара обозначим через $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$, причем $\overline{p}_1 < \overline{p}_2$. Кинетика обмена характеризуется зависимостью

$$g(\overline{p}, p) = \alpha(\overline{p}, p)(\overline{p} - p). \tag{4.8}$$

При этом оценка $\overline{p}$ принимает значения $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$, а цены p, назначаемые посредником при покупке и продаже ресурса, являются искомыми переменными.

Процесс можно охарактеризовать интенсивностью извлечения базового ресурса (средней за цикл величиной его потока) или нормой прибыли — отношением потока базового ресурса, извлекаемого посредником, к потоку капитала, затрачиваемого на закупку. Ясно, что второй показатель будет максимален, если ресурс покупают по самым низким и продают по самым высоким ценам, $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ соответсвенно. Норма прибыли при этом равна

$$\eta_0 = \frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - 1. \tag{4.9}$$

Максимальная интенсивность прибыли. Целью деятельности посредника является достижение максимума средней за цикл интенсивности извлечения базового ресурса.

Поочередная покупка и продажа ресурса. Рассмотрим первоначально случай поочередного взаимодействия посредника с каждым из рынков. Интенсивность получения дохода m равна среднему за цикл продолжительностью T значению произведения потока ресурса на цену посредника:

$$m = \frac{1}{T}\int\limits_0^T pg(\overline{p}, p)\, dt = \overline{pg(\overline{p}, p)} \to \max. \tag{4.10}$$

При этом посредник продает на втором рынке все, что покупает на первом, так что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T g(\overline{p}, p)\, dt = \overline{g(\overline{p}, p)} = 0. \tag{4.11}$$

Мы пришли к усредненной задаче нелинейного программирования с одним условием (4.11). Для ее решения (см. Приложение) необходимо составить функцию Лагранжа исходной не усредненной задачи

$$L = pg(\overline{p}, p) - \lambda g(\overline{p}, p). \tag{4.12}$$

Обозначим функцию L через L_ν при $\overline{p} = \overline{p}_\nu$ и потребуем максимума каждой из функций L_ν по p. Получим

$$\frac{dg(p_\nu, p)}{dp}(p - \lambda) + g(p_\nu, p) = 0, \quad \nu = 1, 2. \tag{4.13}$$

Эти уравнения позволяют найти оптимальные (базовые) значения $p^*_\nu(\overline{p}_\nu, \lambda)$. После их подстановки в L_ν получим $L^*_1(\overline{p}_1, \lambda)$ и $L^*_2(\overline{p}_2, \lambda)$. Оптимальное значение λ^* соответствует условию

$$\max_\nu L^*_\nu(\overline{p}_\nu, \lambda) \to \min_\lambda . \tag{4.14}$$

Откуда находят оптимальные значения цен покупки и продажи

$$p_1 = p^*(\lambda^*, \overline{p}_1), \quad p_2 = p^*(\lambda^*, \overline{p}_2),$$

причем

$$p_1 > \overline{p}_1, \quad p_2 < \overline{p}_2.$$

Проведем решение для случая, когда коэффициент α в (4.8) зависит только от оценки резервуара, т.е. при $\overline{p} = \overline{p}_1$ коэффициент $\alpha = \alpha_1$, а при $\overline{p} = \overline{p}_2$ коэффициент $\alpha = \alpha_2$. Функция L примет вид

$$L = \alpha(\overline{p})(\overline{p} - p)(p - \lambda).$$

Условия (4.13) запишем как

$$-\alpha_\nu(p - \lambda) + \alpha_\nu(\overline{p}_\nu - p) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

откуда

$$p^*_\nu = \frac{\overline{p}_\nu + \lambda}{2}, \quad \nu = 1, 2. \tag{4.15}$$

Подставляя в L эти значения p, получим

$$\begin{gathered} L_1 = \alpha_1 \left(\overline{p}_1 - \frac{\overline{p}_1 + \lambda}{2}\right)\left(\frac{\overline{p}_1 + \lambda}{2} - \lambda\right) = \alpha_1 \left(\frac{\overline{p}_1 - \lambda}{2}\right)^2, \\ L_2 = \alpha_2 \left(\frac{\overline{p}_2 - \lambda}{2}\right)^2. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Так как $p^*_1 > \overline{p}_1$, а $p^*_2 < \overline{p}_2$, функция L^*_2 уменьшается с ростом λ, а L^*_1 увеличивается. Минимум по λ от максимума из двух этих функций достигается в точке равенства L^*_1 и L^*_2:

$$L^*_1(\lambda) = L^*_2(\lambda) \Rightarrow \sqrt{\alpha_1}(\overline{p}_1 - \lambda) = -\sqrt{\alpha_2}(\overline{p}_2 - \lambda).$$

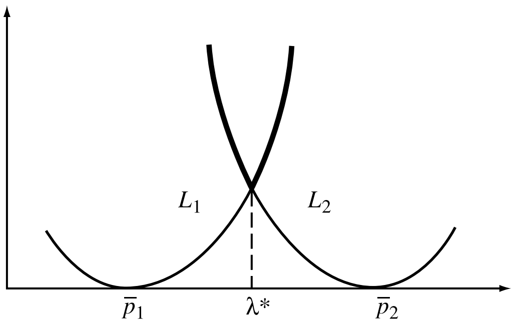

Рис. 4.1: Характер изменения максимального по $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$ значения функции Лагранжа

Функции L_1^* и L_2^* в зависимости от p показаны на рис. 4.1 Максимум из этих двух функций выделен жирной линией.

Минимум по λ от $\max_i L_i^*(\lambda)$ достигается в точке λ^* равенства этих функций. Отсюда

$$\lambda^* = \frac{\overline{p}_1\sqrt{\alpha_1} + \overline{p}_2\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}. \tag{4.17}$$

Чтобы найти доли от общего времени цикла, в течение которых следует производить закупки и продажи, нужно выражения (4.15) и (4.17) подставить в условие (4.11) ненакопления ресурса посредником. Получим

$$\gamma_1\alpha_1(\overline{p}_1 - p_1^*) + \gamma_2\alpha_2(\overline{p}_2 - p_2^*) =$$

$$= \frac{\gamma_1\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{\alpha_2}(\overline{p}_1 - \overline{p}_2)}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \frac{\gamma_2\alpha_2}{2}\frac{\sqrt{\alpha_1}(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} = 0.$$

Так что

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \tag{4.18}$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 \quad \lambda^* = \dfrac{\overline{p_1} + \overline{p_2}}{2}$.

Оптимальные цены закупок и продаж определяются после подстановки λ^* в выражение (4.15). Так, для случая $\alpha_1 = \alpha_2$

$$p_1^* = \frac{3\overline{p}_1 + \overline{p}_2}{4}, \quad p_2^* = \frac{3\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{4}.$$

Первая из них больше, чем p_1, а вторая меньше, чем p_2 на величину, равную $0,25(p_2 - p_1)$.

Предельная интенсивность извлечения базового ресурса

$$m^* = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{4(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})}\Big[\sqrt{\alpha_2}(\overline{p}_2^2-\lambda^{*2})+\sqrt{\alpha_1}(\overline{p}_1^2-\lambda^{*2})\Big], \qquad (4.19)$$

где константа λ^* определена равенством (4.17). Поток капитала, который тратит посредник на приобретение ресурса, соответствующий m^*, равен

$$U^* = p_1 g(\overline{p}_1, p_1)\gamma_1 = \alpha_1 \frac{\lambda^{*2}-\overline{p}_1^2}{4}\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}. \qquad (4.20)$$

Норма прибыли при этом

$$\eta = \frac{p_2^*}{p_1^*} - 1 = \frac{3\overline{p}_2+\overline{p}_1}{3\overline{p}_1+\overline{p}_2} - 1,$$

что, естественно, меньше, чем найденное выше значение $\eta_0 = \dfrac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - 1$, соответствующее обратимой закупке и продаже по оценкам резервуаров. Однако обратимым процессам соответствует сколь угодно малая интенсивность потоков, а значит, и сколь угодно малый поток извлекаемого капитала. Отметим, что в явном виде от продолжительности цикла полученные выше результаты не зависят.

Предельная интенсивность прибыли при заданном потоке затрат

При реализации экономического цикла ограничением может быть средний поток капитала U, затрачиваемого посредником на приобретение ресурса.

Если на поток затрачиваемого посредником капитала есть ограничение типа $U \le U^{\max}$ и величина $U^{\max}$ меньше, чем U^*, то равенство (4.20) нужно ввести в задачу в форме добавочного ограничения. Полученная в результате решения такой задачи интенсивность дохода m, естественно, окажется меньше, чем m^*. Если же $U^{\max} \ge U^*$, то посреднику нет смысла тратить весь капитал, в данном цикле он использует только часть его, равную U^*. В любом случае максимуму m соответствует максимальная норма прибыли на вложенный капитал. Задача в такой постановке рассмотрена ниже.

Одновременная закупка и продажа ресурса. При непрерывной закупке и продаже ресурса посреднической фирмой ей нужно выбрать такие цены p_1 и p_2, чтобы интенсивность получения прибыли

$$\overline{m} = p_2 g_2(\overline{p}_2, p_2) + p_1 g_1(\overline{p}_1, p_1) \qquad (4.21)$$

была максимальна при условии полной продажи всего закупленного, а именно
$$g_1(\overline{p}_1, p_1) + g_2(\overline{p}_2, p_2) = 0. \tag{4.22}$$

Решение этой задачи нелинейного программирования после записи функции Лагранжа
$$L = p_2 g_2(\overline{p}_2, p_2) + p_1 g_1(\overline{p}_1, p_1) + \lambda(g_1(\overline{p}_1, p_1) + g_2(\overline{p}_2, p_2)),$$

приравнивания нулю ее производных по p_1 и p_2 и исключения λ приводит к соотношению, которому должны удовлетворять оптимальные цены:
$$\left(g_1(\overline{p}_1, p_1) \Big/ \frac{\partial g_1}{\partial p_1}\right) + p_1 = \left(g_2(\overline{p}_2, p_2) \Big/ \frac{\partial g_2}{\partial p_2}\right) + p_2. \tag{4.23}$$

В том случае, когда $g_\nu = \alpha_\nu(\overline{p}_\nu - p_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$, условие (4.23) примет вид
$$2p_1 - \overline{p}_1 = 2p_2 - \overline{p}_2,$$

что вместе с условием (4.22)
$$\alpha_1(\overline{p}_1 - p_1) = -\alpha_2(\overline{p}_2 - p_2)$$

позволяет найти оптимальные цены закупок и продаж:
$$p_1^* = \frac{\alpha_1 \overline{p}_1}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{2}, \tag{4.24}$$
$$p_2^* = \frac{\alpha_2 \overline{p}_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\overline{p}_2 + \overline{p}_1}{2}. \tag{4.25}$$

Интенсивность получения прибыли
$$\overline{m}^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\overline{p}_2 - \overline{p}_1)^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)}. \tag{4.26}$$

Нетрудно видеть, что при одинаковых α_ν значение $\overline{m}^*$ вдвое больше, чем предельная интенсивность прибыли m^*, найденная при поочередной покупке и продаже ресурса, (см. (4.19)), что естественно, так как потоки ресурсов одинаковы, а продолжительность продаж составляет половину времени цикла.

Для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ отношение $\overline{m}^*/m^* < 2$ за счет оптимального выбора продолжительности ресурсообмена с каждым из экономических резервуаров.

Векторный ресурс

При поочередном взаимодействии посредника с экономическими резервуарами и при отсутствии ограничений на интенсивность затрат капитала задача (4.10), (4.11) примет форму

$$m = \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i g_i(\overline{p}, p_i)} \to \max_{p,\overline{p}}, \quad \overline{g_i(\overline{p}, p)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь черта над функцией соответствует ее усреднению по времени.

Это усредненная задача с n условиями. Число базовых решений у нее (см. Приложение) не превосходит $n+1$. Чтобы их найти, первоначально нужно рассмотреть вспомогательную задачу

$$L = \sum_{i=1}^{n} [g_i(\overline{p}, p)(p_i - \lambda_i)] \to \max_{p,\overline{p}} \min_{\lambda}, \quad \overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2).$$

Решение этой задачи сильно упрощается, если для каждой из оценок резервуаров $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$ функция L оказывается строго выпуклой вверх по p, что позволяет найти цены посредника при ресурсообмене с каждым из них, решая уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial p_\nu}(p_i - \lambda_i) + g_\nu(\overline{p}_j, p) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 1, ..., n.$$

Если g_i зависит только от $\overline{p}_i, p_i$, то задача с векторным ресурсом может быть разбита на n независимых задач, подобных (4.10), (4.11), и все полученные результаты остаются справедливыми. При этом равенство (4.17) справедливо для каждого λ_i, а в выражении (4.19) для m^* стоит сумма по i, каждое из слагаемых в которой положительно. Норму прибыли можно найти по формуле

$$\eta = \frac{m^*}{\gamma_1 \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(\overline{p}_{i1}, p_i) p_i}.$$

То же относится и к задаче с одновременным взаимодействием посредника с экономическими резервуарами.

Особенности векторного случая становятся существенными, когда интенсивность затрат капитала ограничена значением, меньшим того, которое соответствует максимальной интенсивности получения прибыли m^*. В этом случае фирме приходится выбирать только часть ресурсов, которые приносят наибольшую прибыль на вложенный капитал.

Посредник между двумя ЭА с конечной емкостью. Если посредник взаимодействует не с резервуарами, а с ЭА, оценки которых зависят от запаса ресурсов, то цены закупок и продаж должны оптимально изменяться во времени. Задача извлечения максимальной прибыли (объема базового ресурса) за ограниченное время распадается на три подзадачи:

оптимальное взаимодействие посредника с первым и вторым ЭА, а также согласование этих двух процессов за счет оптимального подбора общих для них параметров; важно при этом, что каждый из двух процессов взаимодействия (покупка и продажа) должен удовлетворять условиям минимума диссипации капитала, полученным выше.

Рассмотрим цикл с поочередной покупкой и продажей ресурса, введя следующие обозначения: C_1, C_2 — «емкости» первого и второго ЭА, определяющие связь между изменением запаса и изменением его оценки $p_i(t)(i = 1, 2)$

$$\frac{dp_i}{dt}C_i = -\frac{dN_i}{dt} = -g_i,$$

$p(t)$ — цена посредника; τ_i $(i = 1, 2)$ — продолжительность взаимодействия с i-м ЭА. Требуется оптимально выбрать τ_1 и τ_2 так, чтобы общая продолжительность цикла была равна заданному значению τ, а также оптимально найти объем закупаемого ресурса ΔN. Критерием оптимальности является прибыль, полученная за цикл:

$$I = \int_0^{\tau_2} p(t)g(p_2, p)dt - \int_0^{\tau_1} p(t)g_1(p, p_1)dt \to \max \tag{4.27}$$

при условиях

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau, \tag{4.28}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{g_1(p, p_1)}{C_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{g_2(p_2, p)}{C_2}, \quad p_i(0) = \overline{p}_i, \tag{4.29}$$

$$\int_0^{\tau_1} g_1(p, p_1)dt = \int_0^{\tau_2} g_2(p_2, p)dt = \Delta N. \tag{4.30}$$

Продемонстрируем последовательность решения для линейной кинетики ресурсообмена, когда

$$g_2(p_2, p) = \alpha_2(p_2 - p), \quad g_1(p, p_1) = \alpha_1(p - p_1). \tag{4.31}$$

Из условий минимальной диссипации следует, что для каждого из полуциклов в оптимальном процессе поток ресурса должен быть постоянен, и, как следствие, оценки ресурса в оптимальном процессе покупок и продаж линейно изменяются во времени:

$$p_1^*(t) = \overline{p}_1 + \frac{\Delta N}{\tau_1 C_1}\, t, \quad t \in [0, \tau_1], \tag{4.32}$$

$$p_2^*(t) = \overline{p}_2 - \frac{\Delta N}{\tau_2 C_2}\, t, \quad t \in [0, \tau_2]. \tag{4.33}$$

Закупочная цена выше $p_1^*(t)$ на величину $\delta_1 = \Delta N/\tau_1\alpha_1$ и ниже $p_2^*(t)$ на $\delta_2 = \Delta N/\tau_2\alpha_2$, так что при закупке и продаже цены посредника

$$p^*(t) = \overline{p}_1 + \frac{\Delta N}{\tau_1}\left(\frac{t}{C_1} - \frac{1}{\alpha_1}\right), \quad p^*(t) = \overline{p}_2 - \frac{\Delta N}{\tau_2}\left(\frac{t}{C_2} + \frac{1}{\alpha_2}\right). \tag{4.34}$$

Эти зависимости после их подстановки в критерий (4.27) позволяют вычислить величину прибыли как функцию от τ_1, τ_2 и ΔN и максимизировать ее по этим переменным при условии (4.28). Получим

$$I = \Delta N(\overline{p}_2 - \overline{p}_1) - \Delta N^2\left(\frac{1}{\tau_1\alpha_1} + \frac{1}{\tau_2\alpha_2} + \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{2C_2}\right). \tag{4.35}$$

Первое из слагаемых в этом выражении соответствует равновесной прибыли при обмене между двумя экономическими резервуарами, второе же характеризует потери за счет конечной продолжительности процесса и конечных емкостей экономических систем.

Чтобы найти продолжительности обмена τ_1 и τ_2, нужно решить задачу

$$\left(\frac{1}{\tau_1\alpha_1} + \frac{1}{\tau_2\alpha_2}\right) \to \min \Big/ \tau_1 + \tau_2 = \tau. \tag{4.36}$$

Ее решение, как легко видеть, приводит к соотношениям

$$\tau_1^* = \tau\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}, \quad \tau_2^* = \tau\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}},$$

так что

$$\frac{1}{\alpha_1\tau_1^*} + \frac{1}{\alpha_2\tau_2^*} = \frac{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}\right). \tag{4.37}$$

Оптимальный объем закупок ΔN с учетом (4.37) после максимизации I по ΔN равен

$$\Delta N^* = \frac{(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)\tau}{\tau\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + 2(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})\left(\frac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}\right)}, \tag{4.38}$$

а максимальная прибыль

$$I^* = \frac{(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)^2\tau}{4(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})\left(\frac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\alpha_2\sqrt{\alpha_1}}\right) + 2\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\tau}. \tag{4.39}$$

Чем больше продолжительность цикла, тем меньше интенсивность получения дохода $m^* = I^*/\tau$.

Предельная норма прибыли. Если прибыль $M = m\tau$ фиксирована и она меньше I^*, то естественно выбирать цены так, чтобы обеспечить прибыль M при минимуме затрат капитала:

$$I_1 = \int_0^{\tau_1} pg(p_1, p)dt \to \min, \quad \int_0^{\tau_1} p_2 g(p_2, p)dt - \int_0^{\tau_2} pg(p_1, p)dt = M. \qquad (4.40)$$

Эта задача во многом похожа на предыдущую. Для полуциклов покупки и продажи должны выполняться те же условия минимума диссипации капитала. Различия возникают на стадии соединения частей цикла. Задача стыковки полуциклов примет вид

$$I_1^*(\tau_1, \Delta N) \to \min_{\Delta N, \tau_1, \tau_2}, \Big/ I_2^*(\tau_1, \Delta N) - I_1^*(\tau_2, \Delta N) = M. \qquad (4.41)$$

Это дает такие же выражения для τ_1^*, τ_2^*, как и в задаче (4.36). Оптимальный объем закупок

$$\Delta N^*(\lambda) = \frac{\lambda(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - \overline{p}_1}{\lambda\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{2}{\alpha_1 \tau_1^*} + \dfrac{2}{\alpha_2 \tau_2^*}\right) + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{2}{\alpha_2 \tau_2^*}\right)}.$$

Подстановка $\Delta N^*(\lambda)$ в ограничение задачи (4.41) приводит к уравнению для нахождения λ^*, а значит, и оптимального объема закупок, зависящих от M.

Учет ограничения на интенсивность затрат. В том случае, когда предельные возможности посредника по закупке ресурса ограничены, его оптимальному поведению соответствует получение максимальной прибыли M при фиксированном значении затрат на закупку ресурса. Так как норма прибыли

$$\eta = \frac{M}{U},$$

то задача эквивалентна максимизации η при некотором значении U или M.

Рассмотрим цикл с поочередным контактом посредника-монополиста с двумя рынками. Кинетику обмена ресурсами примем в форме (4.31) и запишем формальную постановку задачи как

$$M = [\alpha_2 \gamma_2 (\overline{p}_2 - p_2) p_2 - \alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \overline{p}_1) p_1] \to \max \qquad (4.42)$$

при ограниченных затратах, то есть

$$U = \alpha_1 \gamma_1 (p_1 - \overline{p}_1) p_1 \le U^{\max} \qquad (4.43)$$

и ненакоплении ресурса посредником

$$\alpha_1\gamma_1(p_1 - \overline{p}_1) = \alpha_2\gamma_2(\overline{p}_2 - p_2), \tag{4.44}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Условие (4.43) можно считать равенством, если $U^{\max}$ не превышает затрат U^*, значение которых найдено выше (см. (4.20)).

После стандартных выкладок условие, которому должны удовлетворять цены закупок p_1 и продаж p_2, примет форму

$$\alpha_1(p_1 - \overline{p}_1)^2(2p_2 - \overline{p}_2) = \alpha_2(\overline{p}_2 - p_2)^2(2p_1 - \overline{p}_1). \tag{4.45}$$

Оно вместе с ограничениями (4.43), (4.44) определяет $p_1, p_2, \gamma_1, \gamma_2$.

При совмещении процессов покупки и продажи ресурса ограничение на затраты однозначно определяет p_1, p_2, а значит, и прибыль M. Для кинетики обмена ресурсами в форме (4.31) имеем

$$\begin{gathered} p_1 = 0,5\overline{p}_1 + \sqrt{0,25\overline{p}_1^2 + \frac{U^{\max}}{\alpha_1}}, \\ p_2 = \overline{p}_2 - \frac{U^{\max}}{p_1\alpha_2}, \end{gathered} \tag{4.46}$$

$$M = U^{\max}\frac{p_2}{p_1} = U^{\max}\left(\frac{\overline{p}_2}{p_1} - \frac{U^{\max}}{p_1^2\alpha_2}\right). \tag{4.47}$$

Оптимальный выбор ассортимента и цен. Для векторного ресурса, когда ограничен общий поток затрат, возникает задача о выборе оптимального ассортимента и цен для каждого i-го вида ресурса:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i(U_i) \to \max \Big/ \sum_i U_i = U^{\max}, \quad U_i \geq 0. \tag{4.48}$$

Здесь U_i — затраты, выделяемые на закупку i-го ресурса, а зависимость M_i от U_i определяется равенствами (4.46), (4.47) при подстановке в них вместо $U^{\max}$ значения U_i.

Решение задачи (4.48) сводится к составлению функции Лагранжа и записи условий ее стационарности по U_i. Если функции $M_i(U_i)$ строго выпуклы вверх, а их производные в нуле сколь угодно велики, то полученные уравнения определяют оптимальное решение, а значения U_i^* положительны и удовлетворяют условиям

$$\frac{dM_i}{dU_i} = \lambda, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые с учетом (4.46), (4.47) примут форму

$$\frac{\overline{p}_{2i}}{p_{1i}} - \frac{2U_i}{p_{1i}^2\alpha_{2i}} + \frac{U_i}{2\alpha_{1i}}\left(\frac{2U_i}{\alpha_{2i}p_{1i}^3} - \frac{\overline{p}_{2i}}{p_{1i}^2}\right)\frac{1}{\sqrt{0,25\overline{p}_{i1}^2 + U_i/\alpha_{1i}}} = \lambda,$$

$$p_{1i} = 0,5\overline{p}_{1i} + \sqrt{0,25\overline{p}_{1i}^2 + U_i/\alpha_{1i}}, \quad \sum_{i=1}^{n} U_i = U^{\max}, \tag{4.49}$$

$$i = 1, ..., n.$$

Решение системы (4.49) позволяет найти оптимальный ассортимент закупаемых ресурсов, распределение средств на их закупку и цены.

Извлечение прибыли в открытой стационарной экономической системе

В гл. 3 было показано, что в открытой экономической системе, близкой к состоянию равновесия, запасы ресурса между подсистемами перераспределяются так, чтобы диссипация капитала была минимальна. Если система включает активную подсистему — посредническую фирму, которая может вступать в контакт с подсистемами, то диссипация капитала уменьшается и часть его может быть извлечена посредником.

Рассмотрим систему, состоящую из r экономических резервуаров и $k-r$ ЭА-в, обменивающихся друг с другом ресурсами и капиталом (рис. 4.2) в предположении, что оценки ресурсов ЭА-в не зависят от запасов базового ресурса. Оценки ресурса для резервуаров p_i $(i = 1, \dots, r)$ постоянны, для $i > r$ эти оценки зависят от запасов ресурса N_i в i-й подсистеме.

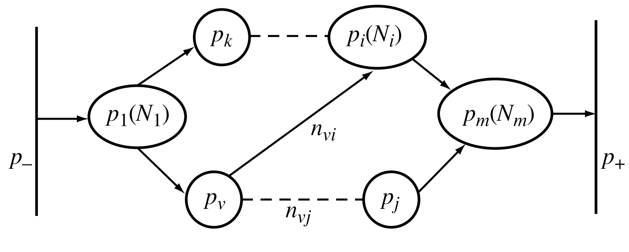

Рис. 4.2: Структура открытой системы с двумя экономическими резервуарами

Поток ресурса n_i экономического агента, имеющего оценку $p_i(N_i)$, сопровождается потоком капитала $q_i = -n_i c_i$, где c_i — цена ресурса, которая больше p_i, когда экономический агент продает ресурс $(n_i < 0)$, и меньше p_i, когда он его покупает $(n_i > 0)$. Если обмен происходит между экономическим агентом и j-м резервуаром, то $c_i = p_j$, а

$$n_{ij} = n_{ij}(p_j, p_i), \quad q_{ij} = -p_j n_{ij}, \qquad j = 1, \dots, r; \quad i = r+1, \dots, k. \tag{4.50}$$

При обмене между двумя ЭА-ми, введем, следуя [82], промежуточную цену $c_{i\nu}$ так, чтобы

$$\overline{n}_{i\nu}(p_i, c_{i\nu}) = -\overline{n}_{\nu i}(p_\nu, c_{i\nu}), \tag{4.51}$$

где $(i;\nu) \geq r+1$. Условия (4.51) позволяют выразить $c_{i\nu}$ через p_i, p_ν. В конечном счете получим

$$n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -n_{\nu i}(p_\nu, p_i). \tag{4.52}$$

Для потоков, линейных относительно разности цены и оценки,

$$\overline{n}_{i\nu} = \overline{\alpha}_{i\nu}(p_i - c_{i\nu}), \quad \overline{n}_{\nu i} = \overline{\alpha}_{\nu i}(p_\nu - c_{i\nu}),$$

по условию (4.51) получим промежуточную цену $c_{i\nu}$ и потоки, фигурирующие в равенстве (4.52), в форме:

$$c_{i\nu} = \frac{\overline{\alpha}_{i\nu} p_i + \overline{\alpha}_{\nu i} p_\nu}{\overline{\alpha}_{i\nu} + \overline{\alpha}_{\nu i}}, \tag{4.53}$$

$$\begin{gathered} n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \frac{\overline{\alpha}_{\nu i}\overline{\alpha}_{i\nu}}{\overline{\alpha}_{i\nu} + \overline{\alpha}_{\nu i}}(p_i - p_\nu) = \alpha_{i\nu}(p_i - p_\nu), \\ n_{\nu i}(p_\nu, p_i) = -n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = \alpha_{i\nu}(p_\nu - p_i). \end{gathered} \tag{4.54}$$

Потоки капитала равны

$$q_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -c_{i\nu}(p_i, p_\nu) n_{i\nu}(p_i, p_\nu) = -q_{\nu i}(p_\nu, p_i). \tag{4.55}$$

Пусть система (рис. 4.3) включает фирму, которая может покупать ресурс у одних ЭА-в и продавать другим, извлекая при этом базовый ресурс. Фирма назначает цену v_i при обмене с i-й подсистемой, поток ресурса при этом равен $n_i(p_i, v_i)$. В условиях равновесия задача о максимальной интенсивности извлечения базового ресурса примет вид

$$m = -\sum_{i=1}^{k} n_i(p_i, c_i) c_i \to \max_{c,p} \tag{4.56}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(p_i, c_i) = 0, \tag{4.57}$$

$$\sum_{j=1}^{k} n_{ji}(p_j, p_i) = n_i(p_i, c_i), \qquad i = r+1, \ldots, k. \tag{4.58}$$

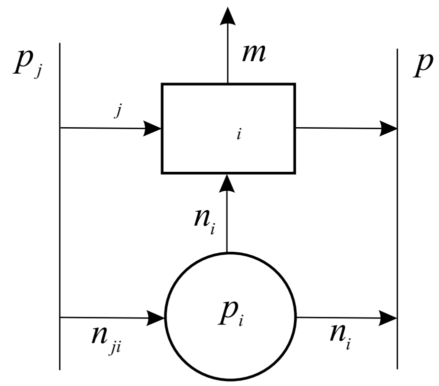

Рис. 4.3: Открытая система, включающая фирму, экономические резервуары и подсистему с конечной емкостью

Знак минус в (4.56) объясняется тем, что за положительное направление принято направление потока ресурса от ЭА к фирме, такой поток сопровождается затратами фирмой базового ресурса. Условие (4.57) соответствует балансу фирмы, а условия (4.58) — балансу каждого из $(k-r)$ ЭА по ресурсам.

Для получения условий оптимальности запишем функцию Лагранжа задачи (4.56), (4.58):

$$L = \sum_{i=1}^{k} \left[n_i(p_i, c_i)(\Lambda - c_i + \lambda_i) - \lambda_i \sum_{j=1}^{k} n_{ji}(p_j, p_i) \right]. \tag{4.59}$$

При этом $\lambda_i = 0$ при $i \le r$.

Условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_i}{\partial c_i}(\Lambda - c_i - \lambda_i) = n_i(p_i, c_i), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_i}{\partial p_i}(\Lambda - c_i - \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial n_{ji}}{\partial p_i}, \quad i = r+1, \ldots, k. \tag{4.61}$$

Условия (4.57), (4.58), (4.60), (4.61) определяют $2(k-r)$ неизвестных p_i и λ_i, величину Λ и k оптимальных цен c_i.

В частности, для $n_{ji} = \alpha_{ji}(p_i - p_j)$, $n_i = \alpha_i(c_i - p_i)$ эти условия примут вид

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(c_i - p_i) = 0, \tag{4.62}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}(p_i - p_j) = \alpha_i(c_i - p_i), \quad i = r+1, \ldots, k, \tag{4.63}$$

$$2c_i = \lambda_i + \Lambda + p_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{4.64}$$

$$-\alpha_i(\Lambda - c_i + \lambda_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}, \quad i = r+2, \ldots, k. \tag{4.65}$$

П р и м е р. Для частного случая, когда $k = r = 2$, $p_1 = p_-$, $p_2 = p_+$, причем $p_+ > p_-$, система (4.62)–(4.64) примет вид (условия (4.63) и (4.65) отсутствуют, так как $r = k$, а λ_1 и λ_2 равны нулю)

$$\alpha_1(c_1 - p_-) + \alpha_2(c_2 - p_+) = 0, \quad 2c_1 = \Lambda + p_-, \quad 2c_2 = \Lambda + p_+.$$

Необходимо найти c_1, c_2. Решение этой системы :

$$c_1^* = \frac{2\alpha_1 p_- + \alpha_2(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad c_2^* = \frac{2\alpha_2 p_+ + \alpha_1(p_+ + p_-)}{2(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

где c_1^* и c_2^* — оптимальные цены закупки и продажи ресурса. По условию (4.56) с учетом оптимальных цен интенсивность извлечения базового ресурса

$$m^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (p_+ - p_-)^2}{4(\alpha_1 + \alpha - 2)}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда $r = 2$, а $k = 3$. Другими словами, система содержит два резервуара, фирму и ЭА. Здесь c_3 — цена покупки (продажи) ресурса фирмой у ЭА, p_3 — его оценка ресурса. Подсистема контактирует с резервуарами и фирмой, между ними возникают потоки ресурсов. Цель фирмы остается прежней — извлечение максимально возможного потока базового ресурса. Система (4.62)–(4.65) примет форму

$$\alpha_1(c_1 - p_-) + \alpha_2(c_2 - p_+) + \alpha_3(c_3 - p_3) = 0, \tag{4.66}$$

$$\alpha_3(c_3 - p_3) = \alpha_4(p_3 - p_-) + \alpha_5(p_3 - p_+), \tag{4.67}$$

$$c_1 = \frac{\Lambda + p_-}{2}, \tag{4.68}$$

$$c_2 = \frac{\Lambda + p_+}{2}, \tag{4.69}$$

$$c_3 = \frac{\lambda_3 + \Lambda + p_3}{2}, \tag{4.70}$$

$$-\alpha_3(\Lambda - c_3 + \lambda_3) = \lambda_3(\alpha_4 + \alpha_5), \tag{4.71}$$

откуда получаем c_1^*, c_2^*, c_3^*, p_3^*.

Исследуем зависимость предельной интенсивности извлечения базового ресурса и потока ресурса между фирмой и ЭА от коэффициента α_4. Зададим следующие значения:

$$\alpha_1 = 0.2, \quad \alpha_2 = 0.3, \quad \alpha_3 = 0.01, \quad \alpha_5 = 0.4, \quad p_- = 4, \quad p_+ = 7,$$

и для них найдем зависимости $c_1^*(\alpha_4)$, $c_2^*(\alpha_4)$, $c_3^*(\alpha_4)$ и $p_3^*(\alpha_4)$. Подставляя найденные величины в выражение для интенсивности извлечения базового ресурса (4.56), получим функцию $m^*(\alpha_4)$.

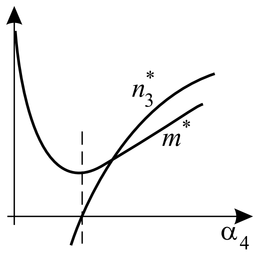

Рис. 4.4: Зависимости предельной интенсивности извлечения базового ресурса и потока обмена между фирмой и ЭА от параметра α_4

На рис. 4.4 изображена функция $m^*(\alpha_4)$ и поток между фирмой и ЭА $n_3^*(\alpha_4) = \alpha_3 \cdot (c_3^*(\alpha_4) - p_3^*(\alpha_4)$.

Как видно из графиков, функция $m^*(\alpha_4)$ при некотором $\alpha = \alpha_m$ достигает своего минимума, а функция $n_3^*(\alpha_4)$ равна нулю при том же значении $\alpha_4 = \alpha_m$. Это естественно, так как фирма обменивается с ЭА с целью увеличения своей прибыли. Если при некотором значении α_4 поток обмена $n_3 = 0$, то поток прибыли m минимален.

В ряде случаев представляет интерес задача, обратная по отношению к рассмотренной, а именно: какие подсистемы и в каком количестве следует подпитывать базовым ресурсом для того, чтобы с минимальными его затратами поддерживать заданную конфигурацию оценок ресурсов во всех или в выбранных подсистемах. Подобную задачу решает, например, государство при поддержании заданного уровня цен на те или иные ресурсы в отдельных регионах, обменивающихся с другими ЭА. Условия оптимальности подобной обратной задачи совпадают с условиями (4.60), (4.61) прямой, так как максимуму потока m базового ресурса, когда он отрицателен, соответствует минимум его затрат.

4.3. Обмен с нестационарными рынками

Покупка и продажа на одном рынке

Посредник (фирма) может извлекать прибыль, не только закупая ресурсы у одних и продавая их другим ЭА, но и контактируя с одним из них в том случае, когда оценки ресурса у ЭА меняются во времени под влиянием внешних факторов.

Характерным примером является рынок сельскохозяйственной продукции, стоимость которой зависит от сезона и от урожая в текущем году. Другим примером является покупка и продажа валюты и ценных бумаг, курс которых изменяется под действием множества внешних факторов.

Для такого обмена фирма должна иметь запас базового ресурса и склад для хранения продукта, которым она обменивается с рынком. Структура системы показана на рис. 4.5, где $p_0(t)$ — равновесная цена рынка, $p(t)$ — цена посредника, $N(t)$ и $M(t)$ — соответственно запасы ресурса и капитала (базового ресурса); $g(p_0, p)$ — поток ресурса.

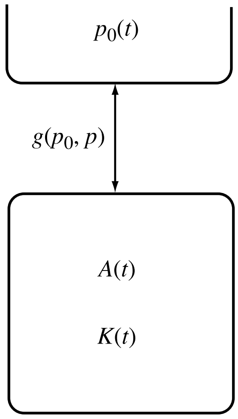

Рис. 4.5: Структура системы извлечения фирмой прибыли при обмене с нестационарным рынком

Требуется найти такой закон изменения во времени цены $p(t)$, чтобы прирост капитала фирмы за период τ был максимален. Прирост базового ресурса фирмы за время τ

$$I(\tau) = \int_0^\tau -g\Big(p_0(t), p(t)\Big)p(t)dt \to \max_{p(t)\geq 0}. \tag{4.72}$$

Скорость его изменения

$$\dot{M}(t) = -g\Big(p_0(t), p(t)\Big)p(t), \quad M(0) = M_0. \tag{4.73}$$

Изменение объема ресурса

$$\dot N(t) = g\Big(p_0(t), p(t)\Big), \quad N(0) = N_0. \tag{4.74}$$

Объемы ресурса и капитала неотрицательны, в качестве положительного направления потока принята закупка ресурса.

Будем предполагать, что фирма не накапливает ресурса, т.е. $N(\tau) = N(0)$, а значит

$$\int_0^\tau -g(p_0(t), p(t))\, dt = 0. \tag{4.75}$$

При отсутствии капитала фирма не покупает ресурс, а при отсутствии ресурса она не продает его, так что

$$\begin{aligned} g(p_0(t), p(t)) \le 0 \quad &\text{при} \quad M = 0, \\ g(p_0(t), p(t)) \ge 0 \quad &\text{при} \quad N = 0. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Таким образом, задача сводится к максимизации прироста капитала при ограничениях (4.73)–(4.76), управлением является цена посредника $p(t)$, а переменными состояния — объемы запасов ресурса и капитала.

Оценка предельной прибыли. Наибольшую сложность при решении задачи (4.73)–(4.76) представляют ограничения (4.76), так как именно наличие этих условий приводит к необходимости учитывать дифференциальные уравнения (4.73), (4.74). Чтобы обойти эти трудности, первоначально ослабим ограничения задачи, предположив, что начальные запасы M_0 и N_0 столь велики, что условия (4.76) несущественны, или, что то же самое, фирма может в случае необходимости получить неограниченный беспроцентный заем.

Так как уравнения (4.73), (4.74) являются ляпуновскими (т.е. N и M не входят в правые части этих уравнений), то в условиях отсутствия ограничений (4.76) их можно не учитывать, а, найдя оптимальный закон изменения цен $p^*(t)$, из уравнений (4.73), (4.74) получить оптимальные зависимости $N^*(t)$ и $M^*(t)$. Полученное при этом значение максимального прироста базового ресурса $I^*(\tau)$ будет оценкой сверху для прироста, найденного с учетом отброшенных ограничений.

Функцию Лагранжа задачи (4.72), (4.75) запишем в форме

$$L(p_0, p) = -g(p_0, p)p + \lambda g(p_0, p) = g(p_0, p)(\lambda - p).$$

Условие ее стационарности по p приводит к уравнению

$$\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}(\lambda - p) - g(p_0, p) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{g(p_0, p)}{\dfrac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}} + p = \lambda. \tag{4.77}$$

С использованием условия (4.75) исключим константу λ из соотношения (4.77). Для этого преобразуем (4.75) как

$$\int\limits_0^\tau g(p_0(t), p(t))\, dt = \int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}(\lambda - p)\, dt = \lambda \int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, dt - \int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, p\, dt = 0,$$

откуда

$$\lambda = \left(\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, p\, dt \right) : \left(\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, dt \right). \tag{4.78}$$

Подставляя (4.78) в (4.77), получаем уравнение, связывающее оптимальную цену $p^*(t)$ с $p_0(t)$:

$$g(p_0, p^*) = \frac{\partial g}{\partial p} \left(\left(\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, p^* dt \right) : \left(\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial p}\, dt \right) - p^* \right). \tag{4.79}$$

Выпишем явные выражения для $p^*(p_0)$ и $I^*(\tau)$ в случае, когда поток ресурса линеен относительно разности цен:

$$g(p_0, p) = \alpha(p - p_0), \tag{4.80}$$

где α — некоторая положительная константа. Условие (4.79) примет вид

$$g^*(t) = \frac{\alpha}{\tau} \int\limits_0^\tau p\, dt - p(t).$$

Обозначая среднюю цену ресурса за время τ как $\dfrac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau p\, dt = \overline{p}$ и учитывая, что в силу (4.75) $\overline{p} = \overline{p_0}$, получим на оптимальном решении

$$g^*(t) = \alpha(p(t) - p_0(t)) = \alpha(\overline{p}_0 - p(t)),$$

откуда

$$p^*(t) = \frac{1}{2}(\overline{p}_0 + p_0(t)). \tag{4.81}$$

Оптимальный поток ресурса равен

$$g^*(p_0, p^*) = \alpha(p^*(t) - p_0(t)) = \frac{\alpha}{2}(\overline{p}_0 - p_0(t)). \tag{4.82}$$

В том случае, когда оценка ресурса для резервуара представляет собой стационарный эргодический случайный процесс, оценка сверху для средней интенсивности извлечения базового ресурса при обмене с экономическим резервуаром пропорциональна при стремлении τ к бесконечности дисперсии оценки:

$$J^* = \frac{I^*(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau -g^*(p_0(t), p^*(t))p^*(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{2}(p_0 - \overline{p}_0)\frac{1}{2}(p_0 + \overline{p}_0)\,dt = \frac{\alpha}{4\tau}\int\limits_0^\tau (p_0^2 - \overline{p}_0^2)\,dt = \tag{4.83}$$
$$= \frac{\alpha}{4\tau}\int\limits_0^\tau (p_0 - \overline{p}_0)^2\,dt = \frac{\alpha}{4}D_{p_0}.$$

Здесь $\overline{p}_0$ представляет собой математическое ожидание оценки резервуара. Если известна плотность распределения оценки $\mu(p_0)$ на множестве V возможных значений p_0, то формула (4.79) для оптимального потока ресурса после перехода от усреднения по времени к усреднению по множеству примет вид

$$g(p_0, p^*) = \left(\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}\right)_{p^*}\left(\frac{E\left[\dfrac{\partial g}{\partial p}\,p\right]}{E\left[\dfrac{\partial g}{\partial p}\right]} - p^*\right). \tag{4.84}$$

Здесь через $E[\cdot]$ обозначено математическое ожидание по p_0 выражения, стоящего в скобках. Так,

$$E\left[\frac{\partial g}{\partial p}\,p\right] = \int\limits_V \mu(p_0)\frac{\partial g(p_0, p)}{\partial p}\,p\,dp_0.$$

Таким образом, (4.84) представляет собой интегральное уравнение, связывающее p^* и p_0 для любого t. Эта связь зависит от плотности распределения p_0.

Для линейной кинетики ресурсообмена (4.80) уравнение (4.84) кардинально упрощается. Оптимальная цена $p^*(t)$ зависит в этом случае не от плотности распределения p_0, а лишь от ее среднего и текущего значений.

Перепродажа ресурсов. Рассмотрим экономическую систему, в которой происходит одновременная покупка и продажа ресурса по разным ценам. Имеется множество ЭА (клиентов), оценивающих один и тот же ресурс по-разному и по тем или иным причинам не имеющим возможности вступать в прямой контакт ресурсообмена. Подобную ситуацию мы наблюдаем, например, при покупке и продаже жилья. Посредник извлекает прибыль из-за различия оценок ресурса на множестве клиентов.

Пусть $\hat{p}$ и $\check{p}$ — предельные цены (верхняя и нижняя соответственно) клиентов, $p_+(t)$ — цена покупки, $p_-(t)$ — цена продажи. Поскольку посредник не может продавать ресурс по цене выше, чем максимальная цена клиентов, и покупать ресурс по цене ниже, чем минимальная цена клиентов, то должны выполняться неравенства

$$p_-(t) \le \hat{p}_0, \quad p_+(t) \le \check{p}_0.$$

Задача максимизации интенсивности получения прибыли может быть формализована как

$$J = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \Big[g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+\Big]dt \to \max_{p_+, p_-}, \tag{4.85}$$

где $g_-(\hat{p}_0, p_-)$ и $g_+(\check{p}_0, p_+)$ — потоки ресурса при продаже и покупке.

Как и в предыдущей модели, мы считаем, что посредник не накапливает ресурс. Условие ненакопления ресурса запишем как

$$\Delta N = \int\limits_0^\tau \Big[g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)\Big]dt = 0. \tag{4.86}$$

При истощении капитала или ресурса потоки покупок и продаж связаны неравенствами

$$\begin{array}{c} g_+(\check{p}_0, p_+)p_+ \le g_-(\hat{p}_0, p_-)p_-, \quad M = 0, \\ g_+(\check{p}_0, p_+) \ge g_-(\hat{p}_0, p_-), \quad N = 0. \end{array} \tag{4.87}$$

Изменения запасов ресурса и капитала определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{array}{c} \dot{N}(t) = g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-), \quad N(0) = N_0, \\ \dot{M}(t) = g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+, \quad M(0) = M_0. \end{array} \tag{4.88}$$

В том случае, когда N_0 и M_0 велики, вероятность истощения запасов капитала и ресурса пренебрежимо мала, поэтому неравенства (4.87) можно отбросить. Уравнения (4.88) не содержат в правых частях N и M, и в этом случае их можно не учитывать при выборе оптимальных цен p_+^* и p_-^*.

Решим задачу (4.85), (4.86). Функцию Лагранжа запишем как

$$L = g_-(\hat{p}_0, p_-)(p_- - \lambda) - g_+(\check{p}_0, p_+)(p_+ - \lambda).$$

Условия ее стационарности по p_+ и p_- приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_+\Big(\check{p}_0(t), p_+(t)\Big)}{\partial p_+}\,[p_+(t)-\lambda] + g_+\Big(\check{p}_0(t), p_+(t)\Big) = 0,\\ &\frac{\partial g_-\Big(\hat{p}_0(t), p_-(t)\Big)}{\partial p_-}\,[p_-(t)-\lambda] + g_-\Big(\hat{p}_0(t), p_-(t)\Big) = 0. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Если решение этих двух уравнений единственно и соответствует максимуму L, то из уравнений (4.89) получаем

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= -\frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}\,(p_+(t)-\lambda),\\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= -\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-}\,(p_-(t)-\lambda). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (4.86):

$$\Delta N = \int\limits_0^\tau \Big[g_+(\check{p}_0, p_+) - g_-(\hat{p}_0, p_-)\Big]dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-}p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}p_+(t)\right] dt +$$

$$+\ \lambda \int\limits_0^\tau \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-} - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}\right] dt = 0,$$

откуда выразим λ:

$$\lambda = \frac{\int\limits_0^\tau \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t))}{\partial p_-}p_-(t) - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}p_+(t)\right] dt}{\int\limits_0^\tau \left[\frac{\partial g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)}{\partial p_-} - \frac{\partial g_+(\check{p}_0(t), p_+(t))}{\partial p_+}\right] dt}. \tag{4.90}$$

Подставляя λ из уравнения (4.90) в (4.89), получим систему уравнений для нахождения оптимальных $p_+^*(t)$ и $p_-^*(t)$.

Для линейной зависимости потока ресурса от разности цен

$$\begin{aligned} g_+(\check{p}_0(t), p_+(t)) &= \alpha_+(p_+(t) - \check{p}_0(t)),\\ g_-(\hat{p}_0(t), p_-(t)) &= \alpha_-(p_-(t) - \hat{p}_0(t)), \end{aligned} \tag{4.91}$$

где α_+, α_- — некоторые положительные константы.

Уравнения (4.89) примут вид

$$
\begin{aligned}
\alpha_+(p_+ - \lambda) + \alpha_+(p_+ - \check{p}_0) &= 0, \\
\alpha_-(p_- - \lambda) + \alpha_-(p_- - \hat{p}_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Подставив в эти уравнения значение λ, получим оптимальное решение

$$
\begin{aligned}
p_+^*(t) &= \frac{1}{2}(\lambda + \check{p}_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_+\overline{p}_+ + \alpha_-\overline{p}_-}{\alpha_+ + \alpha_-} + \check{p}_0(t)\right], \\
p_-^*(t) &= \frac{1}{2}(\lambda + \hat{p}_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_+\overline{p}_+ + \alpha_-\overline{p}_-}{\alpha_+ + \alpha_-} + \hat{p}_0(t)\right].
\end{aligned}
\tag{4.92}
$$

В выражениях для p_+^* и p_-^* содержатся их средние значения $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$ на интервале $[0, \tau]$. Мы можем избавиться от $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$, усреднив левые и правые части в этих равенствах. В результате получим для $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$:

$$
\overline{p}_+ = \frac{(2\alpha_+ + \alpha_-)\overline{\check{p}}_0 + \alpha_-\overline{\hat{p}}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad \overline{p}_- = \frac{\alpha_+\overline{\check{p}}_0 + (\alpha_+ + 2\alpha_-)\overline{\hat{p}}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}.
$$

После подстановки $\overline{p}_+$ и $\overline{p}_-$ в условия (4.92), выразим оптимальные значения p_+^* и p_-^* только через $\check{p}_0(t)$ и $\hat{p}_0(t)$ и их средние значения:

$$
p_+^*(t) = \frac{1}{2}\,\check{p}_0(t) + \frac{\alpha_+\overline{\check{p}}_0 + \alpha_-\overline{\hat{p}}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}, \quad p_-^*(t) = \frac{1}{2}\,\hat{p}_0(t) + \frac{\alpha_+\overline{\check{p}}_0 + \alpha_-\overline{\hat{p}}_0}{2(\alpha_+ + \alpha_-)}. \tag{4.93}
$$

Максимальная интенсивность получения прибыли:

$$
\begin{aligned}
J^* &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Big[g_-(\hat{p}_0, p_-)p_- - g_+(\check{p}_0, p_+)p_+\Big]dt = \\
&= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Big[-\alpha_-\Big(p_-^*(t) - \hat{p}_0(t)\Big)p_-^*(t) - \alpha_+\Big(p_+^*(t) - \check{p}_0(t)\Big)p_+^*(t)\Big]\,dt.
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

Полученные соотношения могут быть обобщены на случай, когда цены $\hat{p}_0$ и $\check{p}_0$ представляют собой стационарные случайные процессы, как это было сделано выше для обмена с одним рынком. Для кинетики в форме (4.91) выражения (4.93) остаются в силе, если под $\overline{\hat{p}_0}$ и $\overline{\check{p}_0}$ понимать математические ожидания этих процессов. Оценка для интенсивности получения прибыли (4.94) примет форму

$$
J^* = \frac{1}{4}(\alpha_+ D_{\check{p}_0} + \alpha_- D_{\hat{p}_0}) + \frac{\alpha_+\alpha_-}{4(\alpha_+ + \alpha_-)}(\overline{\check{p}}_0 - \overline{\hat{p}}_0)^2,
$$

где
$$D_{\check{p}_0} = \overline{\check{p}_0^2} - (\overline{\check{p}}_0^2), \quad D_{\hat{p}_0} = \overline{\hat{p}_0^2} - (\overline{\hat{p}}_0^2)$$
дисперсии случайных величин $\check{p}_0$ и $\hat{p}_0$.

Вероятность истощения запаса ресурса. Рассматривая задачи извлечения базового ресурса в системах с нестационарными экономическими резервуарами, мы предполагали, что запасы ресурсов посредника не истощаются при изменении потоков закупок и продаж. Чтобы выяснить, насколько грубым является это допущение, найдем вероятность истощения запаса ресурса N в предположении, что $p_0(t)$ является гауссовым стационарным случайным процессом с корреляционной функцией вида

$$R_{p_0}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha|\tau|].$$

Нетрудно показать, что для линейной зависимости (4.80) потока ресурса от разности цен этот поток при $p = p^*(p_0)$ также является гауссовым случайным процессом с корреляционной функцией

$$R_{g^*}(\tau) = \frac{\alpha^2}{4} R_{p_0}(\tau) = \frac{\alpha^2\sigma^2}{4} \exp(-\alpha|\tau|).$$

Здесь множитель при экспоненте равен дисперсии D_{g^*}. Такой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S_{g^*}(w) = \frac{2\alpha D_{g^*}}{\alpha^2 + w^2} = \frac{\alpha^3\sigma^2}{2(\alpha^2 + w^2)}.$$

Спектральная плотность процесса $N(t)$, связанного с $g^*(t)$ уравнением (4.74), имеет вид
$$S_N(w) = \frac{\overline{N_0} - S_g(w)}{w^2}.$$

Константа $\overline{N_0}$ имеет смысл математического ожидания процесса $N(t)$ и выбирается из условия ограниченности дисперсии. Дисперсия процесса $N(t)$

$$D_N = \int\limits_0^\infty S_N(w)dw$$

ограничена при $\overline{N_0} = \dfrac{\alpha\sigma^2}{2}$, при таком выборе
$$D_N = \frac{\sigma^2}{4}. \tag{4.95}$$

Вероятность истощения запаса ресурса $P(N_0)$ равна вероятности того, что отрицательные отклонения $N(t)$ от $\overline{N_0}$ превысят величину начального запаса. Эту вероятность можно найти, так как закон распределения величины N нормальный, известны ее математическое ожидание и дисперсия.

Одной из возможных (близкой к оптимальной) стратегий выбора $p(t)$ является выбор по формуле (4.91) для тех моментов времени, когда $N(t) > 0$, и выбор $p(t)$ из условия равенства $g(t)$ нулю для случая, когда $N(t) = 0$. Средняя интенсивность получения прибыли в этом случае с учетом того, что при $g(t) = 0$ $\dot{M} = 0$, равна $\check{J}(N_0) = \check{J}^*\Big(1 - P(N_0)\Big)$, и она может служить нижней оценкой для достижимой интенсивности прибыли фирмы. При стремлении начального запаса N_0 к бесконечности оценки сближаются друг с другом.

Аналогичный анализ можно провести для вероятности выполнения второго из неравенств (4.76) (истощение капитала). Однако, в отличие от $N(t)$, величина капитала $M(t)$ возрастает, и вероятность того, что $M(t)$ обратится в нуль, со временем уменьшается. Полученные оценки показывают, какие характеристики рыночных цен нужно прогнозировать для выбора оптимальных потоков и цен покупки и продажи ресурса.

Извлечение капитала — не единственно возможный критерий деятельности фирмы. В том случае, когда ресурс легко продать и он не требует затрат на складирование, критерием может служить максимально возможный прирост капитализации фирмы, т.е. суммы объемов капитала и стоимости ресурса по его текущей оценке на рынке. В такой постановке ниже рассмотрена задача о выборе оптимальной стратегии покупки и продажи ценных бумаг.

4.4. Производственная фирма в открытой экономической системе

Производственные функции и микроэкономические балансы. В предыдущих разделах этой главы были рассмотрены экономические системы, включающие посредническую фирму, закупающую и продающую ресурсы с целью извлечения капитала. В этом параграфе рассмотрены системы, включающие производственную фирму той или иной структуры. Она, как и посредническая фирма, является активной подсистемой, т.е. устанавливает цены закупок сырья и продаж готовой продукции с целью извлечения максимума базового ресурса. Но, в отличие от посреднической, эта фирма характеризуется *производственной функцией*, определяющей связь между вектором потока выпускаемой продукции и входными потоками предприятия.

Все потоки, используемые для производства, мы будем обозначать через z, а получающиеся в результате через P. Расходующиеся ресурсы могут измеряться в натуральных единицах или быть агрегированными потоками затрат на сырье, оборудование, людские ресурсы и пр. Их называют факторами производства. Факторы производства подразделяют на *взаимозаменяемые* или *взаимодополняемые*. В последнем случае каждый из этих факторов необходим, при его отсутствии выпуск P равен нулю, а при ограничении такого фактора выпуск продукции может быть ограничен. Взаимодополняемые ресурсы могут быть *комплиментарными*, то есть входить в каждую единицу выпускаемой продукции в строго определенных пропорциях.

Производственная функция $P = P(z)$ как правило, но не всегда, удовлетворяет следующим условиям [21]:

1. Выпуск продукции невозможен без затрат ресурсов ($P(0) = 0$).

2. Функция P монотонная по каждому из факторов производства, дифференцируемая, выпуклая вверх и однородная первой степени, т.е.

$$P(rz_1, rz_2, ...) = rP(z_1, z_2, ...).$$

Примером такой функции является функция Кобба–Дугласа:

$$P(z) = \kappa \prod_{i=0}^{m} z_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1. \tag{4.96}$$

Последнее равенство связано с однородностью первой степени функции P. Все факторы производства при задании производственной функции в форме Кобба–Дугласа предполагают взаимодополняемыми.

Уравнения микроэкономических балансов по ресурсам и связанному капиталу для микроэкономической системы, содержащей ЭА и фирму, примут вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_i &= g_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} - z_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \dot{N}_i &= g_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} + P_i(z), \quad i = n+1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\dot{M} = m_{\text{вх}} - m_{\text{вых}} - \sum_{i=1}^{m} \left(g_{i\text{вх}} c_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} c_{i\text{вых}}\right), \tag{4.98}$$

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^{m} \left(g_{i\text{вх}} p_{i\text{вх}} - g_{i\text{вых}} p_{i\text{вых}}\right) + \sigma. \tag{4.99}$$

При этом диссипация капитала σ равна (см. гл. 2)

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_j \sum_\nu g_{j\nu}(p_j, p_\nu)(p_j - p_\nu) - \sum_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} z_{ij} + \sum_{i=n+1}^{m} p_{ij} P_{ij}(z_j) \right), \tag{4.100}$$

где p_j и p_ν — векторы оценок ресурсов j-й и ν-й подсистем с составляющими p_{ij} и $p_{i\nu}$. Здесь принято, что преобразование ресурсов у ЭА отсутствует, индекс для потребляемых ресурсов изменяется от единицы до n, а для производимых ресурсов от $n+1$ до m. Функция $P_i(z)$ — производственная функция по i-му продукту, $m_{\text{вх}}$ и $m_{\text{вых}}$ — потоки базового ресурса, в число потребляемых ресурсов включено закупаемое, а в число производимых — списанное оборудование. В неоднородной системе диссипация капитала $\sigma \geq 0$.

Производственные фирмы закупают одни виды ресурсов (сырье, энергию, трудовые ресурсы и пр.), а продают — другие. Эти фирмы могут иметь сложную структуру с обменом потоками сырья и полуфабрикатов между ее элементами. Ниже с учетом структуры рассмотрены предельные возможности производственной фирмы, функционирующей в открытой микроэкономической системе.

Однородная производственная фирма со скалярным потоком продукции. Рассмотрим производственную фирму, приобретающую ресурсы с интенсивностями q_i по ценам c_i $(i = 1, \ldots, m)$ и вырабатывающую поток g продукции с ценой c_g. Здесь мы не учитываем внутренней структуры фирмы и внутренних потоков сырья и полуфабрикатов. Поэтому рассматриваемую фирму можно назвать однородной.

Разобьем вектор поступающих ресурсов на две категории: взаимодополняющие ресурсы с потоками $q_i(c_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и взаимозаменяемые ресурсы с потоками $q_i(c_i)$ $(i = n+1, \ldots, m)$. На каждый из потоков наложено условие неотрицательности. То значение цены закупки c_{i0}, для которого поток q_i обращается в нуль, называют оценкой ресурса. При $c_i > c_{i0}$, $q_i(c_i) > 0$. Аналогично, оценка c_{g0} определяет область ненулевого потока продукции (при $c_g < c_{g0}$, $g(c_g) > 0$).

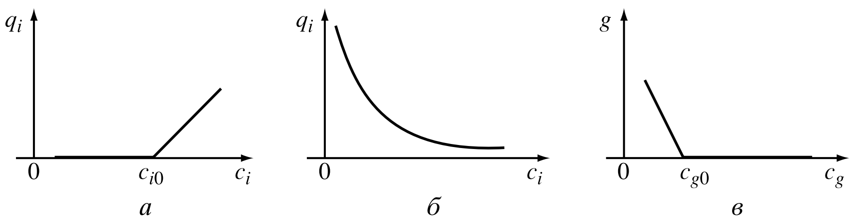

Рис. 4.6: Связь цен с потоками ресурсов (*а, б*) и продукции (*в*)

Функция предложения (зависимость потока от цены закупки) может быть различной. Например (рис. 4.6, *а*),

$$q_i(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad c_i \le c_{i0}, \\ k_i(c_i - c_{i0}) & \text{при} \quad c_i > c_{i0}. \end{cases} \tag{4.101}$$

Здесь коэффициент k_i больше нуля. Для ресурсов, плата за которые K постоянна и не зависит от потоков q_i, таких, как оплата аренды зданий и земли (рис. 4.6, *б*),

$$q_i(c_i) = \frac{K}{c_i} \ \text{ при } \ c_i > 0. \tag{4.102}$$

Поток продукции фирмы определен функцией спроса $g(c_g)$. Характер этой зависимости показан на рис. 4.6, *в*:

$$g(c_g) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad c_g \ge c_{g0}, \\ k_g(c_{g0} - c_g) & \text{при} \quad c_g < c_{g0}. \end{cases} \tag{4.103}$$

Для комплиментарных ресурсов потребление каждого однозначно определяется потоком продукции g, так что

$$q_i = \varphi_i(g), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а суммарные затраты на эти ресурсы

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i(c_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(g)\varphi_i(g), \tag{4.104}$$

где зависимости $c_i(g)$ определяются из условия

$$q_i(c_i) = \varphi_i(g), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.105}$$

Для взаимозаменяемых ресурсов существует зависимость между потоком продукции g и потоками q_i:

$$g = P(q_{n+1}, ..., q_m),$$

которая не позволяет определить q_i через g. Для каждого значения производительности g минимальные затраты

$$T_2(g) = \min_{c \ge c_0} \sum_{i=n+1}^{m} c_i q_i(c_i) \Big/ P(q(c)) = g. \tag{4.106}$$

Таким образом, затраты на взаимозаменяемые ресурсы определяются решением экстремальной задачи (4.106).

Предельные возможности производственной фирмы зависят от значения производственного потока g, для которого интенсивность извлечения базового ресурса максимальна:

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_1(g(c_g)) - T_2(g(c_g)) \to \max_{c_g \le c_{g0}} . \tag{4.107}$$

Диссипация капитала при закупке сырья и продаже продукции фирмой равна

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} (c_i - c_{i0}) q_i + (c_{g0} - c_g) g; \tag{4.108}$$

$\sigma = 0$, если закупка ресурса и продажа продукции производятся по ценам c_{i0} и c_{g0}, при этом отношение дохода к затратам $\eta = m/(T_1 + T_2)$ максимально, хотя как числитель, так и знаменатель этого выражения стремятся к нулю.

Приведем решение задачи о максимуме интенсивности получения прибыли m при линейных функциях $P(q)$ и $\varphi_i(g)$ для разных типов ресурсов:

$$P(q) = \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i q_i, \quad i = n+1, \dots, m, \tag{4.109}$$

$$\varphi_i(g) = \frac{g}{\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.110}$$

Используя зависимости (4.101) и (4.105), находим выражения для $c_i(g)$

$$c_i = c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.111}$$

и затрат $T_1(g)$:

$$T_1(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g}{\alpha_i} \left(c_{i0} + \frac{g}{\alpha_i k_i} \right). \tag{4.112}$$

Задача (4.106) примет вид для взаимозаменяемых ресурсов

$$T_2(g) = \min_{c \ge c_0} \sum_{i=n+1}^{m} c_i k_i (c_i - c_{i0}) \Big/ \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i k_i (c_i - c_{i0}) = g. \tag{4.113}$$

Ее решение

$$T_2(g) = \sum_{i=n+1}^{m} c_i^*(g) k_i (c_i^*(g) - c_{i0}), \tag{4.114}$$

где

$$c_i^*(g) = \frac{c_{i0}}{2} + \alpha_i \frac{2g + \sum\limits_{i=n+1}^{m} k_i c_{i0} \alpha_i}{2 \sum\limits_{i=n+1}^{m} k_i \alpha_i^2}, \quad i = n+1, \ldots, m, \tag{4.115}$$

откуда

$$T_2(g) = \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2g + \sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i k_i c_{i0}\right)^2}{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i^2 k_i} - \sum_{i=n+1}^{m} k_i c_{i0}^2 \right]. \tag{4.116}$$

Задача (4.107) с учетом этих выражений запишется в форме

$$\begin{gathered} m = c_g g(c_g) - g(c_g) \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i0}}{k_i \alpha_i} - g^2(c_g) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i \alpha_i^2} - \\ - \sum_{i=n+1}^{m} k_i c_i^*(g(c_g)) \Big[c_i^*(g(c_g)) - c_{i0} \Big] \to \max_{c_g}. \end{gathered} \tag{4.117}$$

Эта задача выпукла вверх. С учетом того, что (см. (4.115), (4.103))

$$\frac{dc_i^*}{dg} = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{j=n+1}^{m} \alpha_j^2 k_j}, \quad \frac{dg}{dc_g} = -k_g,$$

условие оптимальности задачи (4.117) запишется как

$$\begin{gathered} \frac{dm}{dc_g} = 0 \Longrightarrow (2c_g - c_{g0}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i0}}{\alpha_i k_i} - 2k_g(c_{g0} - c_g) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i \alpha_i} - \\ - \sum_{i=n+1}^{m} \frac{k_i \alpha_i}{\sum\limits_{j=n+1}^{m} k_j \alpha_j^2} \Big[2c_i^*(g) - c_{i0} \Big] = 0, \end{gathered} \tag{4.118}$$

откуда с учетом (4.115) можно получить выражения для c_g^*:

$$c_g^* = \frac{c_{g0}}{2} + \frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_{i0}}{\alpha_i} + \frac{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i k_i c_{i0}}{\sum\limits_{i=n+1}^{m} \alpha_i^2 k_i} \right]}{2k_g \left[1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha_i^2 k_i} \right]}, \tag{4.119}$$

и после подстановки c_g^* в (4.103) и (4.117), найти максимальную интенсивность извлечения базового ресурса m^*.

Учет внутренней структуры и распределение потоков ресурса. В реальной производственной системе зависимости между потоками закупаемых и производимых ресурсов непосредственно не заданы. Переработка может состоять из нескольких стадий, включать в себя рециклы, распределение полуфабрикатов, цены которых не определены, и пр. Ниже рассмотрено несколько задач, связанных с учетом внутренней структуры производственной фирмы.

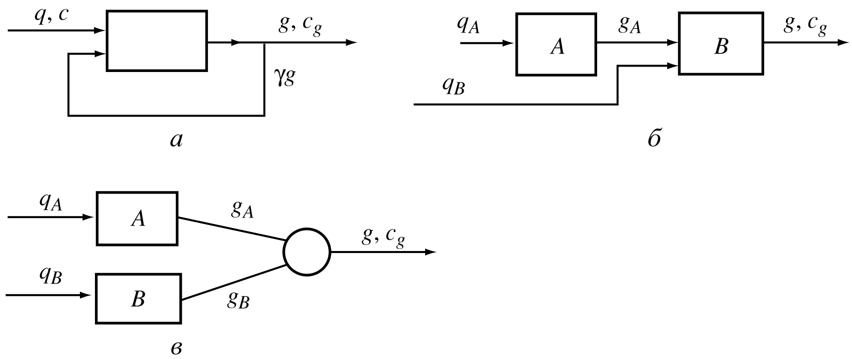

Рис. 4.7: Соединения производственных ячеек с рециклом (*а*), последовательное (*б*) и параллельное (*в*)

Система с рециклом. Структура системы показана на рис. 4.7, *а*. В этой системе доля выпуска γ направляется в производство. Обозначим этот поток через $q_0 = \gamma g$.

Если рецикл с потоком q_0 относится к взаимодополняющим ресурсам, а значит, однозначно связан с производительностью, то условие

$$q_0 = \gamma g = \varphi_0(g(1+\gamma))$$

для монотонной функции φ_0 определяет $\gamma(g)$. Так, для зависимостей в форме (4.109) из условия $\gamma g = (1+\gamma)g/\alpha_0$ следует, что $\gamma = 1/\alpha_0 - 1$. Задача оценки предельной прибыли отличается от задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, тем, что в функциях $T_1(g)$ и $T_2(g)$ нужно заменить g на $(1+\gamma(g))g$.

В случае если рецикл относится к взаимозаменяемым ресурсам, задача (4.106) примет вид

$$T_2(g,\gamma) = \min_{c \geq c_0} \left[\sum_{i=n+1}^{m} c_i q_i(c_i) + c_g \gamma g \right] \Big/ P(q_{n+1}, ..., q_m, \gamma g) = (1+\gamma)g, \tag{4.120}$$

ее значение (минимальные затраты) $T_2(g,\gamma)$ будут зависеть не только от g, но и от γ. Интенсивность извлечения базового ресурса:

$$m = c_g g(c_g) - T_1((1+\gamma)g(c_g)) - T_2(g(c_g),\gamma) \to \max_{c_g \le c_{g0},\, 1>\gamma\ge 0}. \tag{4.121}$$

Последовательное соединение производственных ячеек. Структура такой системы представлена на рис. 4.7, *б*. Для первой из ячеек A по формулам (4.104), (4.106) могут быть расчитаны минимальные затраты как функция потока полуфабриката:

$$T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A). \tag{4.122}$$

В том случае, когда полуфабрикат является комплиментарным, его поток определяется значением продуктового потока g ($g_A = \varphi_A(g)$), а значит, и затраты T_A оказываются зависимыми от g. Выбор цены c_g и производительности g осуществляется решением задачи (4.107), которая для данного случая запишется в виде

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_{1B}(g(c_g)) - T_{2B}(g(c_g)) - T_A(g(c_g)) \to \max_{c_g \le c_{g0}}. \tag{4.123}$$

Если же поток g_A полуфабриката взаимозаменяемый, то слагаемое T_A $(g(c_g))$ в выражении для m (4.123) отсутствует, а задача (4.106) преобразуется к виду

$$T_2(g) = \min_{c \ge c_0} \left[\sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} q_{iB}(c_{iB}) + T_A(g_A) \right] \Big/ F(q(c)) = g. \tag{4.124}$$

П р и м е р. Решим задачу (4.124) для линейных зависимостей $q_\nu(c_\nu)$ (4.101), $F_\nu(q_\nu)$ (4.108), $\varphi_\nu(g_\nu)$ (4.109) ($\nu = \{A, B\}$). С учетом (4.112), (4.116) эта задача имеет вид

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} c_{iB} k_{iB}(c_{iB} - c_{i0B}) + \sum_{i=1_A}^{n_A} \frac{g_A}{\alpha_{iA}} \left(c_{i0A} + \frac{g_A}{\alpha_{iA} k_{iA}} \right) +$$
$$+ \frac{1}{4} \left[\frac{\left(2g_A + \sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA} k_{iA} c_{i0A} \right)^2}{\sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}} - \sum_{i=n_A+1}^{m_A} k_{iA} c_{i0A}^2 \right] \to \min_{c_{iB}, g_A}$$

при условии

$$\sum_{i=n_B+1}^{m_B} \alpha_{iB} q_{iB} + \alpha_{0B} g_A = g_B. \tag{4.125}$$

Условия оптимальности этой задачи определяют выражения для управляющих переменных:

$$c_{iB} = \frac{\lambda\alpha_{iB} + c_{i0B}}{2} \implies q_{iB} = k_{iB}\frac{\lambda\alpha_{iB} - c_{i0B}}{2} \quad (i = 1 + n_A, \ldots, m_A),$$

$$g_A = \frac{\sum\limits_{i=1_A}^{m_A} \alpha_{iA}^2 k_{iA}}{2}\left[\lambda\alpha_{0B} - \left(\sum_{i=1}^{n_A}\frac{c_{i0A}}{\alpha_{iA}} + \frac{\sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A}\alpha_{i_A}k_{iA}c_{i0A}}{\sum\limits_{i=n_A+1}^{m_A}\alpha_{iA}^2 k_{iA}}\right)\right],$$

где множитель λ находят из условия (4.125) после подстановки туда этих равенств.

Параллельное соединение производственных ячеек. Структура такой системы приведена на рис. 4.7, *в*. Системы с параллельной структурой тщательно изучены. Найдя для каждой ячейки минимальные затраты $T_A(g_A) = T_{1A}(g_A) + T_{2A}(g_A)$ и $T_B(g_B) = T_{1B}(g_B) + T_{2B}(g_B)$, потоки g_A и g_B выбирают таким образом, чтобы были выполнены условия

$$\frac{dT_A}{dg_A} = \frac{dT_B}{dg_B}, \quad g_A + g_B = g. \tag{4.126}$$

Условия (4.126) связывают потоки ячеек с общим потоком g и тем самым определяют затраты T_A и T_B как функции g. Последний же выбирается из условия

$$m(c_g) = c_g g(c_g) - T_A(g(c_g)) - T_B(g(c_g)) \to \max_{c_g \le c_{g0}}. \tag{4.127}$$

Представив производственную структуру как соединение отдельных ячеек, каждая из которых, в свою очередь, может не быть однородной, можно найти предельные возможности системы.

Для систем с векторным потоком готового продукта $g = (g_1, g_2, \ldots \ldots, g_j, \ldots, g_\kappa)$ максимальная прибыль для каждого вида продукции n_{0j} (g_j) определяется выражением (4.107). Выбор вектора g осуществляют как решение задачи

$$m(g) = \sum_{j=1}^{\kappa} n_{0j}[g_j(c_{gj})] \to \max_{c_{gj}}. \tag{4.128}$$

при тех или иных ограничениях, связывающих друг с другом потоки g_j. Такими ограничениями могут быть возможности оборудования, ограничения на поток какого-либо ресурса и пр.

Интенсивность прибыли m не всегда является критерием для выбора цен и потоков в производственных системах. Величина m может быть задана: $m = m^0$. Если это заданное значение не превосходит максимально возможного и требуется при $m = m^0$ минимизировать затраты на единицу продукции, то, как нетрудно показать, задача сводится к минимизации диссипации капитала σ (4.108) при фиксированном $m^0(g)$.

Целесообразность складов сырья и готовой продукции. Наличие складов сырья и готовой продукции позволяет не только сгладить изменения внешних условий, но в ряде случаев повысить эффективность производства даже в стационарном окружении. Если на производстве есть склады сырья и готовой продукции, то «жесткие» связи между потоками заменяются усредненными. Так, например, для взаимодополняющих ресурсов имеем

$$\int_0^\tau [q_i(c_i(t)) - \varphi_i(g(t))]\, dt = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.129}$$

вместо равенства (4.105). Аналогично, для взаимозаменяемых ресурсов в задаче (4.106) нужно искать минимум функционала

$$\overline{T_2} = \sum_{i=n+1}^{m} \int_0^\tau c_i(t) q_i(c_i(t))\, dt \tag{4.130}$$

по $c_i(t) \geq c_{i0}$ $(i = n+1, \ldots, m)$ при условии

$$\int_0^\tau \Big[g(t) - F\Big(q_{n+1}(c_{n+1}(t)), ..., q_m(c_m(t))\Big)\Big]\, dt = 0. \tag{4.131}$$

В критерии оптимальности (4.107) при наличии складов также можно провести усреднение по времени, аналогичное (4.130), и искать изменение во времени отпускной цены $c_g(t)$ и потока $g(t)$.

Сформулированные таким образом задачи являются усредненными задачами нелинейного программирования [41]. Они имеют оптимальное решение (см. Приложение) либо в форме постоянных во времени функций (статический режим), в этом случае наличие складов не приводит к дополнительному эффекту, либо в форме кусочно-постоянных функций (циклический режим). В случае циклического режима часть или все переменные задачи принимают в течение определенных долей γ_ν интервала времени τ оптимальные (базовые) значения, переключаясь между ними. Максимальное среднее значение $\overline{m}$ в этом случае больше, чем m в статическом режиме, и склады позволяют получить дополнительный эффект. Приведем как следствия из общих свойств оптимальных решений усредненных задач, изложенных в Приложении, условия целесообразности или, напротив, нецелесообразности складов.

1. Пусть g^* — оптимальное статическое значение производительности, а c_i^* — соответствующие этому значению цены. Если

$$\max_{\lambda} \min_{c} \left[\sum_{i=n+1}^{m} c_i q_i(c_i) + \lambda \left[F(q(c)) - g^* \right] \right] < \sum_{i=n+1}^{m} c_i^* q_i^*(c_i^*), \tag{4.132}$$

то склад на взаимозаменяемых потоках сырья целесообразен.

2. Аналогично, если для i-го взаимодополняющего потока

$$\max_{\lambda} \min_{c} \Big[c_i q_i(c_i) + \lambda \Big[q_i(c_i) - \varphi_i(g^*) \Big] \Big] < c_i^* q_i^*(c_i^*), \tag{4.133}$$

то склад i-го ресурса позволит получить эффект. Разница между левой и правой частями неравенств (4.132), (4.133) дает оценку сверху для возможной величины эффекта. Если эта разница невелика, то не стоит тратить средства на создание складов сырья.

3. Наконец, склад готовой продукции целесообразен, если

$$\min_{\lambda} \max_{c_g} \Big[m(c_g) + \lambda \Big[g(c_g) - g^* \Big] \Big] > m(c_g^*). \tag{4.134}$$

Условие (4.134) означает, что при $c_g = c_g^*$ выпуклая оболочка функции $m(c_g)$ проходит выше ее графика.

Как правило, целесообразность складов объясняется существенной нелинейностью определяющих усредненную задачу зависимостей: скачками в функциях спроса и предложения, связанными с переходом при некоторых значениях потока на другое оборудование, другие средства доставки, льготные тарифы и пр.

4.5. Выбор потоков и цен на рынках электроэнергии

В целом ряде случаев рынок организован таким образом, что покупатель не может отказаться от покупки ресурса и не может выбрать, у кого из возможных продавцов его приобрести. Примерами таких рынков могут служить рынки тепловой и электрической энергии. В этом случае для организации конкурентной среды используют бесприбыльный аукцион, который организует диспетчер, управляющий поставками энергии от того или иного производителя. В этом разделе мы остановимся на особенностях организации такого аукциона, покажем, что оптимальному распределению энергии соответствует равенство «приведенных цен», т.е. цен, учитывающих оценки производителей и потери на перетоки энергии. Для определенности будем рассматривать рынок электроэнергии.

Рынок электроэнергии включает некоторое число региональных рынков, соединенных между собой линиями межрегиональных передач.

Каждый участник рынка (производитель или потребитель) входит в состав одного из региональных рынков, на котором все участники платят или получают плату за энергию по единой региональной цене. Как правило, региональные цены различаются между собой. Взаимодействие региональных рынков осуществляется через диспетчера, который осуществляет «бесприбыльный аукцион», назначая нагрузки производителям энергии так, чтобы ее цена для потребителя была возможно более низкой.

Торговый день на рынке энергии разделен на последовательность равных периодов, в каждом из них проводится «аукцион одного периода». Таким образом, энергетический рынок представляет собой совокупность проходящих одновременно связанных друг с другом региональных аукционов. Результаты аукциона зависят от ценовых заявок производителей-поставщиков энергии, состояния рынка перед началом аукциона (объемов региональных поставок и межрегиональных потоков), а также региональных спросов на энергию. Эти результаты определяют объемы поставок на рынок для каждого производителя энергии во всех регионах, объемы межрегиональных потоков, а также региональные цены на данный расчетный период.

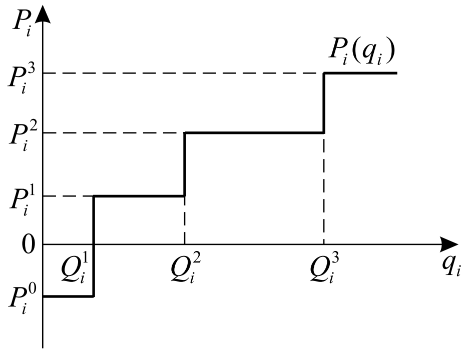

Рис. 4.8: Вид ценовых заявок производителей

Все производители энергии подают оператору свои ценовые заявки («предложения поставок») до начала аукциона. Эти предложения представляют собой ступенчатые возрастающие функции зависимости цены энергии от объемов ее поставки (рис. 4.8). Ценовые ступеньки на этих функциях могут быть (и часто действительно бывают) отрицательными, что соответствует согласию производителя оплачивать покупателю поставляемую энергию в связи с тем, что ему невыгодно останавливать генераторы.

Региональный аукцион является аукционом единой цены, т.е. каждый из поставщиков в этом регионе получает единую цену за поставляемую энергию. Обычно предполагается, что рассматриваемый рынок является олигополистическим, где ценовые заявки участников определяют распределение поставок, текущие и региональные цены. Спрос предполагают не зависящим от цены (эластичность спроса близка к нулю). Ценовые заявки производителей для всех аукционов одного торгового дня подаются одновременно перед его началом. Количество ступеней заявок не должно превышать заданного числа (порядка десяти). Эти ценовые заявки используется на всех аукционах одного периода на протяжении данного торгового дня.

Региональные цены и объемы поставок определяются не только спросом на электроэнергию и ценовыми заявками производителей, но и выбором объемов энергии, поставляемым по линиям электропередач, соединяющим региональные рынки, потерями в этих линиях и их возможностями. Целью каждого регионального аукциона является минимизация стоимости поставляемой энергии.

Алгоритм выбора объемов поставок должен учитывать влияние ступенчатого характера ценовых заявок на рыночную стоимость генерации и невыпуклость задачи распределения, связанную с тем, что заявки предполагают отрицательные цены. Используемая модель является существенно упрощенной. В частности, в ней потоки энергии полагают скалярными величинами, хотя некоторые поставщики электроэнергии могут поставлять еще и тепло. Она упрощенно характеризует процессы в цепи электропередач несимметричной функцией потерь, параметры которой периодически уточняют по экспериментальным данным. Разрывы градиентов и невыпуклость задачи существенно снижают эффективность алгоритмов, сводящих эту задачу к последовательному решению ряда аппроксимирующих задач линейного программирования.

Аукцион одного периода. Задача оптимального распределения поставок

Постановка задачи. Рассматривается сеть из n взаимосвязанных региональных рынков электроэнергии (рис. 4.9). В начале каждого торгового периода оператор получает следующую информацию:

1. объединенную заявку на потребность в энергии каждого из регионов $d_i, \quad i = 1, ..., n$;
2. объединенную региональную ценовую заявку $P_i(q_i)$ всех поставщиков

энергии данного региона;
3. объемы выработки в регионах $q_i(0)$;
4. объемы межрегиональных потоков энергии за предшествующий период $g_{ij}(0)$.

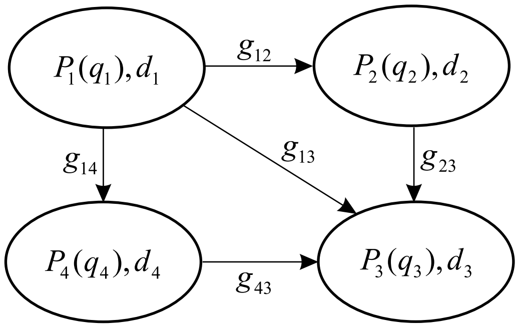

Рис. 4.9: Фрагмент сети региональных рынков

Региональная ценовая заявка определяется как зависимость цены P_i от суммарного объема энергии, который предложен всеми поставщиками данного региона по цене, не превышающей P_i. Так что

$$q_i = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=G_i} \Delta_{i\gamma}, \quad \Delta_{i\gamma} = \max \Delta / R_{i\gamma}(\Delta) \leq P_i. \tag{4.135}$$

Последнее равенство позволяет поставить в соответствие выбранному значению энергии, генерируемой поставщиками регионального рынка, объемы, закупаемые у каждого из них. Число региональных поставщиков G_i, а $R_{i\gamma}(\Delta)$ — их ценовые заявки.

Функции $P_i(q_i)$ являются непрерывными справа, $\lim\limits_{q_i \to Q_i^j} P_i(q_i) = P_i^j$. На объемы региональных поставок наложены автономные ограничения $q_i^{\min} \leq q_i \leq q_i^{\max}$. На межрегиональные объемы поставок g_{ij} из i-го в j-й регион также наложены ограничения, $g_{ij}^{\min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{\max}$. Они учитывают как технологические возможности поставщиков-генераторов по объемам выработки, так и их «динамические» возможности по скорости изменения объемов поставок. Отметим, что $g_{ij} = -g_{ji}$.

Предполагается, что передача объема g_{ij} из i-го в j-й региональный рынок связана с потерями энергии. Эти потери могут быть охарактеризованы непрерывной монотонно возрастающей функцией $L_{ij}(g_{ij})$, для которой справедливы соотношения: $L_{ij}(g_{ij}) = L_{ji}(-g_{ij}) = L_{ji}(g_{ji})$, $L_{ii}(x) \equiv 0$,

$L_{ij}(0) = 0$, $L_{ij} > 0$ для $g_{ij} \neq 0$ и $\dfrac{d^2 L_{ij}}{d^2 g_{ij}} > 0$ для $\forall g_{ij} \neq 0$. Характер зависимости $L_{ij}(g_{ij})$ от g_{ij} показан на рис. 4.10. Функция потерь зависит от состояния сети и трансформаторных подстанций, поэтому она может быть несимметричной. Ее параметры уточняют по фактическим результатам измерений.

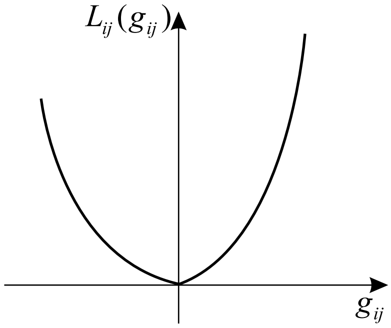

Рис. 4.10: Зависимость потерь энергии L_{ij} от величины межрегиональных потоков g_{ij}

Потери L_{ij} делятся между соответствующими региональными рынками в заданном соотношении и создают дополнительный спрос на энергию $\alpha_{ij} L_{ij}$ в i-м регионе и $\alpha_{ji} L_{ij}$ в j-м регионе. α_{ij} константы, $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$, $\alpha_{ji} = 1 - \alpha_{ij}$, $\alpha_{ii} = 0$.

Баланс энергии для такой сети характеризует уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} d_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} L_{ij}(g_{ij}). \tag{4.136}$$

Поскольку $g_{ij} = -g_{ji}$ и $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$ баланс сети выполняется, если выполнены региональные балансы

$$q_i = d_i + \sum_{j=1}^{n} (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.137}$$

Наряду с объединенной ценовой заявкой поставщиков i-го рынка введем объединенную стоимостную заявку $C_i(q_i)$, как зависимость стоимости энергии всех поставщиков от ее объема.

Стоимость генерации на i-м рынке описывается соотношением

$$C_i(q_i) = \int_0^{q_i} P_i(x) dx. \tag{4.138}$$

Для непрерывной ценовой заявки $P_i(x)$

$$\frac{dC_i}{dq_i} = P_i(q_i). \tag{4.139}$$

Так как $P_i(q_i)$ — монотонные, кусочно-постоянные неубывающие функции, непрерывные справа, то $C_i(q_i)$ являются выпуклыми, кусочно-линейными, их производная в точке излома равна ее большему значению. Аналогичная стоимостная заявка может рассматриваться и для каждого поставщика на региональном рынке.

Общая стоимость генерации всеми поставщиками на рынке электроэнергии определяется как

$$I(d_1, \ldots, d_n, q_i, \ldots, q_n,) = \sum_{i=1}^{n} C_i(q_i). \tag{4.140}$$

Оптимальное распределение поставок соответствует минимуму целевой функции I по q_i, g_{ij}

$$I(d_1, \ldots, d_n, q_i, \ldots, q_n) \to \min_{q_i, g_{ij}} \tag{4.141}$$

с учетом автономных ограничений

$$q_i^{\min} \le q_i \le q_i^{\max}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.142}$$

$$g_{ij}^{\min} \le g_{ij} \le g_{ij}^{\max} \quad j = 1, \ldots, n, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.143}$$

и балансов региональных рынков (4.137). Последние соотношения включают нелинейные функции, что приводит к невыпуклости задачи.

В дальнейшем будем называть эту задачу «Задачей оптимального распределения поставок для аукциона одного периода». Обозначим составляющие ее решения как q_i^*, g_{ij}^*, а минимум целевой функции (минимальную общую стоимость поставки) как

$$I^*(d_1, \ldots, d_n) = I(d_1, \ldots, d_n, q_i^*, \ldots, q_n^*, g_{ij}^*). \tag{4.144}$$

Стоимость поставки I и ее минимальная величина I^* зависят не только от d_i, но и от ценовых заявок $P_i(q_i)$, а также от предаукционного состояния рынка — текущих значений $q_i(0)$ и $g_{ij}(0)$ (через автономные ограничения, наложенные на q_i и g_{ij}).

Неизвестными величинами в задаче оптимального распределения поставок (4.141), (4.142), (4.143), (4.137) являются региональные объемы поставок и объемы межрегиональных потоков. Если в сети оптового рынка все региональные рынки связаны между собой линиями передач, то общее число неизвестных задачи равно

$$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0.$$

Первое слагаемое этого выражения соответствует числу потоков g_{ij}, а второе — числу региональных поставщиков.

Поскольку эти переменные должны удовлетворять n уравнениям баланса (4.137), то число свободных переменных в задаче оптимального распределения поставок равно числу межрегиональных потоков энергии $\dfrac{n(n-1)}{2}$ для сети, где все региональные рынки связаны между собой. Для $n=1$ получается единственная свободная переменная, для $n=3$ — три, и т.д.

Необходимые условия оптимальности

Исключив по условиям (4.137) региональные объемы поставок энергии, задачу оптимального распределения поставок (4.141), (4.142), (4.137) можно записать как задачу нелинейного программирования

$$\sum_{i=1}^{n} C_i[d_i+\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(g_{ij}+\alpha_{ij}L_{ij}(g_{ij}))] \to \min_{g_{ij}} \tag{4.145}$$

при выполнении следующих неравенств

$$q_i^{\min} \leq d_i+\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(g_{ij}+\alpha_{ij}L_{ij}(g_{ij})) \leq q_i^{\max} \tag{4.146}$$

и автономных ограничений

$$g_{ij}^{\min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{\max} \quad i,j=1,\ldots,n. \tag{4.147}$$

Независимыми переменными задачи являются объемы межрегионального обмена энергией g_{ij}. Региональные выработки (поставки) расчитывают из уравнений баланса (4.137). Обозначим ее решение как g_{ij}^{*}. Это решение является вектор-функцией от вектора потребления $d_1,\ldots,d_n$.

Автономные ограничения выполнены, расчет производится в пределах интервала непрерывности ценовой заявки. Начинаем рассмотрение со случая, когда все автономные ограничения не активны, т.е. в точке оптимума

$$q_i^{\min} < d_i+\sum_{j=1, i\neq j}^{n}(g_{ij}+\alpha_{ij}L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}. \tag{4.148}$$

и

$$g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}. \tag{4.149}$$

Допустим, что q_i — точки, где функции $P_i(q_i)$ непрерывны. Тогда из условия стационарности I по g_{ij} получаем для двух взаимосвязанных регионов:

$$\frac{\partial I}{\partial g_{ij}} = 0 \Rightarrow \frac{dC_i}{dq_i}\left(1 + \alpha_{ij}\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right) = -\frac{dC_j}{dq_j}\left(-1 + \alpha_{ji}\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right). \tag{4.150}$$

Здесь принято во внимание, что $g_{ij} = -g_{ji}$. С учетом (4.138) получаем

$$\left(1 + \alpha_{ij}\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right)P_i^* = \left(1 - \alpha_{ji}\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right)P_j^*. \tag{4.151}$$

Здесь $P_i^* = P_i(q_i^*)$ и $P_j^* = P_j(q_j^*)$ — цены, соответствующие выбранным суммарным объемам поставок в ценовых заявках для регионов i и j соответственно.

Назовем в этих уравнениях величины, стоящие в левой и правой частях равенства (4.151), *скорректированными ценами* в одном регионе относительно другого, связанного с ним прямой межрегиональной линией передачи энергии. Для i-го региона по отношению к j-му это

$$\overline{P}_{ij} = \left(1 + \alpha_{ij}\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right)P_i^*, \tag{4.152}$$

а для j-го по отношению к i-му соответственно

$$\overline{P}_{ji} = \left(1 - \alpha_{ji}\frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right)P_j^*.$$

Следовательно, потоки между двумя регионами в режиме, который соответствует неактивным автономным ограничениям и участкам непрерывности функций ценовых заявок, могут быть оптимальны в том и только в том случае, если скорректированные цены в этих регионах равны

$$\overline{P}_{ij} = \overline{P}_{ji}. \tag{4.153}$$

Генерирование в точках скачка цены на ценовой заявке. Допустим, что генерированию в объеме q_j соответствует точка на ценовой заявке, где цена изменяется скачком. Тогда пределы скорректированных цен слева и справа от нее равны $\overline{P}_{ji} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} P_j(q_j+\epsilon)(1-\alpha_{ji}L'_{ij})$, $\overline{P}_{ji}^- = \lim\limits_{\epsilon\to 0} P_j(q_j-$

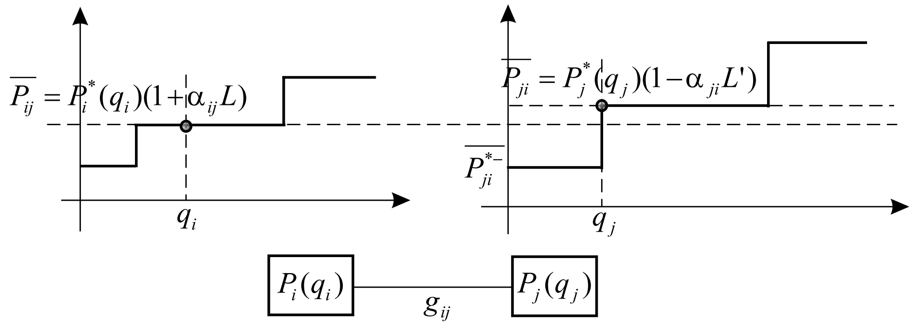

Рис. 4.11: Вид распределения, которое невозможно улучшить изменением межрегиональных потоков g_{ij}

$\epsilon)(1-\alpha_{ji}L'_{ij})$, и $\overline{P}_{ij} < \overline{P}_{ji}$ (см. рис. 4.11). Таким образом, отрицательная вариация $\delta g_{ij} < 0$ увеличивает цену поставки $\delta I = (\overline{P}_{ij} - \overline{P}_{ji})\delta g_{ij} > 0$.

Бесконечно малая правая вариация $\delta g_{ij} > 0$ может привести к двоякому результату. Если предел слева для приведенной цены на j-м рынке все еще выше, чем на i-м, $\overline{P}_{ij} < \overline{P}^-_{ji}$, то цена поставки испытает скачок, который приведет к положительному изменению $\delta I = (\overline{P}_{ji} - \overline{P}^-_{ji})\delta g_{ij}$. После чего можно продолжать улучшение критерия I увеличением потока g_{ij} (см. выше).

Если $\overline{P}_{ij} > \overline{P}^-_{ji}$, то никакие изменения g_{ij} не могут улучшить I. Таким образом, условие оптимальности для случая, когда автономные ограничения не активны, а один из генераторов работает при нагрузке, соответствующей скачку на функции ценовой заявки, имеет вид

$$\overline{P}^-_{ji} < \overline{P}_{ij} < \overline{P}_{ji}. \tag{4.154}$$

Общие условия оптимальности для неактивных автономных ограничений. Аналогичный анализ условий, при которых гарантировано неулучшение целевой функции I путем вариации межрегиональных потоков, приводит к следующим общим условиям оптимальности задачи (4.145)–(4.147) при неактивных автономных ограничениях

$$\begin{gathered}\overline{P}^+_{ij} \le \overline{P}^-_{ji} \quad \overline{P}^-_{ij} \ge \overline{P}^+_{ji}, \quad g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}, \\ q_i^{\min} < d_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} (g_{ij} + \alpha_{ij}L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}.\end{gathered} \tag{4.155}$$

Здесь предполагается, что левый и правый пределы приведенных цен описываются как

$$\overline{P}^{+}_{ab} = \lim_{\epsilon\to 0} P_{ab}(q_i + \epsilon), \quad \overline{P}^{-}_{ab} = \lim_{\epsilon\to 0} P_{ab}(q_i - \epsilon).$$

Необходимые условия оптимальности для случая активных автономных ограничений. Если $g_{ij} = g_{ij}^{\max}$, или $q_i = q_i^{\max}$ или $q_j = q_j^{\min}$, то допустимы только отрицательные изменения $\delta g_{ij} < 0$, и условия неулучшаемости I при таких изменениях имеют вид

$$\overline{P}_{ij} \geq \overline{P}_{ji}. \tag{4.156}$$

Аналогично, если $g_{ij} = g_{ij}^{\min}$, или $q_i = q_i^{\max}$ или $q_j = q_j^{\min}$, то распределение является оптимальным только в случае, когда

$$\overline{P}_{ij} \leq \overline{P}_{ji}. \tag{4.157}$$

Это позволяет сформулировать следующее Утверждение:

Если $\{g_{ij}^*\}$ оптимальное решение задачи (4.145)–(4.147), то выполнены условия.

Нестрогие двусторонние ограничения

$$\begin{gathered} g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}, \\ q_i^{\min} < d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}, \\ q_j^{\min} < d_j + \sum_i (-g_{ij} + (1-\alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})) < q_j^{\max}, \\ \overline{P}^{+}_{ij} \geq \overline{P}^{-}_{ji}, \qquad \overline{P}^{-}_{ij} \leq \overline{P}^{+}_{ji}. \end{gathered} \tag{4.158}$$

Ограничения на потоки

$$\begin{gathered} g_{ij} = g_{ij}^{\max}, \\ q_i^{\min} < d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}, \\ q_j^{\min} < d_j + \sum_i (-g_{ij} + (1-\alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})) < q_j^{\max}, \\ \overline{P}^{-}_{ij} \leq \overline{P}^{+}_{ji}, \end{gathered} \tag{4.159}$$

или

$$g_{ij} = g_{ij}^{\min},$$

$$q_i^{\min} < d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}, \tag{4.160}$$

$$q_j^{\min} < d_j + \sum_i (-g_{ij} + (1-\alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})) < q_j^{\max},$$

$$\overline{P}_{ij}^{+} \geq \overline{P}_{ji}^{-}$$

Строгие ограничения (A)

$$g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}, \quad \overline{P}_{ij}^{-} \leq \overline{P}_{ji}^{+}, \tag{4.161}$$

$$q_i^{\min} = d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad \text{или}$$

$$q_j^{\max} = d_j + \sum_j (-g_{ij} + (1-\alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij}))$$

или (B)

$$g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}, \qquad \overline{P}_{ij}^{+} \geq \overline{P}_{ji}^{-}, \tag{4.162}$$

$$q_i^{\max} = d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad \text{или}$$

$$q_j^{\min} = d_j + \sum_j (-g_{ij} + (1-\alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})).$$

Межрегиональные условия оптимальности. Рассмотрим линейную часть сети, состоящую из трех региональных рынков. Допустим, что

$$\overline{P}_{ij} < \overline{P}_{ji}, \qquad \overline{P}_{jk} < \overline{P}_{kj}, \qquad q_j^* = q_j^{\max}.$$

Поток энергии направлен из i-го в j-й и далее из j-го в k-й рынок. Автономное ограничения на объем генерации на j-м рынке активно, что исключает увеличение g_{ij}. Однако две одновременные положительные вариации $\delta g_{ij} = \delta g_{jk} > 0$ допустимы. Анализ, аналогичный проведенному выше, для фрагмента сети, состоящего из соединения двух региональных рынков, приводит к следующим условиям оптимальности для участков непрерывности функций $P_i(.)$ и $P_k(.)$ при неактивных ограничениях на q_i и q_k:

$$P_i(1 - \alpha_{ij} L'_{ij})(1 - \alpha_{jk} L'_{jk}) = P_k(1 + \alpha_{ij} L'_{ij})(1 + \alpha_{jk} L'_{jk}) \tag{4.163}$$

и к общим условиям оптимальности для точек скачкообразного изменения цены на функциях $P_i(.)$ и $P_k(.)$

$$\begin{aligned} P_i^{+}(1 - \alpha_{ij} L'_{ij})(1 - \alpha_{jk} L'_{jk}) \leq P_k^{-}(1 + \alpha_{ij} L'_{ij})(1 + \alpha_{jk} L'_{jk}), \\ P_i^{-}(1 - \alpha_{ij} L'_{ij})(1 - \alpha_{jk} L'_{jk}) \geq P_k^{+}(1 + \alpha_{ij} L'_{ij})(1 + \alpha_{jk} L'_{jk}). \end{aligned} \tag{4.164}$$

Для активных автономных ограничений эти локальные условия оптимальности имеют тот же вид, что и условия оптимальности для двухрегиональной системы, полученные выше, однако в этих условиях фигурируют многорегиональные приведенные цены, которые определены левыми и правыми частями равенств (4.163), вместо локальных приведенных цен (4.152). Эти условия устанавливают, что в задаче об оптимальном распределении два региональных рынка, связанных между собой в сети через несколько региональных рынков с активными ограничениями на генерирование, могут иметь различные многорегиональные приведенные цены только в том случае, если по меньшей мере один из потоков между ними либо объем генерации на одном из рынков вышел на активное ограничение.

Проблема определения глобального минимума в задаче оптимального распределения поставок энергии

Одной из главных особенностей задачи оптимального распределения поставок (4.141), (4.142), (4.143), (4.137) является невыпуклость ее целевой функции. Остановимся подробнее на причинах этой невыпуклости. Каждая из стоимостных заявок $C_i(q_i)$ является выпуклой кусочно-линейной функцией, а значит, и их сумма выпукла по переменным q_i. Однако при замене этих переменных по формулам (4.137) объемами межрегиональных поставок энергии q_{ij} целевая функция становится невыпуклой. Действительно, вторая производная стоимостной заявки $C_i(q_i)$ по q_{ij} равна

$$\frac{d^2}{dq_{ij}}C_i(q_{ij}) = \frac{d}{dq_{ij}}\left(\frac{dC_i}{dq_i}\frac{dL_{ij}}{dq_{ij}}\right). \qquad (4.165)$$

В силу линейности стоимостной заявки первый сомножитель под знаком производной постоянен, а его знак совпадает со знаком ценовой заявки. Таким образом, знак второй производной совпадает со знаком ценовой заявки, так как функция потерь L_{ij} строго выпукла. Из-за возможного наличия отрицательных ступеней в функциях ценовых заявок функции $C_i(q_{ij})$ невыпуклы и задача становится многоэкстремальной.

Таким образом, при использовании полученных выше необходимых условий оптимальности или при использовании прямого поиска минимума стоимости поставки из произвольного начального приближения не гарантируется определение глобального минимума целевой функции. В этих случаях необходимо проверять, является ли полученное решение глобальным или локальным экстремумом, и если минимум оказывается локальным, то сильно ли он отличается от глобального и какое улучшение целевой функции в единицах стоимости поставки возможно при дальнейшем продолжении поиска.

Рассмотрим расширение задачи оптимального распределения (4.141), (4.142), (4.143), (4.137) за счет исключения автономных ограничений (4.143) и уравнений связи (4.137). Она приобретает вид

$$I(d_1, \dots, d_n, q_i, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i(q_i) \to \min_{q_i} \tag{4.166}$$

при условиях

$$\sum_i q_i = M \tag{4.167}$$

$$q_i^{\min} \le q_i \le q_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.168}$$

Здесь M — параметр, равный суммарным потерям энергии при межрегиональных передачах, на который наложены автономные ограничения

$$\sum_i q_i^{\min} \le \sum_i d_i \le M \le \sum_i q_i^{\max}. \tag{4.169}$$

Введем в рассмотрение функцию Беллмана (см. [2]), используя следующее рекуррентное соотношение

$$\phi_1(x_1) = C_1(x_1), \quad \phi_2(x_2) = \min_{q_2^{\min} \le q_2 \le q_2^{\max}} [C_2(q_2) + \phi_1(x_2 - q_2)], \tag{4.170}$$

$$\phi_\nu(x_\nu) = \min_{q_\nu^{\min} \le q_\nu \le q_\nu^{\max}} [C_2(q_2) + \phi_\nu(x_\nu - q_\nu)].$$

Соотношение

$$\phi_n(M) = \min_{q_1, q_2, \dots, q_n} \sum_i C_i(q_i^*(M)) \tag{4.171}$$

позволяет определить глобальный минимум целевой функции и соответствуюшие ему потери в сети, отвечающие уравнениям энергетического баланса

$$\sum_i d_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij}(g_{ij}) = M. \tag{4.172}$$

Полученное решение определяет нижнюю достижимую границу стоимости поставки для заданных потерь энергии в сети (4.172). Пусть на основе полученных выше условий оптимальности расчитано оптимальное решение и получены значения g_{ij}^*, q_i^* и I^*. В этом случае соотношения (4.172) позволяют рассчитать M^* и затем решить задачу (4.166), (4.167), (4.168) для полученного M^*.

Если окажется, что решение $I^* = \phi_n(M^*)$, то g_{ij}^* и q_i^* является глобальным минимумом. Если величина $|I^* - \phi_n(M^*)|$ является достаточно малой, то можно закончить поиск и рассматривать полученный минимум как удовлетворительное решение.

Оптимизация распределения поставок энергии как задача о равновесии системы ЭА

На практике оператор рынка использует предсказывающее управление, т.е. он предсказывает спрос, расчитывает соответствующие ему распределения поставок и затем информирует поставщиков об их квотах. В результате в системе возникают значительные помехи, вызванные разницей между текущими и расчетными квотами, которые не только приводят к ошибкам при управлении рынком, но при определенных условиях могут привести к его неустойчивости. На некоторых рынках эта проблема усугубляется тем, что контроль за состоянием рынка производится значительно чаще, чем аукционы. Например, контроль осуществляют каждые 5 минут, а аукционы, на которых определяют цены на очередной расчетный период и платежи за поставки энергии, проводят с интервалом 30 минут. В итоге текущие цены и объемы поставок на рынке определяются с большими погрешностями, что отрицательно сказывается на экономической эффективности управления рынком.

Полученные выше условия оптимальности могут быть использованы для синтеза автоматических систем управления рынком электроэнергии, в которых последовательность периодических аукционов можно заменить одним непрерывным аукционом. Это позволит значительно снизить уровень ошибок при расчете оптимального распределения поставок.

Рассмотрим сеть региональных рынков, как экономическую макросистему, состоящую из ЭА (региональных рынков), которые обмениваются ресурсом — энергией q_i. Система является открытой, т.к. она получает внешние потоки заявок от потребителей и производителей энергии. В каждой подсистеме имеется своя оценка энергии P_j , которая, в свою очередь, зависит от объемов обмена между подсистемами g_{ij}. Чем больше g_{ij} (g_{ij} считается положительным, если энергия передается из i-го в j-й региональный рынок), тем меньше эта оценка. Величина объема g_{ij} зависит от разницы оценок энергии в i-м и j-м региональных рынках таким образом, что она равна нулю, если $P_i = P_j$ и

$$\mathrm{sign}[g_{ij}(P_i, P_j)] = \mathrm{sign}[P_i - P_j]. \tag{4.173}$$

Потоки энергии в такой системе направлены в сторону регионов с более высокой энергетической оценкой, что приводит к снижению последних и сближению оценок на всех рынках в установившемся режиме. Когда энергия передается в j-й региональный рынок ($q_{ij} > 0$), то количество энергии q_j, генерируемое на этом рынке, уменьшается и соответственно уменьшается стоимость генерации C_j и наивысшая ценовая ступенька P_j на ценовой заявке. Если $q_{ij} < 0$, то C_i и P_i возрастают. Нулевые потери при передаче энергии соответствуют случаю бесконечно большой «проводимости» (отсутствии потерь и ограничений на объемы поставок) линии. Например, если передача энергии описывается линейным законом

$$g_{ij}(P_i, P_j) = \beta_{ij}(P_i - P_j), \tag{4.174}$$

то нулевые потери соответствуют $\beta_{ij} = \infty$. В этом случае макросистема превращается в равновесную, так как $P_i = P_j$.

Отметим, что (4.151) можно записать в виде

$$\phi_{ij}(g_{ij}) = \frac{P_i}{P_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j, \quad g_{ij} = -g_{ji}. \tag{4.175}$$

Таким образом, для системы, в которой потоки энергии описываются уравнением (4.174) и условием $\beta_{ij} \to \infty$, генерируемая мощность q_i определяется соотношением (4.151) и автономными ограничениями (4.146), а установившееся значение P_i^s совпадает с решением задачи оптимизации (4.141), (4.142).

Видоизменим кинетические функции $\tilde{g}_{i,j}(P_i, P_j)$, так, чтобы для них стационарное состояние системы совпадало с решением задачи (4.141), (4.142). Из (4.175) следует, что задача определения такой кинетической функции сводится к решению следующего функционального уравнения

$$\phi_{ij}(\tilde{g}_{ij}(P_i, P_j)) = \frac{P_i}{P_j} \tag{4.176}$$

относительно зависимостей $\tilde{g}_{ij}$.

Если обозначить

$$L'(g_{ij}) \equiv \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}},$$

то уравнение (4.176) можно записать в следующей форме

$$\frac{1 - (1 - \alpha_{ij})L'}{1 + \alpha_{ij}L'} = \frac{P_i}{P_j}. \tag{4.177}$$

Получим

$$L'(g_{ij}) = \frac{P_j - P_i}{\overline{P}_{ij}}, \quad \overline{P}_{ij} \equiv \alpha_{ij}P_i + \alpha_{ji}P_j. \tag{4.178}$$

Функцию потерь часто аппроксимируют линейной или квадратичной функцией. Рассмотрим их в качестве примера.

1. Предположим

$$L_{ij}(g_{ij}) = \beta_{ij} g_{ij}^2,$$

тогда из (4.178) следует

$$g_{ij}(P_i, P_j) = \frac{1}{2\beta_{ij}\overline{P}_{ij}}(P_j - P_i). \tag{4.179}$$

2. Предположим

$$L_{ij}(g_{ij}) = \begin{cases} r_{ij}^{+} g_{ij} + \beta_{ij}^{+} g_{ij}^2 & \text{если} \quad g_{ij} > 0, \\ L_{ij}(g_{ij}) = 0 & \text{если} \quad g_{ij} = 0, \\ r_{ij}^{-} g_{ij} + \beta_{ij}^{-} g_{ij}^2 & \text{если} \quad g_{ij} < 0, \end{cases} \tag{4.180}$$

здесь $r_{ij}^{+} > 0$ и $r_{ij}^{-} < 0$. Тогда из (4.178) следует, что (рис. 4.12)

$$g_{ij}(P_i, P_j) = \frac{P_j - P_i - r_{ij}^{+}\overline{P}_{ij}}{2\beta_{ij}\overline{P}_{ij}} \qquad \text{для} \quad P_j - P_i > r_{ij}^{+}\overline{P}_{ij} \tag{4.181}$$

$$g_{ij}(P_i, P_j) = \frac{P_j - P_i - r_{ij}^{-}\overline{P}_{ij}}{2\beta_{ij}\overline{P}_{ij}} \qquad \text{для} \quad P_j - P_i < -|r_{ij}^{-}|\overline{P}_{ij} \tag{4.182}$$

$$g_{ij}(P_i, P_j) = 0, \qquad \text{для} \quad r_{ij}^{+}\overline{P}_{ij} < P_j - P_i < -|r_{ij}^{-}|\overline{P}_{ij}. \tag{4.183}$$

Таким образом, если разница в ценах на двух рынках мала, то нецелесообразно передавать энергию между ними.

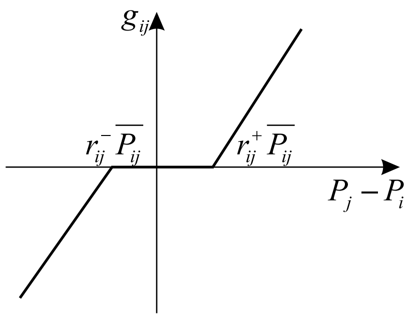

Рис. 4.12: Характер зависимости оптимального потока g_{ij} от разности наивысших цен поставки на двух региональных рынках

Если получена зависимость $\tilde{g}_{ij}(P_i, P_j)$ или ее аппроксимация для всех i, j, то решение задачи распределения поставок значительно упрощается, поскольку она распадается на отдельные задачи управления потоками в реальном времени:

— измерение заявок $\{d_1(t), d_2(t), \ldots, d_n(t)\}$ в реальном времени,

— пересчет региональных цен $P_i(q_i(t))$,

— изменение потоков в соответствии с правилом $\tilde{g}_{ij}(P_i, P_j)$.

Такой подход позволяет получить решение задачи распределения поставок в форме оптимального синтеза, реализацией которого является автоматическая система управления с обратной связью.

4.6. Налоговый регулятор потребления в открытой экономической системе

В этом параграфе на чисто качественном уровне рассмотрено влияние таких факторов как налоги, выплачиваемые государству (налоговому регулятору) и перераспределяемые им с той или иной целью. В качестве цели выбрано выравнивание потребления ЭА, при этом принято допущение, что государство ничего не тратит на себя. Оказалось, что даже при этом допущении при сборе налога с оборота, увеличение его ставки выше некоторого значения может приводить не к выравниванию, а к росту неравенства в потреблении.

Введение

В моделях необратимой микроэкономики каждый из экономических агентов (ЭА) характеризуется функцией благосостояния S, зависящей от вектора запасов ресурсов N и капитала (базового ресурса) M. Эта функция обычно предполагается однородной первой степени по своим аргументам, непрерывно дифференцируемой и выпуклой вверх. Функция благосостояния определяет оценку ν-го ресурса j-м экономическим агентом как

$$p_{j\nu} = \frac{\partial S_j / \partial N_{j\nu}}{\partial S_j / \partial M_j}, \quad j = 1, ..., m, \quad \nu = 1, ..., n. \tag{4.184}$$

При контакте двух ЭА с разными оценками происходит обмен ресурсами и капиталом. Ресурс переходит от ЭА, у которого его оценка меньше, к ЭА, у которого оценка больше. Поток ν-го ресурса $n_{ij\nu}$ между i-м и j-м ЭА сопровождается встречным потоком капитала, так что для каждого из ЭА выполнен принцип добровольности, запрещающий процессы обмена, при которых функция благосостояния любого из ЭА уменьшается.

Под ЭА понимается однородная общность участников экономической деятельности (тот или иной социальный слой, множество производителей, имеющих близкие условия функционирования, и пр.). Одним из типов ЭА является экономический резервуар (ЭР), у которого запасы ресурсов столь велики, что оценки можно считать независящими от потоков обмена ЭР с любым из ЭА. Функция благосостояния ЭР имеет вид

$$S_0 = \sum_{\nu=1}^{n} p_{0\nu} N_{0\nu} + M_0. \tag{4.185}$$

Выше рассмотрено стационарное состояние открытой системы ЭА, включающей экономические резервуары, и показано, что для упомянутых выше допущений о свойствах функций благосостояния и для потоков обмена, пропорциональных разнице оценок, в стационарном режиме ресурсы между ЭА распределяются таким образом, что диссипация капитала в системе минимальна, стационарное состояние единственно и устойчиво.

В ряде случаев в систему включена подсистема, перераспределяющая потоки, с целью обеспечить потребление каждого из ЭА не ниже некоторого заданного уровня. Будем называть эту подсистему налоговым регулятором (НР).

В этом параграфе приведены результаты исследования на математической модели вмешательства НР в экономику с учетом неравенства доходов экономических агентов.

Постановка задачи

Рассмотрим стационарный режим открытой экономической системы, состоящей из m экономических агентов, налогового регулятора и экономического резервуара. Резервуар соответствует окружающей среде с фиксированными стоимостями ресурсов $p_{0\nu}$. Каждый j-й ЭА характеризуется функцией благосостояния S_j, зависящей от вектора запасов его ресурсов $N_j = (N_{j1}, N_{j2}, ..., N_{jn})$ и капитала M_j.

В стационарном режиме каждый ЭА обменивается с другими ЭА и резервуаром ресурсами и капиталом, потребляет ν-й ресурс с интенсивностью $g_{j\nu}$ и получает от своей деятельности вне системы доход d_j, не зависящий от процессов ресурсообмена. Таким доходом могут быть проценты от банковских вкладов, доход, полученный от недвижимости, и пр.

Налоговый регулятор извлекает из системы капитал (базовый ресурс) за счет обложения налогом процессов ресурсообмена и перераспределяет этот капитал таким образом, чтобы потребление каждого из ЭА было не менее заданного гарантированного уровня

$$g_{j\nu} \geq g_{0\nu} \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., m; \nu = 1, ..., n. \tag{4.186}$$

Для некоторых видов ресурсов (предметов роскоши) гарантированное потребление равно нулю. Ясно, что не для всякого значения вектора $g_{0\nu}$ система может быть реализована.

Каждому значению гарантированного потребления соответствует своя ставка налога и его распределение тем ЭА, потребление которых без этой подпитки меньше гарантированного. Требуется построить область реализуемости этой системы в пространстве $g_0 = g_{01}, ..., g_{0n}$ и найти характер зависимости потребления от ставки налога.

Будем предполагать, что сам НР ничего не потребляет и перераспределяет весь объем капитала, который он собирает в форме налога, между нуждающимися ЭА. Если учесть расходы НР на собственные нужды, то область реализуемости системы сузится.

Математическая модель и стационарное состояние системы без налогового регулятора

На рис. 4.13 показана структура рассматриваемой системы. Оценки ресурсов каждого из ЭА, вычисляемые по формуле (4.184), — однородные функции нулевой степени; оценки в силу выпуклости S_j уменьшаются с ростом запаса ресурса и растут с ростом запаса капитала. Пусть поток

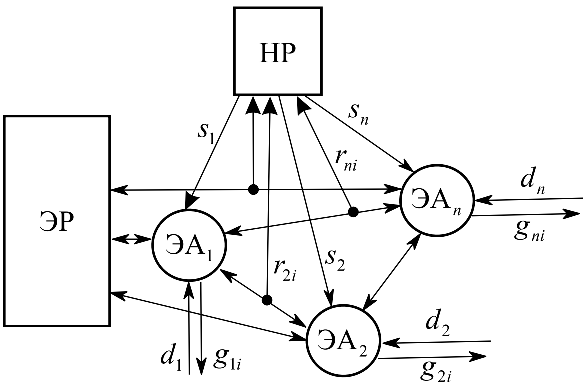

Рис. 4.13: Структура системы с налоговым регулятором

обмена ν-м ресурсом между двумя ЭА определен разностью оценок в соответствии с выражениями

$$n_{ji\nu} = \alpha_{ji\nu}(p_{j\nu} - p_{i\nu}) \quad n_{j0\nu} = \alpha_{j0\nu}(p_{j\nu} - p_{0\nu}), \quad \forall j, i, \nu \tag{4.187}$$

и направлен в сторону ЭА, оценка которого больше. В дальнейшем для простоты примем, что $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$. В этом случае, как показано в гл. 3, цена ресурса равна полусумме оценок

$$c_{ij} = \frac{p_{i\nu} + p_{j\nu}}{2}.$$

При отсутствии НР поток ресурса (4.187) сопровождается встречным потоком капитала

$$m_{ij\nu} = -c_{ij\nu} n_{ij\nu} = -\alpha_{ij\nu} \frac{p_{i\nu}^2 - p_{j\nu}^2}{2}, \tag{4.188}$$

направленным в сторону, противоположную потоку ресурса.

В силу принципа добровольности j-й ЭА продает ресурс только в том случае, когда $p_{i\nu} > p_{j\nu}$, и покупает, когда $p_{i\nu} < p_{j\nu}$. Система стационарна по ресурсу, если суммарный поток ν-го ресурса каждого ЭА равен потреблению этого ресурса $r_{j\nu}$, а суммарный поток капитала равен доходу ЭА d_j.

Запишем условия экономических балансов для каждого ЭА в стационарном режиме. Поток потребления ν-го ресурса

$$g_{j\nu}(p_{j\nu}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji\nu}(p_{j\nu} - p_{i\nu}) + \alpha_{j0\nu}(p_{j\nu} - p_{0\nu}), \quad j = 1, ..., m, \quad \nu = 1, ..., n, \tag{4.189}$$

здесь индекс ноль соответствует обмену с ЭР. Потребление $g_{j\nu}$ линейно возрастает с ростом оценки $p_{j\nu}$.

Баланс по базовому ресурсу

$$d_j = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\alpha_{j0\nu}(p_{j\nu}^2 - p_{0\nu}^2) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji\nu}(p_{j\nu}^2 - p_{i\nu}^2) \right], \quad j = 1, ..., m. \tag{4.190}$$

Потребный доход квадратично растет с ростом оценок $p_{j\nu}$. Здесь за положительное направление потока принято направление в сторону ЭА.

Общее число уравнений (4.189), (4.190) равно $m(n+1)$, они позволяют при заданных векторах минимального потребления g_0 и ценах ЭР $p_{0\nu}$ найти mn оценок ресурсов и доходы, обеспечивающие это потребление. Если вектор фактических доходов d удовлетворяет системе неравенств

$$d_j \geq D_{0j}, \quad j = 1, ..., n, \tag{4.191}$$

то система обеспечивает минимум потребления без НР. В противном случае его наличие необходимо. Для фиксированного вектора доходов d, условия (4.190) выделяют множество оценок ресурсов, совместных с заданными доходами ЭА. Отображение этого множества в «пространство потребления» с координатами $g_{j\nu}$ выделяет множество реализуемых потоков потребления G. НР необходим, если точка $g_0 \notin G$.

Отметим, что стационарному состоянию каждого ЭА в пространстве оценок ресурсов соответствует множество состояний в пространстве запасов ресурсов и капитала, так как число оценок для каждого ЭА равно n, а вектор запасов ресурсов и капитала имеет размерность $n+1$. Для случая, когда оценки — однородные функции нулевой степени, это множество представляет собой прямую, выходящую из начала координат.

В силу балансовых соотношений (4.189) потоки потребления являются функциями оценок соответствующих ресурсов. Ограничения на потребление трансформируются в ограничения на оценки ресурсов и выделяют в пространстве оценок область, удовлетворяющую этим ограничениям.

П р и м е р. Рассмотрим упрощенный вариант системы без НР, содержащей два ЭА, обменивающихся одним ресурсом. В этом случае балансовые соотношения (4.189), (4.190) примут вид

$$g_1 = \alpha_{12}(p_1 - p_2) + \alpha_{10}(p_1 - p_0), \tag{4.192}$$

$$g_2 = \alpha_{21}(p_2 - p_1) + \alpha_{20}(p_2 - p_0), \tag{4.193}$$

$$d_1 = \frac{1}{2}(\alpha_{12}(p_1^2 - p_2^2) + \alpha_{10}(p_1^2 - p_0^2)), \tag{4.194}$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{21}(p_2^2 - p_1^2) + \alpha_{20}(p_2^2 - p_0^2)). \tag{4.195}$$

Балансовые уравнения по потреблению (4.192), (4.193) однозначно связывают векторы оценок p и потребления g. Балансовые соотношения по капиталу (4.194), (4.195) определяют значение вектора оценок p как функцию от доходов d. На рис. 4.14 построена область D доходов ЭА, в которой у каждого из ЭА потребление больше $g_0 = 4$ и не требуется вмешательство НР, для следующих значений α_{ij}, p_0:

$$\alpha_{12} = 2, \alpha_{10} = 8, \alpha_{21} = 2, \alpha_{20} = 3, p_0 = 2.$$

Эта область выделена штриховкой. Границы области D задаются двумя группами условий, каждая из которых содержит равенство и неравенство:

$$g_1(p_1, p_2) = 4, g_2(p_1, p_2) \geq 4 \quad \text{и} \quad g_1(p_1, p_2) \geq 4, g_2(p_1, p_2) = 4.$$

Условие в форме равенства позволяет найти $p_1(p_2)$. Подставив полученное выражение в условие в форме неравенства, получим параметрическое уравнение границы области $D : (g_1(p_2) = 0, g_2(p_2)) = 0$.

Множество стационарных состояний системы с налоговым регулятором

Модель налогообложения. Роль НР заключается в перераспределении финансовых средств между ЭА с целью поддержания заданного

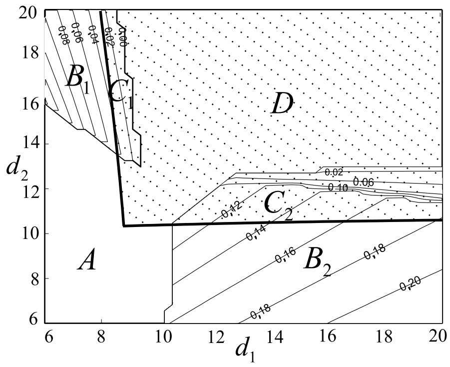

Рис. 4.14: Области реализуемости минимальных потреблений на плоскости доходов: A — минимальное потребление недостижимо; D — область, в которой минимальное потребление реализуется без НР; B_1, B_2 — расширение области минимального потребления за счет участия НР; C_1, C_2 — сужение области минимального потребления за счет влияния НР

уровня потребления. НР устанавливает ставку налога T, управляя тем самым объемом собираемых средств. Рассмотрим модель налогообложения в форме налога на добавленную стоимость, при этом НР уменьшает цену продажи для продавца по сравнению с c_{ij} и увеличивает ее для покупателя. Опуская индекс ресурса, будем обозначать эквивалентную цену для продавца через c_i, а для покупателя — через c_j и найдем эти цены по условиям стационарности ресурсообмена (продавцом считаем i-го ЭА):

$$c_{j\nu} n_{ij\nu}(1-T) = c_{i\nu} n_{ij\nu}, \quad n_{ij\nu} = \alpha_{ij\nu}(c_{i\nu} - p_{i\nu}) = \alpha_{ij\nu}(p_{j\nu} - c_{j\nu}) \quad \forall \nu. \tag{4.196}$$

Из этих уравнений получаем цены покупателя и продавца

$$c_{j\nu} = \frac{p_{i\nu} + p_{j\nu}}{2-T}, \qquad c_{i\nu} = \frac{(p_{i\nu} + p_{j\nu})(1-T)}{2-T}. \tag{4.197}$$

Потоки ресурса и капитала, поступающего продавцу (+), затраченного покупателем (–) и собираемого в форме налога:

$$\begin{gathered} n_{ij\nu} = \frac{\alpha_{ij\nu}}{2-T}[\max(p_{i\nu}; p_{j\nu})(1-T) - \min(p_{i\nu}; p_{j\nu})], \\ m_{ij\nu+} = \min(c_{i\nu}; c_{j\nu}) n_{ij\nu}, \quad m_{ij\nu-} = \max(c_{i\nu}; c_{j\nu}) n_{ij\nu}, \\ r_{ij\nu} = [\max(c_{i\nu}; c_{j\nu}) - \min(c_{i\nu}; c_{j\nu})] n_{ij\nu} = T\frac{p_{i\nu} + p_{j\nu}}{2-T} n_{ij\nu}. \end{gathered} \tag{4.198}$$

Собранные налоги НР распределяет между ЭА.

Ниже, чтобы отличить покупателя от продавца, будем использовать операцию сравнения оценок и считать покупателем ЭА, у которого оценка больше. Выпишем балансовые соотношения (4.189), (4.190) для системы с участием налогового регулятора:

$$g_{j\nu} = \frac{\alpha_{0j\nu}}{2-T}(p_{j\nu}(1-T) - p_{0\nu}) + \sum_{i=1}^{m} n_{ij\nu}, \quad \nu = 1, ..., n, \tag{4.199}$$

$$d_j = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\min(c_{j\nu}; c_{0\nu}) n_{j0\nu} + \sum_{i=1}^{m} \min(c_{j\nu}; c_{i\nu}) n_{ji\nu} \right] - s_i, \tag{4.200}$$

где s_i — дотация, выдаваемая НР. Общий объем собираемых налогов равен

$$W = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} R_{j\nu} = \frac{T}{2(2-T)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} (p_{i\nu} + p_{j\nu}) n_{ij\nu}, \tag{4.201}$$

при этом весь объем распределяется в форме дотаций

$$W = \sum_{j=1}^{m} s_j. \tag{4.202}$$

П р и м е р. Рассмотрим систему с НР, содержащую два ЭА — «богатого» и «бедного», обменивающихся одним ресурсом, и ЭР. Для упрощения будем предполагать, что $d_1 = 2d_2$, все собранные налоги передаются второму ЭА ($s_1 = 0, s_2 = W$).

В этом случае балансовые соотношения (4.199), (4.200) примут вид:

$$g_1 = \frac{\alpha_{10}}{2-T}(p_1(1-T) - p_0) + \frac{\alpha_{12}}{2-T}(p_1(1-T) - p_2), \tag{4.203}$$

$$g_2 = \frac{\alpha_{20}}{2-T}(p_2(1-T) - p_0) + \frac{\alpha_{21}}{2-T}(p_2 - p_1(1-T)), \tag{4.204}$$

$$\begin{aligned} d_1 = 2d_2 = \frac{\alpha_{10}(p_1 + p_0)}{(2-T)^2}(p_1(1-T) - p_0) + \\ + \frac{\alpha_{12}(p_1 + p_2)}{(2-T)^2}(p_1(1-T) - p_2), \end{aligned} \tag{4.205}$$

$$\begin{aligned} d_2 = \frac{\alpha_{20}(p_2 + p_0)}{(2-T)^2}(p_2(1-T) - p_0) + \\ + \frac{\alpha_{21}(1-T)}{(2-T)^2}(p_2 - p_1(1-T))(p_1 + p_2) - W, \end{aligned} \tag{4.206}$$

$$\begin{aligned} W = \frac{T}{(2-T)^2}[\alpha_{10}(p_1 + p_0)(p_1(1-T) - p_0) + \\ + \alpha_{12}(p_1 + p_2)(p_1(1-T) - p_2) + \alpha_{20}(p_2 + p_0)(p_2(1-T) - p_0)]. \end{aligned} \tag{4.207}$$

Построим зависимости $g_1(d_1, T)$, $g_2(d_2, T)$, найдем объем собираемых налогов и отношение потребления «богатого» и «бедного» для следующих значений α_{ij}, p_0:

$$\alpha_{12} = 2, \alpha_{10} = 8, \alpha_{21} = 2, \alpha_{20} = 3, p_0 = 2.$$

Результаты расчета представлены на рис. 4.15 и рис. 4.16. Для заданных значений T, d_1, d_2 численно решалась (в среде MatLab) система квадратных уравнений (4.205)–(4.207) относительно p_1, p_2. Потом находили значение $g_1(T, p_1^*, p_2^*), g_2(T, p_1^*, p_2^*)$ по формулам (4.203)–(4.204).

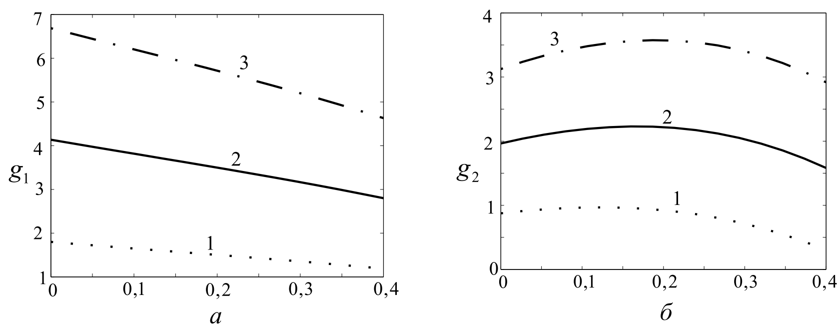

Рис. 4.15: Зависимость потребления «богатого» (а) и «бедного»(б) ЭА от их доходов и ставки налогообложения $T (d_2 = 0,5 d_1)$. Кривой 1 соответствует $d_1 = 4$; $2 - d_1 = 10$; $3 - d_1 = 18,93$

Области реализуемости минимального потребления как с НР, так и без него на плоскости (d_1, d_2) построены на рис. 4.14. Можно выделить 4 типа получаемых областей: A — нереализуемая область, внутри этой области, невозможно обеспечить минимальное потребление для ЭА как с НР, так и без него; B — расширение области гарантированного потребления за счет перераспределения налогов со ставкой T; D — область, где не требуется вмешательства НР для достижения минимального потребления; C — область, в которой потребление «бедного» ЭА равно минимальному, между тем как без НР оно было бы больше.

На рис. 4.15 и рис. 4.16 видно, что увеличение ставки налогообложения первоначально увеличивает потребление «бедного» и уменьшает потребление «богатого» ЭА, снижая тем самым «социальное неравенство». Но затем потребление «бедного» ЭА начинает снижаться, а «социальное неравенство» возрастает. Экстремально зависит от ставки налогообложения и объем собираемых налогов. Это происходит за счет торможения

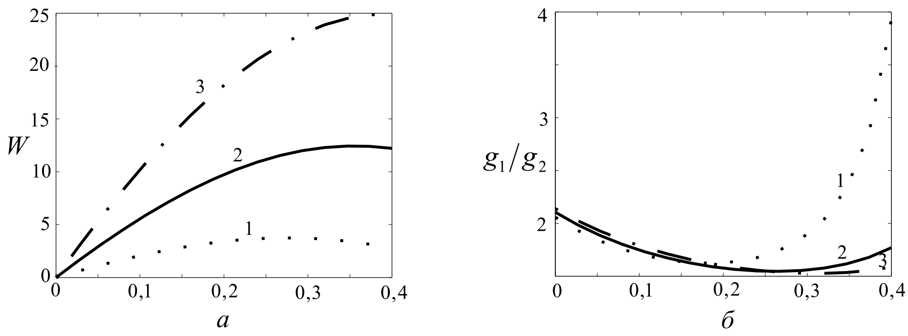

Рис. 4.16: Общий объем собираемых налогов W (а) и отношение потребления «богатого» и «бедного» (б) в зависимости от ставки налога $T(d_2 = 0,5d_1)$. Кривой 1 соответствует $d_1 = 4$; 2 — $d_1 = 10$; 3 — $d_1 = 18,93$

процессов ресурсообмена.

Заключение

Вмешательство НР приводит не только к перераспределению финансовых потоков, но и уменьшает движущую силу, а значит, и интенсивность потоков ресурсообмена. Этот фактор приводит к тому, что увеличение ставки налогообложения первоначально увеличивает потребление «бедного» ЭА, а затем это потребление уменьшается. Экстремально зависит от ставки налогообложения и объем собираемых налогов. Таким образом, математическая модель, основанная на макросистемном описании ЭА и процессов ресурсообмена, отражает фактически наблюдаемые эффекты, позволяет оценить целесообразность выбора ставки налогообложения при использовании налога на добавленную стоимость или выбрать тот или иной способ налогообложения (подоходный налог, налог на имущество и пр.).

4.7. Финансовые посредники в открытой микроэкономической системе

Выше были рассмотрены задачи, связанные с торговыми посредниками и производственными фирмами. В этом параграфе с аналогичных позиций рассмотрена деятельность финансовых посредников. Чаще всего таковыми являются банки.

Основными задачами моделирования банковской деятельности является исследование влияния тех или иных внешних факторов, таких как доля обязательного резервирования, ограничение на ставку по депозитам, ставка межбанковских кредитов, собственные затраты банка, темпы инфляции и др. на поведение банка и его клиентов, а также на результаты его деятельности. При этом предполагают [12], что банк действует на рынке совершенной конкуренции, когда ставки по кредитам r_L и по депозитам r_D фиксированы, либо на монопольном или олигопольном рынке [75], [87], когда банки меняют эти ставки, воздействуя тем самым на объем кредитов L и депозитов D.

Задача оптимального планирования деятельности банка должна учитывать его состояние, определяющееся объемами кредитов, депозитов, инвестиций и пр., состояние его клиентов, изменяющиеся во времени внешние факторы. Планирование действий банка на период τ с учетом этих данных и их прогнозируемых значений представляет собой стохастическую оптимизационную задачу большой размерности.

При оптимизации текущей деятельности банка его можно рассматривать как финансового посредника в открытой микроэкономической системе, стремящегося извлечь максимальную прибыль. При этом от объемов ресурсов можно перейти к их потокам. Функцию затрат банка на обслуживание клиентов C также можно считать зависящей не от объемов ресурсов, а от потоков кредитов и депозитов, что во многих случаях ближе к реальности. Задача об оптимизации ставок банка в такой предельно упрощенной постановке рассмотрена ниже, при этом мы будем предполагать, что ставки влияют не на объемы, а на потоки кредитов и депозитов.

Первоначально рассмотрим простейшую модель системы из банка-монополиста на рынках кредитов и депозитов, каждый из которых является экономическим резервуаром, а затем систему, состоящую из ЭА, каждый из которых может быть как вкладчиком банка, так и получателем кредита.

Оптимизация ставок банка–монополиста

В рассматриваемой упрощенной системе банк является посредником между двумя рынками — вкладчиков и заемщиков, которые по тем или иным причинам не могут вступать в непосредственный контакт. Заемщики нуждаются в деньгах и готовы получать кредиты по большей ставке, чем та, которую банк выплачивает по вкладам (депозитам). За счет этого различия образуется прибыль банка, которую он максимизирует, управляя ставками по кредитам и депозитам. Ставки могут быть фиксированными или зависеть от сроков и объемов заимствований. В последнем случае банк должен собирать информацию о том, как зависят от сроков и объемов заимствования показатели, характеризующие заинтересованность участников рынков, и менять свою стратегию в соответствии с этими данными.

Ниже будем обозначать через $r(\tau)$ учетную ставку по кредиту, взятому на время τ, равную той доле взятого капитала, которую следует возвратить вместе с полученным кредитом. Величина r, как правило, есть неотрицательная, неубывающая функция от τ. Исключение составляют случаи, когда вкладчик использует банк как место безопасного хранения своего капитала или банк предоставляет льготный заем в благотворительных целях.

Выбор ставок $r_D(\tau_D)$ для депозитов и $r_L(\tau_L)$ для кредитов влияет на интенсивность вложений и займов. Эти ставки выбираются банком по условиям максимума средней прибыли. Если банк назначает лишь годовые ставки $r_D^0 = r_D(1)$ и $r_L^0 = r_L(1)$, то ставки для произвольного срока хранения рассчитывают через них по тому или иному правилу. В частности, при непрерывном начислении процентов по вкладу

$$r_i(\tau_i) = (1 + r_i^0)^{\tau_i} - 1, \tag{4.208}$$

при начислении пропорционально сроку заимствования

$$r_i(\tau_i) = r_i^0 \tau_i, \quad i = D, L. \tag{4.209}$$

Заинтересованность вкладчиков и заемщиков банка в капитале будем характеризовать той минимальной ставкой p_D, по которой вкладчики готовы положить деньги в банк, и той максимальной ставкой p_L, по которой заемщики согласны взять кредит; p_D и $p_L > p_D$, называют оценками капитала на рынках депозитов и кредитов соответственно. Они могут зависеть от объема и срока заимствования.

Будем предполагать, что показатели заинтересованности вкладчиков и заемщиков в капитале известны, найдем для этого случая оптимальные ставки и соответствующую им максимальную прибыль $\Pi^*(\tau_D, \tau_L)$ как функцию τ_D и τ_L. Если банк может влиять на сроки заимствования, то он выбирает τ_D и τ_L по условию максимума Π^*. Затем рассмотрим случай, когда сроки кредитов и депозитов — случайные величины и ставки следует выбирать по условию максимума средней прибыли.

Выбор ставок с учетом зависимости оценок от сроков заимствования. Будем предполагать, что сроки заимствования для депозитов τ_D и кредитов τ_L и соответствующие им оценки капитала p_D и p_L известны. Найдем, как нужно выбирать ставки по займам r_D и кредитам r_L, чтобы прибыль банка была максимальна. Для выбора нужно знать связь между оценками r_i, назначаемыми ставками r_i $(i = D, L)$ и потоками капитала, поступающими в банк и выдаваемыми им в единицу времени. Объемы

$g_D(r_D, p_D)$ и $g_L(p_L, r_L)$ являются функциями предложения и спроса для банка-монополиста

$$\begin{aligned} g_D(r_D, p_D) &= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r_D \le p_D, \\ > 0 & \text{при} \quad r_D > p_D, \end{cases} \\ g_L(r_L, p_L) &= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r_L \ge p_L, \\ > 0 & \text{при} \quad r_L < p_L. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.210}$$

Прибыль, полученная от выдачи кредита g_L на время τ_L, равна

$$\Pi_L = g_L\Big(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)\Big) r_L(\tau_L),$$

а среднегодовое значение этой прибыли

$$\overline{\Pi_L} = g_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L) \frac{r_L(\tau_L)}{\tau_L} = l(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L) r_L(\tau_L) \tag{4.211}$$

Аналогично, средние издержки по оплате депозитов при сроке заимствования τ_D равны

$$\overline{\Pi_D} = g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D) \frac{r_D(\tau_D)}{\tau_D} = d(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D) r_D(\tau_D). \tag{4.212}$$

Средняя прибыль банка

$$\begin{aligned} \Pi(\tau_D, \tau_L) = \overline{\Pi_L(\tau_L)} - \overline{\Pi_D(\tau_D)} = \frac{r_L(\tau_L)}{\tau_L}\, g_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) - \\ - \frac{r_D(\tau_D)}{\tau_D}\, g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) - C\left(\frac{g_L}{\tau_L}, \frac{g_D}{\tau_D}\right). \end{aligned} \tag{4.213}$$

Здесь $C(g_L/\tau_L, g_D/\tau_D)$ — функция затрат на обслуживание, непрерывная, выпуклая вверх и монотонно возрастающая по каждому из своих аргументов (потоков кредитов и депозитов).

Пусть зависимости оценок от сроков заимствования $p_D(\tau_D)$ и $p_L(\tau_L)$ известны, ставки $r_D(\tau_D)$ и $r_L(\tau_L)$ нужно выбрать по условию максимума средней прибыли с учетом того, что все полученные вклады используются для выдачи кредитов. Сроки заимствования предполагаются случайными величинами с плотностями распределения $P_D(\tau_D)$ и $P_L(\tau_L)$.

Средняя прибыль за год

$$\begin{aligned} \overline{\Pi} = \overline{\frac{1}{\tau_L} g_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) r_L(\tau_L) -} \\ - \overline{\frac{1}{\tau_D} g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) r_D(\tau_D)} - \overline{C\left(\frac{g_L}{\tau_L}, \frac{g_D}{\tau_D}\right)} \end{aligned} \tag{4.214}$$

должна быть максимальна при условии

$$(1-\beta)\overline{g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D))} - \overline{g_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L))} = 0, \tag{4.215}$$

где β — доля обязательного резервирования от объема депозитов, устанавливаемая центральным банком. При этом усреднение в некоторых слагаемых ведется по τ_L, или по τ_D, так что, например,

$$\overline{g_D} = \int_0^\infty g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D)) P_D(\tau_D) d\tau_D,$$

$$\overline{\left(\frac{g_L r_L}{\tau_L}\right)} = \int_0^\infty \frac{1}{\tau_L} g_L(p_L(\tau_L), r_L(\tau_L)) r_L(\tau_L) P_L(\tau_L) d\tau_L.$$

Функция Лагранжа задачи (4.214), (4.215) имеет вид

$$\overline{L} = \left(\overline{\left(\frac{g_L r_L}{\tau_L}\right)} - \lambda \overline{g_L}\right) - \left(\overline{\left(\frac{g_D r_D}{\tau_D}\right)} - \lambda \overline{g_D}(1-\beta)\right) - \overline{C\left(\frac{g_L}{\tau_L}, \frac{g_D}{\tau_D}\right)}.$$

Усреднение в первом слагаемом ведется по τ_L, а во втором по τ_D.

Приведем условия оптимальности сформулированной задачи в предположении, что C и β малы и ими можно пренебречь. Учет этих факторов делает выкладки несколько более громоздкими, но не меняет существа дела. При сделанных допущениях условия оптимальности задачи (4.214), (4.215) по $r_D(\tau_D)$ и $r_L(\tau_L)$ приводят к соотношениям

$$\frac{g_{ir_i} r_i(\tau_i) + g_i(r_i(\tau_i), r_i(\tau_i))}{g_{ir_i}} = \lambda \tau_i, \quad i = L, D, \tag{4.216}$$

которые определяют оптимальные зависимости $r_D(\tau_D, \lambda)$ и $r_L(\tau_L, \lambda)$. Подстановка этих зависимостей в (4.215) позволяет найти λ, а значит, и оптимальное решение.

Конкретизируем полученные соотношения для случая, когда

$$g_D = \alpha_D(r_D(\tau_D) - p_D(\tau_D)), \quad g_L = \alpha_L(p_L(\tau_L) - r_L(\tau_L)). \tag{4.217}$$

В этом случае частные производные

$$g_{1r_D} = \alpha_D, \quad g_{2r_L} = -\alpha_L.$$

Условия (4.216) для потоков капитала в форме (4.217) примут вид

$$2r_D(\tau_D) - p_D(\tau_D) = \lambda \tau_D, \quad 2r_L(\tau_L) - p_L(\tau_L) = \lambda \tau_L. \tag{4.218}$$

После подстановки этих равенств в условия (4.215) получим

$$\alpha_D\left(\frac{\lambda \overline{\tau_D} + \overline{p_D}}{2} - \overline{p_D}\right) = \alpha_L\left(\overline{p_L} - \frac{\lambda \overline{\tau_L} + \overline{p_L}}{2}\right).$$

Здесь $\overline{\tau_D}$ и $\overline{\tau_L}$ — математические ожидания τ_D и τ_L.

Из последнего равенства определим значение множителя λ

$$\lambda = \frac{\alpha_D \overline{p_D} + \alpha_L \overline{p_L}}{\alpha_D \overline{\tau_D} + \alpha_L \overline{\tau_L}}, \tag{4.219}$$

так что оптимальные значения учетных ставок:

$$\begin{aligned} r_D(\tau_D) &= \frac{1}{2}\left(p_D(\tau_D) + \frac{\alpha_D \overline{p_D} + \alpha_L \overline{p_L}}{\alpha_D \overline{\tau_D} + \alpha_L \overline{\tau_L}}\tau_D\right), \\ r_L(\tau_L) &= \frac{1}{2}\left(p_L(\tau_L) - \frac{\alpha_D \overline{p_D} + \alpha_L \overline{p_L}}{\alpha_D \overline{\tau_D} + \alpha_L \overline{\tau_L}}\tau_L\right). \end{aligned} \tag{4.220}$$

Максимальная средняя прибыль банка при таком выборе ставок равна

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{4}\left[\alpha_D\left(\overline{\frac{r_D^2(\tau_D)}{\tau_D}}\right) + \alpha_L\left(\overline{\frac{r_L^2(\tau_L)}{\tau_L}}\right) - \lambda^2(\alpha_D \overline{\tau_D} + \alpha_L \overline{\tau_L})\right], \tag{4.221}$$

где λ выражается через усредненные оценки $\overline{r_i}$ и коэффициенты α_i в соответствии с (4.219).

Выбор годовых ставок оптимальных в среднем. Если банк выбирает только годовые ставки r_D^0 и r_L^0, то функции $r_i(\tau_i, r_i^0)$ зависят от выбранных ставок и способа начисления процентов (см. (4.208), (4.209)). Оптимум в задаче (4.214), (4.215) ищется по параметрам r_D^0 и r_L^0.

Обозначив производные

$$\frac{\partial r_i(\tau_i, r_i^0)}{\partial r_i^0} = r_i'(\tau_i, r_i^0), \quad i = D, L,$$

получим вместо условий оптимальности (4.216) после исключения λ соотношение

$$\overline{\frac{r_D'}{\tau_D}\left(g_D + r_D\frac{\partial g_D}{\partial r_D}\right)}\;\overline{\frac{r_L'}{\tau_L}\frac{\partial g_L}{\partial r_L}} = \overline{\frac{r_L'}{\tau_L}\left(g_L + r_L\frac{\partial g_L}{\partial r_L}\right)}\;\overline{\frac{r_D'}{\tau_D}\frac{\partial g_D}{\partial r_D}}. \tag{4.222}$$

Это равенство вместе с условием (4.215) определяет оптимальные значения параметров r_D^0, r_L^0.

Для потоков в форме (4.217)

$$\frac{\partial g_D}{\partial r_D} = \alpha_D, \quad \frac{\partial g_L}{\partial r_L} = -\alpha_L$$

и в случае, когда $r_i(\tau, r_i^0)$ имеют вид (4.209)

$$\frac{r_i'}{\tau_i} = r_i^0, \quad i = D, L.$$

Система (4.222), (4.215) может быть решена.

Условия (4.222) примут вид

$$\overline{\tau_D} + (r_D^0\overline{\tau_D} - \overline{p_D}) = \overline{\tau_L} - (\overline{p_L} - r_L^0\overline{\tau_L}), \tag{4.223}$$

уравнение (4.215) для этого случая запишется как

$$\alpha_D(r_D^0\overline{\tau_D} - \overline{p_D}) = \alpha_L(\overline{p_L} - r_L^0\overline{\tau_L}),$$

что позволяет переписать (4.223) в форме

$$\overline{\tau_D} + \frac{\alpha_L}{\alpha_D}(\overline{p_L} - r_L^0\overline{\tau_L}) = \overline{\tau_L} - (\overline{p_L} - r_L^0\overline{\tau_L}),$$

$$\overline{\tau_D} + (r_D^0\overline{\tau_D} - \overline{p_D}) = \overline{\tau_L} - \frac{\alpha_D}{\alpha_L}(r_D^0\overline{\tau_D} - \overline{p_D}).$$

Откуда оптимальные в среднем значения годовых ставок:

$$r_L^0 = \frac{\alpha_D(\overline{\tau_D} - \overline{\tau_L})}{(\alpha_D + \alpha_L)\overline{\tau_L}} + \frac{\overline{p_L}}{\overline{\tau_L}}, \quad r_D^0 = \frac{\alpha_L(\overline{\tau_L} - \overline{\tau_D})}{(\alpha_D + \alpha_L)\overline{\tau_D}} + \frac{\overline{p_D}}{\overline{\tau_D}}. \tag{4.224}$$

Они зависят лишь от средних по срокам заимствованиям оценок капитала $\overline{r_i(\tau_i)}$ и средних значений сроков заимствования $\overline{\tau_i}$.

Оптимизация ставок по объему депозитов и кредитов. Если известны зависимости оценок капитала r_i не только от продолжительности заимствования, но и от объемов депозитов и выдаваемых кредитов V_i, то этот фактор можно учесть при назначении оптимальных ставок $r_i(\tau_i, V_i)$. Будем считать, что τ_i и V_i случайны и их плотность распределения $P_i(\tau_i, V_i)$ $(i = D, L)$. Как и выше, индекс $i = D$ относится к вкладчикам, а $i = L$ к заемщикам банка. Обозначим через $m_i[p_i(\tau_i, V_i),\, r_i(\tau_i, V_i)]$ число вкладчиков (заемщиков), обращающихся в банк в единицу времени. Задача о максимуме средней прибыли примет вид

$$\overline{\Pi} = \sum_i \overline{\frac{V_i}{\tau_i} m_i[p_i(\tau_i, V_i), r_i(\tau_i, V_i)]} \to \max_{r_i} \tag{4.225}$$

при условии

$$\sum_i \overline{V_i m_i[p_i(\tau_i, V_i), r_i(\tau_i, V_i)]} = 0, \quad i = D, L. \tag{4.226}$$

Усреднение в i-м слагаемом ведется по τ_i, V_i.

Условия оптимальности задачи (4.225), (4.226) совпадают с условиями (4.216) с заменой g_i на $m_i V_i$.

Если поток вкладчиков (заемщиков) пропорционален разности ставок банка и оценок его клиентов

$$m_i = \alpha_i(p_i - r_i), \tag{4.227}$$

то

$$g_i = \frac{\alpha_i}{V_i}(p_i - r_i), \quad i = L, D.$$

Условия оптимальности после исключения λ — множителя примут вид

$$2\left[\frac{r_L(\tau_L, V_L)V_L}{\tau_L} - \frac{r_D(\tau_D, V_D)V_D}{\tau_D}\right] = \frac{p_L(\tau_L)V_L}{\tau_L} - \frac{p_D(\tau_D)V_D}{\tau_D}. \tag{4.228}$$

После выкладок, аналогичных тем, что проделаны при выводе равенства (4.220), получим

$$r_i(\tau_i, V_i) = \frac{1}{2}p_i(\tau_i, V_i) + \lambda\tau_i, \quad i = L, D, \tag{4.229}$$

$$\lambda = \frac{\alpha_D\overline{p_{1v}} + \alpha_L\overline{p_{2v}}}{\alpha_D\overline{\tau_{1v}} + \alpha_L\overline{\tau_{2v}}}.$$

Здесь

$$\overline{p_{iv}} = \overline{\left(\frac{p_i(\tau_i, V_i)}{V_i}\right)}, \quad \overline{\tau_{iv}} = \overline{\left(\frac{\tau_i}{V_i}\right)}, \quad i = D, L.$$

Усреднение ведется по V_i, τ_i с учетом их плотностей распределения.

Банк в системе экономических агентов

Пусть клиент банка является ЭА, характеризующимся оценками кредитов $p_{L\nu}$ и депозитов $p_{D\nu}$. Первая из них равна той ставке банка по кредитам, выше которой ЭА отказывается их брать, а вторая ставке банка по депозитам, ниже которой ЭА их не вкладывает ($p_{L\nu} > p_{D\nu}$). Мы предполагаем, что ЭА не могут обмениваться капиталом непосредственно, т.е., например, инвесторы не могут выпускать ценные бумаги.

Потоки обмена ν-го клиента с банком зависят от p_ν и r так, что поток кредитов $l_\nu(p_{L\nu}, r_L)$, а депозитов $d_\nu(r_D, p_{D\nu})$. Прибыль банка

$$\prod = \sum_\nu (l_\nu(p_{L\nu}, r_L)r_L - d_\nu(r_D, p_{D\nu})r_D) - C(l, d) \to \max_{r_L, r_D} \tag{4.230}$$

при условии, что

$$(1-\beta)\sum_\nu d_\nu(r_D, p_{D\nu}) = \sum_\nu l_\nu(p_{L\nu}, r_L), \tag{4.231}$$

где $l = \sum\limits_{\nu} l_\nu(p_{L\nu}, r_L)$, $d = \sum\limits_{\nu} d_\nu(r_D, p_{D\nu})$, β — доля обязательного резервирования.

Здесь ν-й ЭА соответствует категории клиентов, характеризующихся близкими оценками кредитов и депозитов. Функция Лагранжа

$$L = \sum_{\nu}[(l_\nu r_L - d_\nu r_D) - C(l,d) + \lambda(1-\beta)d_\nu - \lambda l_\nu]. \tag{4.232}$$

Условия оптимальности задачи (4.230), (4.231) в предположении единых ставок r_L и r_D для всех клиентов имеют форму

$$\frac{\partial L}{\partial r_D} = 0 \to \sum_{\nu} \frac{\partial d_\nu}{\partial r_D}\left[\lambda(1-\beta) - r_D - \frac{\partial C}{\partial d}\right] = \sum_{\nu} d_\nu, \tag{4.233}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_L} = 0 \to \sum_{\nu} \frac{\partial l_\nu}{\partial r_L}\left[\lambda + r_L - \frac{\partial C}{\partial l}\right] = -\sum_{\nu} l_\nu. \tag{4.234}$$

Эти равенства вместе с условием (4.231) определяют r_L, r_D и λ.

Примем

$$\begin{aligned} l_\nu &= \alpha_{L\nu}(p_{L\nu} - r_L) \quad \text{при} \quad p_{L\nu} > r_L, \\ d_\nu &= \alpha_{D\nu}(r_D - p_{D\nu}) \quad \text{при} \quad r_D > p_{D\nu}, \end{aligned} \tag{4.235}$$

в противном случае потоки l_ν и d_ν равны нулю.

Функция обслуживания

$$C(l,d) = kl^\mu d^{1-\mu}, \quad 0 \le \mu \le 1. \tag{4.236}$$

Коэффициенты α_ν в (4.235) косвенно характеризуют «доступность» банка для ν-го ЭА.

Условия (4.231), (4.233), (4.234) примут вид

$$(1-\beta)\left[r_D \sum_{\nu} \alpha_{D\nu} - \sum_{\nu} \alpha_{D\nu} p_{D\nu}\right] = \sum_{\nu} \alpha_{L\nu} p_{L\nu} - r_L \sum_{\nu} \alpha_{L\nu}, \tag{4.237}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \alpha_{D\nu}\left[2r_D - \lambda(1-\beta) + k(1-\mu)\left[\frac{\sum\limits_{\nu} \alpha_{L\nu} p_{L\nu} - r_L \sum\limits_{\nu} \alpha_{L\nu}}{r_D \sum\limits_{\nu} \alpha_{D\nu} - \sum\limits_{\nu} \alpha_{D\nu} p_{d\nu}}\right]^\mu\right] \\ = -\sum \alpha_{D\nu} p_{D\nu}, \end{aligned} \tag{4.238}$$

$$\sum_{\nu} \alpha_{L\nu}\left[2r_L - \lambda + k\mu\left[\frac{r_D \sum\limits_{\nu} \alpha_{D\nu} - \sum\limits_{\nu} \alpha_{D\nu} p_{D\nu}}{\sum\limits_{\nu} \alpha_{L\nu} p_{L\nu} - r_L \sum\limits_{\nu} \alpha_{L\nu}}\right]^{1-\mu}\right] = \sum \alpha_{L\nu} p_{L\nu}. \tag{4.239}$$

Найденные по условиям (4.237)–(4.239) оптимальные ставки разбивают множество ЭА на три категории:

— вкладчики $((p_{D}\nu < r_{D},\ p_{L} \le r_{L}))$,

— заемщики $((p_{L}\nu > r_{L},\ p_{D} \ge r_{D}))$,

— клиенты, не участвующие в обмене с банком $((p_{D}\nu < r_{D},\ p_{L}\nu < r_{L}))$.

Банк может увеличить свою прибыль, меняя ставки применительно к различным категориям клиентов (пенсионеров, военнослужащих, предпринимателей разного типа и пр.). В этом случае (дискриминация ставок) имеем вместо r_{D} и r_{L} ставки $r_{L}\nu$ и $r_{D}\nu$ и условия оптимальности следуют из условий стационарности по ним не функции L, а выражения, стоящего под знаком суммы в (4.232).

Учет налогов и инфляции

В рассмотренной выше простейшей схеме деятельности банка не учитывался целый ряд факторов. К ним относятся риски, связанные для вкладчика с ненадежностью банка, а для банка с возможностью невозврата кредитов, не учитывалось то, что часть средств банк вкладывает в ценные бумаги, курс которых изменяется, не учитывалось влияние инфляции и налогообложения.

Можно предположить, что надежность банка вкладчики учитывают, меняя свою оценку $p_{D}(\tau_{D})$ по отношению к разным банкам, а банк аналогично дискриминирует заемщиков. Те из них, кто проводит более рискованные, а значит, более доходные операции согласны брать кредит под больший процент.

Обсудим учет влияния прогнозируемой инфляции, темп которой δ примем постоянным. Инфляция приносит убытки тем участникам рынка, которые получают доход с временным сдвигом, т.е. вкладчикам и банку. В условиях инфляции вкладчик увеличит свою оценку

$$r_{1\delta}(\tau_{D}) = p_{D}(\tau_{D})\exp(\delta\tau_{D}),$$

аналогично заемщик, которому нужно возвращать меньшую сумму, скорректирует оценку в меньшую сторону

$$r_{2\delta}(\tau_{L}) = p_{L}(\tau_{L})\exp(-\delta\tau_{L}).$$

Подстановка полученных таким образом оценок в приведенные выше расчетные соотношения позволяют найти оптимальные ставки с учетом инфляции. Фактор дисконтирования, учитывающий зависимость заинтересованности в капитале от момента его получения, оказывает влияние аналогичное инфляции.

Следующий фактор — налогообложение. Обозначим через δ_D — долю дохода от депозитов, взимаемую в форме налога с вкладчиков, а через δ — долю от разницы между суммой выданных кредитов и суммой возврата, взимаемую в форме налога с банка. Вкладчик получит в этом случае с учетом налога и инфляции доход

$$d_D = g_D(r_D(\tau_D), p_D(\tau_D))(1-\delta_D)\frac{r_D(\tau_D)}{\tau_D},$$

а банк — прибыль

$$\Pi_n = \Pi(r_D(\tau_D), r_L(\tau_L), p_D, p_L) - \delta\ g_L(r_L(\tau_L), p_L)\frac{r_L(\tau_L)}{\tau_L},$$

где Π имеет вид (4.213).

Минимизация этого выражения приводит к условиям оптимальности ставок. Полученные зависимости позволяют оптимизировать процентные ставки и оценить предельную прибыль коммерческого банка при известных функциях спроса кредиторов и заемщиков, определяющих интенсивность их обращения на обслуживание в функции процентных ставок и сроков заимствования.

В рассмотренной упрощенной системе не учитывалась конкуренция банков друг с другом. Для учета различия в положении клиентов относительно конкурирующих банков в [92] было привлечено понятие обобщенных «транспортных издержек», как общих издержек клиента при использовании услуг того или иного из конкурирующих банков.

Аналогичную роль могут играть коэффициенты кинетических зависимостей, связывающих потоки кредитов и депозитов с различием оценок ЭА и ставок банка. Чем меньше эти коэффициенты, тем меньше «доступность» банка для данного ЭА. В этом случае в рамках данной модели можно рассмотреть систему с несколькими банками и проследить концентрацию клиентов вокруг каждого банка, предположив, что клиент выбирает только один «предпочтительный» банк для своих кредитов и депозитов и может менять предпочтение по условию максимума своих «доходов», под которыми понимается произведение потоков кредитов и депозитов на разницу оценок ЭА и ставок банка.

Приложение

Усреднение в экстремальных задачах

В оптимизационной термодинамике для выяснения предельных возможностей макросистем решают целый ряд экстремальных задач, используя методы нелинейного программирования, оптимального управления и усредненной оптимизации. Если первые два из названных методов широко известны, то усредненная оптимизация возникла в значительной степени в связи с исследованием возможностей макросистем в условиях необратимости протекающих в них процессов. Ее аппарат мало известен читателю, поэтому ему посвящено данное приложение, где рассмотрены типовые экстремальные задачи, содержащие средние значения искомых переменных, либо средние значения функций этих переменных, связь этих задач с циклическими режимами динамических систем и условия их оптимальности.

Приведем два примера задач усредненной оптимизации:

— Посредник между двумя рынками с поочередной покупкой и продажей ресурса. Состояние посредника меняется циклически, так что запас ресурса в начале каждого цикла одинаков. Нужно так менять цены, чтобы средняя прибыль за цикл была максимальна.

— Задано значение экстенсивных переменных (запасов ресурсов и капитала) в начале и в конце процесса. Требуется реализовать переход, достигнув экстремума некоторого интегрального критерия или предельного значения одной из переменных. Если как правые части уравнений системы, так и подынтегральная функция критерия не содержат экстенсивных переменных, а зависят только от управлений, то задача сводится к достижению экстремума среднего значения некоторой функции управляющих переменных, при условиях, наложенных на средние значения других функций тех же переменных.

Усреднение в экстремальных задачах может входить различным образом. Наряду с условиями на средние значения функций искомых переменных в задаче могут фигурировать и функции от средних значений некоторых переменных.

П.1. Оптимальные установившиеся режимы динамических систем

Будем рассматривать динамические системы, характеризующиеся конечным числом переменных. *Установившимся* назовем такой режим системы, при котором для каждой из характеризующих ее переменных $y_\nu(t)$ можно подобрать такой период T_ν, что среднее за этот период значение $y_\nu(t)$ постоянно во времени.

Формально

$$\frac{1}{T_\nu}\int\limits_{t-T_\nu}^{t} y_\nu(\tau)\,d\tau = \overline{y_\nu}. \tag{П.1}$$

Этому определению отвечают статические режимы, в которых $y_\nu(t)$ для всех ν постоянны.

Следующий, более общий подкласс установившихся режимов образуют режимы, для которых можно найти такой период T, что каждый из периодов T_ν укладывается в нем целое число раз. Подобные режимы называют *циклическими.*

Данному выше определению удовлетворяют и режимы, для которых периода T, общего для всех переменных $y_\nu(t)$, не существует. Это соответствует случаю, когда отношение хотя бы двух периодов T_ν к T_μ иррационально, например равно π. Такие режимы называют *квазициклическими* установившимися режимами.

Если система находится под влиянием внешних факторов, являющихся стационарными случайными процессами, и средние значения характеризующих ее переменных в пределе при достаточно большом периоде усреднения T стремятся к некоторому пределу, то установившийся режим называют *стохастическим.*

Переход к установившемуся режиму, отличающемуся от статического, может быть вызван тем, что допустимого по условиям функционирования системы статического режима не существует, например, посредник не может торговать на нескольких рынках одновременно, либо тем, что показатели эффективности системы в статическом режиме хуже, чем в режимах другого типа.

Приведем некоторые примеры.

1. Человеческий организм в установившемся режиме характеризуется постоянной температурой тела, составом артериальной крови и т.д. Но такие факторы, как давление крови, объем легких и некоторые другие, меняются периодически.

2. Система, состоящая из насоса, емкости (водонапорной башни) и потребителей, даже при постоянном потреблении жидкости $\overline{G}$ работает так, что насос то полностью выключен и подача жидкости в емкость равна нулю, то включен и работает в режиме с номинальной производительностью, большей, чем $\overline{G}$. Так что средняя производительность насоса равна $\overline{G}$. Если зависимость производительности насоса g от затрачиваемой мощности S строго выпукла вниз то средняя производительность при той же средней затрачиваемой мощности увеличивается по сравнению со статическим режимом.

Ниже будут рассмотрены главным образом циклические установившиеся режимы, среди которых полезно выделить два предельных класса. Первый класс включает в себя режимы, в которых каждый из периодов T_ν значительно превышает время переходных процессов в системе. При этом каждое из статических состояний предполагается устойчивым. В этом случае можно пренебречь динамикой системы и считать, что при изменении режимных переменных переменные состояния изменяются в соответствии со статическими характеристиками. Такие режимы называют *квазистатическими.*

Второй класс образуют *скользящие* установившиеся режимы, в которых все или некоторые из управляющих переменных изменяются с такой высокой частотой, что за счет инерционности объекта значения переменных состояния зависят лишь от осредненного влияния управляющих переменных.

Хотя статический режим и является частным случаем режима циклического, далее, говоря о циклическом режиме, будем подразумевать режим, при котором хотя бы одна из переменных процесса изменяется периодически во времени. Циклический режим будем называть *эффективным*, если переход к этому режиму позволяет получить более высокое, чем в статическом режиме, значение показателя эффективности процесса.

3. Циклические режимы характерны для систем, у которых допустимого статического режима не существует. Часто это связано с тем, что множество V допустимых значений переменных не выпукло, например, включает только дискретные значения переменных. Так, температура источника тепла, с которым контактирует рабочее тело в тепловой машине, может принимать лишь два значения: T_+ (горячий источник) и T_- (холодный источник). А средняя мощность за цикл должна быть максимальна при тех или иных ограничениях.

Циклические процессы могут быть организованы не только во времени. Переменные могут изменяться и вдоль пространственной координаты. В этом случае в каждом сечении аппарата параметры системы неизменны, а от сечения к сечению они меняются периодически.

Переход от статического режима к циклическому предполагает замену целевой функции ее средним значением за период цикла, замену всех или части ограничений, наложенных для каждого момента времени, усредненными ограничениями. Таким образом, этот переход связан с введением в задачу операции усреднения. При этом необходимо ответить на следующие вопросы:

а) существует ли циклический режим, удовлетворяющий условиям задачи?

б) эффективен ли переход от оптимального статического режима к циклическому?

в) каково возможное значение выигрыша в критерии оптимальности при таком переходе?

г) каковы оптимальные формы изменения управляющих переменных и переменных состояния, условия оптимальности, вычислительные алгоритмы решения?

Ответы на вопросы а) — в) желательно получить, не решая задачи г), которая в большинстве случаев достаточно сложная.

Как правило, задача выбора оптимального статического режима системы сводится к задаче об экстремальном значении целевой функции при ограничениях на переменные в форме системы равенств и неравенств, т.е. к задаче нелинейного программирования. Переход к циклическим режимам расширяет множество возможных решений и в зависимости от конкретной постановки приводит к усредненной задаче нелинейного программирования или к вариационной задаче управления. Если решение задачи об оптимальном статическом режиме существует, будем называть ее исходной.

Далее рассмотрим различные способы построения задач, множество допустимых решений которых шире, чем множество допустимых решений исходной задачи; покажем, что между такими расширенными задачами можно установить некоторые связи, помогающие оценить решение и значение одной из них путем решения другой.

П.2. Виды усредненных задач и условия оптимальности их решения

Рассмотрим различные способы введения усреднения в задачу нелинейного программирования (НП) и получим условия оптимальности усредненных задач. При получении этих условий использован прием, основанный на приведении любого из видов усредненных задач к канонической форме с последующим выводом необходимых условий оптимальности конкретной задачи как следствия из условий, полученных для задачи общего вида.

Усреднение функций, определяющих условия задачи

Рассмотрим в качестве исходной задачу нелинейного программирования в форме

$$f_0(x) \to \max / f_i(x) = 0, \qquad i = \overline{1, m}, \qquad x \in V_x. \tag{П.2}$$

На множестве V_x определим вероятностную меру $p(x)$ со свойствами

$$\int\limits_{V_x} p(x)dx = 1, \quad p(x) \geq 0. \tag{П.3}$$

Среднее значение функции $f(x)$ на интервале $[0, \tau]$ может быть найдено как

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(x(t))dt = \int\limits_{V_x} f(x)p(x)dx. \tag{П.4}$$

Если функция x изменяется во времени или задача (П.2) решается многократно и вместо требования максимума f_0 необходимо достичь максимума среднего значения этой функции, а функции f_i равны нулю в среднем, то мы приходим к задаче вида

$$\overline{f_0(x)} =\to \max \Big/ \ \overline{f_i(x) = 0}, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{П.5}$$

Искомым решением в задаче (П.5) является не вектор x, а мера $p(x)$, определенная на множестве V_x. Переменную x называют *рандомизированной*, а $p(x)$ — *обобщенным решением*. В том случае, когда $p(x) = \delta(x - x^0)$, где $x^0 \in V_x$, задача (П.5) совпадает с исходной.

Задачи, множество допустимых решений которых включает в себя множество допустимых решений задачи НП, причем на последнем критерии оптимальности обеих задач совпадают, называют расширениями задачи НП.

Рассмотрим сначала частный вид задачи (П.5), когда $f_i(x) = x_i$: получим

$$\overline{f_0(x)} \to \max \ / \quad \overline{x}_i = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{П.6}$$

Здесь черта над функцией $f_0(x)$ соответствует усреднению на множестве V_x. Значение задачи (П.6) равно ординате выпуклой оболочки функции $f_0(x)$ на множестве V_x в точке $x = 0$. Так как построение любой ординаты выпуклой оболочки функции n переменных согласно теореме Каратеодори требует усреднения не более чем $n+1$ ординат функции $f_0(x)$, задачу (П.6) можно переписать в форме

$$\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu f_0(x^\nu) \to \max \Big/ \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu x_i^\nu = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \gamma_\nu \geq 0, \quad \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu = 1. \tag{П.7}$$

Вернемся к задаче (П.5) и попытаемся привести ее к задаче расчета ординаты выпуклой оболочки функции. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что задачу (П.5) можно решать в два этапа. Первоначально найти максимум функции $f_0(x)$ при условиях $f(x) = C$, где C принимает все те значения, при которых поверхность уровня $f(x) = C$ пересекается с множеством V_x. Задача

$$f_0(x) \to \max / f_i(x) = C_i, \qquad i = \overline{1,m}, \qquad x \in V_x \tag{П.8}$$

является задачей нелинейного программирования. В результате решения (П.8) получим множество условно оптимальных решений $x^*(C)$ и соответствующие им значения функции $f_0^*(C) = f_0(x^*(C))$ — *функции достижимости задачи нелинейного программирования.*

Справедливо следующее у т в е р ж д е н и е: *оптимальное распределение $p^*(x)$ в задаче* (П.5) *сосредоточено в точках $x^*(C)$.* Другими словами, *если усреднять, то усреднять условно оптимальные значения f_0.*

С учетом сказанного второй этап решения задачи (П.5) сводится к определению максимума среднего значения функции $f_0^*(C)$ при условии, что среднее значение вектора C равно нулю, или

$$\overline{f_0^*(C)} \to \max \Big/ \overline{C}_i = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad C_i \in V_C. \tag{П.9}$$

Эта задача аналогична задаче (П.6). Ее значение, а следовательно, и значение задачи (П.5) равно ординате выпуклой оболочки функции достижимости $f_0^*(C)$ для $C = 0$:

$$\sup_{x \in D} \overline{f_0(x)} = \sup \overline{f_0^*(C)} / \quad \overline{C} = 0, \quad C \in V_C.$$

Так как вектор C имеет размерность m, число базовых точек C^ν в задаче (П.8) не превышает $m+1$. Таким образом, распределение $p(C)$ в задаче (П.8) можно искать в форме

$$p(C) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(C - C^\nu),$$

где C^ν — базовые значения C. Но так как каждому из базовых значений C^ν соответствует условно оптимальное решение $x^*(C^\nu)$, то оптимальное распределение $p(x)$ также сосредоточено не более чем в $(m+1)$-й точке:

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \delta(x - x^\nu). \qquad (\text{П.10})$$

При подстановке распределения (П.10) в выражения для $\overline{f_0(x)}$ и $\overline{f_i(x)}$ задача (П.5) примет вид

$$I = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0(x^\nu) \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \sum\limits_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_i(x^\nu) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ x^\nu \in V_x, \quad \gamma_\nu \geq 0, \quad \sum\limits_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu = 1. \end{array} \qquad (\text{П.11})$$

Таким образом, эта задача сводится к обычной задаче НП, переменными в которой являются базовые значения x^ν вектора x и весовые множители γ_ν.

Связь функций Лагранжа исходной и усредненной задач НП. Функция Лагранжа для задачи (П.11)

$$\overline{R} = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_0(x^\nu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu f_i(x^\nu) + \Lambda \left(1 - \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu \left[f_0(x^\nu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^\nu) - \Lambda \right] + \Lambda.$$

связана с функцией Лагранжа

$$R = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

исходной задачи НП как

$$\overline{R} = \sum_{\nu=0}^{m} \gamma_\nu (R(x^\nu, \lambda) - \Lambda) + \Lambda. \qquad (\text{П.12})$$

С учетом того, что $\sum\limits_{\nu} \gamma_\nu = 1$, функция Лагранжа усредненной задачи равна среднему значению функции Лагранжа для исходной задачи, причем усреднение ведется по всем базовым значениям x^ν. Некоторые из весовых множителей γ_ν могут быть равны нулю. Это означает, что число базовых точек меньше $m+1$.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять те x^ν, которые входят в выражение (П.12) с ненулевым весом. Для этого запишем условия оптимальности задачи (П.11) по переменным γ_ν, воспользовавшись теоремой Куна–Таккера:

$$(\partial\overline{R}/\partial\gamma_\nu)\delta\gamma_\nu \leq 0.$$

Так как γ_ν ограничены только с одной стороны ($\gamma_\nu \geq 0$), то $\delta\gamma_\nu \geq 0$, значит

$$\partial\overline{R}/\partial\gamma_\nu = R(x^\nu) - \Lambda \leq 0, \tag{П.13}$$

или $R(x^\nu) \leq \Lambda$. Если $\gamma_\nu^* > 0$, то $\delta\gamma_\nu$ может быть любого знака, а следовательно, неравенство (П.13) превращается в равенство:

$$R(x^\nu) = \Lambda.$$

Таким образом, *для всех тех значений x^ν, которые входят в усредненную задачу с ненулевым весом, функция Лагранжа R исходной задачи нелинейного программирования достигает абсолютного максимума.* Этот максимум, естественно, одинаков для всех x^ν.

Условия равенства значений R в точках $x^{\nu*}$ и условия ее максимума в них позволяют выписать уравнения для расчета искомых переменных. Из теоремы Куна–Таккера для задачи (П.5) вытекает, таким образом, что найдется вектор λ-множителей Лагранжа, для которого функция $\overline{R}$ достигает абсолютного максимума по переменным $x^\nu \in V_x$ и $\gamma_\nu \in V_\gamma$ на элементе множества $\overline{D}$ допустимых решений задачи (П.5), при этом λ-множители удовлетворяют условию

$$\overline{R}(\lambda^*, \gamma_\nu^*, x^{\nu*}) = \inf_{\lambda\in V_\lambda} \sup_{\gamma_\nu, x^\nu} \overline{R}(\lambda, \gamma_\nu, x^\nu) = \inf_{\lambda\in V_\lambda} \sup_{x\in V_x} R(\lambda, x). \tag{П.14}$$

Таким образом, когда функция достижимости $f_0^*(C)$ совпадает со своей выпуклой оболочкой при $C = 0$ переход к усредненной задаче не эффективен (значения задач НП и (П.5) совпадают). Значение усредненной задачи можно в силу (П.14) искать как $\inf\limits_{\lambda\in V_\lambda} \sup\limits_{x\in V_x} R(\lambda, x)$. Если расширенная задача неэффективна, ее называют *эквивалентной исходной.*

Размерность вектора искомых переменных и трудоемкость решения задачи (П.5) в общем случае значительно больше, чем в задаче НП. Вместе с тем часто нас интересует не решение усредненной задачи, а ее значение, показывающее, какой выигрыш может быть получен при переходе от обычной постановки к усредненной. В [41] приведены способы оценки сверху и снизу значения задачи (П.5).

Другие виды усредненных расширений задачи НП

Задача (П.5) не единственно возможный способ расширения с использованием усреднения для задачи нелинейного программирования. Часто в реально возникающих задачах в критерий эффективности, связи и ограничения входят не сами переменные x, а их средние значения. Так, стоимость ресурса, хранящегося на складе, определяется не мгновенной, а средней стоимостью потока продукции. Приведем несколько возможных модификаций усредненного расширения [36].

1. *Задача о максимуме функции от среднего значения аргумента:*

$$f_0(\overline{x}) \to \sup \ / \quad p(x) = 0 \quad \forall x \notin D. \tag{П.15}$$

Здесь D — множество допустимых решений исходной задачи нелинейного программирования, задаваемое условиями $f(x) = 0$, а $\overline{x}$ — среднее значение вектора x на множестве D.

Так как множество значений $\overline{x}$, удовлетворяющих этим условиям, представляет собой выпуклую оболочку множества D, то задача (П.15) представляет собой задачу НП, но на расширенном множестве допустимых значений аргумента, совпадающем с выпуклой оболочкой CoD множества D,

$$f_0(x) \to \sup \ / \quad x \in CoD.$$

2. *Задача о максимуме среднего значения функции при связях, наложенных на среднее значение аргумента:*

$$\overline{f_0(x)} \to \sup \ / \quad f_i(\overline{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{П.16}$$

или, в более полной записи:

$$\int\limits_{V_x} f_0(x)p(x)dx \to \sup_{p(x)}, \qquad f_i\left[\int\limits_{V_x} p(x)xdx\right] = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

3. *Задача о максимуме функции от среднего значения x при усредненых связях:*

$$f_0(\overline{x}) \to \sup \ / \quad \overline{f_i(x)} = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Каждая из перечисленных задач является расширением по отношению к задаче нелинейного программирования, а искомым их решением является распределение $p(x)$.

Усредненные задачи с двумя типами переменных. Расширение задачи нелинейного программирования может быть проведено не по всем, а лишь по некоторым составляющим искомого решения. В экономике это соответствует ситуации, когда некоторые составляющие (обозначим их через x) соответствуют выбираемым фирмой переменным, а другие составляющие, внешние параметры, будучи раз выбраны, остаются неизменными. Эту группу переменных обозначим через y. Например, x — цены покупки и продажи ресурса, а y — ставки налогообложения при той или иной стратегии фирмы.

Задача, в которой усреднение производится по части переменных, примет форму

$$\overline{f_0(y,x)}^x \to \sup \Big/ \overline{f_0(y,x)}^x = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{П.17}$$

Здесь

$$\overline{f(y,x)}^x = \int\limits_{C_x} f(y,x)p(x)dx.$$

Искомыми переменными в (П.17) являются вектор y и распределение $p(x)$.

Для каждого фиксированного y эта задача совпадает с обычной постановкой задачи (П.5). Если в функции Лагранжа R для исходной задачи нелинейного программирования выделить рандомизированные переменные $x \in E^r$ и детерминированные переменные $y \in E^s$, то условия оптимальности по x аналогично задаче (П.5) примут вид (см. (П.14))

$$R(\lambda, \gamma_\nu^*, y, x^{\nu *}) = \sup_{x \in V_x} R(\lambda, y, x), \qquad \nu = \overline{0,m}. \tag{П.18}$$

Причем при каждом $y \in V_y$ найдутся такие $\lambda(y)$, выбираемые из условия $\inf\limits_\lambda \sup\limits_{x \in V_x} R(\lambda, y, x)$, что

$$\inf_\lambda \sup_{x \in V_x} R(\lambda, y, x) = \sup_{x \in \overline{D_x(y)}^x} \overline{f_0(y,x)}.$$

Здесь множество $\overline{D_x(y)}$ выделено связями задачи (П.17). Так что базовые значения x доставляют функции Лагранжа абсолютный максимум.

Вместе с тем при фиксированной функции $p(x)$ задача (П.17) превращается в обычную задачу нелинейного программирования относительно переменных y. Для нее справедливы условия Куна–Таккера, которые в данном случае кроме условий дополняющей нежесткости содержат требования стационарности по y функции $R(\lambda, \gamma_\nu, y, x^\nu)$, что в свою очередь приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\sum_{\nu=0}^{m}\gamma_\nu R(\lambda, y, x^\nu)\right] = 0, \quad j = \overline{1, s},$$

в которых R — функция Лагранжа для задачи НП.

Усредненная задача с двумя типами переменных в некотором смысле близка к задаче оптимального управления, а условия оптимальности ее решения — к принципу максимума Понтрягина.

Алгоритм получения условий оптимальности усредненных задач

Усредненной задачей статической оптимизации будем называть любую задачу НП, в которой по всем или части переменных производится усреднение либо функций, либо самих переменных.

Как было показано выше, постановки усредненных задач очень разнообразны. Разнообразие это связано с тем, что в задаче могут присутствовать как средние значений функций, так и функции от средних значений переменных. Кроме того, усреднение может производиться не по всем, а лишь по части переменных. В этих условиях исследовать каждую из возможных постановок усредненных задач нецелесообразно. Значительно удобнее получить условия оптимальности решения для некоторой канонической формы усредненной задачи и пользоваться ими в каждом конкретном случае, записав задачу в этой форме [38].

При получении условий оптимальности требуется ответить на два вопроса:

1) всегда ли оптимальное распределение, являющееся одной из составляющих решения усредненной задачи, сосредоточено в конечном числе базовых точек?

2) если да, то каково предельное число этих точек?

Приведенные ниже необходимые условия оптимальности дают положительный ответ на первый вопрос и позволяют найти предельное число базовых точек.

Обозначим через y вектор детерминированных переменных, а через x вектор рандомизированных переменных. Для первого из них требуется найти оптимальное значение, а для второго оптимальную меру. Запишем каноническую форму усредненной задачи

$$F_0(\overline{f(x, y)}, y, x) \to \max \qquad (\text{П.19})$$

при условиях

$$F_\nu\overline{(f(x,y)}, \varphi(x,y), \overline{x}) = 0, \quad \nu = \overline{1,r},$$
$$F_\nu\overline{(f(x,y)}, \varphi(x,y), \overline{x}) \geq 0, \quad \nu = \overline{r+1,m}. \tag{П.20}$$

Здесь черта над знаком функции означает усреднение на множестве V_x рандомизированных переменных x, которое предполагается ограниченным и замкнутым.

Обозначим через k размерность вектора x, а через n размерность вектор-функции f. Функцию F предполагают непрерывно дифференцируемой по всем переменным, а f — непрерывной по x и непрерывно дифференцируемой по y.

В [38] доказано, что *оптимальная мера $p^*(x)$, определенная на множестве V_x, сосредоточена не более чем в $L+1$ базовых точках, причем $L = n + k$.* Таким образом

$$p^*(x) = \sum_{l=0}^{L} \gamma_l \delta(x - x^l), \qquad \gamma_l \geq 0, \quad \sum_{l=0}^{L} \gamma_l = 1.$$

Поэтому на оптимальном решении

$$\overline{f^*(x,y)} = \sum_{l=0}^{L} \gamma_l f(x^l, y), \qquad \overline{x} = \sum_{l=0}^{L} \gamma_l x^l,$$

а условия (П.20) примут форму

$$F_\nu(\overline{f}, \varphi(y, x^l), \overline{x}) = 0, \quad \nu = \overline{1,r},$$
$$F_\nu(\overline{f}, \varphi(y, x^l), \overline{x}) \geq 0, \quad \nu = \overline{r+1,m},$$

для всех значений x^l.

С учетом этих выражений задача (П.19), (П.20) становится обычной задачей НП относительно γ_l, y, x^l. Условия теоремы Куна–Таккера сводятся к стационарности по x^l, y и неулучшаемости по γ_l функции Лагранжа этой задачи (решение предполагаем невырожденным, так что $\lambda_0 = 1$)

$$R = F_0(\overline{f}, y, \overline{x}) + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu F_\nu(\overline{f}, \varphi(y, x^l), \overline{x}).$$

Для записи условий оптимальности введем обозначения:

$$a_j = \partial R / \partial \overline{f}_j, \qquad \beta_i = \partial R / \partial x_i, \qquad r_{\mu l} = \partial R / \partial \varphi_\mu(y, x^l). \tag{П.21}$$

В этих обозначениях условия неулучшаемости R по γ_l запишутся как требование максимума по $x \in V_x$ в точках x^l выражения

$$C(x) = \sum_j a_j f_j(x, y^*) + \sum_i \beta_i x_i,$$

так что

$$x^{*l} = \arg\max_x C(x), \qquad l = \overline{1, L}; \tag{П.22}$$

условия стационарности R по y имеют вид:

$$\nabla_y \left[\sum_j a_j \overline{f_j(x, y)} + F_0(\overline{f}, y, x) + \sum_{\mu, l} r_{\mu l} \varphi_\mu(y, x^l) \right] = 0. \tag{П.23}$$

Требование максимума $C(x)$ вместе с уравнениями (П.23), условиями (П.20) и условиями дополняющей нежесткости

$$\sum_{\nu=r+1}^{m} \lambda_\nu F_\nu(\overline{f}^*, \varphi^*, x^*) = 0, \quad \lambda_\nu \geq 0, \quad \nu = \overline{r+1, m}, \tag{П.24}$$

позволяют найти решение γ_l^*, y^*, x^l.

Для конкретной постановки усредненной задачи:

1. Записывают условия задачи в канонической форме (П.19), (П.20).

2. Выделяют рандомизированные и детерминированные переменные.

3. Подсчитывают общее число L усреднений, равное суммарной размерности вектора рандомизированных переменных и размерности вектора усредняемых функций.

4. Формируют функции R и C и подставляют их в выражения (П.22)–(П.24).

Например, в задаче (П.16)

$$F_0 = \overline{f_0(x)}, \quad F_\nu = f_\nu(\overline{x}), \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Величина L равна k, а функция

$$R = \lambda_0 \overline{f_0(x)} + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu f_\nu(\overline{x}).$$

В (П.22) $a_0 = \lambda_0 = 1, \quad a_\nu = 0$ при $\nu > 0$, а

$$\beta_i = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu (\partial f_\nu(\overline{x}) / \partial \overline{x}_i), \quad i = \overline{1, k}.$$

В базовых точках x^l, число которых не превышает $k+1$, выражение

$$C(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial \overline{x}_i}\right)$$

максимально по x, и условия (П.20), имеющие вид

$$f_\nu \left(\sum_{l=0}^{k} \gamma_l x^l\right) = 0; \quad \nu = \overline{1, m},$$

выполнены.

П.3. Нестационарные задачи усредненной оптимизации

Рассмотрим экстремальную задачу вида

$$\overline{f_0} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_0\Big(J(t), u(t)\Big) dt \to \max_u \tag{П.25}$$

при условиях

$$\overline{f_\nu} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_\nu\Big(J(t), u(t)\Big) dt = 0, \quad \nu = 1, n, \tag{П.26}$$

где $f_\nu(\nu = \overline{0, n})$ — непрерывны по J, u; $u \subset V_u \in R^{k_1}$ — измеримая функция; V_u ограничено и замкнуто; $J(t) \subset V_J \in R^{k_2}$ заданная измеримая функция времени, которой можно сопоставить вероятностную меру (распределение) $p(J)$. Если $J(t)$ в течение доли α_k интервала $(0, \tau)$ принимает значение J^k, $p(J)$ содержит слагаемое вида $\alpha_k \delta(J - J^k)$. Интервал $(0, \tau)$ может стремиться к бесконечности, а $J(t)$ может быть стационарным случайным процессом, имеющим распределение $p(J)$ своих значений. Распределение $p(J)$ может быть записано в форме

$$p(J) = \overline{p}(J) + \sum_k \alpha_k \delta(J - J^k). \tag{П.27}$$

Для задачи (П.25), (П.26) выделим долю интервала $(0, \tau)$, в течение которой $J(t)$, равна одному из значений J^k, эта доля равна $\alpha\tau$, где $\alpha = \sum\limits_k \alpha_k$. Будем называть $\alpha\tau$ суммарным интервалом постоянства $J(t)$. Оставшуюся часть $(1-\alpha)\tau$ назовем интервалом изменения параметра J.

Условия оптимальности задачи (П.25), (П.26) выражает следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $u^*(t)$ *оптимальное решение: тогда найдется такой ненулевой вектор* $\lambda = \{\lambda_0, ..., \lambda_n\}, \quad \lambda_0 = \{0, 1\}$, *что на интервале изменения параметра* $J(t)$

$$u^*(J, \lambda) = \arg\max_{u \in V_u} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu(J, u); \tag{П.28}$$

на суммарном интервале постоянства $J(t)$ *оптимальное решение переключается между не более чем* $n+1$ *базовым значением* u^j, *для каждого из которых справедливо условие*

$$u^j = \arg\max_{u \in V_u} \sum_k \alpha_k \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu(J^k, u), \qquad j = 0, n; \tag{П.29}$$

доли γ_j *участка постоянства* $\alpha\tau$, *в течение которых* $u^*(t)$ *принимает каждое из значений* u^j, *удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_{V_J} \overline{p}(J) f_\nu(J, u^*(J)) dJ + \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sum_k \alpha_k f_\nu(J^k, u^j) = 0, \qquad \nu = 1, n, \tag{П.30}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0; \tag{П.31}$$

вектор множителей $\lambda_\nu (\nu = 1, n)$ *определяется условиями*

$$\begin{aligned} \lambda^* = \arg\min_{\lambda} \Bigg[\int\limits_{V_J} \overline{p}(J) \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu(J, u^*(J, \lambda)) dJ + \\ + \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \sum_k \alpha_k f_\nu(J^k, u^j(\lambda)) \Bigg]. \end{aligned} \tag{П.32}$$

Таким образом на участках постоянства оптимальное решение задачи с нестационарными параметрами такое же, как решение усредненной задачи математического программирования, а на участке изменения параметра оно изменяется, как решение задачи с интегральными ограничениями. Доказательство этой теоремы приведено в [34].

Примером усредненной задачи с нестационарными условиями является задача закупок и продаж на нестационарных рынках, рассмотренная в гл. 4.

П.4. Необходимые условия оптимальности циклических режимов

Постановка задачи

Пусть динамика системы характеризуется дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(x, u, a), \qquad \nu = \overline{1, m}, \tag{П.33}$$

правые части которых явно не зависят от t. Здесь x — переменные состояния, u — управления, a — параметры, подлежащие оптимальному выбору. Краевые условия для уравнений (П.33), как правило, не фиксированы, но на переменные состояния наложены условия цикличности

$$x_\nu(\tau) = x_\nu(0) \Rightarrow \int\limits_0^\tau f_\nu(x, u, a)dt = 0, \quad \nu = \overline{1, m}. \tag{П.34}$$

Критерий оптимальности циклического процесса имеет смысл средней за цикл эффективности и может быть записан в форме

$$I = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau f_0(x, u, a)dt \to \max. \tag{П.35}$$

Продолжительность цикла τ является одной из составляющих вектора a и в общем случае не фиксирована. На параметры и управляющие воздействия наложены ограничения $a \in V_a,\ u \in V_u$; кроме интегральных ограничений (П.33), определяющихся требованием цикличности, в задаче обычно имеются интегральные ограничения, связанные с заданной средней интенсивностью потребления того или иного ресурса (ресурсные ограничения)

$$J_j = \int\limits_0^\tau \varphi_j(x, u, a)dt = 0, \qquad j = \overline{1, r}. \tag{П.36}$$

Предполагают, что функции, определяющие задачу, непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по x и a.

Условия оптимальности

Условия оптимальности задачи (П.33)–(П.36) могут быть получены с использованием принципа максимума [41], а именно: если оптимальное решение x^*, a^*, u^* существует и не вырождено, то найдутся ненулевой вектор

λ и дифференцируемая вектор-функция $\psi(t)$ такие, что функция

$$R = \frac{1}{\tau} f_0 + \sum_{\nu} [\dot{\psi}_\nu x_\nu + (\psi_\nu + \lambda_\nu) f_\nu] + \sum_j \lambda_j \varphi_j$$

стационарна по x, достигает максимума по u, а интеграл S от этой функции удовлетворяет условиям локальной неулучшаемости по a.

Получим:

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{\psi}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\tau} f_0 + \sum_{\nu} (\psi_\nu + \lambda_\nu) f_\nu + \sum_j \lambda_j \varphi_j \right\}. \tag{П.37}$$

Так как значения $x_\nu(\tau)$ и $x_\nu(0)$ не фиксированы, то $\psi_\nu(\tau)$ и $\psi_\nu(0)$ равны нулю. Введя обозначения $\tilde{\psi}_\nu = \psi_\nu + \lambda_\nu$ и учитывая, что $\dot{\tilde{\psi}}_\nu = \dot{\psi}_\nu$, можно переписать условия (П.37) в форме

$$\dot{\tilde{\psi}}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\tau} f_0 + \sum_{\nu} \psi_\nu f_\nu + \sum_j \lambda_j \varphi_j \right\} = -\frac{\partial}{\partial x_i} H. \tag{П.38}$$

Причем для этих уравнений из равенства нулю $\psi(0)$ и $\psi(\tau)$ вытекают условия цикличности по сопряженным переменным

$$\tilde{\psi}_\nu(0) = \tilde{\psi}_\nu(\tau) \Rightarrow \int_0^\tau \frac{\partial H}{\partial x_\nu} dt = 0, \qquad \nu = \overline{1, m}. \tag{П.39}$$

Условия максимума R по u имеют вид

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in V_u} \left\{ \frac{f_0}{\tau} + \sum_{\nu} \tilde{\psi}_\nu f_\nu + \sum_j \lambda_j \varphi_j \right\}. \tag{П.40}$$

Наконец, условия оптимальности по каждой из составляющих a_k вектора a, к числу которых принадлежит и продолжительность цикла τ, приводят к неравенствам

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} \delta a_k \le 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{П.41}$$

Здесь δa — конус допустимых по отношению к включению $a \in V_a$ вариаций вектора a.

Отметим, что фазовая траектория, соответствующая оптимальному циклическому процессу, не имеет самопересечений [36].

П.5. Оценка эффективности перехода к циклическому процессу

Условия эквивалентности и эффективности циклического расширения

Задача (П.33)–(П.36) об оптимальном циклическом режиме (назовем ее задачей Ц) представляет собой расширение задачи нелинейного программирования. Действительно, в том случае, когда на решение этой задачи наложены дополнительные условия $x =$const, $u =$const, получим задачу об оптимальном статическом режиме (задачу С):

$$I_C = f_0(x,u,a) \to \max \Big/ \begin{array}{l} f_\nu(x,u,a) = 0, \\ \varphi_j(x,u,a) = 0, \\ u \in V_u, \quad a \in V_a, \quad \nu = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,2}. \end{array} \tag{П.42}$$

Так как множество допустимых решений задачи (П.33)–(П.36) шире, чем множество допустимых решений задачи С, то

$$I_C^* \le I_{\text{Ц}}^*, \tag{П.43}$$

где через $I_{\text{Ц}}^*$ обозначено значение задачи об оптимальном циклическом процессе.

Одной из проблем проектирования циклических процессов является получение условий, позволяющих выявить класс задач, для которых неравенство (П.43) превращается в равенство, т.е. циклическое расширение эквивалентно. Важную роль при решении этой задачи играет функция Лагранжа задачи С

$$R_C = f_0(x,u,a) + \sum_\nu \lambda_\nu f_\nu(x,u,a) + \sum_j \xi_j \varphi_j(x,u,a). \tag{П.44}$$

Для ответа на вопрос об эквивалентности или эффективности циклического процесса без решения задачи (П.33)–(П.36) образуем усредненные задачи, являющиеся в свою очередь расширениями для задачи С или Ц или для той и другой. Сравнение значений этих задач с величиной $I_{\text{Ц}}^*$ позволяет найти условия эквивалентности циклического расширения.

А. Оценка величины $I_{\text{Ц}}^*$ сверху и достаточные условия эквивалентности циклического расширения. Расширим множество допустимых решений задачи Ц, отбросив дифференциальные уравнения (П.33). В этом случае мы получим задачу $\overline{C}$, которую будем называть *оценочной:*

$$I_{\overline{C}} = \overline{f_0(x,u,a)}^{x,u} \to \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{f_\nu(x,u,a)}^{x,u} = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \\ \overline{\varphi_j(x,u,a)}^{x,u} = 0, \\ u \in V_u, \quad a \in V_a, \quad j = \overline{1,r}. \end{array} \tag{П.45}$$

Ясно, что

$$I^*_{\overline{C}} \geq I^*_{\text{Ц}}, \tag{П.46}$$

а задача $\overline{C}$ представляет собой усредненное расширение для задачи C, содержащее переменные x, u и параметры a. При этом x и u входят в условия задачи $\overline{C}$ равноправно, и их можно объединить, обозначив как $y = (x,u)$. В сокращенной записи эта задача примет форму

$$I_{\overline{C}} = \overline{f_0(y,a)}^{y} \to \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{f_\nu(y,a)}^{y} = 0, \\ \overline{\varphi_j(y,a)}^{y} = 0, \\ \nu = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,r}. \end{array} \tag{П.47}$$

Значение задачи (П.47), как расширения задачи об оптимальном статическом режиме, может быть выражено через функцию R_C как

$$I^*_{\overline{C}} = \inf_{\lambda,\xi} \sup_y R_C(y, a^*, \lambda, \xi). \tag{П.48}$$

Для определения вектора параметров имеем условие

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} \overline{R_C(y,a,\lambda,\xi)}^{y}\right]_{a=a^*} \delta a \leq 0. \tag{П.49}$$

В том случае, когда a^* лежит внутри V_a, условие (П.49) сводится к условию стационарности R_C по a.

Если найденное по формуле (П.48) значение $I^*_{\overline{C}}$ равно I^*_C, а этому соответствует случай, когда задача $\overline{C}$ имеет единственное базовое решение, то из неравенств (П.43) и (П.46) следует, что $I^*_{\text{Ц}} = I^*_C$, т.е. статический режим нельзя улучшить за счет перехода к циклическому режиму. Если же $I^*_{\overline{C}} > I^*_C$, то разница между ними $\Delta_{\overline{C}}$ дает верхнюю оценку того выигрыша, который возможен при переходе к циклическому режиму.

Б. Оценка величины $I^*_{\text{Ц}}$ снизу. Квазистатические и скользящие режимы. Рассмотрим случай, когда изменения $x(t)$ и $u(t)$ таковы, что производными $x(t)$ по времени можно пренебречь, так что связи x и u определяются так же, как и в статике, — зависимостями $f(x(t), u(t), a) = 0 \quad \forall t$. Соответствующий режим называют *квазистатическим.* Задача об оптимальном выборе $x(t), u(t)$ при условиях квазистатики (задача КС) имеет форму

$$I_{\text{КС}} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f_0(x,u,a)dt \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} f(x,u,a)=0, \\ \int\limits_0^\tau \varphi(x,u,a)dt = 0, \\ u \in V_u, \quad a \in V_a, \end{array}$$

или в сокращенной записи

$$I_{\text{КС}} = \overline{f_0(y,a)}^y \to \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{\varphi(y,a)}^y = 0, \\ y \in V_y, \quad a \in V_a. \end{array} \tag{П.50}$$

Здесь $y=(x,u)$, а множество V_y определяется включениями $u \in V_u$, $a \in V_a$ и условиями $f(x,u,a)=0$.

Так как любое решение задачи КС допустимо в задаче Ц, то справедливо неравенство

$$I^*_{\text{КС}} \le I^*_{\text{Ц}}. \tag{П.51}$$

В то же время значение $I^*_{\text{КС}}$ задачи КС, как значение усредненной задачи, определяется выражением

$$I^*_{\text{КС}} = \inf_\xi \left\{ \sup_y [f_0(y,a^*) + \xi\varphi(y,a^*)] \Big/ \begin{array}{l} f(y,a^*)=0, \\ u \in V_u. \end{array} \right\} \tag{П.52}$$

Здесь a^* — оптимальное значение вектора a, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\overline{f_0(y,a)}^y + (\xi, \overline{\varphi(y,a)}^y + \sum_{i=0}^r \lambda^i f(y^i,a)\right]_{a^*} \delta a \le 0, \tag{П.53}$$

в котором δa — множество вариаций, допустимых по включению $a \in V_a$.

Множители Лагранжа λ^i в (П.53) выбирают так, чтобы для любого базового значения y^i вектора y были выполнены условия $f(y^i,a)=0$. Число базовых значений y определяется размерностью r вектор-функции φ, так что задача принимает форму

$$\overline{f}_0 = \sum_{i=0}^r \gamma_i f_0(y^i,a), \qquad \overline{\varphi} = \sum_{i=0}^r \gamma_i \varphi(y^i,a), \quad \sum_{i=0}^r \gamma_i = 1, \ \gamma_i \ge 0.$$

Рассмотрим случай, когда изменения вектора управления происходят со столь большой частотой, что вектор состояния x практически постоянен. Подобный режим называют *скользящим* установившимся режимом.

Сформулируем задачу оптимизации такого режима как

$$I = \overline{f_0(b,u)}^u \to \sup \Bigg/ \begin{array}{l} \overline{f(b,u)}^u = 0, \quad u \in V_u, \\ \overline{\varphi(b,u)}^u = 0, \quad b \in V_b. \end{array} \tag{П.54}$$

Эту задачу называют задачей СК. Через b в (П.54) обозначен вектор с составляющими x и a. Этот режим является предельным случаем циклического, так что справедливо неравенство

$$I^*_{\text{СК}} \leq I^*_{\text{Ц}}.$$

Задача (П.54) представляет собой усредненное расширение задачи С с двумя типами переменных; ее значение:

$$I^*_{\text{СК}} = \min_{\lambda,\xi} \max_u R(u,b^*,\lambda,\xi) = \min_{\lambda,\xi} \max_{u \in V_u} \left[f_0(u,b^*) + \lambda f(u,b^*) + \xi\varphi(u,b^*) \right], \tag{П.55}$$

при этом вектор b^* удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial b} \overline{R(u,b^*,\lambda,\xi)}^u \delta b \leq 0. \tag{П.56}$$

Число базовых значений вектор-функции u в задаче не превосходит $m + r + 1$.

Необходимое условие целесообразности перехода к циклическому режиму может быть сформулировано через $I^*_{\text{КС}}$ и $I^*_{\text{СК}}$. Для этого введем величину

$$I_{\text{К}} = \max\left[I^*_{\text{КС}}, I^*_{\text{СК}} \right].$$

Если величина $I_{\text{К}}$ больше, чем I^*_C, то переход к циклическому режиму эффективен, а разность $\Delta_{\text{К}} = I_{\text{К}} - I^*_C$ оценивает эту эффективность снизу.

Частотный критерий целесообразности перехода к циклическому режиму

Будем предполагать, что оптимальный статический режим x^0, u^0 в задаче С найден. Требуется, как и выше, определить эффективно ли циклическое расширение задачи С. В [69] предложен частотный критерий целесообразности циклического режима. Этот критерий основан на исследовании приращения критерия оптимальности I по отношению к его максимальному статическому значению I^0 при малых гармонических колебаниях управления относительно u^0.

Пусть λ^0 и μ^0 — значения множителей Лагранжа λ и μ, соответствующих оптимальному статическому режиму, в функции Лагранжа для задачи С

$$R = f_0(x,u) + \sum_i \lambda_i f_i(x,u) + \sum_j \mu_j \varphi_j(x,u).$$

В окрестности оптимального статического режима и соответствующих ему множителей Лагранжа вычислим первые и вторые производные по x и u функций, определяющих задачу (эти производные для случая, когда x и u — векторы, представляют собой матрицы):

$$A = \partial f/\partial x, \quad B = \partial f/\partial u, \quad P = \partial^2 R/\partial x^2,$$
$$Q = \partial^2 R/\partial x \partial u, \quad H = \partial^2 R/\partial u^2, \quad K = \partial\varphi/\partial x, \quad M = \partial\varphi/\partial u.$$

В окрестности оптимального статического режима приращение функционала I при малых вариациях $\delta x(t)$ и $\delta u(t)$ можно выразить, как

$$\Delta I = \frac{1}{2T}\int_0^T (\delta x' P \delta x + \delta x' Q \delta u + \delta u' Q' \delta x + \delta u' H \delta u) dt.$$

Вопрос о целесообразности перехода к циклическому режиму сводится к определению такой вариации δu, для которой величина ΔI была бы положительна при линеаризованных условиях (П.33)

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u, \quad \delta x(T) = \delta x(0). \tag{П.57}$$

Чтобы освободиться от этих связей, сузим класс вариаций до гармонических:

$$\delta u(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_\nu e^{i\nu\frac{2\pi}{T}t}.$$

Преобразовав по Фурье линейные дифференциальные связи (П.57), получим

$$\delta x(i\omega) = \delta u(i\omega)\frac{B}{i\omega E - A} = \delta u(i\omega) W(i\omega).$$

Здесь E — единичная матрица (если x — скаляр, то $E = 1$). Кроме того, предполагают, что матрица A не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, иначе малым отклонениям $\delta u(t)$ могли бы соответствовать большие отклонения $\delta x(t)$ и проведенная линеаризация не была бы правомерна.

Если величину ΔI выразить по формуле Парсеваля в частотной области, подставив вместо $\delta x(i\omega)$ его выражение через δu, то приращение критерия при гармонических колебаниях управления с частотами, кратными $2\pi/T$, примет вид

$$\Delta I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta u'(-i\omega)\Pi(\omega)\delta u(i\omega)d\omega.$$

Здесь $\Pi(\omega)$ определяется матрицами P, Q, H и связью между δu и δx и, как нетрудно показать, имеет форму

$$\Pi(\omega) = W'(-i\omega)PW(i\omega) + Q'W(i\omega) + W'(-i\omega)Q + H,$$

где штрих обозначает транспонирование.

Для скалярной задачи

$$\Pi(\omega) = P|W(i\omega)|^2 + 2QReW(i\omega) + H.$$

Критерий целесообразности перехода к циклическому режиму утверждает, что если для некоторого значения ω матрица $\Pi(\omega)$ такова, что подынтегральное выражение в функционале ΔI положительно хотя бы для одного вектора δu, то статический режим может быть улучшен.

Для скалярной задачи

$$\Delta I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\delta u(i\omega)|^2\Pi(\omega)d\omega$$

и статический режим улучшается, если для некоторого ω величина $\Pi(\omega)$ больше нуля.

Ляпуновские и приводящиеся к ним задачи

Для важного класса задач неравенство (П.46) превращается в равенство. В этих задачах функции f_0, f и φ в соотношениях (П.33)–(П.36) зависят только от u и a, так что уравнения (П.33) примут вид

$$\dot{x} = f(u, a). \tag{П.58}$$

Такие уравнения называют *уравнениями ляпуновского типа*, а соответствующие задачи — ляпуновскими. Отбрасывая в задаче уравнения (П.58) и переходя тем самым к задаче $\overline{C}$, можно найти ее решение $u^*(t)$, a^*. Подстановка этого решения в уравнения (П.58) определяет оптимальную траекторию. Ясно, что для этой задачи $I^*_{\overline{C}} = I^*_{\text{Ц}}$, при этом оптимальное управление $u^*(t)$ принимает не более $m+r+1$ базовых значений, а функция $x^*(t)$ кусочно-линейная, имеющая не более $m+r$ точек излома.

К ляпуновским могут быть приведены задачи, в которых наряду с уравнениями ляпуновского типа могут присутствовать уравнения вида

$$\dot{x}_\nu = f_\nu(u,a)F_\nu(x_\nu),$$

которые приводятся к форме (П.58) посредством замены переменной

$$y_\nu(x_\nu) = \int \frac{dx_\nu}{F_\nu(x_\nu)}, \tag{П.59}$$

так что $\dot{y}_\nu = f_\nu(u,a)$. Оптимальное решение $y_\nu^*(t)$ кусочно-линейное. Найдя это решение, определяют $x_\nu(t)$ из (П.59) как решение уравнения

$$\frac{dx_\nu}{F_\nu(x_\nu)} = y_\nu^*(t)dt.$$

Подчеркнем, что оптимальное решение усредненных задач во всех случаях, кроме стационарного, не единственно, так как важны только доли времени, в течение которых управление принимает то или иное базовое значение, порядок же, в котором оно принимает эти значения, роли не играет. Соответственно значит не единственно и оптимальное решение ляпуновских и приводимых к ним задач.

Литература

1. *Амелькин С.А., Мартинаш К., Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах // Автоматика и телемеханика. 2002. №4. С.3–25.

2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960. 400с.

3. *Беляева Н.П., Цирлин А.М.* Оптимальное управление покупкой и продажей ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. 1998. №4. С.135–143.

4. *Бошнякович Ф.* Техническая термодинамика. М.: ГЭИ, 1955.

5. *Бродянский В.М., Фратшке В., Михалек К.* Эксергетический метод и его приложения. М.: Энергоатомиздат, 1988.

6. *Гленсдорф П. Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.

7. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.

8. *Гухман А.А.* Об основаниях термодинамики. М.: Энергоатомиздат, 1986.

9. *Долан Э.Д.* Микроэкономика. Санкт-Петербург, С-Пб.: Оркестр, 1994.

10. *Карно С.* Размышление о движущей силе огня и о машинах ... // В кн. Второе начало термодинамики. М.-Л.: Гостехиздат, 1934.

11. *Колинько Н.А., Цирлин А.М.* Обратная задача оптимального управления для одного класса управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2002. №8. С.151–159.

12. *Конюховский П.В.* Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. С-Пб.: Питер, 2001. 220с.

13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1973.

14. *Кузнецов А.Г., Руденко А.В., Цирлин А.М.* Оптимальное управление в термодинамических системах с конечной емкостью источников // Автоматика и телемеханика. 1985. №6. С.56–62.

15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.

16. *Лихнерович М.* Модель экономического обмена (экономика и термодинамика) // Сб. Математическая экономика, под ред. Митягина Б.С. М.: Мир. 1974.

17. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цирлин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени. М.: Химия, 2000.

18. *Миронова В.А., Соболев В.А., Цирлин А.М.* Оптимальное управление потоками сырья и готовой продукции путем выбора цен // Автоматика и телемеханика. 1998. №2.

19. *Орлов В.А., Розоноэр Л.И.* Оценки эффективности управляемых термодинамических процессов на основе уравнений баланса энергии вещества и энтропии // X Всесоюзное совещание по проблемам управления. М.: Наука, 1986.

20. *Петров А.А.* Математическая модель рыночного равновесия. М.: Наука, 1966.

21. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.

22. *Попков Ю.С.* Теория макросистем, равновесные модели. М.: УРСС, 1999.

23. *Попков Ю.С.* Макросистемные модели динамических стохастических систем и GRID–технологии //Автоматика и Телемеханика. 2003. №12.

24. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.

25. *Поспелов И.Г.* Динамическое описание коллективного поведения на рынке // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем // Ред. Самарский А.А., Моисеев Н.Н., Петров А.А. М.: Наука, 1989.

26. *Пригожин И., Дефей Р.* Химическая термодинамика. М.: Наука, 1966.

27. *Розоноэр Л.И.* Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход) // I-III. Автоматика и Телемеханика. 1973. №5. С.115–132; №6. С.65–79; №8. С.82–103.

28. *Розоноэр Л.И., Малишевский А.В.* Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой // Всесоюзное совещание по проблемам управления. Рефераты докладов. 1971. С.207–209.

29. *Софиева Ю.Н., Цирлин А.М.* Условная оптимизация, методы и задачи. М.: УРСС, 144с.

30. *Трофимов В.В.* Геометрический анализ динамики больших экономических систем // В книге Т. Пу «Нелинейная экономическая динамика», НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. С.174–198.

31. *Хейвуд Р.* Термодинамика равновесных процессов. М.: Мир, 1983.

32. *Цирлин А.М.* Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. М.: Наука, 2006.

33. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и экономике. М.: Физматлит, 2002.

34. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности усредненных задач с нестационарными параметрами // Доклады РАН. 2000. №2. С.177–179.

35. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике // Автоматика и Телемеханика. 2001. №5.

36. *Цирлин А.М.* Оптимальные циклы и циклические режимы. М.: Энергоатомиздат, 1985.

37. *Цирлин А.М.* Оптимальное управление процессами необратимого тепло и массопереноса // Изв. АН СССР. Серия Техническая кибернетика. 1991. №2. С.81–86.

38. *Цирлин А.М.* Условия оптимальности решения усредненных задач математического программирования // Доклады Академии наук, 1992. Т.323. №1.

39. *Цирлин А.М.* Термодинамика экономических систем // Труды ИПС РАН. 1994. Т.1. С.64–78.

40. *Цирлин А.М.* Оптимальное управление обменом ресурсами в экономических системах // Автоматика и телемеханика. 1995. №3. С.116–126.

41. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их приложения. М.: Физматлит, 1997.

42. *Цирлин А.М.* Второй закон термодинамики и предельные возможности тепловых машин // Журнал технической физики. 1999. Т.69. №1. С.140–142.

43. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и микроэкономике. М.: Физматлит, 2003. 416с.

44. *Цирлин А.М.* Необратимые оценки предельных возможностей термодинамических и микроэкономических систем. М.: Наука, 2003. 349с.

45. *Цирлин А.М.* Оптимизация деятельности посредника в условиях задержки поставок и платежей // Автоматика и телемеханика. 2000. №3.

46. *Цирлин А.М.* Оптимальные процессы и управление в необратимой микроэкономике //Автоматика и телемеханика. 2001. №5. С.159–170.

47. *Цирлин А.М., Амелькин С.А., Амелькина М.А.* Модель производственной фирмы в открытой микроэкономической системе // Математическое моделирование. 2002. Т.14. №4. С.21–34.

48. *Цирлин А.М., Казаков В.А.* Область реализуемости термодинамических систем заданной производительности // Известия РАН. Энергетика 2001. №5. С.44–51.

49. *Цирлин А.М., Миронова В.А., Амелькин С.А.* Процессы минимальной диссипации // Теоретические основы химической технологии. 1997. Т.31. №6. С.649–658.

50. *Цирлин А.М.* Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. М.: Наука, 2006. 500с.

51. *Цирлин А.М.* Необратимая микроэкономика: Оптимальные процессы и равновесие в замкнутых системах // Автоматика и Телемеханика. 2008. №69(7). С.1201–1215.

52. *Шамбодаль П.* Развитие и приложение понятия энтропии. М.: Наука, 1967.

53. *Amelkin S.A., Tsirlin A.M.* Optimal Choice of Prices and Flows in a Complex Open Industrial System // Open Sys. & Information. 2001. Dyn. 8: P.169–181.

54. *Ayres R.U., Martinas K. A.* Non-equilibrium evolutionary economic theory. - In P. Burley, J. Foster (eds.) Economics and thermodynamics: new perspectives on economic analysis // Kluwer Academic Publishers. Boston. 1994. P.73–98.

55. *Ayres R.U., Martinas K.* Waste Potential Entropy: The Ultimate Ecotoxic? // Economie Appliquee. 1995. V.XLVIII. No2. P.95–120.

56. *Ayres R.U., Nair I.* Thermodynamics and Economics // Phisics Today. 1984. V.37. P.313–325.

57. *Berry R.S., Andresen B.* Thermodynamic constraints in economic analisis // Sef- organization and dissipative structures: Applications in the physical and social sciences. Ed. By W.C. Schieve and P.M. Allen. University of Texas Press. Austin. Texas, 1982.

58. *Berry R.S., Kasakov V.A., Sieniutycz S., Szwast Z. and Tsirlin A.M.* Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes // Wiley. Chichester, 1999.

59. *Brody A., Martinas K., Sajo K.* Essay on Macroecomomics // Acta Oeconomica. 1985. V.35. No.3–4. P.337–343.

60. *Brody A.* The Use of Thermodynamic Models in Economics. In P. Burley, J. Foster (eds.) Economics and Thermodynamics: new perspectives on economic analysis // Kluwer Academic Publishers. Boston, 1994.

61. *Bryant J. A* Thermodynamic approach to economics // Energy Economics. 1982. V.4. P.36–50.

62. *Chiappori P.A.,* Perez-Castilio D., Verdier F. Spatial Competition in the banking system, localization, cross-subsides and reguration of interest rates // European Economy Review. 1995. V.39. P.889–919.

63. *Curzon F.L., Ahlburn B.* Efficiency of a Carnot engine at maximum power output // Amer.J. Physics. 1975. V.43. P.22–24.

64. *De Vos A.* Endoreversible thermoeconomics // Energy Conversion Management. 1995. V.36. No.1. P.1–5.

65. *De Vos A.* Endoreversible Economics // Energy Conversion nagement. 1997. V.38. No.4. P.311–317.

66. *Dyke C.* From entropy to economy a thorny path // Advances in Human Ecology. 1992. V.1. P.149–176.

67. *Georgescu-Roegen N.* The Pure Theory of Consumers Beehavior // Quartery J. of Economics. 1936. V.50. P.545–593.

68. *Georgescu-Roegen N.* The Entropy Law and the Economic Process. Harvard University Press, Cambridge. 1971.

69. *Guardabassi G.,Locatelli A., Rinaldi S.* Periodic Optimization of continuous systems // Proc.Int.Conf. Cubern and Soc. Washington. D.C. 1972. P.261–263.

70. *Holyst J. A., Urbanowicz K.* Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // Physica A. 2000. V.287. N3–4. P.587–598.

71. *Hotelling H.* Edgeworts Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions // Jornal of Political Economy. 1932. V.40. P.196–219.

72. *Houyhakker H.S.* Revealed Preference and the Utility Function // Economica. 1950. V.17. P.159–174.

73. *Hurwicz L., Richter M.* An Integrability Condition with Applications to Utility Theory and Thermodynamics // Journal of Mathematical Economics. 1979. V.6. P.7–14.

74. *Ibrahim O.M., Klein S.A., Mitchell J.W.* Effects of Irreversibility and Economics on the Performance of a Heat Engine // Journal of Solar Energy Engineering. 1992. V.141. P.267–271.

75. *Klein M.A.* Theory of the banking firm // Journal of Money. Creditand Danking. 1971. V.3. P.205–218,

76. *Lichnerowicz M., Lichnerowicz A.* Economie et Thermodynamique: Un Modele dechange economique // Economies et Societes. 1971. V.5.

77. *Lichnerowicz M.* Un modele dechange economique (economie et thermodynamique) // Annales de l'Institut Henri Poincare. 1970. No2.

78. *Long N.V., Siebert H.* Lay-off Restraints, Employment Subsidies, and the Demand of Labor // In Optimal Control Theory and Economic Analysis. 1985. V.2. ed. by G. Feichtinger. Amsterdam.

79. *Lukacs J.* Once more about economic entropy // Acta Oeconomica. 1989. V.41. No1–2. P.181–192.

80. *Mantegna R.N., Palagyi Z., Stanley H.E.* Aplications of statistical mechanics to finance // Physica A. 1999. V.274. P.216–221.

81. *Martinas K.* About Irreversibility in Microeconomics. - Reserch Report (AHFT-89-1). Department of Low Temperature Phisics. Roland Eotvos University. Budapest, 1989.

82. *Martinas K.* Irreversible microeconomics. - In K. Martinas, M. Moreau (eds.) Complex Systems in Natural and Economic Sciences. Matrafured, 1995.

83. *Martinas K.* Irreversible Microeconomics, Intern // Onsager-Workshop Leiden. 2000. P.147–152.

84. *Martinas K.* About irreversibility in economics // Open Sys. Information Dyn. 2000. 7(4): P.349–364.

85. *Mironova V., Tsirlin A., Kazakov V., Berry R.S.* Finite-time thermodynamics: Exergy and optimization of time-constrained processes // J.Appl. Phys. 1994. №76. P.629.

86. *Mirowski P.* More Heat than Light. Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics. Historical perspectives on modern economics. Cambridge University Press. Cambridge, 1989.

87. *Monti M.* Deposit, credit and interest rate determination under alternative bankobjectives // Methematicals methods of finance. Amsterdam: North-Holland, 1972.

88. *Novikov I.I.* The efficiency of atomic power stations // At. Energ. 3 (11), 409 (1957); English translation in J. Nuclear Energy II 7. 25-128 (1958). 2002. №2.

89. *Proops J.L.R.* Organization and dissipation in economic systems // Journal of Social and Biological Structures. 1983. V.6. P.353–366.

90. *Salamon P., Nulton J.D., Siragusa G., Andresen T.R. and Limon A.* Principles of control thermodynamics // Energy. The Int. J. 2001. N26.

91. *Salamon P.* Physics versus engineering of finite-time thermodynamic models and optimizations // In: Thermodynamic Optimization of

Complex Energy Systems, Eds: A. Bejan and E. Mamut, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999. P.421–424.

92. *Salop S.* Monopolistic competition with outside goods // Bell Journal of Economics. 1979. V.10. P.141–156.

93. *Samuelson P.A.* Extension of the LeChatelier Principle // Econometrica. 1960. V.28. N2.

94. *Samuelson P.A.* Maximum Principle in Analytical Economics // The Am. Econ. Rev. 1972. V.2. P.249–262,

95. *Shambadal P.* Les Centrales Nuclearis. Armand Colin. Paris, 1957.

96. *Saslow W.M.* An economic analogy to thermodynamics // Am.J. Phys. 1999. 67(12). P.1239–1247.

97. *Sieniutycz S.* Finite-Time Thermodynamics and Thermoeconomics // Sieniutycz S. and Salamon P. Taylor & Francis, 1990.

98. *Spirkl W., Ries H.* Optimal finite-fime endoreversible processes // Physical rev. E. 1995. V.52. N4. P.3455–3459.

99. *Schultz H.* Theory and Measurement of Demand. Chicago, 1938.

100. *Tolman R.C., Fine P.C.* On the Irreverseible Production of Entropy // Rev. of modern Phys. 1948. V.20. №1. P.51–77.

101. *Tsirlin A., Kazakov V.* Chapter «Irreversibility factor and limiting performance of financial systems (thermodynamic approach)» // Advances in Mathematics Research. 2003. V.5. P.47–77. by Nova Science.

102. *Tsirlin A.M., Amelkin S.A.* Dissipation and Conditions of Equilibrium for an Open Microeconomic System // Open Sys. & Information Dyn. 8: 2001. P.157–168.

103. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: I. Thermodynamics // Open Sys. & Information Dyn. 8: 2001. P.315–328.

104. *Tsirlin A.M., Kazakov V., Kolinko N.A.* Irreversibility and Limiting Possibilities of Macrocontrolled Systems: II. Microeconomics // Open Sys. & Information Dyn. 8: 2001. P.329–347.

105. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A.* Extremal principles and limiting possibilities of open thermodynamic and economic systems // Variational and extremum principles in macroscopic systems. S. Sieniutycz, H. Farkas (eds.). Kluwer Academic Publishers, 2004.

106. *Tsirlin A.M., Mironova V.A., Amelkin S.A., Kazakov V.A.* Finite-time thermodynamics: Conditions of minimal dissipation for thermodynamic process with given rate // Physical Review E. 1998. V.58. №1.

107. *Tsirlin A.M., Kazakov V.A., Kolinko N.A.* A Minimal Dissipation Type-Based Classification in Irreversible Thermodynamics and Microeconomics // Europ. Phys. Jorn. 2003. V.35. P.565–570.

108. *Ville J.* The Existence Conditions of a Total Utility Function // Rev. Economics Studies. 1951. V.19. P.123–128.

109. *Von Neumann J. A* Model of General Economic Equilibrium // Review of Economic Studies. 1945. V.3. P.1–9.

110. *Yan Z., Chen J.* // Int.J. Energy Environment Economics. 1992. №2. P.63.

Оглавление

Научное издание

Анатолий Михайлович Цирлин

Оптимизационная термодинамика экономических систем

Верстка
М.А. Нуцковой

Художественное оформление
Ю.В. Зайцевской

ООО «Издательство «Научный мир»
Адрес отдела реализации:
119992, Москва, ул. Знаменка, д. 11/11
Тел./факс: +7 (495) 691-2847
+7 (499) 973-2513
E-mail: naumir@benran.ru. E-mail: naumir@naumir.ru
Internet: http://www.naumir.ru
Адрес издательства «Научный мир»:
127055, Москва, Тихвинский переулок, д. 10/12, корп. 4
E-mail: naumir@naumir.ru Internet: http://www.naumir.ru

Подписано к печати 1.09.2011
Формат 70×100/16
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,0
Тираж 300 экз. Заказ 230
Издание отпечатано в типографии
ООО «ГаллеяПринт»
Москва, ул. 5-я Кабельная, 2-б