УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ
им. А.К.Айламазяна РАН

На правах рукописи

Сачкова Елена Федоровна

Методы, алгоритмы и программы приближенного решения задачи управления

05.13.11 — Математическое и программное обеспечение
вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

05.13.01 — Системный анализ, управление
и обработка информации (технические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Переславль-Залесский — 2009 г.

Работа выполнена в Исследовательском центре процессов управления Учреждения Российской академии наук Института программных систем им. А.К.Айламазяна РАН

Научный руководитель

доктор технических наук,
профессор Владимир Иосифович Гурман

Официальные оппоненты:

доктор технических наук,
профессор Анатолий Михайлович Цирлин;

кандидат физико-математических наук
Дмитрий Юрьевич Карамзин

Ведущая организация:
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Владимирский государственный университет»

Защита диссертации состоится « 18 » декабря 2009 года в 14 час. на заседании Диссертационного совета ДМ 002.084.01 при ИПС им. А.К.Айламазяна РАН по адресу: 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра I, д.4а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПС им. А.К.Айламазяна РАН

Автореферат разослан « 17 » ноября 2009 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета ДМ 002.084.01
кандидат технических наук С.М. Пономарева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Современные программные комплексы управления техническими объектами сталкиваются с проблемами управления неголономными системами. Такие системы традиционно представляют трудности для теоретического анализа в механике, а их широкое использование в современной робототехнике и инженерии (мобильные роботы, роботы-манипуляторы) делают весьма актуальной разработку новых математических, алгоритмических и программных средств для управления неголономными системами.

Для неголономных систем двухточечная граничная задача управления оказывается весьма нетривиальной, и ее решению (точному либо приближенному) посвящен целый ряд работ в теории управления и роботике. Один из первых методов решения задачи управления для таких систем был предложен Дж. Лаферьером и Х. Суссманом: для систем простой алгебраической структуры (нильпотентных систем) ими был разработан подход к получению точных решений задачи управления, а для систем общего вида они предложили итерационный метод приближенного решения задачи управления на основе замены системы ее нильпотентной аппроксимацией. Сходимость этого итерационного метода исследовал Ф. Жан. Понятие нильпотентной аппроксимации было разработано независимо в геометрической теории управления А. А. Аграчевым и А. В. Сарычевым, и Х. Хермсом, а также в теории уравнений с частными производными и в анализе. Ввиду важности нильпотентной аппроксимации, было разработано несколько методов ее вычисления; наиболее простым и эффективным считается вычислительный алгоритм нильпотентизации, предложенный А. Беллаишем.

Методы решения двухточечной граничной задачи управления были разработаны для некоторых специальных классов систем: для систем в цепной форме (Р. Мюррей, С. Састри), для дифференциально плоских систем (М. Флисс), для кинематических моделей мобильного робота (Х. Суссман, Ж.-П. Ломонд).

В нелинейной теории управления и робототехнике разработаны также методы управления неголономными мобильными роботами на основе использования обратной связи (для учета возможных помех и неточностей моделирования), и вероятностные методы (во избежание большой сложности методов полного планирования движения).

В силу высокой сложности двухточечной граничной задачи управления, найти ее точное решение для систем общего вида не представляется возможным. Приближенное решение этой задачи обычно представляется в виде вычислительного алгоритма, требующего реализации с помощью программных средств. За последние десятилетия разработан ряд комплексов для решения задач оптимального управления, которые могут быть применены к двухточечной задаче управления. Большой вклад в разработку алгоритмов и программных комплексов для решения задач оптимального управления внесли отечественные ученые: Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М., Васильев Ф.П., Евтушенко Ю.Г., Тятюшкин А.И. (ПК КОНУС), Срочко В.А., Горнов А.Ю. (ПК OPTCON), Жулин С.С. (ПК OPTIMUS). Рассматриваемые в данной диссертации линейные по управлению системы обладают специфическими свойствами неизотропности, связанными с неголономностью: такие системы могут быстро перемещаться в одних направлениях в пространстве состояний, но гораздо медленнее в других направлениях. Поэтому алгоритмы и программные средства общего назначения не всегда успешно решают задачу управления для таких систем. Данная работа нацелена на устранение этого недостатка, что определяет ее актуальность.

Цель работы и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для решения двухточечной граничной задачи управления для нелинейных неголономных систем с линейными управлениями. Разрабатываемый программный комплекс должен обеспечивать не только автоматический, но и интерактивный режим работы с использованием экспертных знаний о предметной области — теории управления.

Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) Разработка математических методов точного решения двухточечной граничной задачи управления для трехмерных нильпотентных систем с двумерным линейным управлением.

2) Разработка алгоритмов (в том числе параллельных) приближенного решения задачи управления для трехмерных неголономных нелинейных систем с двумерным линейным управлением.

3) Создание программного комплекса для приближенного решения задачи управления для указанного класса систем.

Общие методы исследования. Для решения поставленных задач использовались математическая теория управления, дифференциальная геометрия, численный анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений, теория алгоритмов, методы программирования в системах компьютерной математики.

Научная новизна. В задаче оптимального управления неголономным интегратором Брокетта с интегральным критерием качества впервые получено описание оптимального синтеза и функции цены.

Разработан новый метод построения комбинированного управления для решения задачи управления неголономным интегратором Брокетта.

Разработаны новые многометодные алгоритмы (включая параллельные) для вычисления приближенного решения двухточечной граничной задачи управления для нелинейных неголономных систем с трехмерным состоянием и двумерным линейным управлением.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные теоретические результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях методов управления неголономными системами. Разработанный программный комплекс NilpControl, в совокупности с рекомендациями по его использованию, может применяться для исследования управляемых систем в механике, робототехнике, инженерных приложениях, а также при обучении студентов новым методам теории управления.

Достоверность результатов подтверждается корректным использованием математической теории управления. Основным понятиям, используемым в работе, даны точные определения. Все утверждения снабжены строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и совещаниях:

1) Международная конференция «Программные системы: теория и приложения», ИПС РАН, 2006 г.

2) Международная конференция «Программные системы: теория и приложения», ИПС имени А.К. Айламазяна РАН, 2009 г.

3) Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложения», Москва, МГУ им. Ломоносова, 31.03–02.04, 2009 г.

4) Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 02.07–07.07, 2009 г.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах: исследовательского центра процессов управления ИПС имени А.К. Айламазяна РАН, исследовательского центра системного анализа ИПС имени А.К. Айламазяна РАН, на семинаре «Проблемы теории управления» кафедры оптимального управления ВМК МГУ.

Научные исследования по теме диссертации были поддержаны следующими грантами: РФФИ - 02-01-00506-а («Оптимальный синтез, конструктивная управляемость, и стабилизация нелинейных неголономных систем управления»), РФФИ - 05-01-00703-а («Исследование задач оптимального управления субримановой геометрии методами геометрической теории управления»). Параллельные алгоритмы, разработанные в диссертации, были использованы в Научно-технической программе Союзного государства «Развитие и внедрение в государствах-участниках Союзного государства наукоемких компьютерных технологий на базе мультипроцессорных вычислительных систем» (Шифр «ТРИАДА»).

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приводится в конце автореферата. Работы [1]–[4] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из шести глав (первая из них является введением, а последняя — заключением), которые разбиты на 19 пунктов. Основной текст диссертации составляет 139 страниц. Библиография включает 91 наименование. Приложение к диссертации содержит фрагменты листингов программ комплекса NilpControl на языке системы компьютерной математики Maple.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая, вводная, глава диссертации посвящена общим определениям, постановке задачи управления, истории рассматриваемых вопросов, а также краткому изложению результатов работы. В диссертации рассматривается важный в теоретическом плане и для приложений класс управляемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

где X_1, X_2 — гладкие векторные поля в $\mathbb{R}^3$, такие, что поля $X_1(x)$, $X_2(x)$, $[X_1, X_2](x)$ линейно независимы для всех $x \in \mathbb{R}^3$. [1] Для систем (1) исследуется точное решение двухточечной граничной задачи управления:

$$x^0,\, x^1 \in \mathbb{R}^3, \quad T > 0, \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1, \tag{2}$$

и ее приближенное решение:

$$x^0,\, x^1 \in \mathbb{R}^3, \quad T > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad x(0) = x^0, \quad |x(T) - x^1| < \varepsilon. \tag{3}$$

В работе существенно различаются следующие два случая:

- расстояние между граничными точками x^0, x^1 достаточно мало, тогда задача управления называется локальной;
- расстояние между граничными точками x^0, x^1 произвольно, тогда задача управления называется глобальной.

Глава 2 диссертации посвящена исследованию системы

$$\begin{gathered} \dot z_1 = u_1, \quad \dot z_2 = u_2, \quad \dot z_3 = (u_2 z_1 - u_1 z_2)/2, \\ z = (z_1,\ z_2,\ z_3) \in \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1,\ u_2) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{4}$$

и решению для нее задачи управления вида (2):

$$z(0) = z^0 = (z_1^0,\ z_2^0,\ z_3^0), \qquad z(T) = 0. \tag{5}$$

Важность системы (4) обусловлена тем, что она доставляет фундаментальную локальную аппроксимацию (нильпотентную аппроксимацию) системы общего вида (1). Система (4) известна как неголономный интегратор Брокетта. Точные решения задачи управления (5) для этой системы получены в нескольких классах управлений.

В параграфе 2.1 рассматриваются простейшие классы управлений, а именно: кусочно-постоянные управления (с одним переключением) и тригонометрические управления. В этих классах с помощью прямого аналитического метода найдены однопараметрические семейства программных управлений.

В параграфе 2.2 рассматривается задача управления (4), (5) в классе оптимальных управлений в смысле минимума функционала

$$L = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min. \tag{6}$$

[1] Через $[X_1, X_2] = \dfrac{\partial X_2}{\partial x} X_1 - \dfrac{\partial X_1}{\partial x} X_2$ обозначается коммутатор векторных полей X_1, X_2.

Получены явные формулы для оптимальных процессов, а также оптимальный синтез. Оптимальные траектории в задаче (4), (6) с граничными условиями

$$z(0) = 0, \qquad z(T) = z^0, \tag{7}$$

являются спиралями (с параметрами $\rho,\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} &z_1(t) = \rho(\sin(ct + b) - \sin b), \\ &z_2(t) = \rho(\cos b - \cos(ct + b)), \qquad z_3(t) = \rho^2(ct - \sin ct)/2, \end{aligned} \tag{8}$$

или лучами (с параметрами $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$)

$$z_1(t) = at\cos b, \quad z_2(t) = at\sin b, \quad z_3(t) = 0. \tag{9}$$

Для оптимальной траектории (8) с граничными условиями (7) параметры $\rho = \rho(z^0)$, $c = c(z^0)$, $b = b(z^0)$ вычисляются по следующим формулам[2]

$$\rho(z) = \begin{cases} \pm\dfrac{r}{2\sin(\bar t/2)}, & z_3 \neq 0,\ r \neq 0, \\ \pm\sqrt{|z_3|/\pi}, & z_3 \neq 0,\ r = 0, \end{cases} \qquad c(z) = \pm \bar t/T,$$

$$b(z) = \begin{cases} \varphi \mp \bar t/2, & z_3 \neq 0, \\ \varphi, & z_3 = 0,\ r \neq 0, \end{cases} \qquad \pm = \operatorname{sign} z_3.$$

Используемая выше функция $\bar t = \bar t(z)$ определяется следующим образом:

1) если $z_3 \neq 0$, $r \neq 0$, то $\bar t$ — единственный корень уравнения $(\bar t - \sin \bar t)\, r^2 = 8|z_3|\sin^2(\bar t/2)$, $\bar t \in (0, 2\pi)$,

2) если $z_3 \neq 0$, $r = 0$, то $\bar t = 2\pi$,

3) если $z_3 = 0$, $r \neq 0$, то $\bar t = 0$.

Значения параметров $a = a(z^0)$, $b = b(z^0)$ для оптимальной траектории (9) с граничными условиями (7) вычисляются по формулам $a(z) = r/T$, $b(z) = \varphi$.

Для задания оптимальных программных управлений в задаче (4)–(6) вводятся следующие функции:

$$\psi(z) = \varphi \pm \bar t/2, \qquad \pm = \operatorname{sign} z_3, \qquad d(z) = \begin{cases} |\rho|\bar t, & z_3 \neq 0, \\ r, & z_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Основные результаты параграфа 2.2 приведены в следующей теореме, дающей полное решение задачи (4)–(6).

[2]здесь $r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ — полярный радиус, φ — полярный угол точки (z_1, z_2)

Теорема 1. 1) *Заданная формулой* (10) *функция* $d(z)$ *есть функция цены в задаче оптимального управления* (4)–(6).

2) *Программные управления, дающие решение задачи* (4)–(6)*, определяются формулами:*

$$u_1(t) = \begin{cases} -d/T \cos(\psi - ct), & z_3^0 \neq 0, \\ -d/T \cos\psi, & z_3^0 = 0, \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} -d/T \sin(\psi - ct), & z_3^0 \neq 0, \\ -d/T \sin\psi, & z_3^0 = 0, \end{cases}$$

где $d = d(z^0)$, $c = c(z^0)$, $\psi = \psi(z^0)$.

3) *Оптимальный синтез в задаче* (4)–(6) *задается формулами* $u_1(z) = -\cos\psi(z)$, $u_2(z) = -\sin\psi(z)$.

В параграфе 2.3 разрабатывается метод комбинированного управления, суть которого заключается в последовательном перемещении системы (4) сначала на плоскость $z_3 = 0$, затем по радиус-отрезку в начало координат. Построение соответствующих комбинированных программных управлений сводится к выбору кривых $r(t)$ на плоскости z_1z_2, выражающих геометрическое свойство системы (4): если $z(t)$ — траектория этой системы, то приращение третьей компоненты $z_3(t)$ равно алгебраической площади сектора, который описывает радиус-вектор $r(t) = (z_1(t),\, z_2(t))$. Одним из способов построения плоских кривых с нужными свойствами является отыскание траекторий подходящих векторных полей на плоскости. Доказана следующая теорема, дающая достаточные условия для векторных полей на плоскости, траектории которых могут охватывать секториальные площади, равные произвольным наперед заданным значениям.

Теорема 2. *Пусть* $\bar{v}(z) = (v_1(z_1, z_2), v_2(z_1, z_2))$ — *гладкое векторное поле на плоскости* z_1z_2*, удовлетворяющее условиям:*

1) *поле* $\bar{v}$ *полно, т.е. любая траектория* $\bar{z}(t) = (z_1(t), z_2(t))$ *автономного дифференциального уравнения*

$$\dot{z}_1 = v_1(z_1, z_2), \qquad \dot{z}_2 = v_2(z_1, z_2) \tag{11}$$

продолжается на всю ось $t \in (-\infty, +\infty)$;

2) $\det(\bar{v}(\bar{z}), \bar{z}) \neq 0$ *для всех* $\bar{z} = (z_1, z_2) \neq 0$;

3) *Интегралы* $\int_0^{+\infty}(z_1\dot z_2 - z_2\dot z_1)dt$, $\int_{-\infty}^0(z_1\dot z_2 - z_2\dot z_1)dt$ *расходятся на любой траектории* $(z_1(t), z_2(t))$ *уравнения* (11).

Тогда для любого начального состояния $z^0 \in \mathbb{R}^3$, $(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2 \neq 0$, *существует единственный момент времени* $t = t_p > 0$ *такой, что следующие программные управления являются решением задачи управления* (4), (5)*:*

$$u_1(t) = \begin{cases} \pm v_1(\bar z(t)), & t \in [0, t_p], \\ -\cos\varphi_p, & t \in (t_p, T], \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} \pm v_2(\bar z(t)), & t \in [0, t_p], \\ -\sin\varphi_p, & t \in (t_p, T], \end{cases}$$

где $\pm = \operatorname{sign}(z_3^0\,\delta_{\bar v}^0)$*;* $\delta_{\bar v}^0 = \begin{vmatrix} v_1^0 & z_1^0 \\ v_2^0 & z_2^0 \end{vmatrix}$, $v_1^0 = v_1(\bar z^0)$, $v_2^0 = v_2(\bar z^0)$*;* $\bar z(t)$ *— решение задачи Коши для системы* (11) *с начальным условием* $\bar z(0) = \bar z^0$*;* (φ_p, r_p) *— полярные координаты точки* $\bar z^p = \bar z(\pm t_p)$*;* $T = t_p + r_p$ *— общее время движения.*

На основе теоремы 2 построены семейства допустимых процессов и законов управления, использующие простейшие векторные поля на плоскости (постоянные, линейные типа центр и фокус). Все эти управления имеют одно переключение; на первом промежутке времени они выражаются через тригонометрические функции и экспоненту, а на втором временном промежутке постоянны.

В параграфе 2.4 представлены основные результаты главы 2:

1) создание библиотеки программных управлений NilpLib для задачи управления (4), (5);

2) метод комбинированного управления и создание алгоритмов вычисления комбинированных управлений для задачи (4), (5).

Библиотека управлений NilpLib для системы (4) представляет собой набор явных формул для программных управлений, являющихся точными решениями двухточечной граничной задачи управления (4), (5) с фиксированным терминальным временем T в четырех классах управлений:

1) кусочно-постоянные PieceConst,

2) тригонометрические Trig,

3) оптимальные (в смысле минимума функционала (6)) Optimal,

4) комбинированные Combine.

Метод комбинированного управления и прямой аналитический метод дают возможность расширять библиотеку NilpLib.

В отличие от однозначно определенных оптимальных управлений, в классах управлений PieceConst, Trig, Combine построены параметрические семейства программных управлений, доставляющих решение задачи (4), (5). Возможность настройки этих параметров для улучшения качества управления (например, уменьшения количества переключений или амплитуды) используется в описанном в главе 4 программном комплексе NilpControl.

В **главе 3** приближенное решение задачи управления (3) для системы (1) получено в виде вычислительного алгоритма, построенного на основе теоретической схемы, предложенной Дж. Лаферьером и Х. Суссманом.

Основные результаты главы 3:

1) найдены явные формулы для вычисления коэффициентов канонической нильпотентной аппроксимации исходной системы в терминальной точке (см. ниже п. 1), 2) теоремы 3);

2) доказана глобальная эквивалентность всех канонических нильпотентных аппроксимаций систем вида (1); найдены явные формулы преобразования $z \mapsto G(z)$, переводящего произвольную каноническую нильпотентную аппроксимацию (12) к системе (4) (см. ниже п. 3) теоремы 3).

3) посредством приведенного на стр. 12, 13 автореферата вычислительного алгоритма конструктивно найдено приближенное решение локальной задачи управления (1), (3).

Теорема 3. 1) *Каноническая нильпотентная аппроксимация системы* (1) *имеет следующую треугольную форму:*

$$\begin{aligned} &\dot z_1 = u_1, \quad \dot z_2 = u_2, \\ &\dot z_3 = u_1(c_{11}z_1 + c_{12}z_2) + u_2(c_{21}z_1 + c_{22}z_2), \qquad c_{12} \neq c_{21}. \end{aligned} \tag{12}$$

2) *Коэффициенты* c_{ij} *нильпотентной системы* (12) *вычисляются по формулам:*

$$\begin{aligned} &c_{ij} = \langle \bar P_i, \bar g_j \rangle, \qquad i,j = 1,2, \\ &\bar P_j = X_j(x^1), \qquad \bar g_j = \left(\langle \bar l_1, \bar P_j \rangle, \langle \bar l_2, \bar P_j \rangle, \langle \bar l_3, \bar P_j \rangle \right), \qquad j = 1,2, \\ &\bar l_k = \frac{\partial \bar f_3}{\partial x_k}(x^1) = \left(\frac{\partial f_{31}}{\partial x_k}(x^1), \frac{\partial f_{32}}{\partial x_k}(x^1), \frac{\partial f_{33}}{\partial x_k}(x^1) \right), \qquad k = 1,2,3, \end{aligned} \tag{13}$$

$\bar f_3(x)$ — третья строка матрицы $F^{-1}(x)$, а 3×3 матрица $F(x)$ составлена по столбцам из векторов X_1, X_2 правой части системы (1) и их коммутатора $[X_1, X_2]$;

3) *произвольная каноническая нильпотентная аппроксимация (12) преобразуется в систему (4) при замене переменных*

$$G(z) = \left(z_1,\ z_2,\ \frac{1}{c_{21}-c_{12}}\left(z_3 - \frac{c_{21}+c_{12}}{2}z_1z_2 - \frac{c_{11}}{2}z_1^2 - \frac{c_{22}}{2}z_2^2\right)\right). \tag{14}$$

Алгоритм приближенного решения локальной задачи управления (1), (3)

Входные данные: векторные поля $X_1(x)$, $X_2(x)$; точки $x^0,\ x^1 \in \mathbb{R}^3$; терминальное время $T > 0$; точность $\varepsilon > 0$; класс управлений $\mathrm{nc} \in \{\mathrm{PieceConst}, \mathrm{Trig}, \mathrm{Optimal}, \mathrm{Combine}\}$; параметры управлений par.

Выполняемые действия:

1. **Проверка условия достижения цели:** если $|x^0 - x^1| < \varepsilon$, то цель достигнута, алгоритм выдает управление $u(t) \equiv 0$ и останавливается. Далее предполагается, что $|x^0 - x^1| \geqslant \varepsilon$.

2. **Вычисление нильпотентной аппроксимации** исходной системы (1) в окрестности терминальной точки x^1: вычисляются коммутатор $X_3 = [X_1,\ X_2]$, матрица $F(x) = (X_1, X_2, X_3)(x)$, коэффициенты c_{ij}, $i,\ j = 1,\ 2$ по формуле (13).

3. **Итерационный процесс.** В качестве начального приближения на первой итерации берется $q^0 = x^0$. Пусть q^{n-1} — приближение к терминальной точке x^1, полученное на $(n-1)$-ой итерации.

   (a) Вычисляется представление начальной точки q^{n-1} в специальных координатах, центрированных в терминальной точке x^1:
   $$z^{n-1} = F^{-1}(q^{n-1})(q^{n-1} - x^1). \tag{15}$$

   (b) Вычисляются координаты y^{n-1} начальной точки q^{n-1} в системе координат (y_1, y_2, y_3) системы (4) по правилу $y^{n-1} = G(c_{ij}, z^{n-1})$, где отображение G задано формулой (14).

(c) По формулам главы 2 вычисляются управления $\widehat{u}^n$, переводящие систему (4) из точки y^{n-1} в точку $0 \in \mathbb{R}^3$ за время T в классе управлений $\mathrm{nc} \in \{\mathrm{PieceConst}, \mathrm{Trig}, \mathrm{Optimal}, \mathrm{Combine}\}$, с использованием выбранных параметров управлений par.

(d) Решается задача Коши для исходной системы (1) с управлениями $\widehat{u}^n$:

$$\dot{x} = \widehat{u}_1^n(t) X_1(x) + \widehat{u}_2^n(t) X_2(x), \qquad x(0) = q^{n-1}, \quad t \in [0,\, T];$$

ее решение обозначается через $x^n(t)$.

(e) В качестве следующего приближения берется точка $q^n = x^n(T)$.

(f) Проверяется условие достижения цели: если $|q^n - x^1| < \varepsilon$, то цель достигнута и итерационный процесс останавливается. Если $|q^n - x^1| \geqslant \varepsilon$, то совершается переход к следующей итерации, к пункту 3 (a), и в качестве начального приближения берется q^n. Из сходимости алгоритма при достаточно малом $|x^0 - x^1|$ следует, что на некоторой итерации N выполнится условие $|q^N - x^1| < \varepsilon$, и итерационный процесс остановится.

4. **Приближенное решение локальной задачи управления** дается последовательным применением управлений $\widehat{u}^1, \ldots, \widehat{u}^N$, вычисленных на каждой итерации и перепараметризованных соответствующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} N\widehat{u}^1(Nt), & t \in [0, T/N], \\ N\widehat{u}^2(Nt - T), & t \in [T/N, 2T/N], \\ \ldots & \\ N\widehat{u}^N(Nt - (N-1)T), & t \in [T(N-1)/N, T]. \end{cases} \tag{16}$$

Выходные данные: управление $u(t) = u(t;\ x^0,\ x^1,\ T,\ \varepsilon,\ \mathrm{nc})$, полученное с помощью формул (16), переводит систему (1) за время $T > 0$ из точки x^0 в точку x^1 с заданной точностью $\varepsilon > 0$, следовательно, является приближенным решением локальной задачи управления (1), (3).

В **главе 4** описывается программное обеспечение, разработанное для приближенного решения двухточечной граничной задачи управления (1), (3):

- модуль FindControlProc для приближенного решения локальной задачи управления (т.е. задачи (1), (3) для достаточно близких точек x^0, x^1),

- программный комплекс NilpControl для приближенного решения глобальной задачи управления (для произвольных точек x^0, x^1), с возможностью учета фазовых ограничений

$$x(t) \in D, \qquad t \in [0, T], \tag{17}$$

  где D — задаваемая пользователем область в $\mathbb{R}^3$, которой принадлежат граничные точки x^0, x^1.

Модуль FindControlProc реализует алгоритм приближенного решения локальной задачи управления (1), (3), построенный в главе 3 (см. стр. 12, 13 автореферата). Для этого используются следующие компоненты:

- пакеты расширения Maple: linalg (линейная алгебра), DEtools (обыкновенные дифференциальные уравнения);
- разработанные автором программные модули:
  - NilpApprox (вычисление коэффициентов c_{ij} нильпотентной аппроксимации исходной системы (1) в терминальной точке, см. теорему 3),
  - ChangeCoords (замена переменных (15), (14)),
  - NilpLibControl (получение точных решений задачи управления (4), (5) в одном из четырех классов управлений PieceConst, Trig, Optimal, Combine на основе библиотеки NilpLib, созданной в главе 2).

Программный комплекс NilpControl решает глобальную задачу управления (1), (3), (17), и создан с использованием следующих компонент:

- пакеты расширения Maple: linalg, DEtools, plottools (работа с графикой);
- модули NilpApprox, ChangeCoords, NilpLibControl, FindControlProc;
- программный модуль проверки полной управляемости исходной системы (1), проверяющий выполнение рангового критерия теоремы Рашевского-Чжоу;
- программный модуль Decompose, сводящий глобальную задачу управления к серии локальных задач на основе выбора стратегии декомпозиции strategy, состоящей из:

– способа вычисления количества и координат таких попарно близких точек $p^1, \dots, p^{N-1} \in \mathbb{R}^3$, что задачи управления для пар точек (p^{i-1}, p^i), $i = 1, \dots, N$, локальны, где $p^0 = x^0$, $p^N = x^1$;

– набора классов управлений $\mathrm{nc}_i \in \{\mathrm{PieceConst}, \mathrm{Trig}, \mathrm{Optimal}, \mathrm{Combine}\}$ для пар точек (p^{i-1}, p^i), $i = 1, \dots, N$;

– параметров par управлений для классов PieceConst, Trig, Combine;

– точности промежуточных локальных задач управления ε^i.

- программный модуль конкатенации, т.е. объединения управлений $\widehat{u}^1(t), \dots, \widehat{u}^N(t)$, вычисленных подпрограммой FindControlProc для пар точек (p^0, p^1), $(\tilde{p}^1, p^2), \dots, (\tilde{p}^{i-1}, p^i), \dots, (\tilde{p}^{N-1}, p^N)$, в управление $u(t)$ по формуле (16). Здесь через $\tilde{p}^i$, $|\tilde{p}^i - p^i| < \varepsilon^i$, обозначена конечная точка траектории системы (1), вычисляемая программным модулем FindControlProc на локальной задаче управления для пары точек $(\tilde{p}^{i-1}, p^i)$;

- модуль проверки превышения количества итераций подпрограммы FindControlProc над максимально допускаемым пользователем количеством итераций (Iter > MaxIter?);

- модуль проверки выполнения фазовых ограничений (17) ($x(t) \in D$?);

- программный модуль проверки выполнения требуемой точности ε решения задачи управления (1), (3) ($|q^N - x^1| < \varepsilon$?). Здесь $q^N = \tilde{p}^N$;

- программный модуль текстового либо графического вывода вычисленного управления (Write $u(t)$).

Схема взаимодействия компонент программного комплекса NilpControl изображена на Рис. 1, а его блок-схема — на Рис. 2. Символ человека на этих схемах обозначает участие эксперта (интерактивный режим работы программного комплекса). Программный модуль FindControlProc, использующий стратегию декомпозиции strategy, обозначен на Рис. 2 как FCP(strategy).

Описанный подход к решению задачи управления обладает важным преимуществом многометодности: для каждой из локальных задач управления для пар точек $(\tilde{p}^{i-1}, p^i)$, $i = 1, \dots, N$, возможно использование любого из четырех классов управлений ($\mathrm{nc}_i \in \{\mathrm{PieceConst}, \mathrm{Trig}, \mathrm{Optimal}, \mathrm{Combine}\}$), причем для всех классов, кроме Optimal, возможен выбор

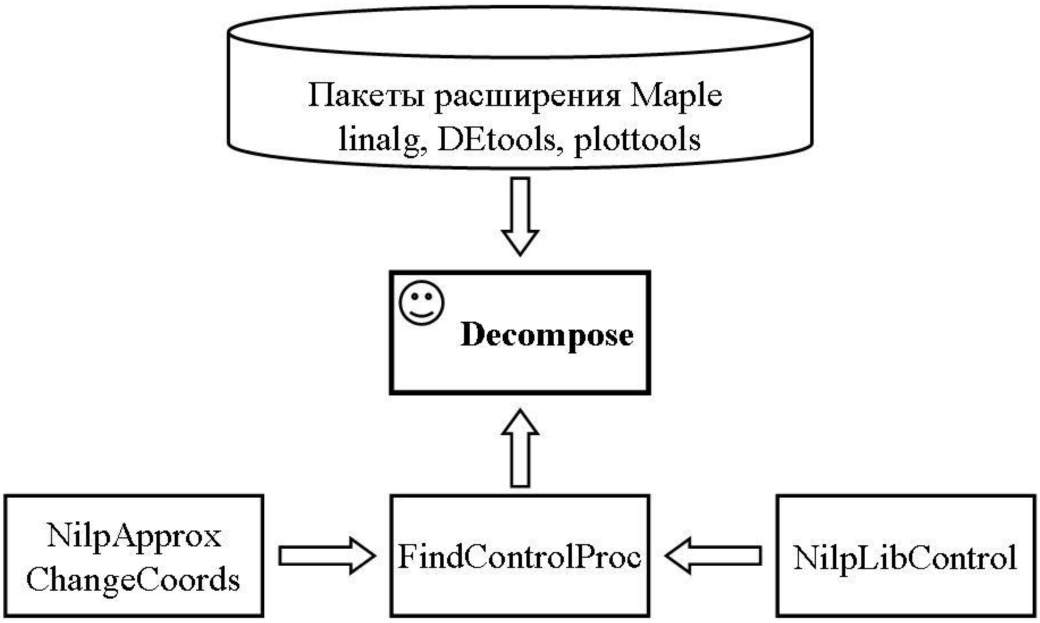

Рис. 1: Схема взаимодействия компонент программного комплекса NilpControl

параметров управлений par. Эта многометодность была использована в диссертации: были разработаны параллельные алгоритмы решения задачи управления, реализующие выбор лучшего управления из некоторого семейства. Качество управления понимается в смысле минимизации количества переключений, уменьшения амплитуды и т.п.

В **главе 5** рассматривается экспериментальная эксплуатация описанного в предыдущих главах вычислительного инструментария при решении локальных и глобальных задач управления для нескольких содержательных систем:

1) для кинематической модели мобильного робота на плоскости (машины Ридса-Шеппа без ограничений на управление)

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2, \\ &x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; \end{aligned} \tag{18}$$

2) для системы, описывающей управление ориентацией сферы, катящейся по плоскости без проскальзывания и прокручивания

$$\dot{x}_1 = -u_1 x_3 + u_2 x_2, \qquad \dot{x}_2 = -u_1 \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} - u_2 x_1, \tag{19}$$

$$\dot{x}_3 = u_1 x_1 - u_2 \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, \tag{20}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in B^3 = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 \right\}, \; u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; \tag{21}$$

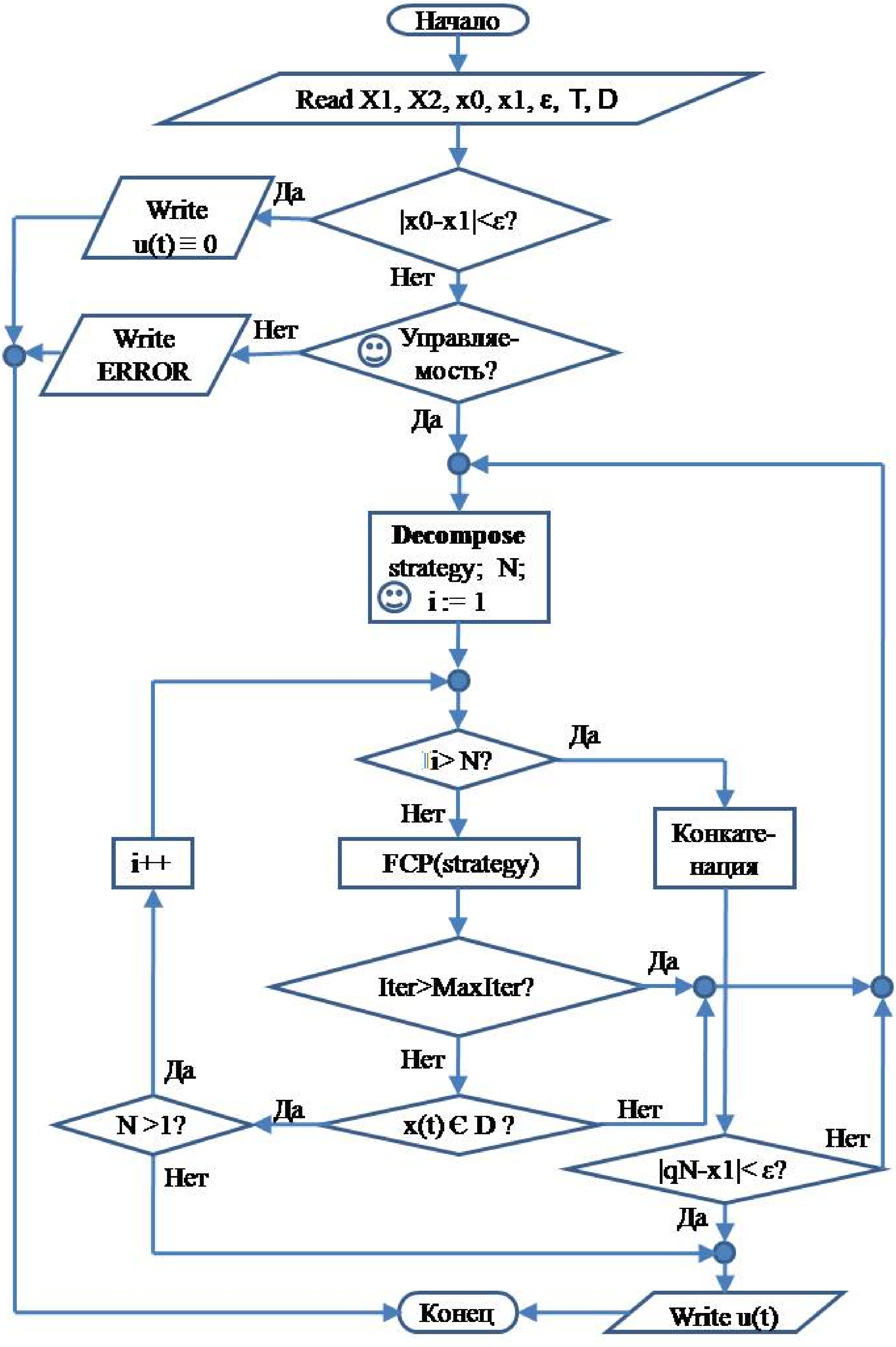

Рис. 2: Блок-схема программного комплекса NilpControl

3) для системы в четырехмерном пространстве состояний с трехмерной орбитой

$$\dot{x}_1 = -u_1x_3 + u_2x_2, \qquad \dot{x}_2 = -u_1x_4 - u_2x_1, \tag{22}$$

$$\dot{x}_3 = u_1x_1 - u_2x_4, \qquad \dot{x}_4 = u_1x_2 + u_2x_3, \tag{23}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; \tag{24}$$

4) для предельной системы двухзвенного манипулятора

$$\dot{y}_1 = -\frac{y_3(y_3 + \cos y_2)}{2 + 2y_3\cos y_2 + y_3^2}u_1 - \frac{\sin y_2}{2 + 2y_3\cos y_2 + y_3^2}u_2, \tag{25}$$

$$\dot{y}_2 = u_1, \qquad \dot{y}_3 = u_2, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{26}$$

$$-\pi/2 \leqslant y_1 \leqslant \pi/2, \quad -\pi/2 \leqslant y_2 \leqslant \pi/2, \quad 1 \leqslant y_3 \leqslant 2. \tag{27}$$

Таблица 1 демонстрирует быстрое убывание расстояния от терминальной точки x^1 до точки q^n, вычисленной на n-ом шаге алгоритмом решения локальной задачи управления для системы (18).

На Рис. 3 и 4 приведены графики зависимости количества итераций (Iterations) от порядка точности (Power $= -\lg(\varepsilon)$) при решении локальной задачи управления для системы (19)–(21) в классах Optimal и Trig соответственно.

номер итерации n	0	1	2	3	4	5
$\lvert q^n - x^1\rvert$	2,3	$7 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-9}$

Таблица 1: Сходимость алгоритма для мобильного робота (18)

В заключении главы 5 приведены рекомендации по использованию наработанных экспертных знаний для успешного применения интеллектуальных возможностей программного комплекса NilpControl.

В **заключительной главе 6** кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

В **приложении** приведены фрагменты листингов программ комплекса NilpControl в системе компьютерной математики Maple.

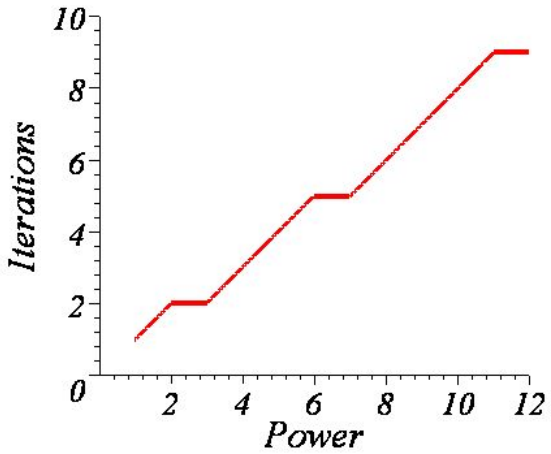

Рис. 3: Зависимость количества итераций от порядка точности, система (19)–(21), nc = Optimal

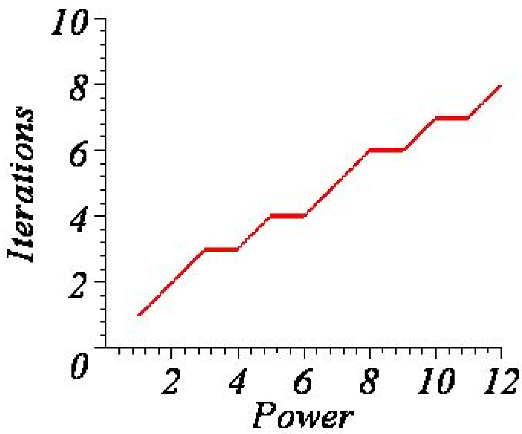

Рис. 4: Зависимость количества итераций от порядка точности, система (19)–(21), nc = Trig

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1) Для задачи оптимального управления неголономным интегратором Брокетта с интегральным критерием качества получено описание оптимального синтеза и функции цены.

2) Разработан метод построения комбинированного управления для решения задачи управления трехмерной нильпотентной системой с двумерным линейным управлением.

3) На основе разработанных математических методов создана библиотека программных управлений NilpLib, точно решающих двухточечную граничную задачу управления в классах кусочно-постоянных, тригонометрических, оптимальных в смысле минимума интегрального функционала, и комбинированных управлений.

4) Разработаны многометодные алгоритмы (включая параллельные) для вычисления приближенного решения задачи управления для нелинейных неголономных трехмерных систем с двумерным линейным управлением.

5) В системе компьютерной математики Maple создан программный комплекс NilpControl, реализующий указанный многометодный алгоритм, с поддержкой как автоматического, так и интерактивного режимов работы пользователя.

6) Проведена экспериментальная эксплуатация программного комплекса NilpControl для решения ряда содержательных задач управления: кинематическая модель мобильного робота на плоскости; ориентация сферы, катящейся по плоскости без проскальзывания и прокручивания; система в четырехмерном пространстве состояний с трехмерной орбитой; предельная система двухзвенного манипулятора.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Сачкова Е.Ф.* Решение задачи управления для нильпотентной системы // Дифференциальные уравнения, 2008, том 44, № 12, с. 1704–1707.

[2] *Сачкова Е.Ф.* Приближенное решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации // Дифференциальные уравнения, 2009, том 45, № 9, с. 1355–1364.

[3] *Сачкова Е.Ф.* Приближенное решение двухточечных граничных задач для систем с линейными управлениями// Автоматика и телемеханика, 2009, № 4, с. 179–189.

[4] *Сачкова Е.Ф.* Программная реализация алгоритма приближенного решения задачи управления// Программные продукты и системы, 2009, № 2, с.84–88.

[5] *Sachkov Yu.L., Sachkova E.F.* Motion planning for linear in control systems // Generalized solutions in control problems. IFAC workshop, Pereslavl-Zalessky, 2004. M.: FIZMATLIT, 2004. P. 227–235.

[6] *Сачкова Е.Ф.* Решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации // Программные системы: теория и приложения. / Труды международной конференции, ИПС РАН, г. Переславль-Залесский, октябрь 2006 / Под редакцией С. М. Абрамова. В двух томах.—М.: Физматлит, 2006, Т.2, с. 57–81.

[7] *Сачкова Е.Ф.* Реализация и анализ работы алгоритмов приближенного решения задачи управления // Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения», ИПС РАН, г. Переславль- Залесский, май 2009, Т.1, с. 59–75.

[8] *Сачкова Е.Ф.* Приближенное решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации. «Современные проблемы математики, механики и их приложения». Материалы международной конференции, посвященной 70-летию акад. В.А.Садовничего. — М.: Издательство «Университетская книга», 2009, С. 207.

[9] *Сачкова Е.Ф.* Решение двухточечных граничных задач для систем с линейными управлениями. Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 02.07–07.07, 2009 г. Тезисы докладов под ред. акад. Е.Ф. Мищенко и А.А. Давыдова. С. 137, 138.

В работе [5] автору принадлежит разработка программы решения двухточечной граничной задачи управления для кинематической модели мобильного робота на плоскости, и вычислительные эксперименты, демонстрирующие сходимость алгоритма приближенного решения задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации в данной задаче.