

© 2011 г. А.М. Цирлин, д-р техн. наук, (Институт программных систем РАН  
им. А.К. Айламазяна, Переславль-Залесский),  
П. Саламон, проф., (Университет Сан-Диего, США),  
К-Х. Хоффман, проф., (Технический университет г.Хемница, ФРГ)

## ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ<sup>1</sup>

Решены задачи оптимального параметрического управления одиночным осциллятором и ансамблем квантовых осцилляторов. На их примере продемонстрированы возможности метода перехода к новым переменным пространства состояний управляемой системы.

*Управление осцилляторами, трансформация пространства состояний, квантовая термодинамика, эквивалентные преобразования*

### 1. Введение

Решение задачи оптимального управления

$$(1) \quad I = \int_0^{\tau} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \max$$

при условиях

$$(2) \quad \dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad x \in R^n, \quad u \in V_n \subset R^m, \quad i = 1, \dots, n,$$

в которой  $f_i$  непрерывны по  $u$  и непрерывно-дифференцируемы по  $x, t$ ;  $V_u$  – компакт, может быть существенно облегчено за счет перехода к новым переменным состояниям  $y(x)$ . Назовем задачу (1),(2) исходной, а задачу с переменными состояниями  $y$  преобразованной.

Перечислим цели, которые могут быть достигнуты в результате такого перехода:

1. Часть переменных  $y$  может быть сделана независимой от всех или некоторых управляющих воздействий.

2. Некоторые из переменных  $y$  могут быть переведены в разряд управлений с сокращением размерности задачи.

3. Выявление функции от фазовых переменных, которая постоянна для любых допустимых управлений или в классе управлений, удовлетворяющих условиям оптимальности.

4. Для задач, у которых правые части дифференциальных уравнений не зависят явно от времени, размерность задачи может быть сокращена, если скорость изменения одной из переменных  $y_\nu$  сохраняет знак при всех или при оптимальных значениях

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-06-00-141а).

своих аргументов. В этом случае  $dt$  можно заменить на  $dy_\nu$ . В исходной задаче такой переменной может и не найтись.

5. Если правые части дифференциальных уравнений для  $y_j, j = 0, \dots, n$  не зависят от переменной состояния  $y_\nu$ , то  $\nu$ -е уравнение может быть отброшено или, если значения этой переменной на границе интервала управления фиксированы, заменено интегральным ограничением.

6. Задача (1), (2) существенно упрощается в том случае, когда краевые условия и ограничения на управления позволяют построить область  $W$  достижимых состояний преобразованной задачи и при этом доказать, что граница этой области является оптимальным решением преобразованной задачи, а значит, и исходной.

Некоторые из перечисленных целей могут быть достигнуты не в исходной задаче (1), (2), а в оценочной задаче с более широким множеством допустимых решений. Именно так использована замена переменных состояния в работах В.И. Гурмана [1] и его учеников, решивших с использованием такого подхода ряд важных прикладных задач.

Скорость изменения фазовой переменной  $y_j(x)$  в силу уравнений (2) равна

$$(3) \quad \dot{y}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} f_i(x, u, t).$$

Для достижения перечисленных выше целей на правые части этих уравнений нужно наложить некоторые условия, например условия постоянства знака или условия независимости правых частей от тех или иных переменных. Эти требования приводят к уравнениям в частных производных, решение которых и определяет искомую замену.

Нет набора правил, позволяющих найти нужную замену переменных, однако есть определенные приемы и навыки, облегчающие подбор зависимостей  $y(x)$ . Ниже эти приемы продемонстрированы на примере решения двух задач управления осцилляторами, а именно:

- задачи о торможении (раскачивании) маятника за счет изменения расстояния его центра тяжести от точки подвеса (задача о качелях);
- задачи извлечения энергии из системы квантовых осцилляторов за счет изменения параметра гамильтониана.

Обе задачи можно рассматривать как задачи об извлечении заданной энергии за минимальное время или в терминах «оптимизационной термодинамики» – о максимальной мощности [2]. Первая из них рассмотрена в [3], однако полученное там решение неверно. Вторая решена в [4] с использованием пакета Maple для частного вида граничных условий. Ниже показано, что переход к новым переменным состояниям существенно упрощает решение каждой из них.

## 2. Параметрическое торможение осциллятора

Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия для управляемой системы вида

$$(4) \quad \dot{q} = p, \quad \dot{p} = -uq, \quad 0 < u_1 \leq u \leq u_2.$$

Здесь  $q$  – отклонение маятника,  $p$  – его скорость, а коэффициент  $u$  соответствует квадрату частоты собственных колебаний, он зависит от массы и расстояния от точки

подвеса до центра тяжести. Последнее можно изменять, влияя на движение системы.

Задано начальное состояние системы  $p_0, q_0$ , значение полной энергии в конечный момент  $\tau$  и ограничения на управление

$$(5) \quad p^2(\tau) + u_0 q^2(\tau) = \bar{E}, \quad 0 < u_1 < u_0 < u_2.$$

Величина  $u_0$  фиксирована. Требуется найти такой закон управления  $u^*(t)$ , для которого

$$(6) \quad \tau \rightarrow \min_u.$$

Так как задано начальное состояние, то и начальное значение энергии  $E_0 = p_0^2 + u_0 q_0^2$  фиксировано, так что задача соответствует извлечению максимальной мощности  $N^* = \frac{E_0 - \bar{E}}{\tau^*}$ . На фазовой плоскости при постоянном значении  $u$  траектории образуют фазовый портрет типа центр (систему эллипсов), изменение фазового состояния во времени соответствует движению по часовой стрелке, при котором  $e(t) = p^2(t) + uq^2(t) = const$ .

Время явно не входит в правые части уравнений (4), однако знак правых частей меняется, и нельзя сократить размерность задачи за счет замены времени одной из переменных состояния.

Чтобы оценить трудоемкость решения, перепишем ограничение (5) в интегральной форме

$$(7) \quad \int_0^\tau \frac{d}{dt}(p^2 + u_0 q^2) dt = \int_0^\tau pq(u_0 - u) dt = \frac{E_0 - \bar{E}}{2},$$

без ограничения общности примем  $u_0 = 1$  и запишем условия оптимальности задачи (4), (6), (7) в форме принципа максимума [5], предполагая решение невырожденным ( $\psi_0 = -1$ ).

Функция Гамильтона

$$H = -1 + \psi_1 p - \psi_2 u q + \lambda p q (1 - u),$$

уравнения для сопряженных переменных

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q} = \psi_2 u - \lambda p (1 - u), \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p} = -\psi_1 - \lambda q (1 - u), \end{cases} \quad \psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0,$$

условие максимума для неособого решения

$$(9) \quad u^*(t) = \arg \max_u H = \begin{cases} u_1 & \text{при } q(\psi_2 + \lambda p) > 0, \\ u_2 & \text{при } q(\psi_2 + \lambda p) < 0, \end{cases}$$

$\lambda$  — скаляр, выбираемый по условию (7).

Равенству

$$q(\psi_2 + \lambda p) \equiv 0$$

на отрезке времени ненулевой меры соответствует особое решение.

Таким образом, для решения исходной задачи с использованием принципа максимума нужно решить систему уравнений (4), (5), (7), (8), замкнутых требованием (9), найти особое решение или доказать его отсутствие.

Покажем, как можно упростить эту задачу за счет перехода к новым переменным состояния. Введем новые переменные  $z(p, q)$  и  $e(p, q)$  так, чтобы в силу уравнений (4) скорость изменения одной из них не меняла знака. Это позволит уменьшить размерность задачи. Желательно также, чтобы в правые части уравнений (4) не входила одна из переменных, это позволит заменить условие в форме дифференциального уравнения интегральным равенством. Выберем новые переменные как

$$z = -\frac{p}{q}, \quad e = \ln(p^2 + q^2).$$

Скорость их изменения в силу уравнений (4):

$$(10) \quad \dot{z} = \frac{\dot{q}p - \dot{p}q}{q^2} = \frac{p^2 + uq^2}{q^2} = z^2 + u, \quad z_0 = -\frac{p_0}{q_0},$$

$$(11) \quad \dot{e} = \frac{2(p\dot{p} + q\dot{q})}{p^2 + q^2} = 2\frac{-pqu + qp}{q^2(1 + z^2)} = 2\frac{z(u - 1)}{1 + z^2},$$

$$e_0 = \ln(p_0^2 + q_0^2), \quad \bar{e} = \ln \bar{E}.$$

Правая часть уравнения (10) положительна для всех допустимых  $z, u$ , а значит, переменную  $z$  можно использовать в качестве аргумента вместо  $t$ , уменьшив размерность задачи на единицу. Переменная  $e$  не входит в правые части уравнений (10), (11), поэтому характер ее изменения никак не влияет на решение. Значения этой переменной заданы в начальный и в конечный моменты времени, что позволяет заменить уравнение (11) интегральным ограничением.

Из условий (10), (11) следует

$$dt = \frac{dz}{z^2 + u}, \quad de = \frac{2z(u - 1)dz}{(z^2 + u)(1 + z^2)},$$

так что исходная задача примет вид

$$\tau = \int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{dz}{z^2 + u} \rightarrow \min_{u, \bar{z}}$$

при условии

$$(12) \quad J = \int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{z(u - 1)dz}{(z^2 + u)(1 + z^2)} = \frac{1}{2}(\bar{e} - e_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{E}}{E_0} < 0$$

и записанных выше ограничениях на управление.

Таким образом, задача с двумя дифференциальными уравнениями оказалась преобразованной в существенно более простую задачу, содержащую вместо двух дифференциальных уравнений одно интегральное ограничение. Условия ее оптимальности [6] выражаются через функционал Лагранжа

$$(13) \quad S = \tau + \Lambda J$$

и его подынтегральное выражение

$$(14) \quad L = \frac{1}{z^2 + u} + \Lambda \frac{z(u - 1)}{(z^2 + u)(1 + z^2)}.$$

Докажем, что оптимальное решение задачи удовлетворяет следующим свойствам:

- а) оптимальное управление имеет переключаемый характер и линиями переключения на плоскости  $p, q$  являются ось ординат, где  $z$  испытывает скачок, и линия  $z_r = \frac{1}{\Lambda}$ , проходящая через второй и четвертый квадранты этой плоскости;*  
*б) особого решения не существует.*

Множитель Лагранжа  $\Lambda$  в выражениях (13), (14) неотрицателен. Действительно, если через  $\tau^*(J)$  обозначить зависимость минимальной продолжительности процесса от заданного значения функционала (12), то чем меньше  $J$ , тем больше  $\tau^*$ , а значит,

$$\Lambda = -\frac{d\tau^*}{dJ} \geq 0.$$

Оптимальное управление определено условием в форме требования минимума  $L$

$$u^*(z, \Lambda) = \arg \min_u L(z, u, \Lambda).$$

Найдем производную

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{1}{(z^2 + u)^2} (\Lambda z - 1).$$

Знак производной совпадает со знаком второго сомножителя, а именно:

$$(15) \quad \frac{\partial L}{\partial u} > 0 \quad \text{при} \quad z > \frac{1}{\Lambda},$$

$$(16) \quad \frac{\partial L}{\partial u} < 0 \quad \text{при} \quad z < \frac{1}{\Lambda}.$$

При выполнении условия (15)  $u^* = u_1$ , а если справедливо неравенство (16), то  $u^* = u_2$ . При этом величина  $z$  не может быть равна  $1/\Lambda$  на отрезке времени ненулевой меры, так как  $\dot{z} \neq 0$ .

Зоны, в которых оптимальное управление постоянно, показаны на рис.1. В работе [3] без всякого обоснования авторы полагали, что  $z_r = 0$  и линии переключения совпадают с осями координат. Как вытекает из доказанного выше утверждения, это предположение ошибочно.

Для того, чтобы найти  $\bar{z}$  и  $\Lambda$  (или, что то же самое,  $z_r$ ), имеем условие стационарности функционала  $S$  и условие (12).

Выясним, к чему приводит первое из них:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{z}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\bar{z}^2 + \bar{u}} = -\Lambda \frac{\bar{z}(\bar{u} - 1)}{(z^2 + \bar{u})(1 + \bar{z}^2)}.$$

Откуда

$$(17) \quad \frac{\bar{z}(\bar{u} - 1)}{1 + \bar{z}^2} = -\frac{1}{\Lambda} = -z_r.$$

Числитель в левой части этого равенства должен быть меньше нуля, так что для конечного момента времени

$$(18) \quad \bar{u}^* = \begin{cases} u_2 & \text{при } \bar{z} < 0 \text{ (нечетные квадранты плоскости } p, q), \\ u_1 & \text{при } \bar{z} > 0 \text{ (четные квадранты плоскости } p, q). \end{cases}$$

Переменная  $z$  испытывает скачки от  $z = \infty$  до  $z = -\infty$  при пересечении фазовой траектории с осью ординат ( $q = 0$ ). Оптимальное управление при этом переключается с  $u_1$  на  $u_2$ , а на линии с наклоном  $z_r$  оно испытывает обратный скачок. Будем для определенности считать  $z_0 < 0$  и называть каждый из участков решения, состоящий из двух интервалов постоянства управления, стадией. При этом всегда можно считать, что начальная точка находится на оси ординат плоскости  $pq$  в точке  $p^0 = \sqrt{E_0} = \sqrt{p_0^2 + u_2 q_0^2}$ , так как продолжительность  $\tau^*$  для начального состояния  $(p^0, 0)$  и для начального состояния  $p_0, q_0$  отличается на величину  $\Delta\tau$ , которую легко найти (см. ниже (24)), а оптимальные значения  $z_r$  и  $\bar{z}$  остаются теми же.

Оптимальное решение состоит из  $n$  предварительных и заключительной стадии. На каждой из предварительных стадий  $z$  меняется от  $-\infty$  до  $\infty$  с одним переключением. В зависимости от  $E_0$  и  $\bar{E}$  на заключительной стадии оптимальное управление может быть равно  $u_2$  или  $u_1$  (см. (18)).

На рис.2 оптимальный процесс показан в системе координат  $p^2, q^2$ . При переходе к этим координатам фазовые траектории, соответствующие  $u_1$  и  $u_2$ , превращаются в прямые, тангенс угла наклона которых к оси абсцисс равен  $-u_1$  и  $-u_2$  соответственно. Направлению движения вдоль траекторий, расположенных в первом и третьем квадрантах плоскости  $pq$ , соответствует движение по часовой стрелке, а вдоль траекторий второго и четвертого квадрантов — против часовой стрелки. На рис. 2 жирной линией выделены траектории, соответствующие заключительной стадии, при этом наклон линии переключения равен  $z_r^2$ .

Найдем, как связаны между собой величины  $z_r, \bar{z}$ , продолжительность и изменение энергии на заключительной и на предварительных стадиях.

Случаю, показанному на рис. 2а, на заключительной стадии соответствуют условия

$$(19) \quad \frac{1 + z_r^2}{u_2 + z_r^2} > \frac{\bar{E}}{E_n} \geq \frac{z_r^2 + u_1}{z_r^2 + u_2},$$

$$(20) \quad \bar{z}^2 = \frac{\frac{E_n}{\bar{E}}(z_r^2 + u_1) - u_1(z_r^2 + u_2)}{z_r^2 + u_2 - \frac{E_n}{\bar{E}}(z_r^2 + u_1)}.$$

Случаю, показанному на рис. 2б, соответствуют условия

$$(21) \quad 1 \geq \frac{\bar{E}}{E_n} \geq \frac{1 + z_r^2}{u_2 + z_r^2},$$

$$(22) \quad \bar{z}^2 = \frac{u_2 - E_n/\bar{E}}{E_n/\bar{E} - 1}.$$

Подсчитаем для каждой предварительной стадии продолжительность  $\tau_i(z_r)$  и степень уменьшения энергии  $E_i/E_{i-1}$ . Получим

$$\begin{aligned} \tau_i &= \int_{-\infty}^{z_r} \frac{dz}{z^2 + u_2} + \int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + u_1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{z_r}{\sqrt{u_2}} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{u_1}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{z_r}{\sqrt{u_1}} \right). \end{aligned}$$

Непосредственно из геометрических соображений в соответствии с рис. 2б получим для изменения энергии за одну стадию

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{z_r^2 + u_1}{z_r^2 + u_2} = M(z_r) < 1,$$

а

$$\frac{E_n}{E_0} = \left( \frac{z_r^2 + u_1}{z_r^2 + u_2} \right)^n = M^n(z_r).$$

Таким образом, общая продолжительность процесса равна

$$\begin{aligned} \tau &= n \left\{ \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{u_2}} \operatorname{arctg} \frac{z_r}{\sqrt{u_2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{u_1}} \operatorname{arctg} \frac{z_r}{\sqrt{u_1}} \right\} + \tau_{f_i}(z_r) \rightarrow \min_{n, z_r > 0}. \end{aligned}$$

Рассмотрим два варианта протекания заключительной стадии.

1. Процесс заканчивается в нечетных (первом и третьем) квадрантах плоскости  $p, q$ . В этом случае выполнены неравенства (21), а продолжительность  $\tau_f = \tau_{f1}$  вычисляются по формуле

$$(23) \quad \tau_{f1} = \frac{1}{\sqrt{u_2}} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \bar{z}/\sqrt{u_2} \right).$$

Задача сводится к определению значений переменных  $\bar{z} > 0, z_r > 0, n$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} z_r &= \frac{\bar{z}(1 - u_2)}{1 + \bar{z}^2}, \\ \bar{z}^2 &= \frac{u_2 \bar{E} - E_0 M^n(z_r)}{E_0 M^n(z_r) - \bar{E}}, \\ M^n(z_r) &\geq \frac{\bar{E}}{E_0} \geq M^n(z_r) \frac{1 + z_r^2}{u_2 + z_r^2}, \end{aligned}$$

первое из которых вытекает из (17), второе из (22), а третье из (21).

2. Процесс заканчивается в одном из четных квадрантов плоскости  $p, q$ . В этом случае система соотношений для  $\bar{z} < 0, z_r > 0$  и  $n$  примет вид

$$z_r = \frac{\bar{z}(1 - u_1)}{1 + \bar{z}^2},$$

$$\bar{z}^2 = \frac{E_0 M^n(z_r)(z_r^2 + u_1) - \bar{E} u_1(z_r^2 + u_2)}{\bar{E}(z_r^2 + u_2) - E_0 M^n(z_r)(z_r^2 + u_1)},$$

$$M^n(z_r) \frac{z_r^2 + 1}{z_r^2 + u_2} \geq \frac{\bar{E}}{E_0} \geq M^{n+1}(z_r).$$

Эти условия следуют из требований (17), (20) (19) соответственно. Продолжительность заключительной стадии вычисляется в этом случае как

$$\tau_{f2} = \frac{1}{\sqrt{u_2}} \operatorname{arctg} \frac{z_r}{\sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_1}} \left( \operatorname{arctg} \frac{\bar{z}}{\sqrt{u_1}} - \operatorname{arctg} \frac{z_r}{\sqrt{u_1}} \right).$$

Из двух вариантов оптимального процесса выбирают тот, для которого общая продолжительность меньше.

В том случае, когда начальное состояние не лежит на оси ординат, а находится на прямой с наклоном  $z_0 < 0$ , оптимальная продолжительность процесса уменьшается по сравнению с рассчитанной выше на величину

$$(24) \quad \Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{u_2}} (\operatorname{arctg} \frac{z_0}{\sqrt{u_2}} + \pi/2).$$

### 3. Извлечение энергии из системы квантовых осцилляторов

Эта задача оптимизационной квантовой термодинамики сформулирована и решена в [4] с использованием пакета аналитических преобразований МЭПЛ для частного случая задания начальных условий. Там же приведен физический смысл основных переменных и наложенных на них условий. Преобразование пространства состояний упрощает задачу и позволяет получить аналитическое решение.

*Исходная постановка:* За минимальное время перевести систему, характеризующуюся уравнениями

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{E} = u(E - L), \\ \dot{L} = -u(E - L) - 2\omega C, \\ \dot{C} = uC + 2\omega L, \\ \dot{\omega} = u\omega, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ E(\tau) = \bar{E} \end{array} \right.$$

из заданного начального в заданное конечное состояние.

Здесь  $E, L, C, \omega$  — переменные состояния, имеющие смысл усредненных по ансамблю гамильтониана, лагранжиана, корреляции момента-отклонения и частоты колебаний осцилляторов, при этом  $\bar{E} = E(\tau) < E_0$ .



Переменные  $E, L, C$  зависят от частоты колебаний  $\omega$ , отклонений от состояния равновесия  $q_i$  и скоростей  $p_i$  осцилляторов как

$$\begin{cases} P^2 = \sum_i p_i^2; & Q^2 = \sum_i q_i^2, \\ E = P^2 + 0,5\omega^2 Q^2, \\ L = P^2 - 0,5\omega^2 Q^2, \\ C = 0,5\omega(QP + PQ). \end{cases}$$

Так как  $L$  и  $C$  связаны с энергией колебаний осцилляторов, а  $E$  – с энергией хаотического движения молекул, то уменьшению  $E$  соответствует извлечение энергии за счет охлаждения тела.

Система (25) имеет первый интеграл  $X$ , не изменяющийся во времени вдоль ее траекторий:

$$(26) \quad X = \frac{E^2 - (L^2 + C^2)}{\omega^2} = \text{Const} = \frac{E_0^2 - (L_0^2 + C_0^2)}{\omega_0^2}.$$

Нетрудно проверить непосредственным дифференцированием, что скорость изменения этой функции в силу уравнений (25) равна нулю. Физически величина  $X$  определяет фон Неймановскую энтропию  $S_N$ , которая монотонно от нее зависит:

$$S_N = \ln \left( \sqrt{X - \frac{1}{4}} \right) + \sqrt{X} \arg \sinh \left( \frac{\sqrt{X}}{X - \frac{1}{4}} \right).$$

Постоянство  $X$  говорит о том, что процесс извлечения из системы энергии за счет изменения частоты колебаний является адиабатическим обратимым. Существование минимального времени, соответствующего обратимому переходу с одного на другой энергетический уровень, равносильно утверждению о том, что за время, меньшее этого минимума, данная энергия может быть извлечена только в необратимом процессе, сопровождающемся так называемым „квантовым трением“.

Отметим, что в обратимой термодинамике адиабатическому процессу изменения температуры газа соответствует изменение его объема и давления либо в условиях полной тепловой изоляции, либо мгновенно, что так же обеспечивает отсутствие теплообмена с окружением.

Пусть начальные значения всех переменных состояния, а значит и величина  $X$ , заданы. Исходная задача содержит неограниченное линейно входящее управление  $u$ , а ее переменные состояния связаны друг с другом условием (26), так что для решения не может быть непосредственно использован принцип максимума.

Чтобы исключить зависимость скоростей фазовых переменных от неограниченного управления  $u$ , трансформируем пространство состояний, перейдя к новым переменным

$$(27) \quad z_1 = E + L, \quad z_2 = \frac{E - L}{\omega^2}, \quad z_3 = \frac{C}{\omega}.$$

Выбор этих переменных сделан таким образом, чтобы в выражениях вида (3) сумма слагаемых, зависящих от  $u$ , в силу уравнений (25) обращалась в ноль.

Исходные переменные и значение  $X$  связаны с переменными состояниями в преобразованной задаче как

$$(28) \quad \begin{cases} C = \omega z_3, & E = 0,5(z_1 + \omega^2 z_2), \\ L = 0,5(z_1 - \omega^2 z_2), & X = z_1 z_2 - z_3^2. \end{cases}$$

Так как значение  $X$  задано, то только две переменные являются независимыми.

Обозначим через  $S$  начальное состояние системы на плоскости  $z_1, z_2$ . Оно заведомо лежит выше гиперболы  $z_1 z_2 = X$ . Исключим переменную  $z_3$ , выразив ее через  $X, z_1, z_2$ , и перепишем уравнения для  $z_1$  и  $z_2$  в силу системы (25) с учетом (27), (28). Получим

$$(29) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = -2\omega^2 z_3 = \mp 2\omega^2 \sqrt{z_1 z_2 - X}, \\ \dot{z}_2 = 2z_3 = \pm 2\sqrt{z_1 z_2 - X}. \end{cases}$$

Так как  $u$  не входит в эти уравнения, то будем считать управлением  $\omega^2 > 0$ , сократив число переменных состояния до двух, а число управлений до одного.

Время явно не входит в правые части уравнений (29), что позволяет упростить систему, приняв в качестве аргумента переменную  $z_2$ . При этом вдоль траекторий системы

$$(30) \quad \frac{dz_1}{dz_2} = -\omega^2.$$

При постоянном значении  $\omega$  траектории на плоскости  $z_1, z_2$  представляют собой прямые линии с отрицательным наклоном.

Изменения частоты  $\omega$  могут происходить мгновенно, поэтому минимальная продолжительность процесса от значения начальной частоты не зависит. Будем считать, что начальная частота равна  $\omega_0$ , но ее можно мгновенно изменить до  $\omega_1$  с уменьшением энергии. То же касается и конечного значения частоты, здесь минимуму энергии всегда соответствует частота, равная  $\omega_1$ .

Начальные условия для переменных  $z_1$  и  $z_2$  заданы и равны

$$z_{10} = E_0 + L_0, \quad z_{20} = \frac{E_0 - L_0}{\omega_0^2}.$$

Конечные значения удовлетворяют равенству

$$\bar{z}_1 + \omega_1^2 \bar{z}_2 = 2\bar{E}.$$

Величина  $\bar{E}$  ограничена снизу в силу неравенства  $z_1 z_2 \geq X$ . Нижний предел достигается в точке касания гиперболы  $z_1 z_2 = X$  и прямой, определяющейся равенством (3). Для любого фиксированного значения  $z_3$ , а значит произведения  $z_1 z_2$ , точки, соответствующие минимуму энергии, лежат на прямой  $z_1 = \omega_1^2 z_2$ . Нижняя граница достижимой энергии достигается при  $z_3 = 0$  и равна

$$\bar{E}_{min} = \omega_1 \sqrt{X}.$$

*Значения энергии, меньшие  $\bar{E}_{min}$ , из любого начального состояния недостижимы. Т.е. существует минимальная температура, которая может быть достигнута в обратимом процессе.*

Продолжительность перехода из начального в конечное состояние

$$(31) \quad \tau = \int_{z_{20}}^{\bar{z}_2} \left| \frac{dz_2}{2\sqrt{z_1 z_2 - X}} \right| \rightarrow \min.$$

Ее можно вычислить, задав траекторию  $z_1(z_2)$ .

Запишем условия принципа максимума для преобразованной задачи (31),(30),(3) в предположении невырожденности решения ( $\psi_0 = -1$ ):

функция Гамильтона

$$H = -\frac{1}{2\sqrt{z_1 z_2 - X}} - \psi(z_2)\omega^2.$$

условия оптимальности

$$\frac{d\psi}{dz_2} = -\frac{dH}{dz_1} = -\frac{z_2}{4(z_1 z_2 - X)^{3/2}} < 0,$$

$$\omega^{2*}(z_2) = \arg \max H = \begin{cases} \omega_2^2 & \text{при } \psi < 0, \\ \omega_1^2 & \text{при } \psi > 0. \end{cases}$$

Так как функция  $\psi(z_2)$  монотонно уменьшается и в силу условия, наложенного на конечное значение  $z_1$ , не обращается в нуль в конце процесса, то в ходе оптимального процесса частота может измениться только один раз с  $\omega_1$  на  $\omega_2$  для любой конечной энергии, меньшей  $E_0$ . Обозначим точку переключения через  $R$ .

Таким образом, доказано, что на оптимальном решении зависимость  $z_1$  от  $z_2$  линейна до точки переключения  $R$  с минимальным, а после точки переключения с максимальным наклоном. Для каждого из участков интеграл (31) может быть вычислен (представляет собой  $\arcsin$  некоторого выражения).

На рис.3 через  $S$  и  $F$  обозначены начальное и конечное состояния. Множества, достижимые из начального и обеспечивающие попадание в конечное состояние, ограничены прямыми, выходящими из начального и конечного состояний с наклонами, соответствующими крайним значениям частоты. Оптимальному процессу соответствует траектория, проходящая по границам множеств достижимости либо через точку переключения  $R$ , показанную на рисунке, либо через точку переключения, находящуюся в противоположной вершине параллелограмма. В точке  $F$  частота мгновенно меняется до  $\omega_1$ . Касательная, проведенная к гиперболе  $z_1 z_2 = X$  и имеющая наклон, соответствующий  $\omega_1$ , отсекает на оси ординат отрезок, равный удвоенному минимуму достижимой энергии.

Координаты точки переключения  $R$  определены уравнениями

$$z_{1R} = z_{10} - \omega_1^2(z_{2R} - z_{20}), \quad z_{1R} = \bar{z}_1 + \omega_2^2(\bar{z}_2 - z_{2R}).$$

Получим для координаты  $z_{2R}$ :

$$z_{2R}(\bar{z}_2) = \frac{\omega_2^2 \bar{z}_2 - \omega_1^2 z_{20} - z_{10} + \bar{z}_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \bar{z}_2 - \frac{2(E_0 - \bar{E})}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Минимальную продолжительность  $\tau$  охлаждения тела до  $E = \bar{E}$  найдем после подстановки оптимального решения в (31):

$$\tau^* = 0,5 \left[ \int_{z_{20}}^{z_{2R}(\bar{z}_2)} \frac{dz_2}{\sqrt{(2E_0 - \omega_1^2 z_2)z_2 - X}} + \int_{z_{2R}}^{\bar{z}_2} \frac{dz_2}{\sqrt{(2\bar{E} - \omega_2^2 z_2)z_2 - X}} \right].$$

Значение  $\tau^*$  зависит от  $\bar{z}_2$  и заданных значений энергии  $E$  в начале и в конце процесса.

Из полученных соотношений вытекают как частный случай результаты примера, рассмотренного в [4], где начальное состояние  $S$ , как и конечное  $F$ , находятся на гиперболе  $z_1 z_2 = z_{10} z_{20} = X$ .

#### 4. Заключение

Реальные задачи оптимального управления редко удается решить, не учитывая специфические особенности каждой из них. Возможность такого учета дает замена переменных состояния, позволяющая в ряде случаев существенно упростить решение. Задачи извлечения энергии из одиночного осциллятора и системы осцилляторов посредством параметрического управления демонстрируют возможности перехода к преобразованной задаче, которая оказывается существенно проще исходной. С использованием такой замены было найдено решение задач об оптимальном торможении (раскачивании) качелей за счет изменения длины подвеса и об извлечении энергии из системы квантовых осцилляторов. В последнем случае доказано, что в квантовой термодинамике обратимый процесс извлечения энергии за счет управления частотой колебаний может быть реализован, если его продолжительность не меньше, чем полученное  $\tau^*$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурман В.И.*, Принцип расширения в экстремальных задачах. М.: Физматлит, 1997.
2. *Цирлин А.М.*, Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. М.: Наука, 2003.
3. *Piccoli B., Kulkarni J.*, Pumping a Swing by Standing and Squatting// IEEE Contr. Syst. Mag. 2005. No. 8. P.48-56.
4. *Salamon P., Hoffman K-H., Rezek Yair and al.* Maximum work in minimum time from a conservative quantum sustem.// Phys. Chem., Chem.Phys. 2009. No. 11. P. 1027-1032.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз. 1961.
6. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Адреса электронной почты авторов

А.М. Цирлин, tsirlin@sarc.botik.ru,

П. Саламон, salamon@math.sdsu.edu,

К-Х. Хоффман, hoffmann@physik.tu-chemnitz.

#### ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1 Линии переключения управления на плоскости  $p, q$

Рис.2 Характер оптимальной траектории на заключительной стадии для случаев, когда она содержит одно переключение управления ( $a$ ) или не содержит переключений ( $b$ )

Рис.3 Область достижимых значений переменных состояния и оптимальное решение

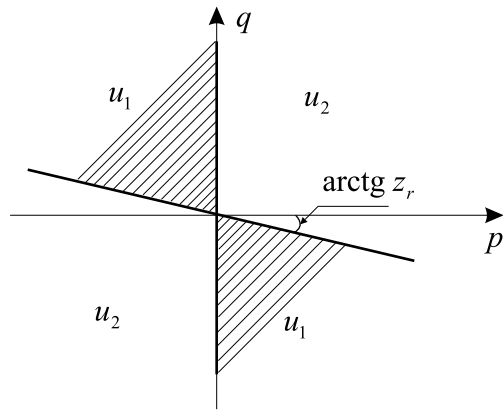


Рис. 1. Линии переключения управления на плоскости  $p, q$

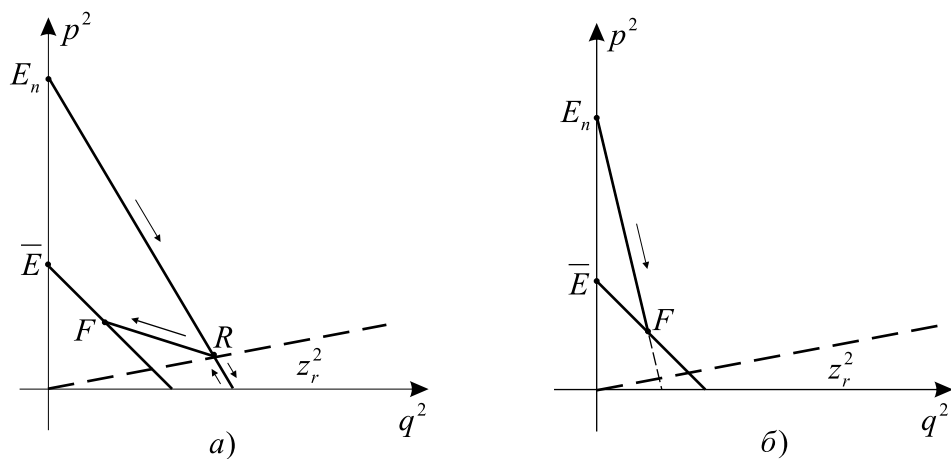


Рис. 2. Характер оптимальной траектории на заключительной стадии для случаев, когда она содержит одно переключение управления (а) или не содержит переключений(б)

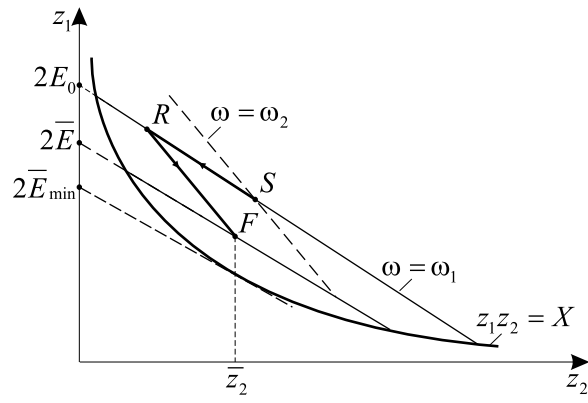


Рис. 3. Область достижимых значений переменных состояния и оптимальное решение