ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. А. Роганов, Н. Б. Тихомиров, А. М. Шелехов

Математика и информатика
для юристов

Допущено Министерством образования РФ
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Юриспруденция»

МГИУ
Москва 2005

ББК 22.18
УДК 519.6
Р59

Рецензенты:

В. А. Зорич, доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

Н. С. Шерстнёва, кандидат юридических наук, профессор, ректор Тверского института экологии и права

Роганов Е. А., Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М.
Р59 Математика и информатика для юристов: Учебник. — М.: МГИУ, 2005. — VI + 364 с. Библ.: 37 названий, Табл.: 85, Рис.: 138.
ISBN 5-276-00651-2

Настоящее издание представляет собой учебный курс, подготовленный в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 021100 — «Юриспруденция», и призвано помочь специалистам, занимающимся юридической деятельностью, расширить свои профессиональные возможности, а будущим юристам — сформировать качественное профессиональное мышление и получить практические навыки использования современных информационных технологий.

В учебнике показано, как применять математику в юридической практике и криминалистике; изложены основы математической статистики и современной информатики; описано моделирование процессов, интересующих юристов. Математические методы и теории иллюстрируются и дополняются практическими примерами.

Издание рекомендуется студентам и преподавателям юридических факультетов, а также юристам-практикам. Оно окажется полезным и старшеклассникам, собирающимся специализироваться в области юриспруденции.

ББК 22.18
УДК 519.6

ISBN 5-276-00651-2

Оглавление

Введение

Учебник написан на основании курсов математики и информатики, неоднократно прочитанных авторами студентам юридических факультетов. Мы исходили из того, что этот курс должен, с одной стороны, быть достаточно широким, чтобы играть развивающую, гуманитарную роль. С другой стороны, он должен быть и достаточно содержательным, чтобы студенты научились решать хотя бы несложные прикладные задачи.

Учебник соответствует государственному стандарту по дисциплине «Информатика и математика» (специальность «Юриспруденция») и рассчитан на 68 часов лекций, 51 час практических занятий и 51 час лабораторных работ. Последняя, наиболее трудная, глава предназначена для магистров.

Мы отходим от традиционной точки зрения, согласно которой основой любого математического курса должен быть математический анализ. Несомненно, математический анализ играет базовую роль в систематическом курсе, предназначенном для специалистов, широко использующих точные методы. Юристы пока таковыми не являются, поэтому наш курс не является систематическим, у него другое предназначение. При этом мы всё время подчёркиваем общекультурную ценность математики, её возможности в развитии интеллектуальных способностей и логического мышления. Для этих целей, мы полагаем, больше подходит теория вероятностей, а не математический анализ. Этим обстоятельством обусловлен наш подход к отбору математического материала и содержанию учебника.

Мы обсуждаем важнейшие математические понятия: число, вектор, функция, предел, аксиома, вероятность, и показываем, как развивались математические идеи, заключенные в этих понятиях. Основной математической составляющей курса является элементарное введение в курс теории вероятностей и математической статистики. Именно этому материалу посвящена бóльшая часть практических и лабораторных занятий. Для проведения лабораторных занятий, которые представляются авторам неотъемлемой частью данного курса, преподаватели могут выбрать наиболее приемлемые программные продукты, позволяющие студентам лучше понять теоретический материал и выполнить упражнения. Сейчас их существует достаточно много, все они обладают примерно одинаковой функциональностью и взаимозаменяемы.

В книге мы будем описывать применение свободных программных продуктов, которые могут быть абсолютно легально и бесплатно получены и установлены на компьютер с любой из современных операционных систем (включая и свободно распространяемую ОС Linux). Среди них различные калькуляторы, система компьютерной алгебры Maxima, пакет программ Open Office, система для работы в сети Интернет Mozilla и ряд других.

Если полезность знакомства будущего юриста с основами информатики редко вызывает сомнения, то в необходимости изучения математики порой нужно убеждать. А ведь математика давно дружит с юриспруденцией, между ними много общего. Известные математики Виет[1], Ферма́[2] и Вейерштрасс[3] были также и юристами. Немало в истории и таких примеров, когда математик начинал изучать юриспруденцию и получал результаты, которые оказывались чрезвычайно ценными для обеих наук. Так, Пуассон[4], родившийся более двухсот лет назад, провёл исследование

[1]Франсуа Виет (1540–1603) — французский математик и юрист, основатель современной алгебраической символики.

[2]Пьер Ферма́ (1601–1665) — французский математик, юрист по специальности.

[3]Карл Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик и юрист, один из основателей математического анализа.

[4]Симон Сен-Дени Пуассон (1781–1840) — французский математик, механик и физик.

по материалам приговоров в уголовных судах, разработав специальный математический аппарат, о котором мы расскажем в нашей книге. Спустя 70 с лишним лет было обнаружено, что формулы Пуассона применимы в физике и математике, а сейчас их используют также в биологии, теории массового обслуживания, военном деле, медицине, психологии и в других областях.

Математика — часть общечеловеческой культуры, такая же неотъемлемая и важная, как право, медицина, естествознание и многое другое. Все наилучшие достижения человеческой мысли и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Таким образом, для студента-гуманитария математика прежде всего общеобразовательная дисциплина, как, например, право для студента-математика. Нельзя считать образованным математика, если он не знаком с элементарными сведениями из юриспруденции, так же, как нельзя считать грамотным специалистом такого юриста, который не знает простейших сведений из математики, не умеет пользоваться современными справочными правовыми системами, находить нужную ему информацию в сети Интернет и применять компьютер для решения тех или иных задач.

Значение математики для юриста этим не исчерпывается. В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — выявить истину. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, уметь применять на практике индуктивный и дедуктивный методы (вспомните Шерлока Холмса!). Поэтому, занимаясь математикой, будущий правовед формирует своё профессиональное мышление.

Наконец, применение математических методов и современной компьютерной техники расширяет возможности каждого специалиста. В юридической практике важную роль играет статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала. Ценность специалиста существенно возрастает, если он умеет делать это.

Настоящий учебник поможет достичь указанных целей. Но написать его оказалось делом весьма непростым. Прежде всего, потому, что предполагается обучать математике тех, кто уже мысленно с ней распрощался после окончания школы и полагал, что больше с ней не встретится. Понимая всё это, мы начинаем наш курс с повторения школьного материала, несколько обобщая его и углубляя. Мы предлагаем учащимся такие разделы математики и информатики и такую последовательность изложения, при которых, на наш взгляд, усвоение будет происходить наиболее просто и естественно. В этом смысле изложение не является строгим и поэтому наше пособие отличается от стандартного математического курса примерно так же, как сборник рассказов от романа.

Тем не менее, предлагаемый курс служит введением в более серьёзную математику. Кто захочет более детально разобраться в какой-либо теме (индивидуально, в рамках специального курса или факультатива), может в дальнейшем обратиться к специальной литературе, в первую очередь к тем книгам, список которых приведён в конце учебника.

Курс построен таким образом, что для оценки знаний студентов удобно применять рейтинговую систему, основанную на постепенном накоплении оценок. Студентам могут быть предложены также курсовые работы по истории математики, по арифметике, комбинаторике, элементарной статистике.

Изложение материала в книге сопровождается примерами и упражнениями, часть из которых предназначена для выполнения «вручную», а часть — в компьютерном классе. При выполнении и оформлении заданий рекомендуется придерживаться приведённых образцов. Нужно тщательно проводить необходимые расчёты, аккуратно оформлять таблицы и графики как «вручную», так и с использованием соответствующих компьютерных программ. Хорошо выполненное задание принесёт вам большое удовлетворение.

Е.А. Роганов, Н.Б. Тихомиров, А.М. Шелехов.
Москва, 2005

Глава I

Числа

Мир человека тесно связан с миром чисел. Без чисел невозможно развивать, хранить и передавать другим поколениям знания, а без этого немыслим прогресс человеческого общества. Изучая окружающую действительность и приспосабливаясь к меняющимся условиям своего существования, человек развивал и совершенствовал понятие числа. Ещё до школы вы познакомились с числами, и они сопровождают вас всю жизнь.

В первой главе нашего курса мы обсудим простые, но наиболее важные свойства чисел, которые используются для решения самых разнообразных задач, представляющих интерес в том числе и для специалиста в области юриспруденции. Мы надеемся, что вы почувствуете красоту и совершенство мира чисел.

§ 1. Натуральные числа

В этом параграфе мы вспомним основные свойства натуральных чисел, напомним, как разложить натуральное число на простые множители, найти наименьшее общее кратное, привести дроби к общему знаменателю.

Известные нам числа $1, 2, 3, \dots$ называются *натуральными*. Их используют для счёта или обозначения *количества предметов*, например: один юрист, два юриста и т. д. Кроме того, с помощью натуральных чисел обозначают *порядок* предметов. Например, если всех милиционеров в отделении выстроить по росту, то каждому из них можно присвоить номер: первый милиционер, второй милиционер и т. д.

Чтобы записывать натуральные числа, бо́льшие девяти, пользуются так называемой *десятичной позиционной системой счисления*[1]. Слово «позиционная» означает, что значение цифры зависит от того места, которое она занимает в записи числа, например:

$$147 = 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0;$$
$$714 = 7 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4 = 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Слово «десятичная» означает, что используются степени десятки. Существуют и другие позиционные системы для записи чисел. Запишем, например, натуральное число 48 в пятеричной системе, содержащей всего пять цифр 0, 1, 2, 3, 4: $48 = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 143_5$. Индекс 5 указывает, что число записано в пятеричной системе счисления. В двоичной системе, содержащей всего две цифры — 0 и 1, число 48 запишется следующим образом:

$$48 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110000_2.$$

[1]Говорят также «десятичная позиционная система» (без слова «счисление»).

В информатике наряду с двоичной широко используются восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. В первой из них для записи чисел применяется восемь различных цифр (от 0 до 7), а во второй — шестнадцать: 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E и F. Числа 48 и 175, например, в шестнадцатеричной системе запишутся так:

$$48 = 3 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 30_{16}; \qquad 175 = 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = AF_{16}.$$

Более подробно о разных системах счисления мы расскажем позже, а пока заметим, что многие калькуляторы позволяют простым нажатием кнопки записать заданное число в любой системе счисления. Специальные программы-калькуляторы, позволяющие работать в любой из четырёх наиболее распространённых систем счисления (Hex — шестнадцатеричная, Dec — десятичная, Oct — восьмеричная, Bin — двоичная), имеются на любом современном компьютере.

Заметим, что сначала появились *непозиционные* системы счисления, наиболее известной из которых является римская. В ней цифры I, V, X, L, C, D и M всегда обозначают 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 соответственно, вне зависимости от позиции цифры. Если перед бóльшей цифрой следует цифра с меньшим значением, то её вклад является отрицательным. Таблица 1 содержит примеры, иллюстрирующие общие правила записи чисел в римской системе счисления. Основной недостаток непозиционных систем — неудобство выполнения операций над числами. Попробуйте, например, найти сумму чисел CDXXXVIII и DCXLIX.

Таблица 1

1	2	3	4	5
I	II	III	IV	V
6	7	8	9	10
VI	VII	VIII	IX	X
11	13	18	19	22
XI	XIII	XVIII	XIX	XXII
34	39	40	60	99
XXXIV	XXXIX	XL	LX	XCIX
200	438	649	999	1207
CC	CDXXXVIII	DCXLIX	CMXCIX	MCCVII

Все натуральные числа, за исключением единицы, подразделяются на простые и составные. Натуральное число называется *составным*, если оно представляет собой произведение двух натуральных чисел, не равных единице, например: $4 = 2 \cdot 2$, $39 = 3 \cdot 13$, $253 = 11 \cdot 23$. Натуральные числа, бóльшие единицы, которые нельзя представить в таком виде, называются *простыми*. Первые пять простых чисел — это 2, 3, 5, 7 и 11. Множество простых чисел бесконечно, это знал и умел доказывать ещё Евклид[2].

Простые числа играют в математике особую роль. В них много загадочного, и математики, стремясь разгадать их тайны, открыли и продолжают

[2]Евклид (около 325–265 до н.э.) — древнегреческий учёный, основатель аксиоматического метода в геометрии.

открывать до сих пор немало интереснейших свойств простых чисел, которые применяются не только в математике. Так, широко используемая сейчас криптография, позволяющая обмениваться зашифрованными сообщениями с помощью общедоступной (а значит, доступной и злоумышленнику) сети Интернет, основывается на свойствах простых чисел.

Таблица 2

2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,
41,	43,	47,	53,	59,	61,	67,	71,	73,	79,	83,	89,
97,	101,	103,	107,	109,	113,	127,	131,	137,	139,	149,	151,
157,	163,	167,	173,	179,	181,	191,	193,	197,	199,	211,	223,
227,	229,	233,	239,	241,	251,	257,	263,	269,	271,	277,	281,
283,	293,	307,	311,	313,	317,	331,	337,	347,	349,	353,	359,
367,	373,	379,	383,	389,	397,	401,	409,	419,	421,	431,	433,
439,	443,	449,	457,	461,	463,	467,	479,	487,	491,	499,	503,
509,	521,	523,	541,	547,	557,	563,	569,	571,	577,	587,	593,
599,	601,	607,	613,	617,	619,	631,	641,	643,	647,	653,	659,
661,	673,	677,	683,	691,	701,	709,	719,	727,	733,	739,	743,
751,	757,	761,	769,	773,	787,	797,	809,	811,	821,	823,	827,
829,	839,	853,	857,	859,	863,	877,	881,	883,	887,	907,	911,
919,	929,	937,	941,	947,	953,	967,	971,	977,	983,	991,	997

Эратосфен[3] предложил способ получения простых чисел, который назван в его честь *решетом Эратосфена*. Запишем последовательно, например, первую тысячу натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ \ldots, 1000.$$

Отметим (рамкой) простое число 2, которое стоит в нашей записи на втором месте, а затем вычеркнем каждое второе число. Все вычеркнутые числа являются составными, так как делятся на 2 (эти числа называются *чётными*, говорят также, что они *кратны двум*):

$$1,\ \boxed{2},\ 3,\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ 9,\ \cancel{10},\ 11,\ \cancel{12},\ 13,\ \cancel{14},\ \ldots, \cancel{1000}.$$

Далее отмечаем рамкой следующее за двойкой наименьшее незачёркнутое число 3. Это простое число стоит на третьем месте. Вычеркнем теперь каждое третье число после трёх: 6, 9, 12 и т. д. Эти числа являются составными, так как делятся на 3 (числа, кратные трём). Заметим, что часть этих чисел, а именно чётные, уже была вычеркнута ранее:

$$1,\ \boxed{2},\ \boxed{3},\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7,\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10},\ 11,\ \cancel{12},\ 13,\ \cancel{14},\ \ldots, \cancel{1000}.$$

[3] Эратосфен (275–194 до н.э.) — древнегреческий учёный.

Следующее за тройкой наименьшее незачёркнутое число — простое число 5. Отметим его рамкой и вычеркнем каждое следующее за ним пятое число: 10, 15, 20 и т. д. Продолжая эту процедуру, мы оставим незачёркнутыми только простые числа, и, таким образом, найдём все простые числа, меньшие тысячи (таблица 2).

Заметим, что осуществить описанную процедуру для *всей* совокупности натуральных чисел практически невозможно, так как их бесконечно много. Но мы можем, пользуясь решетом Эратосфена, найти «вручную» все простые числа, меньшие некоторого заданного числа n. Использование компьютера позволяет автоматизировать выполнение описанного выше алгоритма. Наиболее эффективно это можно сделать с помощью соответствующей программы. Хотя знакомство с методами программирования выходит за рамки нашего курса (мы ограничимся использованием калькуляторов, офисных программ и систем компьютерной алгебры), увидеть текст программы, реализующей решето Эратосфена, весьма поучительно:

```
primes       = map head (iterate sieve [2..])
sieve (p:xs) = [ x | x<-xs, x `rem` p /= 0 ]
```

Эта очень короткая программа написана на языке функционального программирования Haskell. После запуска она начинает последовательно печатать все простые числа, начиная с двойки. В силу бесконечности множества простых чисел работа программы никогда не завершится, если только не прервать её выполнение принудительно.

Не следует, однако, думать, что появление высокопроизводительных компьютеров позволило решить все задачи, связанные с простыми числами. Всё не так просто! В сети Интернет даже размещён специальный веб-сайт (http://www.utm.edu/research/primes), где обсуждаются различные проблемы простых чисел. Наибольшее на данный момент простое число можно найти по адресу http://primes.utm.edu/largest.html. На 28 мая 2004 года таковым являлось число $2^{24036583} - 1$, содержащее 7 235 733 цифры.

Выполняя арифметические действия, мы часто пользуемся тем, что *каждое натуральное число можно единственным образом представить в виде произведения простых чисел, записывая их в порядке возрастания*. Этот простой, но очень важный математический факт называется основной теоремой арифметики и используется для преобразования арифметических выражений, для обоснования признаков делимости чисел, для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК) нескольких чисел, при выполнении арифметических действий с обыкновенными дробями.

Покажем на примерах, как решать подобные задачи «вручную», то есть не используя компьютер. Как применять компьютер для этих целей, мы расскажем в конце главы.

Пример 1.1. Разложите число 420 на простые множители.

Решение. Будем искать простые делители числа 420. Самое маленькое простое число — это 2. Числа, которые делятся на 2, называют, как мы знаем, чётными. Число 420 является чётным, поскольку оканчивается нулём. Разделив 420 на 2, получим 210. Теперь будем искать делители числа 210. Оно также чётное. Поделив его на 2, получим 105. Число 105 — нечётное, то есть не делится на 2. Но оно делится на 3 (вспомним признак делимости на 3: *если сумма цифр числа делится на* 3, *то и само число делится на* 3). Поделив 105 на 3, получим число 35, которое уже не делится на 3, но делится на следующее по величине простое число — 5. Разделив 35 на 5, получим простое число 7. Следовательно, процесс деления закончен. В ответе простые множители обычно указывают в порядке возрастания, причём вместо перечисления одинаковых множителей можно использовать степень: $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

Разложение числа на простые множители часто применяют для упрощения выражений с радикалами, для сокращения дробей и выполнения с ними арифметических операций.

Пример 1.2. Упростите выражение $\sqrt{420}$.

Решение. Используем полученное выше разложение на множители:

$$\sqrt{420} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 7} = 2\sqrt{105}.$$

Описанный приём называется вынесением множителя из-под радикала.

Пример 1.3. Сократите дробь $\dfrac{108}{630}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби на простые множители, используя описанный выше алгоритм:

$$108 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3, \quad 630 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5 \cdot 7.$$

Подчеркнём общие множители этих чисел. Это будут числа 2, 3 и 3. Поэтому данную дробь можно сократить на 2 и на 3^2:

$$\frac{108}{630} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}.$$

На практике сокращение обычно проводят последовательно:

$$\frac{108}{630} = \frac{54}{315} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}.$$

Как мы знаем, при сложении и вычитании обыкновенных дробей их предварительно приводят к общему знаменателю. Для этого находят *наименьшее общее кратное* знаменателей. Напомним, как это делается.

Пример 1.4. Найдите наименьшее общее кратное чисел 84 и 45.

Решение. *Общим кратным* двух натуральных чисел a и b называется такое натуральное число, которое без остатка делится на a и на b. Например, числа $84 \cdot 45$ и $2 \cdot 84 \cdot 45$ являются общими кратными чисел 84 и 45. Ясно, что общих кратных много. Интерес представляет наименьшее из них. Для чисел 84 и 45 наименьшим общим кратным будет число 1260. Чтобы его найти, сначала разложим данные числа на простые множители: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, $45 = 3 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$. Теперь выпишем те простые множители второго числа, которых нет в первом: 3 и 5 (они подчёркнуты). Далее умножим первое число на эти множители и получим искомое наименьшее общее кратное:

$$\text{НОК}(84, 45) = 84 \cdot 3 \cdot 5 = 1260.$$

Нетрудно проверить, что $1260 : 84 = 15$, $1260 : 45 = 28$. Подобным образом действуют и при вычислении наименьшего общего кратного трёх и большего количества чисел.

Пример 1.5. Найдите сумму дробей $\frac{11}{84}$ и $\frac{8}{45}$.

Решение. Так как $1260 = 84 \cdot 15 = 45 \cdot 28$, то

$$\frac{11}{84} + \frac{8}{45} = \frac{11 \cdot 15}{84 \cdot 15} + \frac{8 \cdot 28}{45 \cdot 28} = \frac{165 + 224}{1260} = \frac{389}{1260}.$$

Разумеется, сложение можно выполнить и по-другому, не затрудняя себя нахождением наименьшего общего кратного. В качестве общего знаменателя можно взять произведение знаменателей чисел, которое является их общим кратным, но не наименьшим:

$$\frac{11}{84} + \frac{8}{45} = \frac{11 \cdot 45}{84 \cdot 45} + \frac{8 \cdot 84}{45 \cdot 84} = \frac{1167}{3780} = \frac{389}{1260}.$$

Следующий пример пригодится нам в дальнейшем.

Пример 1.6. Докажите, что дроби $\frac{3}{13}$ и $\frac{2307692}{9999999}$ не равны.

Решение. Применим метод доказательства «от противного». Предположим, что дроби равны: $\frac{3}{13} = \frac{2307692}{9999999}$. По свойству пропорции (произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции) получаем: $3 \cdot 9999999 = 13 \cdot 2307692$. Но это невозможно, так как в левой части равенства стоит нечётное число, а в правой — чётное. Полученное противоречие есть следствие неправильного предположения о том, что дроби равны. Следовательно, они не равны, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Разложите на простые множители число 5544 и упростите квадратный корень из него.

2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 759 и 182. Используя этот результат, сложите дроби $\frac{5}{759}$ и $\frac{3}{182}$.

3. Вычислите 3^{13}. Запишите это число в троичной системе счисления.

§ 2. Целые и рациональные числа

Здесь мы обсуждаем свойства целых и рациональных чисел и напоминаем правила сравнения чисел, определения знака при выполнении арифметических операций и правила действий с обыкновенными дробями.

Натуральные числа можно, как известно, складывать, вычитать, умножать и делить. Однако эти операции неравноценны. Очевидно, что сумма $a+b$ любых двух натуральных чисел a и b снова будет натуральным числом; то же самое можно сказать и о произведении $a \cdot b$. При этом порядок слагаемых и сомножителей не играет роли, то есть $a+b = b+a$ и $a \cdot b = b \cdot a$. Что же касается операций вычитания и деления, то здесь ситуация иная. Например, разность $5-2=3$ является натуральным числом, но натурального числа $2-5$ не существует. В последнем случае используют так называемые *целые отрицательные* числа и записывают $2-5=-3$, $4-10=-6$ и т. п. Числа a и $-a$ называются *противоположными*.

Между натуральными числами и целыми отрицательными числами находится число 0 (нуль). Нуль предметов данного вида (например, диких попугаев в Антарктиде) означает отсутствие предметов данного вида. Пользуясь математической терминологией, можно сказать, что множество попугаев, проживающих в Антарктиде, есть пустое множество (более детально понятие множества будет обсуждаться в девятой главе). Нуль обладает следующими свойствами:

$$a+0=a; \quad a+(-a)=0; \quad \textit{на нуль делить нельзя.}$$

Натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль называются в совокупности *целыми* числами. Множество всех натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$, множество всех целых чисел — символом $\mathbb{Z}$. Наглядно целые числа представляют точками на прямой (как на шкале термометра, рис. 1).

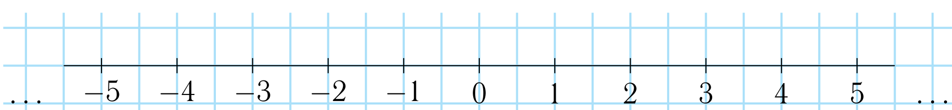


Рис. 1

В отличие от множества натуральных чисел, множество целых чисел устроено более «демократично»: любые два целых числа можно не только складывать, но и вычитать друг из друга, причём результат вычитания всегда будет также целым числом. Математики говорят, что множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения и вычитания, и что это множество получено *расширением* множества натуральных чисел.

Сравнение натуральных чисел не вызывает затруднений. Из самого определения натуральных чисел вытекает, что $1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$ Напомним правило сравнения целых чисел. Его проще всего проследить на числовой оси: *из двух целых чисел меньше то, которое изображается на числовой прямой точкой, расположенной левее.* Но можно описать это правило, не используя геометрических терминов, с помощью понятия *абсолютной величины.* Абсолютной величиной положительного числа a называют само число a; абсолютной величиной отрицательного числа a называют положительное число $-a$; абсолютная величина нуля равна нулю. Абсолютную величину числа a обозначают $|a|$. Например, $|5| = 5$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$.

Теперь правило сравнения целых чисел можно описать так: *во-первых, всякое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа; во-вторых, нуль меньше любого положительного числа; в-третьих, из двух отрицательных чисел меньше то, у которого больше абсолютная величина.* Например, $-7 < -3 < 0 < 5$.

Напомним правила сложения, вычитания, умножения и деления целых чисел. При сложении двух положительных или двух отрицательных чисел складывают их абсолютные величины и приписывают сумме тот же знак. Например, $7 + 3 = 10$, $-7 + (-3) = -10$. При сложении двух чисел с разными знаками от большей абсолютной величины отнимают меньшую и приписывают сумме знак того из чисел, которое имеет большую абсолютную величину. Например, $-7+3 = -4$, $7+(-3) = 4$. Вычитание можно заменить сложением:

$$-7-3 = -7+(-3) = -10, \quad 3-7 = 3+(-7) = -4, \quad 3-(-5) = 3+5 = 8.$$

Произведение и частное двух чисел с одинаковым знаком положительно, а произведение и частное двух чисел с разными знаками отрицательно:

$$(-7)\cdot(-3) = 21, \quad (-7)\cdot 3 = -21, \quad 7\cdot(-3) = -21, \quad 64 : (-16) = -4.$$

Чётная степень любого целого числа положительна, а нечётная степень отрицательного числа — число отрицательное: $(-2)^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$. В точности такие же правила используют и при действиях с рациональными числами, к обсуждению которых мы сейчас перейдём.

Потребность расширить множество натуральных чисел возникает не только при вычитании, но и при делении. Например, семь милиционеров нельзя разделить на четыре равные части, такого количества милиционеров — $7/4$ не существует. Но мы вполне можем разделить семь миллионов рублей на четыре равные части. Это число (1 миллион 750 тысяч) оставляет $7/4$ от общей суммы. Аналогичный смысл имеет обозначение a/b, где a и b — любые натуральные или даже целые числа, причём b не равно нулю.

Числа вида a/b называются *обыкновенными дробями* или *рациональными числами*. Между этими двумя понятиями есть некоторое различие. Например, одно и то же число $2/3$ можно записать в виде различных дробей: $4/6$, $6/9$, $10/15$ и т. д. Последние можно сократить, но дробь $2/3$ сократить нельзя, она является несократимой. Множество всех рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$.

Целое число a можно записать как дробь $a/1$, поэтому целые числа входят как часть во множество рациональных чисел. Говорят, что множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел. Точно так же, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел. Записывается это следующим образом: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, а знак $\subset$ читается «содержится в», «является подмножеством» или «является частью».

Заметим, что во множестве рациональных чисел «равноправия» ещё больше, чем во множестве целых чисел: любые два рациональных числа можно не только вычитать друг из друга, но можно и делить одно на другое (кроме деления на нуль!); при этом в результате указанных действий всегда будут получаться только рациональные числа. Таким образом, множество рациональных чисел замкнуто относительно всех четырёх операций: сложения, вычитания, умножения и деления.

В первом параграфе мы уже обсудили правило сложения дробей. Вычитание дробей проводится по той же схеме, но с учётом правила определения знака, о котором мы сказали выше. Например,

$$\frac{5}{84} - \frac{7}{45} = \frac{5 \cdot 15}{84 \cdot 15} - \frac{7 \cdot 28}{45 \cdot 28} = \frac{75 - 196}{1260} = \frac{-121}{1260} = -\frac{121}{1260} = \frac{121}{-1260}.$$

Напомним теперь правила умножения и деления дробей. *Для того, чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и знаменатели.* Например, $\frac{7}{18} \cdot \frac{24}{35} = \frac{7 \cdot 24}{18 \cdot 35} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$.

Прежде чем формулировать правило деления, напомним, что если поменять местами числитель и знаменатель какой-нибудь дроби, то получится дробь, обратная данной. Правило деления звучит так: *чтобы поделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.* Например, $\frac{7}{18} : \frac{24}{35} = \frac{7}{18} \cdot \frac{35}{24} = \frac{245}{432}$.

Напомним также, что дробь называется *правильной*, если абсолютная величина её числителя меньше абсолютной величины знаменателя. В противном случае дробь называется неправильной, например, $-\frac{50}{7}$ или $\frac{13}{13}$.

Иногда из неправильной дроби выделяют целую часть и записывают в виде *смешанного* числа, например, $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$. Неправильные дроби преобразуют в смешанные числа, если их нужно сложить или вычесть. Например,

$$\frac{65}{9} - \frac{29}{6} = 7\frac{2}{9} - 4\frac{5}{6} = (7-4) + \left(\frac{2}{9} - \frac{5}{6}\right) = 3 + \frac{4-15}{18} = 3 - \frac{11}{18} = 2\frac{7}{18}.$$

При умножении и делении смешанных чисел их предварительно преобразуют в неправильные дроби, используя следующее правило: *чтобы превратить смешанное число в неправильную дробь, нужно целую часть этого числа умножить на знаменатель дроби, к произведению прибавить числитель и полученную сумму записать в числитель неправильной дроби, сохраняя её знаменатель.* Например,

$$7\frac{2}{9} = 7 + \frac{2}{9} = \frac{7\cdot 9 + 2}{9} = \frac{65}{9} \quad \text{и} \quad 4\frac{5}{6} = \frac{4\cdot 6 + 5}{6} = \frac{29}{6},$$

следовательно, $7\frac{2}{9} \cdot 4\frac{5}{6} = \frac{65}{9} \cdot \frac{29}{6} = \frac{1885}{54} = 34\frac{49}{54}$.

Напомним правила сравнения положительных дробей: 1) из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой больше числитель: $\frac{17}{18} > \frac{7}{18}$, $\frac{13}{254} < \frac{49}{254}$; 2) из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой меньше знаменатель: $\frac{7}{18} > \frac{7}{35}$, $\frac{13}{254} < \frac{13}{35}$. Если дроби имеют различные числители и знаменатели, то их сначала приводят к общему знаменателю, а затем сравнивают по первому правилу. Например, $\frac{7}{18} = \frac{28}{72}$, $\frac{13}{24} = \frac{39}{72}$. Так как $28 < 39$, то $\frac{7}{18} < \frac{13}{24}$.

Пример 2.1. Произведите указанные действия:

$$\frac{\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{36}\right) \cdot \frac{21}{29} + 6\frac{6}{7} : \frac{16}{21}}{\left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1\right) : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14}\right)}.$$

Решение. Поскольку дробь является сложной, отдельно найдём её числитель и знаменатель. Напомним порядок действий: сначала выполняются действия в скобках, затем — возведения в степень, далее — умножение и деление в порядке записи и, наконец, сложение и вычитание — тоже в порядке записи. Следуя этим правилам, проводим вычисления.

1) $\frac{15}{28} - \frac{11}{36} = \frac{15\cdot 9 - 11\cdot 7}{252} = \frac{58}{252} = \frac{29}{126}$; 2) $\frac{29}{126} \cdot \frac{21}{29} = \frac{1}{6}$;

3) $6\frac{6}{7} : \frac{16}{21} = \frac{48}{7} \cdot \frac{21}{16} = 3 \cdot 3 = 9$;

4) $\dfrac{1}{6}+9=9\dfrac{1}{6}=\dfrac{9\cdot 6+1}{6}=\dfrac{55}{6}$; 5,6) $\dfrac{5}{7}\cdot 2\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5\cdot 7\cdot 5}{7\cdot 3\cdot 6}=\dfrac{25}{18}=1\dfrac{7}{18}$;

7) $1\dfrac{7}{18}-1=\dfrac{7}{18}$; 8,9) $\dfrac{7}{8}\cdot 1\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{14}=\dfrac{7\cdot 8\cdot 3}{8\cdot 5\cdot 14}=\dfrac{3}{10}$; 10) $1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$;

11) $\dfrac{7}{18}:\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{18}\cdot\dfrac{10}{7}=\dfrac{5}{9}$; 12) $\dfrac{55}{6}:\dfrac{5}{9}=\dfrac{55}{6}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{11\cdot 3}{2}=\dfrac{33}{2}=16\dfrac{1}{2}$.

В последнем параграфе мы покажем, как решать подобные задачи с помощью системы компьютерной алгебры Maxima.

Упражнения

1. Сравните следующие пары чисел, заменив букву «и» на нужный знак неравенства:

а) -21 и -94; б) 146 и -2577; в) $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{2}{7}$ и $\dfrac{4}{11}$; д) $\dfrac{5}{13}$ и $\dfrac{3}{7}$.

2. Вспомните, что такое среднее арифметическое двух или трёх чисел и найдите среднее арифметическое следующих чисел:

а) -3 и 5; б) $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{3}$; в) $\dfrac{4}{11}$ и 3; г) $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{8}$; д) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{4}{5}$.

3. Произведите указанные действия:

а) $\dfrac{48}{63}:4\dfrac{2}{9}$; б) $5\dfrac{5}{14}-2\dfrac{19}{21}$; в) $\dfrac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}$.

§ 3. Десятичные дроби

Дроби, у которых знаменатель представляет собой степень десятки, то есть 10, $10^2=100$, $10^3=1000$ и т. д., называют *десятичными дробями* и записывают специальным образом: $\dfrac{7}{10}=0{,}7$, $1\dfrac{3}{10}=1{,}3$, $2\dfrac{14}{1000}=2{,}014$. Попытка записать обыкновенную дробь в виде десятичной с помощью деления «уголком» приводит иногда к бесконечной десятичной дроби:

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots;\qquad \frac{1}{11}=0{,}090909\ldots;\qquad \frac{22}{7}=3{,}142857142857142857\ldots$$

Как видно, получающаяся бесконечная последовательность цифр содержит *период* — один и тот же повторяющийся набор цифр. Поэтому полученные десятичные дроби называют *бесконечными периодическими десятичными дробями*. Заметим, что единицу можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с периодом 0: $1{,}000\ldots$; аналогично, $0{,}24=0{,}24000\ldots$ и т. п. Можно доказать, что любая обыкновенная дробь записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Обратное также верно: любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой десятичную запись некоторой обыкновенной дроби. Как найти последнюю, поясним на примере.

Пример 3.1. Превратите в обыкновенные дроби числа $q = 0{,}777\ldots$ и $p = 0{,}090909\ldots$

Решение. Умножив q на 10, получаем уравнение $10q = 7{,}777\ldots = 7 + q$. Отсюда $9q = 7$ и $q = 7/9$. Умножая затем p на 100, получим: $100p = 9{,}090909\ldots = 9 + p$, откуда $99p = 9$ и $p = 1/11$.

Сделаем важное замечание: мы должны быть осторожны, определяя период с помощью калькулятора. Рассмотрим, например, дробь 3/13. Поделив с помощью калькулятора, мы увидим на табло 0,2307692 (предполагается, что наш калькулятор не может показать больше семи знаков после запятой). Но мы знаем, что полученная десятичная дробь является на самом деле бесконечной. Какими же будут следующие десятичные знаки? Поскольку в записи повторяется цифра 2, то первое, что приходит на ум — записать дробь в виде $0{,}(230769) = 0{,}230769\,230769\,2307692\ldots$, то есть объявить периодом число 230769. В данном случае догадка оказывается верной, хотя ясно, что есть числа, у которых период состоит более, чем из семи цифр.

Например, если мы попробуем решить ту же задачу для дроби $\dfrac{2307692}{9999999}$, то увидим на табло калькулятора тот же самый результат! Поскольку дроби $\dfrac{2307692}{9999999}$ и $\dfrac{3}{13}$ не равны (см. пример 1.6 из первого параграфа), то делаем вывод: в данном случае калькулятор не позволяет найти период дроби!

Разобраться с этой ситуацией можно «вручную», поделив 2307692 на 9999999 «уголком»:

$$\frac{2307692}{9999999} = 0{,}2307692\,2307692\,2307692\ldots$$

Напрашивается вывод, что $\dfrac{2307692}{9999999} = 0{,}(2307692)$. Это действительно так, но вдумчивый юрист, не привыкший принимать факты на веру, без доказательства, может задать непростой вопрос: а не будет ли периодом число 2307692 2307692? Так как же в самом деле находить период?

Мы получим ответ на этот вопрос, рассмотрев более подробно процесс деления. При делении числа 3 на 13 получаются остатки 4, 1, 9, 12, 3,... Получив в остатке 3, мы можем остановиться, так как при дальнейшем делении остатки будут повторяться. Следовательно, и цифры частного также будут повторяться. Поэтому в рассматриваемом примере период состоит из шести цифр. Аналогично, при обращении дроби $\dfrac{2307692}{9999999}$ в десятичную дробь деление можно закончить после шестого этапа, так как остатки начнут повторяться. Следовательно, период этой дроби состоит из семи, а не из четырнадцати цифр.

$$\begin{array}{l|l}
3{,}000000 & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{26} & 0{,}230769 \\
\;\;\mathbf{4}0 & \\
\;\;\underline{39} & \\
\;\;\;\mathbf{1}00 & \\
\;\;\;\;\;\underline{91} & \\
\;\;\;\;\;\;\mathbf{9}0 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{78} & \\
\;\;\;\;\;\;\mathbf{12}0 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{117} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\mathbf{3} &
\end{array}$$

Рассмотрим ещё один пример: $\dfrac{61}{495} = 0{,}1232323\ldots = 0{,}1(23)$. У этой бесконечной периодической дроби имеется *предпериод* 1, а период равен 23. Действительно, как показывает деление «уголком», повторяются два остатка — 115 и 160.

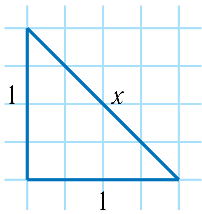


Рис. 2

Ознакомившись с этими примерами, каждый будущий юрист задаст себе ещё один вопрос: а имеют ли смысл бесконечные *непериодические* десятичные дроби? Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катетов которого равна единице (рис. 2). Обозначив длину гипотенузы через x, по теореме Пифагора[4] получим уравнение

$$x^2 = 2. \qquad (1)$$

Докажем, что корни этого уравнения не являются рациональными числами. В самом деле, предположим противное, то есть, что корнем уравнения (1) является обыкновенная дробь $x = \dfrac{a}{b}$, где a и b — целые числа. Если дробь $\dfrac{a}{b}$ можно сократить, сделаем это, и будем полагать далее, что она является уже несократимой. Подставляя $x = \dfrac{a}{b}$ в уравнение (1), получим $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$ или

$$a^2 = 2b^2. \qquad (2)$$

Так как в правую часть равенства (2) входит множитель 2, то a^2 — число чётное. Следовательно, число a также чётное и его можно записать в виде $a = 2c$. Подставив в (2), получим $(2c)^2 = 2b^2$ или, сократив на 2, $2c^2 = b^2$. Отсюда следует, что число b^2 также является чётным. Но тогда чётным будет и число b. А поскольку и a явлется чётным, то дробь $\dfrac{a}{b}$ получается сократимой. Но это противоречит сделанному выше предположению, что дробь $\dfrac{a}{b}$ — несократимая. Противоречие возникло вследствие того, что в самом начале было сделано неверное предположение — корнем уравнения (1) является рациональное число $\dfrac{a}{b}$. Следовательно, никакая дробь не может быть корнем уравнения (1), что и требовалось доказать. Результат наших рассуждений можно сформулировать иначе: квадратный корень из числа 2 не является рациональным числом, то есть бесконечной периодической десятичной дробью.

Как известно, уравнение (1) имеет два корня, $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Будем искать приближённые значения числа $\sqrt{2}$. Так как $1^2 < (\sqrt{2})^2 = 2$, то $1 < \sqrt{2}$. А так как $(\sqrt{2})^2 = 2 < 2^2 = 4$, то $\sqrt{2} < 2$. Объединяя эти два неравенства,

[4]Пифагор (VI век до н.э.) — древнегреческий философ и математик.

получаем $1 < \sqrt{2} < 2$. Далее, так как $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$, а $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, то

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Это означает, что с точностью до 0,1 число $\sqrt{2}$ приближённо равно 1,4. Аналогично устанавливаем, что $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, так как $1{,}41^2 < 2$, а $1{,}42^2 > 2$. Следовательно, с точностью до 0,01 получаем $\sqrt{2} = 1{,}41$. Применив ещё раз тот же приём, найдём, что

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415,$$

то есть $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, и т. д.

Описанная процедура позволяет находить всё более точные приближения числа $\sqrt{2}$. Но ни одно из них не может быть равным в точности корню из двух, так как все приближённые значения являются рациональными числами, а мы доказали, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Поэтому последовательность приближённых значений будет бесконечной. Итак, число $\sqrt{2}$ представляется в виде бесконечной последовательности приближённых значений, каждое последующее из которых получается добавлением нового десятичного знака. Это позволяет записать $\sqrt{2}$ в виде *бесконечной непериодической десятичной дроби*:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots$$

Подобным способом можно находить десятичные приближения любого числа. Для обыкновенных дробей — это просто деление «уголком», которое приводит к бесконечным периодическим дробям.

Упражнения

1. С помощью калькулятора и «вручную» превратите данные обыкновенные дроби в бесконечные периодические десятичные дроби и укажите их периоды: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{2}{5}$.

2. Превратите периодические десятичные дроби $1{,}888\ldots$ и $0{,}1212\ldots$ в обыкновенные.

3. Один из алгоритмов, позволяющих найти любое число знаков в десятичной записи числа $\sqrt{a}$, приведён ниже без описания. Этот ребус посложнее, чем деление «уголком». Попробуйте его разгадать и найти ещё несколько знаков чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots \qquad\qquad \sqrt{5} = 2{,}236\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 1 \\ \hline
\times\begin{array}{r}24\\ \mathbf{4}\end{array} & -\begin{array}{r}100\\ 96\end{array} \\ \hline
\times\begin{array}{r}28\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{array} & -\begin{array}{r}400\\ 281\end{array} \\ \hline
\times\begin{array}{r}282\mathbf{4}\\ \mathbf{4}\end{array} & -\begin{array}{r}11900\\ 11296\end{array} \\ \hline
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|r}
 & 4 \\ \hline
\times\begin{array}{r}4\mathbf{2}\\ \mathbf{2}\end{array} & -\begin{array}{r}100\\ 84\end{array} \\ \hline
\times\begin{array}{r}44\mathbf{3}\\ \mathbf{3}\end{array} & -\begin{array}{r}1600\\ 1329\end{array} \\ \hline
\times\begin{array}{r}446\mathbf{6}\\ \mathbf{6}\end{array} & -\begin{array}{r}27100\\ 26796\end{array} \\ \hline
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

§ 4. Иррациональные числа

Итак, мы установили, что всякое рациональное число, то есть обыкновенную дробь, можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Кроме того, мы убедились, что некоторые задачи приводят к таким числам, которые можно изобразить только в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, например, $\sqrt{2}$ или $\sqrt{5}$. Следовательно, эти числа не являются рациональными.

Числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Таким образом, числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ будут иррациональными числами. Иррациональными будут также квадратные корни из других целых положительных чисел, если они не извлекаются нацело. Например, $\sqrt{9} = 3$ — это число рациональное, но $\sqrt{10}$ — число иррациональное. То же самое можно сказать и о кубических корнях, корнях четвёртой, пятой и любой другой степени. Например, кубический корень из 27 равен трём, это число рациональное, но кубический корень из 28 — число иррациональное, и так далее. Перечислим некоторые другие источники получения иррациональных чисел.

Заметим, что всякую бесконечную десятичную дробь можно записать в виде суммы бесконечного числа слагаемых:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots; \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots$$

Такие суммы называются *рядами*. Первый ряд представляет рациональное число $1/3$, второй – иррациональное число $\sqrt{2}$.

В школе вы решали квадратные, кубические и биквадратные уравнения. Их корни выражаются через радикалы второй, третьей или четвёртой степени. Например, уравнение $x^3 = 5$ имеет корень $x = \sqrt[3]{5}$, уравнение $2x^2 = 3$ — корни $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

О решении алгебраического уравнения n-й степени общего вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3}$$

речь пойдет позже. Корни же квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, как известно, находят по формулам

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

В школьных учебниках числа a, b и c обычно подбирают так, чтобы корень извлекался, то есть под корнем получался квадрат целого числа. Но если коэффициенты уравнения не подбирать специально, то корни x_1 и x_2 будут, вообще говоря, иррациональными числами, то есть бесконечными непериодическими десятичными дробями. То же самое справедливо и для уравнений любой степени.

На практике бесконечные десятичные дроби всегда заменяют приближёнными конечными. Как показывает следующий пример, делать это надо весьма аккуратно. Рассмотрим квадратное уравнение

$$14{,}5x^2 + 7{,}12x - 3\frac{7}{9} = 0.$$

Сразу заметим, что всякое уравнение, в том числе и это, можно решать либо точно, либо приближённо. Мы проиллюстрируем сейчас оба способа, а затем сравним их точность. Рассмотрим сначала точный способ, для чего запишем коэффициенты уравнения в виде обыкновенных дробей:

$$14\frac{1}{2}x^2 + 7\frac{3}{25}x - 3\frac{7}{9} = 0.$$

После вычисления дискриминанта $D = b^2 - 4ac = \dfrac{1517656}{5625}$ находим корни нашего уравнения:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-\dfrac{178}{25} - \sqrt{\dfrac{1517656}{5625}}}{2\cdot\dfrac{29}{2}} = \frac{-\dfrac{178}{25} - \dfrac{\sqrt{4\cdot 379414}}{\sqrt{75^2}}}{29} =$$

$$= \frac{-\dfrac{178\cdot 3}{25\cdot 3} - \dfrac{2\sqrt{379414}}{75}}{29} = \frac{-534 - 2\sqrt{379414}}{29\cdot 75} = \frac{-534 - 2\sqrt{379414}}{2175};$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-534 + 2\sqrt{379414}}{2175}.$$

Мы получили точные решения заданного квадратного уравнения, но они записаны в очень неудобной форме. По виду этой записи мы не можем даже грубо оценить найденные числа. Поэтому найдём приближённые значения корней x_1 и x_2, например, с помощью калькулятора. Сначала вычислим квадратный корень. Калькулятор покажет приближённое значение корня с четырьмя десятичными знаками после запятой: $\sqrt{379414} \approx 615{,}9659$. Все эти знаки являются верными, а допущенная погрешность вычислений меньше 0,0001. Продолжая расчёт, получаем:

$$x_1 \approx -\frac{534 + 2\cdot 615,9659}{2175} = -0{,}8119226.$$

При этих вычислениях погрешность менялась следующим образом: сначала её умножили на 2, а затем поделили на 2175. В итоге она уменьшилась в 1000 с лишним раз и вместо 0,0001 стала 0,0000001. Поэтому из написанных семи десятичных знаков после запятой первые 6 знаков будут верными и окончательный ответ будет такой: с точностью до 0,0000001 первый корень равен $x_1 \approx -0{,}8119226$. С такой же точностью мы найдём и второй корень уравнения: $x_2 \approx 0{,}3208881$.

Теперь решим данное уравнение другим способом. Перепишем его, заменив последний коэффициент $3\dfrac{7}{9}$ его приближённым значением 3,78. В результате получим уравнение

$$14{,}5x^2 + 7{,}12x - 3{,}78 = 0,$$

которое можно назвать приближённым к заданному уравнению.

Сначала, как обычно, вычисляем дискриминант:

$$D = 7{,}12^2 - 4 \cdot 14{,}5 \cdot (-3{,}78) = 50{,}6944 + 219{,}24 = 269{,}9344,$$

а затем находим корни, обозначив их через $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$:

$$\tilde{x}_1 = \frac{-7{,}12 - \sqrt{269{,}9344}}{29} \approx \frac{-7{,}12 - 16{,}42968}{29} \approx -0{,}8120579;$$
$$\tilde{x}_2 = \frac{-7{,}12 + \sqrt{269{,}9344}}{29} \approx \frac{-7{,}12 + 16{,}42968}{29} \approx 0{,}3210234.$$

Теперь обсудим результаты. Мы решили два квадратных уравнения, точное и приближённое. Второе решать значительно легче, так как на всех этапах решения, с самого начала и до конца, можно пользоваться калькулятором. Но сравнивая соответствующие корни этих уравнений (x_1 с $\tilde{x}_1$, x_2 с $\tilde{x}_2$), мы видим, что они различаются начиная с третьего десятичного знака после запятой. Иными словами, заменяя уравнение приближённым, мы выигрываем в скорости, но проигрываем в точности.

В рассмотренном примере приближённое уравнение дало 2 верных десятичных знака после запятой, однако так хорошо бывает не всегда. Можно подобрать такое «плохое» квадратное уравнение с дробными коэффициентами, что его приближённое уравнение начнёт «врать» уже со второго знака! Вывод: если вам важен точный результат, решайте первым способом, применяя калькулятор лишь на последнем этапе вычислений.

Заметим, что системы компьютерной алгебры позволяют получить как точные формулы для корней квадратных уравнений, так и приближённые значения корней с любой степенью точности без утомительных вычислений. Примеры будут рассмотрены в последнем параграфе главы.

Упражнения

1. Докажите, что числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{10}$ являются иррациональными.

2. Решите уравнение $16{,}5x^2 + 1{,}24x - 4\dfrac{5}{9} = 0$ точно и приближённо, оценив количество верных десятичных знаков в обоих случаях.

§ 5. Два замечательных иррациональных числа

В этом параграфе мы определим два очень важных числа. Первое из них — число π, равное отношению длины l произвольной окружности к её диаметру d: $\pi = l/d$. Это число известно с глубокой древности. Вавилонские, египетские, китайские и греческие математики нашли различные приближённые значения числа π: 3, $\sqrt{10}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{377}{120}$ и другие. Рассматривая вписанные в окружность правильные $2n$-угольники, Архимед[5] умел вычислять π с большой точностью. В частности, он нашел, что

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Лейбниц[6] доказал, что число $\pi/4$ можно представить в виде следующего ряда (заметьте, что дроби в правой части не являются десятичными):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \tag{5}$$

Этот ряд позволяет находить приближённые значения числа π. Например, мы можем переписать равенство (5) так:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{17}\right) - \ldots$$

В скобках стоят положительные числа. Поэтому, отбросив их, мы увеличиваем правую часть:

$$\frac{\pi}{4} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{263}{315}.$$

Умножая на 4, получаем оценку сверху: $\pi < \frac{1052}{315}$. С другой стороны, из того же равенства (5) находим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15}\right) + \ldots$$

Числа в скобках вновь положительны. Поэтому, отбрасывая их, находим:

$$\frac{\pi}{4} > 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{228}{315},$$

что даёт оценку снизу: $\pi > \frac{912}{315}$.

Итак, мы выяснили, что $\frac{912}{315} < \pi < \frac{1052}{315}$. Это довольно грубая оценка истинного значения числа π. Её можно улучшить, если взять для оценки не 5, а более слагаемых из ряда (5). Вот первые 15 точных знаков после

[5] Архимед (287–212 гг. до н. э.) — древнегреческий учёный.

[6] Готтфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ и математик.

запятой: $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ Заметим, что ЭВМ позволяет получить многие тысячи точных знаков практически мгновенно.

Символ π для обозначения отношения длины окружности к её диаметру предложил в 1706 году английский математик У. Джонсон. Скорее всего, обозначение происходит от начальной буквы греческого слова $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ — периферия, окружность. То обстоятельство, что число π не является рациональным, доказали в конце XVIII века математики Ламберт[7] и Лежандр[8].

Об этом замечательном числе можно рассказать много удивительных и поучительных историй. Вот вкратце история приближённого вычисления числа π. Оно уточнялось по мере развития математики и математических методов. Мы уже отметили, что древние математики нашли довольно много различных приближённых значений для π. В XVII веке Цейлен[9], проделав колоссальную работу, вычислил 22 десятичных знака числа π, а в 1674 году Лейбниц получил свой знаменитый ряд (5). Тем самым вопрос о сколь угодно точном вычислении числа π был принципиально решён, проблема была переведена в практическую плоскость.

Между прочим, ещё 100 лет назад русские учителя математики придумали простой способ запомнить первые десять знаков (после запятой) числа π. Любой школьник мог легко запомнить такое предложение: «*Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать число, ужъ знает*». Если вы посчитаете число букв в каждом слове и выпишите результаты по порядку, то и увидите начало записи числа π.

Другое известное в математике число — число e, называемое также неперовым числом в честь математика XVI века Непера[10]. Это число также может быть представлено в виде ряда

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{6}$$

(Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ читается «эн факториал».)

Число e возникает в следующей задаче. Рассмотрим процесс органического роста, например размножение бактерий. Будем считать, что все имеющиеся бактерии способны к размножению. Тогда скорость размножения в момент времени t, измеряемая в граммах в час, равна количеству бактерий, уже имеющихся к этому моменту. Если в начальный момент у нас был 1 грамм бактерий, то через час их будет e грамм.

Другой пример. Пусть тело движется так, что его скорость (например, в метрах в секунду) в каждый момент времени t равна пройденному пути.

[7]Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) — немецкий астроном, математик, физик и философ.

[8]Андре Мария Лежандр (1752–1833) — французский математик.

[9]Лудольф ван Цейлен (1540–1610) — голландский математик.

[10]Джон Непер (1550–1617) — шотландский математик.

Тогда путь (в метрах), пройденный телом за 1 секунду, считая от начала движения, равен e. Вместо движения можно рассматривать и другие процессы, скорость течения которых обладает аналогичным свойством. Такие процессы весьма часто встречаются в природе, общественной жизни, экономике, они описывают биологические, демографические и другие явления. В нашем курсе мы не раз встретимся с математическим описанием таких процессов, познакомимся с уникальными свойствами числа e.

Чтобы найти приближённое значение числа e, нужно в сумме (6) оставить несколько слагаемых, а остальными пренебречь. Чем больше слагаемых мы оставим, тем точнее будет результат: $e = 2{,}718281828459045\ldots$

Возьмём произвольное натуральное число n. Тогда будет справедливо приближённое равенство

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \tag{7}$$

правая часть которого представляет собой приближённое значение числа e, причём меньшее, чем e. Известно, что это приближённое значение отличается от истинного значения числа e меньше, чем на $\dfrac{1}{n \cdot n!}$. При $n = 5$, например, получаем

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \\ &= 2 + \frac{60 + 20 + 5 + 1}{120} = 2\frac{86}{120} = 2\frac{43}{60}. \end{aligned}$$

Погрешность в данном случае не превосходит $\dfrac{1}{5 \cdot 5!} = \dfrac{1}{600} < 0{,}00167$. Поскольку найденное приближённое значение $2\dfrac{43}{60} = 2{,}716666\ldots$ меньше e, а погрешность этого приближения не превосходит $0{,}00167$, то, $e < 2{,}716666\ldots + 0{,}00167 = 2{,}718366\ldots$ Таким образом,

$$2{,}716666\ldots < e < 2{,}718366\ldots,$$

откуда видно, что мы нашли два верных десятичных знака после запятой, то есть доказали, что $e = 2{,}71\ldots$ Используя ЭВМ, можно подсчитать число e с любой точностью. Символ e принят в честь выдающегося математика XVIII века Эйлера[11], который получил много замечательных формул, содержащих это число.

В заключение отметим, что числа π и e относятся к *трансцендентным* числам. Так называют числа, которые, в противоположность *алгебраическим* числам, не могут являться корнями никакого уравнения вида (3) с

[11]Леонард Эйлер (1707–1783) — российский математик, академик Петербургской академии наук.

целыми коэффициентами. Трансцендентность числа π доказал Линдеман[12], а трансцендентность e — Эрмит[13].

Упражнения

1. Найдите приближённое значение числа e, положив в формуле (7) число $n = 6$, и оцените погрешность этого значения.

2. Найдите приближённое значение числа π по формуле (5), взяв $n = 6$. Сколько верных знаков числа π получилось?

§ 6. Действительные числа

В предыдущих параграфах мы вспомнили бесконечные десятичные дроби; рациональные числа, то есть обыкновенные дроби, которые можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби; иррациональные числа, которые записываются в виде бесконечных десятичных непериодических дробей. Иррациональными являются корни большей части уравнений второй, третьей и т. д. степеней, а также трансцендентные числа π и e.

Теперь напомним, что любое целое число и любая конечная десятичная дробь также могут быть записаны в виде бесконечной десятичной дроби, например, $2 = 2{,}000\ldots$, а $3{,}5 = 3{,}5000\ldots$ Следовательно, бесконечные десятичные дроби — это универсальный способ записи как рациональных, так и иррациональных чисел.

Это обстоятельство даёт повод рассматривать множество всевозможных бесконечных десятичных дробей как самостоятельный объект. Для бесконечных десятичных дробей существует специальное название: они называются *действительными*, или *вещественными*, числами. Итак, все числа, которые мы упоминали до сих пор — натуральные, целые, рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные — являются действительными числами. Множество всех действительных чисел обозначают через $\mathbb{R}$. Оно включает в себя множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которое, в свою очередь, включает в себя множество целых чисел $\mathbb{Z}$, а последнее содержит множество натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Весьма важный математический факт заключается в том, что множество действительных чисел является упорядоченным. Это означает, что любые два действительных числа можно сравнить между собой, то есть указать, какое из них больше (или меньше). Процедура сравнения очень проста: нужно последовательно сравнивать цифры, стоящие на одинаковых позициях. Например, $2{,}381615\ldots > 2{,}381529\ldots$, так как на первых четырёх позициях соответствующие цифры одинаковы, а $6 > 5$.

[12] Фердинанд Линдеман (1852–1939) — немецкий математик.

[13] Шарль Эрмит (1822–1901) — французский математик.

Описанное правило сравнения работает при одном (и единственном) соглашении: не рассматривать периодические дроби с периодом 9. При этом множество действительных чисел, образно говоря, не сузится, так как всякую бесконечную периодическую дробь с периодом 9 можно заменить равной ей конечной десятичной дробью, например: $0{,}999\ldots = 1$; $0{,}42999\ldots = 0{,}43$; $2{,}65999\ldots = 2{,}66$.

Любое действительное число можно приблизить с любой степенью точности рациональным числом, то есть обыкновенной дробью. Возьмём, например, действительное число $a = 0{,}101100111000\ldots$, которое устроено так: после запятой записана одна единица и за ней — один нуль, затем две единицы и два нуля, 3 единицы и 3 нуля и т. д. Очевидно, что эта дробь не является периодической, поскольку никакая группа нулей и единиц не повторяется. Пользуясь только что описанным правилом сравнения бесконечных десятичных дробей, запишем последовательность неравенств для рассматриваемого числа a:

$$\begin{gathered} 0 < a < 1; \\ 0{,}1 < a < 0{,}2; \\ 0{,}10 < a < 0{,}11; \\ 0{,}101 < a < 0{,}102; \\ 0{,}1011 < a < 0{,}1012; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Каждое из чисел, входящих в эти неравенства, можно считать приближённым значением числа a. Слева стоят приближения числа a по недостатку, справа — приближения по избытку.

Сложить два произвольных действительных числа не так просто. Целые числа и обыкновенные дроби мы складывать умеем, но попробуйте сложить, например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Сумму $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ можно легко найти приближённо, с помощью калькулятора. Но сложить точно две бесконечные десятичные дроби $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ и $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$ по правилу сложения конечных десятичных дробей мы не сможем, поскольку мы начинаем складывать справа, а у бесконечных дробей правого конца нет!

Тем не менее, сумма двух любых бесконечных десятичных дробей всегда существует, и мы можем находить её приближённое значение с любой точностью. Как вы уже догадались, для этого нужно складывать соответствующие приближённые значения. Например,

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = 1{,}414\ldots + 2{,}236\ldots \approx 3{,}650\ldots$$

Мы поставили знак приближённого равенства, потому что последняя цифра может оказаться на единицу больше (подумайте, почему?)

Таким образом, на практике выполнение арифметических операций с действительными числами сводят к операциям с конечными десятичными дробями. Для этого заданные действительные числа округляют с нужной степенью точности. Правила округления десятичных дробей поясним на примерах. Следующие десятичные дроби мы округляем до сотых долей:

$$0{,}811 \approx 0{,}81, \quad 0{,}812 \approx 0{,}81, \quad 0{,}814 \approx 0{,}81, \quad 0{,}816 \approx 0{,}82, \quad 0{,}819 \approx 0{,}82.$$

Если десятичная дробь оканчивается на 5, то округлять можно по-разному. Если вычислений много, то нужно округлять попеременно то в одну, то в другую сторону. Тогда конечный результат будет ближе к истине. Если округлять всё время в одну сторону, то ошибка может накопиться и конечный результат будет весьма далёк от истины. Например, можно принять такое правило: если перед пятёркой стоит чётная цифра, то округляем в меньшую сторону, а если перед пятёркой стоит нечётная цифра — округляем в большую сторону: $0{,}815 \approx 0{,}82$ и $0{,}825 \approx 0{,}82$. Впрочем, теперь каждый округляет, как может. Калькулятор всегда округляет в меньшую сторону, просто отбрасывая «хвост»: $0{,}815 \approx 0{,}81$, а $0{,}825 \approx 0{,}82$. Налоговый инспектор всегда округляет в большую сторону: $0{,}815 \approx 0{,}82$, а $0{,}825 \approx 0{,}83$.

Операции сложения и умножения действительных чисел обладают теми же свойствами, что и операции над целыми и рациональными числами:

- $a + b = b + a$; $ab = ba$ — переместительность или коммутативность;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$ — сочетательность или ассоциативность:
- $a(b + c) = ab + ac$ — распределительность или дистрибутивность сложения относительно умножения.

Числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ являются примерами так называемых числовых систем, которые имеют специальные названия. Например, говорят: кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле действительных чисел. Эти термины мы будем обсуждать во второй половине нашего курса. Там мы покажем, в частности, что поле действительных чисел можно расширить и получить так называемые *комплексные числа*.

Вспомним теперь действия со степенями. По определению

$$a^0 = 1, \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Отсюда следует, что для любых целых чисел m и n справедливы следующие формулы:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^n)^m = a^{mn}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Число, которое после возведения в степень n оказывается равным a, называется *корнем степени n из a*. Если число n нечётное, то существует только один корень степени n из числа a, который обозначается $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$.

Если n чётное, а число a — положительное, то корней будет два. Например, числа 3 и -3 будут корнями четвёртой степени из 81, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Положительный корень называется *арифметическим*, и именно он обозначается символом $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$.

Степень с дробным показателем определяется и записывается так:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Оказывается, что имеют смысл и выражения вида a^x, где x — любое действительное число, например $\sqrt{2}$. Действия с такими степенями производятся по тем же правилам, что и с натуральными степенями, например $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\pi} = 3^{\sqrt{2}+\pi}$.

При работе с калькулятором или компьютером числа удобно записывать в так называемой стандартной (экспоненциальной) форме, то есть в виде произведения двух множителей, первый из которых заключён между числами 1 и 10, а второй представляет собой степень десятки: $243507 = 2{,}43507 \cdot 10^5$; $0{,}184 = 1{,}84 \cdot 10^{-1}$ и т. д.

Пример 6.1. Вычислите с помощью калькулятора выражение

$$\left(\frac{\left(7/8 - 0{,}9^3\right) \cdot 2{,}41 + \left(6{,}2 \cdot \sqrt{5{,}723} - 4{,}25\right)}{(16 \cdot 13{,}72 - 3/11) + \dfrac{72{,}3 : 8{,}4}{6} - 2{,}1^3}\right)^{1/2},$$

округляя в каждом действии результат до тысячных. Окончательный результат округлите до сотых.

Решение. Прежде всего определяем порядок действий. Сначала нужно выполнить действия в числителе, затем — в знаменателе, и после этого возвести полученную дробь в степень $1/2$, то есть извлечь из неё квадратный корень. Поскольку все операции будут выполняться с десятичными дробями, то обыкновенные дроби предварительно будем переводить в десятичные и округлять до четырёх знаков после запятой.

Найдём числитель: $0{,}9^3 = 0{,}729$; $7/8 - 0{,}729 = 0{,}875 - 0{,}729 = 0{,}146$; $0{,}146 \cdot 2{,}41 = 0{,}351\underline{8} \approx 0{,}352$. Мы подчёркиваем первую отбрасываемую при округлении цифру: $\sqrt{5{,}723} = 2{,}392\underline{2}\ldots \approx 2{,}392$; $2{,}392 \cdot 6{,}2 = 14{,}830\underline{4} \approx 14{,}830$; $14{,}830 - 4{,}25 = 10{,}580$; $0{,}352 + 10{,}580 = 10{,}932$.

Теперь находим знаменатель: $16 \cdot 13{,}72 = 219{,}52$; $219{,}52 - 3/11 = 219{,}52 - 0{,}2727\underline{2}\ldots \approx 219{,}52 - 0{,}2727 = 219{,}247\underline{3} = 219{,}247$. Продолжаем вычисления: $72{,}3 : 8{,}4 = 8{,}607\underline{1}\ldots \approx 8{,}607$; $8{,}607 : 6 = 1{,}434\underline{5} \approx 1{,}434$; $219{,}52 + 1{,}434 = 220{,}954$; $2{,}1^3 = 9{,}261$; $220{,}954 - 9{,}261 = 211{,}693$.

Делим числитель на знаменатель и извлекаем квадратный корень, получая окончательный ответ: $10{,}932 : 211{,}693 = 0{,}051\underline{6}\ldots \approx 0{,}052$; $(0{,}052)^{1/2} = \sqrt{0{,}052} = 0{,}2280\ldots \approx 0{,}23$.

Упражнения

1. Вычислите и округлите до тысячных следующие величины: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$.

2. Сравните следующие пары чисел, заменив букву «и» на нужный знак неравенства:

а) 0,142816 и 0,142827; б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; в) $\dfrac{2}{7}$ и $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; г) $\sqrt{5}$ и 2,1421619.

3. Округлите числа π и e до тысячных.

4. Решите неравенство $3x + 7 > 0$. Запишите ответ с помощью бесконечной периодической десятичной дроби, а затем округлите его до сотых.

5. Выполните указанные действия, используя стандартную форму записи числа:
а) $375648 \cdot 2970361$; б) $76580334 : 661$; в) $1{,}24305 \cdot 10^7 \cdot 4{,}21773294 \cdot 10^4$.

6. Вычислите с помощью калькулятора выражение

$$\left(\frac{(2{,}6^3 + 9/8) : 6{,}37 - (2{,}44 - \sqrt{4{,}637} \cdot 8{,}1)}{2{,}1^2 - \dfrac{120{,}3 : 7{,}33}{5} - (1/17 - 14 \cdot 21{,}51)} \right)^{1/2},$$

округляя в каждом действии результат до тысячных. Ответ округлите до сотых.

§ 7. Проценты

Одна сотая доля какого-либо количества называется *процентом*. Например, если в городе N всего 300 судей, то 3 судьи — это 1%, 6 судей — это 2% и т. д.

Пример 7.1. Некто утаил прибыль в размере 10 миллионов рублей. Какую сумму недополучила казна, если налог на прибыль составляет 22%?

Решение. Обозначим искомую сумму через x, тогда 10 000 000 рублей составляет 100%, а x рублей составляет 22%. Составим пропорцию:

$$\frac{10000000}{x} = \frac{100}{22} \Rightarrow 10000000 \cdot 22 = x \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{10000000 \cdot 22}{100} = 2200000.$$

Различают три типа задач на проценты. В задачах первого типа отношение двух чисел выражают в процентах. В задачах второго типа находят требуемое количество процентов от известного числа. Наконец, в задачах третьего типа ищется число по заданным нескольким его процентам.

Пример 7.2. В суде рассмотрено 40 дел, в том числе 5 по обвинению в воровстве. Сколько процентов последние составляют от всех дел?

Решение. Составим пропорцию: 40 дел — 100%, 5 дел — x%,

$$\frac{40}{5} = \frac{100}{x} \Rightarrow 40 \cdot x = 5 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 100}{40} = 12{,}5.$$

Сформулируем общее правило: *чтобы найти процентное отношение первого числа ко второму, нужно разделить первое число на второе и умножить полученное частное на* 100%.

Пример 7.3. За отчётный год в районе зарегистрировано 1250 преступлений, 16% из них составляют преступления в сфере экономики. Найдите число таких преступлений.

Решение. Обозначим искомое число через x и составим пропорцию: 1250 преступлений — 100%, x преступлений — 16%,

$$\frac{1250}{x} = \frac{100}{16} \Rightarrow 1250 \cdot 16 = x \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{1250 \cdot 16}{100} = 200.$$

Получаем следующее правило: *чтобы найти указанное число процентов от данного числа, нужно разделить заданное число на* 100 *и умножить на данное число процентов.*

Пример 7.4. В 2002 году в области N в результате дорожно-транспортных происшествий погибло 1748 человек, что составляет 6,903% от общего числа пострадавших во всех происшествияй. Найдите общее число пострадавших.

Решение. Обозначим число всех пострадавших через x и составим пропорцию: x пострадавших — 100%, 1748 пострадавших — 6,903%,

$$\frac{x}{1748} = \frac{100}{6{,}903} \Rightarrow 6{,}903 \cdot x = 1748 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{1748 \cdot 100}{6{,}903} = 25322.$$

Соответствующее правило звучит так: *чтобы найти число по нескольким его процентам* (*данной величине*), *нужно умножить эту величину на* 100 *и разделить на данное число процентов.*

На самом деле, чтобы научиться правильно решать задачи на проценты, совершенно не обязательно запоминать формулировки правил. Главное — правильно составить пропорцию.

Пример 7.5. В четырёх районах областного центра зарегистрировано за год соответственно 1819, 2289, 2070 и 1834 преступлений. Процент раскрываемости преступлений по районам оказался таким: 70,3; 66,0; 66,6; 70,5. Найдите процент раскрываемости в целом по городу.

Решение. По условию в первом районе зарегистрировано 1819 преступлений и раскрыто 70,3% этих преступлений. Значит, можно найти число раскрытых преступлений. Это задача второго типа. Итак, число раскрытых преступлений в первом районе будет $1819 \cdot 0{,}703 = 1278{,}757 \approx 1279$. Найдём число раскрытых преступлений и для других районов: $2289 \cdot 0{,}66 = 1510{,}74 \approx 1511$; $2070 \cdot 0{,}666 = 1378{,}62 \approx 1379$; $1834 \cdot 0{,}705 = 1292{,}97 \approx 1293$. Теперь найдём число раскрытых преступлений во всём городе: $1279 + 1511 + 1379 + 1293 = 5462$. С другой стороны, число всех зарегистрированных в городе преступлений по условию задачи равно $1819 + 2289 + 2070 + 1834 = 8012$, поэтому процент раскрываемости преступлений по городу будет равен $\dfrac{5462 \cdot 100\%}{8012} = 68{,}2\%$. Сравнивая этот результат с процентами по районам, мы видим, что в первом и четвёртом из них дела обстоят лучше, чем по городу в целом.

Сделаем важное замечание. Возникает искушение взять в качестве ответа среднее арифметическое чисел 70,3; 66,0; 66,6; 70,5:

$$\frac{70{,}3+66{,}0+66{,}6+70{,}5}{4}=\frac{273{,}4}{4}=68{,}35.$$

Как мы видим, это число отличается от найденного выше. При изучении среднего арифметического мы объясним, почему только первый способ решения является верным.

Пример 7.6. Таблица 3 содержит данные за 2002 и 2003 годы о количестве совершённых преступлений и о ходе следствия по ним. Известно, что половина вынесенных приговоров — обвинительные, причём 52% из них в 2002 году и 40% в 2003 году приведены в исполнение. Дополним указанную таблицу двумя новыми столбцами, содержащими процент, который составляют соответствующие абсолютные значения от общего числа преступлений за 2002 и 2003 годы.

Таблица 3

Год	2002	2003
Всего преступлений	5840	6720
Тяжких	35	33
В состоянии опьянения	2961	3262
Транспортных	1147	1310
Завершено	3950	4520
Всего приговоров	3272	3816
Обвинительных		
Исполнено		

Обработаем данные за 2002 год. По условию половина вынесенных приговоров — обвинительные, поэтому их будет $3272:2=1636$. Найдём 40% от этого числа и заполним последнюю строку второго столбца: $1636\cdot 0{,}4=$ $=654{,}4\approx 654$ (число приговоров не может быть дробным). Теперь, приняв число всех преступлений (5840) за 100%, найдём, сколько процентов составляют числа 35, 2961 и т. д. (задача первого типа). В результате получается таблица 4.

Таблица 4

Год	2002		2003	
Всего преступлений	5840	100%	6720	
Тяжких	35	0,60%	33	
В состоянии опьянения	2961	50,70%	3262	
Транспортных	1147	19,64%	1310	
Завершено	3950	67,64%	4520	
Всего приговоров	3272	56,03%	3816	
Обвинительных	1636	28,01%		
Исполнено	654	11,20%		

Упражнения

1. Дозаполните таблицу 4 в колонках данных за 2003 год.

2. Найдите процент раскрываемости краж из складов и торговых точек в целом по городу. Сведения по отдельным районам представлены в таблице 5.

Таблица 5

Район	Число краж	Процент раскрываемости
Заволжский	7	75,0
Московский	69	41,9
Пролетарский	25	34,8
Центральный	29	13,3

§ 8. Сложные проценты

Мы расскажем сейчас одну историю, которая произошла в городе Дрюково. На карте этого города нет, как нет и других, о которых вы узнаете в следующих параграфах. Героями наших историй будут студенты, чиновники, банкиры, юристы, милиционеры, правонарушители — люди, находящиеся в самых разнообразных отношениях с законом и обществом. С их помощью мы будем моделировать различные правовые коллизии, представляющие интерес для будущих юристов. Для описания возникающих проблем мы будем привлекать простейшие математические методы.

Так вот, однажды майор Зимин принёс в Дрюковоуниверсалбанк одну тысячу рублей и поинтересовался, сколько же будет у него на счёте через десять лет? В Дрюкове живут исключительно вежливые люди, особенно те, которые служат в банках. Они быстренько всё подсчитали и сообщили майору Зимину следующее.

«По истечении года банк начисляет на вклад 5%. Поэтому через год к Вашей тысяче рублей добавится $1000 \cdot 0{,}05 = 50$ рублей, и вклад будет составлять 1050 рублей. По истечении второго года к этой сумме добавится ещё 5%, то есть $1050 \cdot 0{,}05 = 52{,}5$ рублей. Таким образом, через два года на Вашем счёте будет уже $1050 + 52{,}5 = 1102$ рубля 50 копеек. К концу третьего года...»

«Все ясно!» — воскликнул майор. Он был человеком образованным и сразу понял суть дела. «Через год мой вклад будет $1000 + 1000 \cdot 0{,}05 = 1000 \cdot 1{,}05$ рублей. Через два получится $1000 \cdot 1{,}05 + (1000 \cdot 1{,}05) \cdot 0{,}05 = 1000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 1000 \cdot 1{,}05^2$ рублей. Через 3 года на счёте будет $1000 \cdot 1{,}05^2 + (1000 \cdot 1{,}05^2) \cdot 0{,}05 = 1000 \cdot 1{,}05^2 \cdot (1 + 0{,}5) = 1000 \cdot 1{,}05^3$ рублей, через 4 года...»

«Совершенно верно», — ответили ему. «Через 4 года будет $1000 \cdot 1{,}05^4$ рублей, а через 10 лет — $1000 \cdot 1{,}05^{10}$ рублей, то есть 1628 рублей 94 копейки.» Майор быстро проверил этот результат на своём калькуляторе: $1{,}05^2 = 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 1{,}1025$; $1{,}05^4 = 1{,}1025^2 \approx 1{,}2155062$; $1{,}05^8 = 1{,}2155062^2 \approx$

$\approx 1{,}4774553$; $1{,}05^{10} = 1{,}05^8 \cdot 1{,}05^2 \approx 1{,}4774553 \cdot 1{,}1025 \approx 1{,}6288944$; 1000 руб. $\cdot\, 1{,}6288944 = 1628{,}944$ руб. ≈ 1628 руб. 94 коп.

Майор Зимин остался доволен перспективой и решил её улучшить — съездил домой и привёз ещё одну тысячу рублей. Он легко подсчитал, что через 10 лет у него накопится $2000 \cdot 1{,}62288944$ руб. ≈ 3257 руб. 89 коп., и тут же задумался: сколько у него накопилось бы через 20 лет? Размышляя об этом, майор Зимин открыл *формулу сложных процентов*: *если начальный вклад равен* A, *а в конце каждого года банк начисляет* $p\%$, *то через* t *лет величина вклада* (*обозначим её* A_t) *будет*

$$A_t = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Значит, через 20 лет у него было бы $2000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} = 2000 \cdot 1{,}05^{20} = 2000 \cdot 1{,}05^{10} \cdot 1{,}05^{10} \approx 2000 \cdot (1{,}6228944)^2 \approx 5267$ руб. 57 коп.

Вечером Зимин рассказал о своём открытии соседской бабушке. Эта бабушка очень уважала серьёзных мужчин, поэтому следующим утром она поехала в банк и положила (на чёрный день) пятьдесят рублей.

У этой истории получилось интересное продолжение. Желая привлечь побольше вкладчиков, Дрюковоуниверсалбанк стал начислять проценты через каждые полгода. Но, чтобы не оставить себя в дураках, он уменьшил процентную ставку вдвое, сделав её $2{,}5\%$. Поэтому после первого начисления (то есть через полгода) вклад становится равным $A \cdot 1{,}025$ рублей, после второго, то есть через год, — $A \cdot 1{,}025^2$ рублей и т. д. При таких процентах у майора Зимина через год на счёте оказалось бы немного больше, а именно $1000 \cdot 1{,}025^2 \approx 1050$ рублей 62,5 копейки, а не 1050 рублей, как раньше.

Но тут конкурирующий банк «Процветание» объявил, что начисляет проценты по истечении каждого квартала в размере $1{,}25\%$. В таком случае через год сумма вклада майора Зимина оказалась бы ещё немного больше: $1000 \cdot 1{,}0125^4 \approx 1050$ рублей 94,5 копейки, а 50 бабушкиных рублей выросли бы за год до 52 руб. 55 коп. Однако Дрюковоуниверсалбанк, не желая терять вкладчиков, решил начислять ежемесячно $\frac{5}{12}\%$, что через год приводит к сумме $A \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12}$ рублей!

Тогда банк «Процветание» объявил о начислении процентов каждую неделю в размере $\frac{5}{52}\%$ соответственно, поэтому в конце года у вкладчика оказывалась ещё большая сумма: $A \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{52}\right)^{52}$ рублей. В пылу борьбы за кошельки вкладчиков Дрюковоуниверсалбанк перешёл к ежедневному начислению доли $\frac{0{,}05}{365}\%$, на что разгорячённое «Процветание» ответило ежечасным начислением по $\dfrac{5}{8760}\%$, тогда...

В общем, борьба продолжалась. Поднятая банками шумиха стала для них хорошей рекламой, и к ним потянулись клиенты. Директор банка «Дракон» подумал о том, как ему вмешаться в это состязание и выиграть его. Он поручил своему юристу разобраться в этом деле, и тот рассудил примерно так.

Будем считать для простоты, что начальный вклад составляет 1 рубль, и начисление идет n раз в год каждый раз по $1/n$ рубля. Обозначим через B_n сумму, накопившуюся в конце года. При различных значениях n получаются следующие суммы:

$$B_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \; B_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \; B_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \; \ldots, \; B_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Поскольку юрист изучал в вузе математику, он сразу вспомнил, что бесконечная последовательность чисел, которая получается таким образом, имеет предел $e = 2{,}71828\ldots$ — то самое замечательное иррациональное число, о котором мы с вами говорили в §5.

Значит, как бы Дрюковоуниверсалбанк и банк «Процветание» ни старались дробить процентную ставку и период начисления, вклад, самое большее, может увеличиться за год не более чем в e раз! И причём только в том случае, если начисление будет идти непрерывно. Следовательно, чтобы обойти конкурентов, нужно предложить такую схему начисления процентов, которая давала бы увеличение вклада за год больше, чем в e раз, например в 2,8 раза.

В заключение заметим, что задачи на сложные проценты можно весьма эффективно решать на компьютере. При этом следует пользоваться либо системами компьютерной алгебры, описанными в следующем параграфе, либо электронными таблицами, знакомство с которыми состоится в конце третьей главы.

Упражнения

1. Подсчитайте, сколько денег будет у бабушки — соседки майора Зимина — на счёте через сто лет, если она положила (на чёрный день) 50 рублей, а банк ежегодно начисляет 5%.

2. Найдите, какой должна быть ежегодная процентная ставка, чтобы за 3 года происходило удвоение вклада.

§ 9. Системы компьютерной алгебры

Среди множества компьютерных программ особое место занимают так называемые системы компьютерной алгебры, позволяющие производить различные математические вычисления как в числовом, так и в символьном виде. Эти программы являются, по-существу, волшебными «палочками-выручалочками» при проведении сложных или трудоемких вычислений. Они обладают колоссальными возможностями, значительная часть которых используется профессиональными математиками.

Именно для облегчения труда профессионалов такие программы и были созданы изначально: в соответствии с заданием программы самостоятельно произведут все необходимые выкладки и напечатают ответ, на получение которого «вручную» человеку пришлось бы потратить долгие часы или даже годы. Однако системы компьютерной алгебры могут с успехом использовать не только математики, но и люди иных профессий, в частности юристы. Для них важно то, что эти программы позволяют автоматизировать простейшие действия над числами, с их помощью можно складывать обыкновенные дроби, решать уравнения, вычислять сложные проценты...

Существует несколько разновидностей подобных программ, как свободных, так и проприетарных (требующих покупки лицензии на использование). Мы остановимся на свободной системе компьютерной алгебры Maxima, которой вполне достаточно для иллюстрации наших примеров.

Ещё раз подчеркнём, что в отличие от калькуляторов и офисных компьютерных программ система Maxima способна выполнять точные вычисления над дробями, оперировать с числами, содержащими сколь угодно много цифр, работать с символьной информацией. В этом параграфе мы рассмотрим только содержательные моменты работы с программой Maxima, а все технические детали (запуск программы, использование меню и т. п.) отложим до четвёртой главы.

В §1 мы вспоминали, как раскладывать натуральное число на простые множители. Для решения этой задачи факторизации (от английского слова factor — множитель) в программе Maxima существует одноимённая функция `factor`. Заметим, что названия большинства функций чаще всего являются аббревиатурами соответствующих англоязычных терминов.

Пример 9.1. Разложите на множители число 420.

Решение. Выполнение команды `factor(420)` немедленно позволяет получить ответ $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (без точек между сомножителями). На рис. 3 изображён внешний вид одной из графических оболочек программы Maxima. Разложение бóльшего числа 2073456 также получается за неуловимые доли секунды: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17$, а вот для факторизации не такого уж и большого числа 6312573512387512783 5 на компьютере с тактовой частотой процессора Pentium IV, равной 2.4 Ghz, требуется почти 45 секунд.

Между прочим, криптостойкость[14] алгоритмов шифрования, о которых уже упоминалось выше (стр. 2), основана именно на невозможности быстрого разложения на простые множители больших чисел. Отметим, что с помощью программы Maxima можно раскладывать на множители не только числа, но и символьные выражения. Известная вам из школы формула $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ легко получается с помощью команды `factor(x^2-a^2)`.

[14]Криптостойкость характеризует уровень защищённости алгоритмов шифрования информации от попыток несанкционированного «взлома».

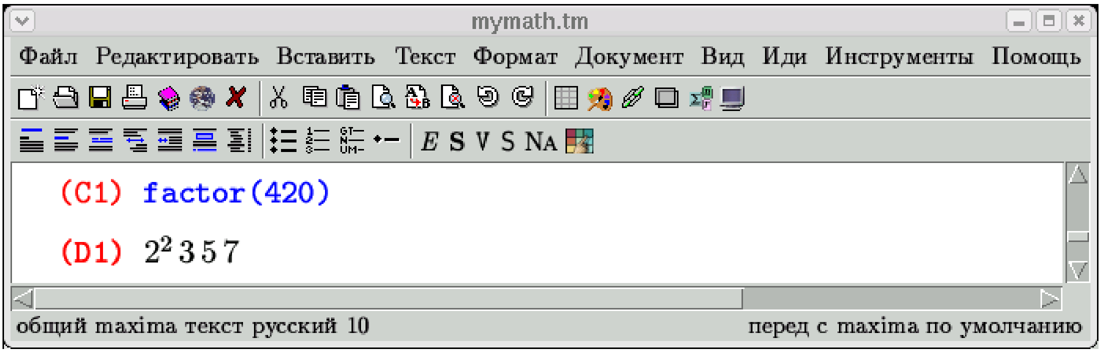


Рис. 3

В Maxima удобно выполнять действия над простыми дробями, которые записываются в ней обычным образом: 3/5, 101/102 и т. п. Сложение, вычитание, умножение и деление дробей обозначаются символами «+», «-», «*» и «/» (слэш) соответственно. Например, сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ записывается в виде `1/2+1/3+1/6`, а подсчитать выражение $\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ можно с помощью команды `(1-1/8)*2/3-1/4`.

В §3 мы столкнулись с тем, что обычный калькулятор не позволяет сравнить дроби 3/13 и 2307692/9999999. В Maxima подобных проблем не существует: команда `3/13 - 2307692/9999999` даёт результат $\frac{1}{129999987}$, откуда следует неравенство $\frac{3}{13}>\frac{2307692}{9999999}$. А для упрощения выражения $\sqrt{420}$ можно воспользоваться функцией `sqrt` (от SQuare RooT — квадратный корень). Выполнение команды `sqrt(420)` приводит к выражению $2\sqrt{105}$.

Для обозначения операции возведения в степень используется символ «^», с помощью которого можно найти 2^3 (команда `2^3`), $4^{1/2}=\sqrt{2}$ (команда `4^(1/2)`) или 24^{40} (команда `24^40`). В последнем случае Maxima практически мгновенно напечает ответ

```
16160309291565740657279117440900958232530295124578533376.
```

Пример 9.2. Найдите 120!

Решение. Для вычисления факториала используется стандартное математическое обозначение — символ восклицательного знака после числа, поэтому команда `120!` приводит к ответу, который занимает несколько строк:

```
66895029134491270575881180540903725867527463331380298\
10295671352301633557244962989366874165271984981308157\
63789321409055253440858940812185989848111438965000596\
4960521256960000000000000000000000000000.
```

Чтобы преобразовать простую дробь в десятичную или получить численное значение того или иного символьного выражения, следует воспользоваться командой `numer`. Отметим, что при записи десятичных дробей в системе Maxima для отделения дробной части используется символ «`.`» (точка), а не запятая.

Для нахождения приближённого значения $\sqrt{2}$ следует воспользоваться командой `sqrt(2),numer`, результатом которой будет 1.414213562373095. Полученный ответ содержит 16 значащих цифр. Если требуется бо́льшая точность, то применяют команду `bfloat`, предварительно установив количество значащих цифр с помощью переменной `fpprec`.

Пример 9.3. Найдите 60 верных значащих цифр числа $\sqrt{3}$.

Решение. Сначала следует с помощью команды `fpprec:60` установить требуемую точность вычислений, а затем ввести команду `bfloat(sqrt(3))`. Ответ выводится в экспоненциальной форме (см. §6):

```
1.73205080756887729352744634150587236694280525381038062805580 7B1
```

Символ `B1` в конце этой записи означает, что число, стоящее перед ним, умножается на 10 в степени 1. Отметим, что Maxima не отбрасывает «лишние» цифры, а округляет числа до требуемого количества знаков.

Системы компьютерной алгебры умеют решать алгебраические уравнения общего вида (см. уравнение (3) из §4). В Maxima это можно сделать с помощью функции `solve`.

Пример 9.4. Решите уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение. Хорошо известные формулы (4) из §4 легко находятся программой Maxima, если задать команду `solve(a*x^2+b*x+c=0, x)`. Функция `solve` имеет два параметра: уравнение, которое мы хотим решить, и переменную, относительно которой решается уравнение. Если в уравнении имеется лишь одна символьная переменная, то второй параметр функции `solve` можно опустить. Решения уравнения $x^2 = 2$, например, можно получить с помощью команды `solve(x^2=2)`. В этом случае ответ будет выдан в символьной форме: $\left[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\right]$.

Для получения приближённых значений корней уравнений можно воспользоваться командой `allroots`. Например, команда `allroots(x^2=2)` приведёт к ответу $[x = 1.414213562373095, x = -1.414213562373095]$.

Пример 9.5. Найдите 40 верных знаков числа π.

Решение. В программе Maxima число π записывается как `%pi`, а число e — как `%e`. Для получения их приближённых значений с нужной степенью точности можно также использовать команды `fpprec` и `bfloat`. После установки нужной точности (`fpprec:40`) зададим команду `bfloat(%pi)` и найдём, что $\pi \approx 3.141592653589793238462643383279502884197$.

Как отмечалось ранее, числа π и e можно записать в виде рядов. Вспомним формулу, предложенную Лейбницем:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Возможности Maxima не безграничны и доказать формулу Лейбница ей не под силу. Однако она может вычислить сумму любого числа слагаемых, то есть найти число $\pi/4$ с любой требуемой степенью точности.

Пример 9.6. Проверьте выполненные в §5 выкладки, вычислив сумму первых четырёх и пяти членов ряда (5).

Решение. Команда `sum` для нахождения суммы нескольких заданных слагаемых ряда имеет четыре параметра: формула, задающая общий член ряда; переменная, по которой ведётся суммирование; начальное и конечное значения этой переменной. В данном случае команда записывается в виде `sum((-1)^n/(2*n+1), n, 0, 3)` или `sum((-1)^n/(2*n+1), n, 0, 4)`. Естественно, компьютер выдаст те же результаты, $\dfrac{76}{105}$ и $\dfrac{263}{315}$.

Упражнения

1. Разложите на простые множители числа 123456, 12345678, 12345678910, 1234567891011, 1234567891011121314 и 12345678910111213141516.

2. Разложите на множители выражение $x^5 - 1$.

3. Найдите наибольший общий делитель следующих пар чисел: 12345 и 123456, 1234 и 4321, 777777 и 333333, 102448 и 10241024.

4. Произведите указанные действия: $\dfrac{\left(13\frac{1}{4} - 2\frac{5}{27} - 10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25} + 46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7} + \frac{10}{3}\right) : \left(12\frac{1}{3} - 14\frac{2}{7}\right)}$.

5. Найдите приближённые значения и периоды следующих десятичных дробей:
$\dfrac{1}{7} + \dfrac{4}{23}$; $\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{4}{23}\right)^5$; $\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{4}{23}\right)^{25}$.

6. Найдите десятичную запись числа $\sqrt{2}$, содержащую 500 верных знаков.

7. Решите уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

8. Найдите сумму 100 первых членов ряда (6): $e \approx \sum\limits_{0}^{100} \dfrac{1}{n!} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{100!}$.

Сколько верных знаков числа e получилось?

Глава II

Информация и компьютер

Понятие *информации* играет в информатике столь же важную роль, как и понятие числа в математике. Информатика (computer science) изучает свойства информации, а также способы представления, накопления и обработки информации с помощью технических средств. Именно поэтому изучение теоретических основ информатики мы начнём с обсуждения понятия информации.

Хотя теоретическая информатика возникла довольно давно, свою сегодняшнюю значимость она приобрела за последние 10–20 лет. Основная причина этого явления — бурное развитие технологической базы и, прежде всего, компьютеров и сетей. Только широкое распространение высокопроизводительных ЭВМ, соединённых быстрыми каналами обмена информацией, позволило человечеству вступить в новую эпоху — эпоху информационных технологий. В этой главе мы познакомимся с основными понятиями теоретической информатики, поговорим о компьютерном «железе» и компьютерных программах, обсудим основные возможности современных информационных технологий и отметим те из них, которые необходимы любому юристу.

§ 1. Человек и информация

Термин «информация» происходит от латинского слова *informatio*, означающего разъяснение, изложение, осведомлённость. Информацию мы передаём друг другу в устной и письменной форме, а также в форме жестов и знаков. Любую нужную информацию мы осмысливаем, передаём другим, на её основе делаем определённые умозаключения. Универсальное определение информации дать весьма затруднительно, хотя это понятие является одним из основных в современной науке. Его сложность, многоплановость, широта применения и быстрое развитие отражаются в постоянном появлении новых толкований терминов «информатика» и «информация». Имеется много определений информации, от наиболее общего, философского — «информация есть отражение реального мира» — до узкого, практического — «информация есть все сведения, являющиеся объектом хранения, передачи и преобразования».

Термин *обработка информации* появился совсем недавно, хотя обрабатывать информацию люди начали ещё в древние времена. Тогда из поколения в поколение информация передавалась устно. Это были сведения о профессиональных навыках: приёмах охоты, обработке добычи, способах земледелия и т. п. Затем информацию стали фиксировать в виде графических образов окружающего мира. Первые наскальные рисунки, изображающие животных, растения и людей, появились примерно 20–30 тысяч лет назад.

Со временем появилась письменность — более современный способ фиксирования и передачи информации. На чём только люди не писали! В Индии — на пальмовых листьях, в Вавилоне — на глиняных плитках, на

Руси пользовались берестой. Письменность явилась новым шагом человечества в области создания средств хранения и передачи информации.

Следующим революционным явлением в этой сфере стало изобретение печатного станка, благодаря которому появилась книга и, таким образом, стало возможным массовое тиражирование знаний, зафиксированных на материальном носителе. Возникли потоки книг, которые, сливаясь с потоками технической документации и многотомной справочной литературой, образовали океаны информации.

Для сбора, переработки и распространения информации создавались издательства и типографии — родилась информационная промышленность. Газеты, журналы и другие издания, выпускаемые большими тиражами, зачастую, кроме полезной информации, обрушивали на человека огромное количество и ненужных, бесполезных сведений. Для обозначения таких лишних сведений придумали даже специальный термин — информационный шум. Помимо печати появились и другие средства массовой информации — радио и телевидение.

В течение последних столетий государства постоянно воевали друг с другом, что требовало информации о военном потенциале противника. Её добывали, например, с помощью разведчиков. Со временем остро встал вопрос о защите информации от утечки в посторонние руки. Стали разрабатывать методы кодирования и способы быстрой и безопасной пересылки информации.

Сейчас книга уже не отвечает возросшим требованиям общества, так как является неудобным, сложным, дорогим, а главное «медленным» носителем информации. Компьютеры, являющиеся революционным изобретением XX века, предоставили не только новые носители информации, но и средства её обработки. В совокупности с линиями связи (проводная связь, радио, космическая и оптическая связь) ЭВМ делает доступной любую часть гигантского океана информации.

Кодирование информации — это переход от одной формы представления информации к другой, более удобной для хранения, передачи или обработки. Поскольку компьютер может обрабатывать только информацию, представленную в числовой форме, то любая другая информация (звуки, изображения, показания приборов и т. д.), предназначенная для обработки на компьютере, должна быть преобразована в числовую форму.

Важная проблема — оценка количества информации. Часто приходится слышать, что то или иное сообщение несёт мало информации или, наоборот, содержит исчерпывающую информацию. Разные люди, получившие одно и то же сообщение (например, прочитав статью в газете), по-разному оценивают количество содержащейся в нём информации. Тот, кто знал мало о предмете статьи, решит, что получил много информации; осведомлённый человек скажет, что информации не получил вовсе.

При получении информации неопределенность по интересующему нас вопросу уменьшается. Если в результате получения сообщения будет достигнута полная ясность в данном вопросе (неопределенность исчезнет), то говорят, что была получена исчерпывающая информация. Напротив, если после получения сообщения неопределенность осталась прежней (сообщаемые сведения или уже были известны, или не относятся к делу), значит, существенной информации по данному вопросу получено не было.

Существуют и вполне объективные, не зависящие от мнения конкретного человека, способы измерения информации. Если подбросить монету и проследить, какой стороной она упадёт, то мы получим определённую информацию. Обе стороны монеты «равноправны», поэтому одинаково вероятны выпадение как «орла», так и «решки». Получаемую информацию можно закодировать двумя цифрами — 0 и 1. Количество информации, которое можно закодировать двумя цифрами (ему соответствует опыт с двумя возможными исходами), называется *битом*. Результат извлечения «вслепую» из мешка одного из двух шариков разного цвета также оценивается одним битом информации. Название бит (bit) произошло от английских слов binary digit — двоичная цифра.

В компьютере бит реализуется устройством, которое может находиться в двух состояниях, и кодируется физическим состоянием носителя информации: намагничено или ненамагничено, есть ток или его нет. При этом одно состояние принято обозначать цифрой 0, а другое — цифрой 1. Последовательностью битов можно закодировать текст, изображение, звук или какую-либо другую информацию. Такой метод представления информации называется *двоичным кодированием* (binary encoding).

В информатике часто используется величина, равная восьми битам и называемая *байтом* (byte). Например, информация о состоянии группы из восьми выключателей, каждый из которых может быть включён или выключен, соответствует одному байту. Если бит позволяет выбрать один вариант из двух возможных, то байт, соответственно, один из $256 = 2^8$. В ЭВМ каждый символ часто кодируется одним или двумя байтами, то есть восемью или шестнадцатью двоичными цифрами. Так, например, в широко распространенной кодировке Koi8-R буква «М» имеет код 11101101, буква «И» — код 11101001, а пробел — код 00100000. В последние годы происходит постепенный переход на двухбайтовую кодировку Unicode, в которой можно представить уже $2^{16} = 65536$ различных символов. Для измерения количества информации используют и более крупные единицы:

1 килобит (Кбит)	= 1024 бита;	1 килобайт (Кб)	= 1024 байта;
1 мегабит (Мбит)	= 1024 килобита;	1 мегабайт (Мб)	= 1024 килобайта;
1 гигабит (Гбит)	= 1024 мегабита;	1 гигабайт (Гб)	= 1024 мегабайта;
1 терабит (Тбит)	= 1024 гигабита;	1 терабайт (Тб)	= 1024 гигабайта.

Обратите внимание на тот факт, что в отличие, скажем, от килограмма, содержащего 1000 граммов, килобайт содержит $1024 = 2^{10}$ байта!

Пример 1.1. Книга содержит 400 страниц; на каждой странице 35 строк; в каждой строке 50 символов. Предполагая, что каждый символ требует для своего кодирования один байт, вычислите объём электронного представления этой книги в байтах. Можно ли её записать на обычную магнитную дискету ёмкостью 1,44 мегабайта?

Решение. Страница содержит $35 \cdot 50 = 1750$ байт информации. Полный объём информации в книге равен $400 \cdot 1750 = 700\,000$ байт, что составляет примерно 683,6 килобайта. Таким образом, на дискету можно записать не одну, а даже две такие книги.

Упражнения

1. Сколько килобайт в сообщении, содержащем 12288 битов?

2. Письмо занимает 2 страницы по 25 строк. В каждой строке записано по 40 символов. Найдите объём электронного представления этого письма в байтах.

3. Для создания электронной библиотеки администрация университета приобрела дисковый массив (несколько быстрых винчестеров) общим объёмом 0,6 терабайта. Сколько стеллажей с книгами заменит эта библиотека, если каждая из книг содержит 400 страниц по 35 строк, на каждой из которых по 50 символов, а стеллаж состоит из восьми полок по 25 книг на каждой?

4. Результат каких из перечисленных ниже событий даёт информацию в объёме, не превышающем двух бит: а) бросание игральной кости; б) бросание монеты; в) бросание двух монет; г) выбор одной из сторон заданного треугольника; д) выбор одной из букв русского алфавита?

§ 2. Представление информации в ЭВМ

Чаще всего информация на компьютере представлена в виде *файлов* (files). Именно файлы обычно используют и для передачи данных от программы к программе и от одного компьютера к другому. Другими словами, файл — это хранилище данных. Кроме того, файл имеет имя и разнообразные атрибуты, важнейшие из которых — дата и время его создания, имя владельца и права́ доступа. С течением времени понятие файла менялось. В операционных системах первых больших ЭВМ файл являлся набором записей. Обычно все записи в файле были одного размера, чаще всего по 80 символов каждая. Операционные системы современных компьютеров предполагают, что *файл — поименованная последовательность байтов*, размещённых на каком-либо носителе информации.

Файловая структура представляет собой систему хранения файлов на запоминающем устройстве, например на диске. Файлы, как правило, организованы в каталоги (называемые также папками и директориями). Любой каталог может содержать произвольное число подкаталогов, в каждом из которых могут храниться файлы и другие каталоги.

Все файлы условно можно разделить на две большие группы — *текстовые* и *двоичные*. Текстовые файлы предназначены исключительно для представления обычных (plain) текстов. Для хранения каждого символа в них отводится один или два байта, а кодирование выполняется с помощью специальных таблиц, в которых каждому символу соответствует определенное число. Основное достоинство подобного представления информации — её компактность и простота программ, предназначенных для работы с ней.

Двоичные файлы не предназначены для непосредственного чтения человеком. С их помощью кодируют графические изображения, звук и бóльшую часть документов, подготовленных с помощью современных офисных пакетов программ, в которые входят текстовые процессоры, средства для работы с электронными таблицами, программы для создания презентаций и некоторые другие. При просмотре содержимого двоичного файла без помощи специально предназначенных для этой цели программ вы обнаружите в нём лишь бессмысленное нагромождение непонятных символов.

В ЭВМ используют двоичную систему, потому что она имеет ряд преимуществ перед другими:

- для её реализации используются технические элементы с двумя возможными состояниями (есть ток в проводнике или нет, намагничен участок поверхности магнитного носителя информации или нет);
- такое представление надёжно и помехоустойчиво;
- для выполнения логических преобразований информации можно использовать аппарат булевой алгебры (см. десятую главу);
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Так как любая информация на компьютере хранится в виде последовательности байтов, то есть представляет из себя набор двоичных чисел, то полезно более подробно познакомиться с двоичной системой счисления, выполнением арифметических операций над двоичными числами и методами перевода чисел из одной системы счисления в другую.

Арифметические действия, выполняемые в двоичной системе, подчиняются тем же правилам, что и в десятичной. Только в двоичной системе перенос единиц в старший разряд возникает чаще, чем в десятичной. Таблицы сложения и умножения в двоичной системе значительно проще, чем в десятичной (таблица 6).

Таблица 6

+	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**10**

×	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Пример 2.1. Выполните умножение чисел 1101_2 и 101_2 (это запись чисел 13 и 5 в двоичной системе счисления).

Решение. Будем действовать вполне стандартно, выполняя умножение «столбиком». При умножении на единицу мы просто переписываем множитель 1101, сдвигая его влево на нужное число позиций, а умножение на ноль не требует никаких действий. При сложении получилось три переноса в более старший разряд. Итоговый результат 1000001 представляет собой двоичную запись числа 65.

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

Как показывает этот пример, ЭВМ должна «знать» таблицы сложения и умножения и уметь выполнять сдвиг двоичного числа. Процессор любого современного компьютера выполняет все эти операции очень быстро.

Пример 2.2. Найдите частное от деления числа 10010_2 на 11_2 (в десятичной системе счисления это деление числа 18 на 3).

$$\begin{array}{r|l} 10010 & 11 \\ \cline{2-2} 11 & 110 \\ \cline{1-1} 11 & \\ 11 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Решение. Деление «уголком» выполняется так же, как и при использовании десятичной системы счисления.

Кроме двоичной и десятичной систем счисления в информатике часто используют системы счисления с основаниями 8 и 16. Причина выбора именно этих чисел весьма проста: для облегчения восприятия двоичного числа его разбивают на группы по три или четыре цифры в каждой. Для кодировки троек требуется восемь цифр, поэтому используют цифры от 0 до 7 (таблица 7). Для кодировки же четвёрок необходимо шестнадцать знаков; для этого берут 10 цифр десятичной системы и 6 букв латинского алфавита: A, B, C, D, E, F, представляющих соответственно числа от 10 до 15 (таблица 8). Полученные системы, имеющие основания 8 и 16, называются, как мы знаем, восьмеричной и шестнадцатеричной.

Таблица 7

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

Таблица 8

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Пример 2.3. Найдите запись десятичного числа 47 в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

Решение. Чтобы записать число 47 в двоичной системе, делим его на 2 и выписываем получающиеся остатки. Аналогично поступаем и в двух других случаях — делим 47 на 8 и на 16. Таким образом, в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления число 47 записывается соответственно как 101111_2, 57_8 и $2F_{16}$.

$$\begin{array}{r|l} 47 & 1 \\ 23 & 1 \\ 11 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 47 & 7 \\ 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 47 & 15 \\ 2 & 2 \end{array}$$

Обратная операция перевода в десятичную систему выполняется гораздо проще, так как любое число x можно представить в виде

$$x = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots a_{n-1} p^1 + a_n p^0,$$

где a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n — цифры записи данного числа в системе счисления с основанием p. Например,

$$101111_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 47,$$
$$5702_8 = 5 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 2560 + 448 + 2 = 3010,$$
$$4AF_{16} = 4 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 1024 + 160 + 15 = 1199.$$

Проще всего осуществляется перевод чисел из восьмеричной и шестнадцатеричной систем в двоичную: надо всего лишь заменить каждую из цифр числа на три или четыре двоичные цифры в соответствии с таблицами 7 и 8.

Несложно выполнить и обратное преобразование — перевести число из двоичной системы счисления в системы с основанием, равным степени двойки (8 или 16). Для того чтобы целое число записать в системе счисления с основанием 2^n $(n = 3, 4)$, нужно выполнить следующие действия:

1) данное двоичное число разбить *справа налево* на группы по n цифр в каждой;
2) если в самой левой группе окажется менее n разрядов, то дополнить её *слева* нулями до нужного числа разрядов;
3) рассматривая каждую из групп как n-разрядное двоичное число, заменить её соответствующей цифрой в системе счисления с основанием 2^n, используя таблицы 7 и 8.

Пример 2.4. Запишите в шестнадцатеричной и восьмеричной системах счисления число 100111101_2.

Решение. С учётом таблицы 8 имеем:

$$100111101_2 = 1\ 0011\ 1101 = 0001\ 0011\ 1101 = 13\mathrm{D}_{16}.$$

Пользуясь таблицей 7, получаем: $100111101_2 = 100\ 111\ 101 = 475_8$.

В заключение параграфа расскажем о способах кодирования наиболее распространённых видов информации — числовой, текстовой, графической и звуковой. Мы рассмотрим этот вопрос только в самых общих чертах, оставляя в стороне методы представления другой мультимедийной информации (например, видеоинформации).

Начнём с кодирования чисел. Существуют два основных формата представления чисел в памяти компьютера. Один из них используется для кодирования целых чисел, второй (так называемое представление числа в формате с плавающей точкой) — для задания действительных чисел. Сразу отметим, что действительные числа задаются приближённо. Обычно для записи целого числа используют четыре байта, что позволяет задать $2^{32} \approx 4{,}3$ миллиарда чисел. Самый старший (левый) бит используется для представления знака: минус кодируется единицей, а плюс — нулём.

В первые десятилетия существования ЭВМ тексты кодировали описанным в предыдущем параграфе способом, представляя каждый символ одним байтом. Вскоре, однако, люди начали работать с документами, содержащими символы различных шрифтов, цветов и размеров, а также математические формулы, таблицы и рисунки. Для этих целей были разработаны более сложные способы кодирования.

Все создаваемые, обрабатываемые или просматриваемые с помощью компьютера изображения можно разделить на две большие части — растровую и векторную графику. *Растровые изображения* представляют собой решётку точек (подобную клетчатой бумаге), называемых пикселами (pixel, от английских слов picture element). *Код пиксела* содержит информации о его цвете. Для чёрно-белого изображения (без полутонов) пиксел может принимать только два значения: белый и чёрный (светится — не светится), а для его кодирования достаточно одного бита памяти: 1 — белый, 0 — чёрный. На цветном дисплее пиксел может иметь различную окраску, поэтому одного бита на пиксел недостаточно. Для кодирования четырёхцветного изображения требуется уже два бита на пиксел, например: 00 — чёрный, 10 — зелёный, 01 — красный, 11 — коричневый.

На RGB-мониторах всё разнообразие цветов получается сочетанием трёх базовых — красного (**R**ed), зелёного (**G**reen) и синего (**B**lue), из которых можно получить восемь основных комбинаций, перечисленных в таблице 9. Для того чтобы иметь возможность управлять интенсивностью (яркостью) свечения базовых цветов, надо увеличивать количество различных вариантов их сочетаний, порождающих разнообразные оттенки. Число различных цветов k и количество битов для их кодировки n связаны между собой простой формулой: $2^n = k$. В частности, при кодировании цвета пиксела одним байтом можно задать $2^8 = 256$ различных цветов, двумя байтами — $2^{16} = 65536$ цветов, тремя — уже более миллиона (2^{24}).

Таблица 9

R	**G**	**B**	Цвет
0	0	0	чёрный
0	0	1	синий
0	1	0	зелёный
0	1	1	голубой
1	0	0	красный
1	0	1	розовый
1	1	0	жёлтый
1	1	1	белый

В противоположность растровой графике *векторное изображение* многослойно. Каждый элемент векторного изображения — отрезок, кривая линия или фрагмент текста — располагается в своём собственном слое, пикселы которого устанавливаются независимо от других слоев, и описывается с помощью специального языка (математических уравнений линий, дуг, окружностей и т. д.). Сложные объекты (ломаные линии, различные геометрические фигуры) представляются в виде совокупности элементарных графических объектов. Векторное изображение может изменять свои размеры без потери качества, в то время как при увеличении растрового изображения возрастает его зернистость.

Завершим это краткое введение рассмотрением проблем кодирования звука. Из курса физики вам известно, что звук — это колебания воздуха. Если преобразовать звук в электрический сигнал (например, с помощью микрофона), мы увидим плавно изменяющееся с течением времени напряжение. Для компьютерной обработки такой (аналоговый) сигнал нужно каким-то образом преобразовать в последовательность двоичных чисел. Обычно это делается следующим образом. Будем измерять электрическое напряжение в микрофоне через равные промежутки времени и записывать полученные значения в память компьютера. Этот процесс называется *дискретизацией* (или оцифровкой), а устройство, выполняющее его — *аналого-цифровым преобразователем* (АЦП). Для того чтобы воспроизвести закодированный таким образом звук, нужно выполнить обратное преобразование (для него служит *цифро-аналоговый преобразователь* — ЦАП), а затем сгладить получившийся ступенчатый сигнал.

Чем выше частота дискретизации (количество измерений в секунду) и чем больше разрядов отводится для кодирования, тем точнее будет представлен звук. Но при этом увеличивается и размер звукового файла. Поэтому в зависимости от характера звука, требований, предъявляемых к его качеству и к объёму занимаемой памяти, выбирают некоторые компромиссные значения. Описанный способ кодирования звуковой информации достаточно универсален, он позволяет представлять любой звук и преобразовывать его самыми разными способами. Но бывают случаи, когда выгодней действовать по-иному.

Человек издавна использует довольно компактный способ представления (кодировки) музыки — нотную запись, в которой специальными символами указывается высота звука. Фактически, её можно считать алгоритмом для музыканта, записанным на особом формальном языке. Более двадцати лет назад ведущие производители компьютеров и музыкальных синтезаторов разработали систему кодов, основанную на нотной записи, которая получила название MIDI. Хотя эта система кодирования позволяет работать только с инструментальной музыкой, она имеет неоспоримые преимущества: чрезвычайно компактная запись, естественность представления (MIDI-редактор позволяет работать с музыкой в виде обычных нот), простота изменения темпа и тональности мелодии.

Заметим, что существуют и другие форматы записи музыки. Среди них следует отметить формат MP3, позволяющий очень компактно и качественно кодировать музыку. При этом на стандартный CDROM помещается около 200 музыкальных композиций (на аудио-компакт — всего 18–20). Одна песня занимает примерно 3,5 Мб, что позволяет пользователям сети Интернет легко обмениваться музыкальными композициями. Чуть менее распространён пока более новый (и лучший по ряду характеристик) формат OGG, схожий во многом с форматом MP3. Это свободный формат, в отличие от проприетарного (коммерческого) MP3.

Упражнения

1. Для представления каких видов информации из ниже перечисленных обычно используют текстовый (а не двоичный) формат файла: а) исходный текст программы на каком-либо языке программирования; б) простой текст, не содержащий никаких элементов форматирования; в) растровое графическое изображение; г) звук?

2. Найдите произведение чисел 10001110_2 и 11111001_2 и проверьте полученный результат в десятичной системе счисления.

3. Запишите числа 27, 89 и 124 в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

4. Запишите в десятичной системе счисления числа 12_{16}, $7BE_{16}$, $A08F_{16}$.

§ 3. Компьютер начала XXI века

Одно из основных назначений современного компьютера — хранение и обработка информации. Сейчас в электронную форму переводят целые библиотеки; старые фото- и киноархивы, переведённые в цифровую форму, обретают вторую жизнь, а бóльшая часть новых книг, фотографий, музыкальных произведений и видеофильмов создаётся сразу в электронном виде. Всё это означает, что компьютеры стали неотъемлемым атрибутом жизни человека. Что же представляет собой современный компьютер, без которого сейчас невозможны ни профессиональная деятельность, ни досуг значительной части человечества?

Изначально компьютер создавался для вычислений (compute переводится как вычислять) и изготовлялся на базе электромагнитных реле, чуть позже — электронных ламп. Ламповые ЭВМ выполняли сотни арифметических или логических операций за одну секунду, что уже существенно превышало возможности человека. Когда в начале шестидесятых годов XX века на смену электронной лампе пришёл транзистор, компьютеры сразу стали намного производительнее и компактнее. Чуть позже появились интегральные микросхемы, после чего ЭВМ заметно подешевели и началось их массовое «вторжение» практически во все сферы науки, экономики и управления.

Сложность и производительность компьютерных элементов, составляющих основу современных компьютеров, в соответствии с известным законом Мура[1] удваивается примерно каждые 18 месяцев. В результате число транзисторов в процессоре в ближайшие годы превысит миллиард. Кроме того, современные компьютеры весьма разнообразны, так как в процессе их развития происходила специализация, постоянно появлялись всё новые области применения ЭВМ и новые классы задач, что приводило к возникновению новых типов компьютеров. Мы кратко расскажем только о самых распространённых.

Для выполнения первоначального предназначения компьютеров — вычислений — ещё в начале 70 годов прошлого века были созданы так называемые *суперкомпьютеры*. Как в те времена, так и сегодня, суперкомпьютер — очень быстрая и дорогая ЭВМ, предназначенная для решения особо сложных вычислительных задач, моделирования и обработки сверхбольших объёмов информации. Современные суперкомпьютеры являются параллельными вычислительными системами и часто представляют собой кластеры — совокупность многих тесно связанных между собой отдельных компьютеров. Проблеме увеличения производительности вычислений посвящены много-

---

[1] В 1965 году Гордон Мур (Gordon Moore) сделал весьма знаменательное наблюдение. Представив в виде графика рост производительности запоминающих микросхем, он обнаружил любопытную закономерность: новые модели микросхем разрабатывались спустя более-менее одинаковые периоды (18–24 месяца) после появления их предшественников, а ёмкость их при этом возрастала каждый раз примерно вдвое (см. http://www.intel.com/ru/Intel/museum/history/hof/moore.htm)

численные исследования, результаты которых публикуются и в сети Интернет. Много информации на русском языке об истории и современном состоянии суперкомпьютеров можно найти по адресу http://www.parallel.ru.

Ещё одним типом компьютеров являются специализированные *серверы* (от английского serve — обслуживать). Так обычно называют компьютеры, основной задачей которых является «обслуживание» других компьютеров, объединённых в единую сеть, обеспечивающую возможность обмена информацией. Типы обслуживания могут быть различными. Весьма распространены *файл-серверы*, основная задача которых — обеспечивать хранение данных. Использование современных файловых серверов делает гораздо более дешёвой, более быстрой и, главное, более надёжной и защищённой такую схему организации сети, при которой остальные компьютеры частично или даже полностью освобождаются от хранения информации.

Сервер может решать и другие задачи. Так, например, *веб-сервер* предоставляет клиентам (другим компьютерам) доступ к размещённым на нём веб-сайтам[2], а *почтовый сервер* обеспечивает приём и посылку электронной почты. Сетевой тематике посвящён §5 текущей главы.

Совершенно особый тип компьютеров представлют собой так называемые *встроенные компьютеры*, или *микропроцессоры*. Современный персональный компьютер содержит в себе огромное количество микропроцессоров. Благодаря их наличию главный процессор компьютера освобождается от решения многочисленных вспомогательных задач, связанных, например, с осуществлением операций ввода и вывода информации. Микропроцессоры сделали возможным появление сотовых телефонов, цифровых фото- и видеокамер, другой современной бытовой техники. Без них не могли бы существовать современные производство, транспорт и даже торговля.

Наладонник (palmtop), личный электронный помощник, электронная записная книжка — ещё один особый тип компьютеров. Некоторые из них имеют миниатюрную клавиатуру, но есть и модели без клавиатуры — в них ввод данных осуществляется нажатиями или рисованием специальным пером по экрану. Информация в этих компьютерах хранится не на дисках, а в так называемой энергонезависимой памяти.

Чаще же всего, когда говорят о современном компьютере, имеют в виду *персональный компьютер* (ПК). Первый персональный компьютер появился в 1975 году и сразу стало ясно, что невысокая цена и достаточные вычислительные возможности этого нового класса компьютеров будут способствовать их широкому распространению. Именно персональные компьютеры совершили компьютерную революцию в профессиональной деятельности миллионов людей и оказали огромное влияние на все стороны жизни человеческого общества.

Все персональные компьютеры делятся на настольные и портативные

[2]Веб-сайты фирм, организаций и отдельных граждан начали появляться в сети Интернет с начала 90-х годов XX века.

(notebook) — размером со стандартный лист бумаги, толщиной 2–5 *см* и весом 2–4 *кг*. По своим возможностям средний ноутбук уступает среднему настольному ПК, а по цене пока значительно выше. К его преимуществам можно отнести компактность и возможность некоторое время (обычно около двух—четырёх часов) работать от собственных аккумуляторов.

Часто можно услышать такие термины, как *мультимедийный компьютер*, *сетевой компьютер*, *домашний компьютер* и другие. Все эти названия относятся к различным вариантам персонального компьютера. Мультимедийным обычно называют ПК, снабжённый звуковой картой, колонками и устройствами для чтения лазерных дисков. Современный домашний мультимедийный компьютер, оснащённый быстрым видеоадаптером, постепенно превращается в мощный развлекательно-образовательный центр, снабжённый средствами доступа к сети Интернет.

Заметим, что порой ПК может предстать в весьма необычном виде. Хорошим примером является «Горыныч» — программно-аппаратный комплекс из *трёх* рабочих мест (мониторов, клавиатур и мышек) на базе *одного* системного блока. Шесть компьютерных классов из таких «трёхглоловых» машин успешно функционируют в Московском государственном индустриальном университете уже несколько лет.

Несмотря на большое разнообразие типов современных компьютеров, практически все они имеют одинаковую *архитектуру*. Под архитектурой компьютера понимается его логическая организация, структура и ресурсы. Архитектура современных ПК основана на магистрально-модульном принципе, который позволяет потребителю самому подобрать нужную ему конфигурацию компьютера и производить при необходимости его модернизацию.

Обсудим теперь более подробно компоненты современного компьютера. Некоторые из перечисляемых ниже компонент обычно не видны, так как они «спрятаны» в системный блок, многие не являются обязательными для обеспечения работы ЭВМ. Например, компьютер, связывающий между собой две сети (выполняющий функцию роутера), может не иметь ни клавиатуры, ни мыши, ни диска, ни монитора! Тем не менее, как правило, компьютеры снабжены следующими устройствами:

- центральный процессор (CPU);
- оперативная память (memory);
- системная плата (motheboard);
- корпус с блоком питания;
- устройства хранения информации (storage devices);
- устройства ввода (input devices);
- устройства вывода (output devices);
- устройства связи (communication devices).

Во всех вычислительных машинах до середины 50-х годов устройства обработки и управления представляли собой отдельные блоки, и только с появлением компьютеров, построенных на транзисторах, удалось объединить их в один блок, названный процессором. Процессор — это «мозг» ЭВМ. Он контролирует действия всех остальных устройств (devices) компьютера и координирует выполнение программ. Процессор имеет свою внутреннюю память, состоящую из регистров, а также управляющее и арифметико-логическое устройства.

Процесс общения процессора с внешним миром через устройства ввода-вывода по сравнению с информационными процессами внутри него протекает в тысячи раз медленнее. Это связано с тем, что устройства ввода и вывода информации часто имеют механический принцип действия (принтеры, клавиатура, мышь) и работают медленно. Чтобы освободить процессор от простоя при ожидании окончания работы таких устройств, в компьютер вставляют контроллеры.

Существует два типа оперативной памяти — память с произвольным доступом (RAM или random access memory) и память, доступная только на чтение (ROM или read only memory). Процессор ЭВМ может обмениваться данными с оперативной памятью с очень высокой скоростью, на несколько порядков превышающей скорость доступа к другим носителям информации, например дискам. Оперативная память с произвольным доступом служит для размещения программ, данных и промежуточных результатов вычислений в процессе работы компьютера. Данные можно выбирать из памяти в произвольном порядке, а не строго последовательно, как это имеет место, например, при работе с магнитной лентой. Память, доступная только для чтения, используется для постоянного размещения определенных программ (например, программы начальной загрузки ЭВМ). В процессе работы компьютера содержимое этой памяти не может быть изменено. Оперативная память — временная, то есть данные в ней хранятся только до выключения компьютера. Для долговременного размещения информации служат дискеты, винчестеры, компакт-диски и другие устройства.

Процессор, память, контроллеры и другие компоненты устанавливаются на так называемую материнскую плату (motherboard). Современные материнские платы зачастую включают в себя многие контроллеры из перечисляемых ниже. Материнская плата и блок питания размещаются в корпусе, который после его «начинки» комплектующими и принято называть системным блоком.

Винчестеры, или жёсткие диски (hard discs) — наиболее быстрые из внешних устройств хранения информации. Ёмкость диска современного компьютера составляет десятки или даже сотни гигабайт. В одну ЭВМ можно установить несколько винчестеров, а на серверах для повышения скорости работы и надёжности часто применяют дисковые RAID-массивы. Оптические или лазерные компакт-диски (CD) имеют ёмкость около 600 мегабайт. Скорость работы с ними определяется устройством (CD-R или CD-RW drive), в которое вставляется диск. Близкими их родственниками являются DVD диски, используемые преимущественно для работы с цифровой видеоинформацией. Магнито-оптические диски — давно используемые устройства хранения информации объёмом от 600 мегабайт до десятков терабайт.

Дискеты, или гибкие диски (floppy discs), сейчас постепенно вытесняются другими, более ёмкими, быстрыми и удобными носителями информации. Используемые сейчас дискеты имеют ёмкость всего 1,44 мегабайта. Zip и Jaz диски — носители информации, которые были призваны заменить гибкие магнитные диски. Их можно рассматривать как быстрые и бо́льшие по ёмкости (100, 250 и даже 1000 мегабайт) дискеты. Современные магнитные ленты (magnetic tapes), напоминающие обычные магнитофонные кассеты, позволяют работать с большими объёмами информации (до сотен гигабайт) и используются обычно для резервного копирования на серверах.

Карты сменной памяти (compact flash) ёмкостью до одного гигабайта — новейшие носители информации, используемые не только в компьютерах, но также и в цифровых фотоаппаратах и аудиоплеерах. Именно они сейчас получают всё большее распространение и постепенно вытесняют многие другие средства хранения информации.

Устройства ввода передают информацию в ЭВМ от различных внешних источников. Информация может быть представлена в весьма различных формах: текст — для клавиатуры (keyboard), координаты указателя на экране монитора — для мыши (mouse), звук — для микрофона (microphone), изображение — для сканера (scanner). Наиболее распространённое устройство вывода — монитор. В настоящее время всё чаще вместо мониторов с электронно-лучевой трубкой используются так называемые LCD или TFT мониторы. Работу монитора в компьютере обеспечивает специальная видеосистема, обязательно включающая в себя видеокарту (видеоадаптер). Принтер — тоже очень распространённое устройство вывода. Существует несколько различных типов цветных и чёрно-белых принтеров: матричные, струйные, лазерные, сублимационные и другие.

Устройства связи необходимы для организации взаимодействия отдельных компьютеров между собой, доступа к удаленным принтерам и подключения локальных сетей к общемировой сети Интернет. Примерами таких устройств являются сетевые карты (ethernet cards) и модемы (modems). Мультимедийные компьютеры имеют звуковую карту, к которой подключаются колонки, наушники, микрофон и джойстик. Они часто оборудуются также и устройствами ввода аналогового видеоизображения и видеозахвата (TV-тюнер).

Упражнения

1. Сформулируйте закон Мура.

2. Назовите несколько распространённых типов компьютеров.

3. Перечислите основные компоненты современного персонального компьютера.

4. Какие технические средства из ниже перечисленных используются в настоящее время для долговременного хранения информации: а) гибкие магнитные диски: б) флэш-память; в) лазерные диски; г) магнитные барабаны; д) оперативная память; е) кэш-память?

5. Без каких компонент работа современного компьютера абсолютно невозможна: а) процессор; б) звуковая карта; в) оперативная память; г) сетевая карта; д) материнская плата; е) клавиатура; ж) монитор?

§ 4. Программное обеспечение

Самые современные компьютеры, рассмотренные нами в предыдущем параграфе, остались бы просто «железом» (hardware), если бы не было программного обеспечения (software). Программы появились даже раньше, чем первые ЭВМ. Ещё в XIX веке Чарльз Бэббидж[3] разработал проект машины, которая предназначалась для автоматического проведения длинных цепочек вычислений. Конструкция его аналитической машины включала 50 тысяч деталей: зубчатых колес, рычагов и пружин, взаимодействовавших определённым образом. Совершенствуя и уточняя конструкцию машины, Бэббидж впервые выделил такие понятия, как устройство для хранения чисел (исходных и получающихся в результате вычисления), вычислительный блок (процессор) и устройство для ввода и вывода информации.

Информация в аналитической машине Бэббиджа хранилась на перфокартах — картонных прямоугольных пластинах с рядами пробитых в них дырочек. Каждый ряд состоял из двух частей, первая из которых представляла собой запись числа, а вторая — код команды, указывающей, что делать с числом. Тем самым, в созданной Бэббиджем машине присутствовала хранимая в памяти машины программа её работы. Именно этот принцип — *хранение программы в памяти компьютера* — считается важнейшей идеей современной компьютерной архитектуры. Суть идеи заключается в том, что программа работы вводится в память ЭВМ и хранится в ней наравне с исходными данными, причём и команды программы, и данные, над которыми выполняются действия, записываются с помощью одних и тех же кодов.

Бóльшая часть людей, использующих компьютеры, не умеет, да и не должна уметь создавать (и даже изменять) имеющиеся программы. Для этого существуют профессиональные программисты. Но знать, какое бывает программное обеспечение (ПО), весьма полезно. Юристу, кроме того, важно также познакомиться с законами, регулирующими рынок ПО.

Всё программное обеспечение часто делят на две категории: системное ПО и прикладные программы. *Системное программное обеспечение* — это то, что типичный пользователь компьютера почти не замечает и очень редко использует в своей работе непосредственно. Однако именно оно «оживляет» компьютер и позволяет функционировать прикладным программам, созданным для решения конкретных задач.

Операционная система (ОС) — это, безусловно, важнейшая компонента системного ПО, которая управляет всеми аппаратными и программ-

[3]Чарльз Бэббидж (1792–1871) — английский математик и инженер.

ными средствами компьютера. ЭВМ предоставляет различные ресурсы для решения задачи, но чтобы сделать эти ресурсы легко доступными для человека и прикладных программ, требуется операционная система. Она скрывает от пользователя сложные и ненужные подробности и предоставляет ему удобный *интерфейс*[4] для работы. Операционная система осуществляет загрузку в оперативную память всех программ, передаёт им управление в начале их работы, выполняет различные действия по запросу выполняемых программ и освобождает занимаемую программами оперативную память при завершении их работы.

Кроме перечисленного выше, операционные системы могут предоставлять и другие возможности, делающие ЭВМ ещё более удобной для использования: одновременное выполнение множества различных заданий (мультизадачность); защита информации, хранящейся на дисках компьютера; работа нескольких человек на одной ЭВМ (многопользовательский режим); подключение компьютера к сети, а также объединение вычислительных ресурсов нескольких машин и совместное их использование (кластеризация).

К системному программному обеспечению, кроме операционных систем, относится ещё целый ряд программных продуктов, в основном используемых профессиональными программистами и системными администраторами: компиляторы (трансляторы) с различных языков программирования, специализированные сетевые программы, средства для управления пользователями и т. п. Ярким примером *прикладного программного обеспечения* является широко известный офисный пакет программ, в состав которого входят текстовый процессор, средства для работы с электронными таблицами и создания презентаций и т. д.

Операционные системы возникли задолго до появления персональных компьютеров, и созданная для них ОС представляла из себя, в основном, очень «урезанную» версию операционной системы Unix, разработанной ранее для более мощных ЭВМ. Первые десять—пятнадцать лет существования ПК на них устанавливалась практически только MS DOS фирмы Microsoft[5]. Поэтому у многих людей слова «персональный компьютер» ассоциируются с названием этой фирмы.

В начале 90-х годов прошлого века ПК стали значительно более мощными, и появилась возможность создания для них полнофункциональной операционной системы. Новые операционные системы для персональных компьютеров были предложены как фирмой Microsoft, так и другими разработчиками программного обеспечения. Названия Windows NT, Windows 98, Windows 2000, Windows XP известны многим людям, даже не работающим на ЭВМ.

---

[4]Интерфейсом принято называть совокупность программно-аппаратных средств, предназначенных для обеспечения взаимодействия человека с компьютером.

[5]Мы не рассматриваем здесь не слишком широко распространённые в России компьютеры Макинтош фирмы Apple.

Самой успешной из иных разработок, как показало время, оказалась ОС Linux (произносится «ли́нукс», с ударением на первом слоге). На первых этапах работа с ней была доступна лишь профессионалу, она не имела, в отличие от Windows, «дружелюбного интерфейса»: все действия необходимо было выполнять, набирая команды. Это, впрочем, нисколько не смущало пользователей, привыкших к общению с ЭВМ, отличными от персональных компьютеров. Для них было важнее, что ОС Linux обладала целым рядом существенных преимуществ перед Windows — более надёжная, быстрая, мультизадачная, многопользовательская и, самое важное, свободная.

В силу особой важности этого понятия для юристов, мы отвлечёмся на некоторое время от обсуждения операционных систем и типов программного обеспечения. Итак, существует ещё одна классификация ПО: оно делится на *свободное* и *проприетарное*. В самом первом приближении можно сказать, что существуют две во многом противоположные друг другу стратегии разработки и распространения программ. Первая стратегия (*copyright*) подразумевает оплату при покупке каждой копии программного продукта и запрет на свободное распространение этих копий. Во многих стран действуют законы, охраняющие авторское право на программные продукты и данные. Подобная практика представляется вполне естественной, по крайней мере, на первый взгляд. При этом полная стоимость проприетарного программного обеспечения, способного «оживить» современный персональный компьютер, работающий под управлением ОС Windows, в десятки раз превосходит стоимость самого этого компьютера. Использование же контрафактного ПО (то есть приобретённого без лицензии) является нарушением действующего законодательства (чего ни один будущий юрист позволить себе, конечно, не может).

На рассматриваемую проблему можно взглянуть и с другой стороны. Программирование — это наука, как и химия, физика, математика. Но в этих областях все достижения обнародованы — не нужно открывать ещё раз теорему Пифагора и изобретать заново колесо. Человек живёт в обществе, и сделанные им открытия должны стать достоянием общества, ведь именно так и происходит прогресс. Для развития программного обеспечения необходимо, чтобы каждый специалист разделял свои достижения с другими специалистами, чтобы он продолжал и развивал то, что сделали другие. Эта точка зрения отражена в лицензии GPL, в соответствии с которой разрабатываются и развиваются *свободные программы*, в частности ОС Linux. Говоря о такой стратегии, часто используют термин *copyleft*. Получив в использование или купив свободную программу, вы можете сколько угодно её копировать, как угодно широко распространять, изменять или совершенствовать её исходный код (программа, распространяемая по «публичной лицензии» GPL, всегда поставляется вместе с исходным кодом разработчика, то есть самой строго охраняемой и никогда не раскрываемой частью проприетарных программ). Наконец, вы можете свободно распоряжаться изменённой версией — хоть раздавать её даром, хоть запрашивать за неё миллиард.

Существует только один запрет — при распространении нельзя скрывать исходный код программы, объявляя себя его «владельцем», и останавливать таким образом её свободное совершенствование и развитие.

Тем, прежде всего, и отличается идеология *copyleft* от идеологии *copyright*, что создатель продукта сохраняет на него практически все авторские и имущественные права при любых обстоятельствах — даже если и распространяет его совершенно бесплатно. Итак, свобода программного обеспечения состоит из свободы читать (изучать) код, свободы писать (модифицировать) код и свободы распространять (публиковать, тиражировать) код. Очевидно, что проблемы «пиратства» в этом случае просто не существует. К тому же, свободное программное обеспечение зачастую оказывается более качественным и надёжным, чем несвободное, хотя это и может показаться странным. Если вас заинтересовал этот факт или иные аспекты взаимоотношения свободного и проприетарного ПО, вы можете изучить проблему более глубоко. Примером лицензий на проприетарное программное обеспечение является информация от фирмы Microsoft, русскоязычный веб-сайт которой в сети Интернет можно найти по адресу `http://www.microsoft.com.ru`. Лицензия GPL размещена на сайте GNU по адресу `http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html` (русский перевод на `http://rus-linux.net/MyLDP/histori/gpl/gplrus.html`).

Вернёмся к операционным системам, используемым в настоящее время на персональных компьютерах. За последние несколько лет разработчики каждой из двух наиболее распространённых ОС для ПК — Windows и Linux — старались избавиться от имеющихся в их системе недостатков. Этот процесс, продолжающийся и сегодня, привёл к тому, что сейчас по очень многим параметрам (особенно с точки зрения обычного пользователя) эти операционные системы сблизились чрезвычайно. При этом, конечно, первая из них остаётся проприетарной, а вторая — свободной.

Именно этот аргумент играет в последнее время всё бóльшую роль при выборе операционной системы для персонального компьютера. Университеты по всему миру давно используют ОС Linux, школы в Китае и Аргентине делают это уже несколько лет, а с 2002 года резко возросло число школ США и Канады, применяющих эту ОС. Увеличивается интерес к Linux и в России — в ряде университетов и школ уже приняты решения об использовании в учебном процессе только свободного ПО.

Linux продолжает отвоёвывать у Windows всё новые и новые территории. Так, в июне 2003 года городской совет Мюнхена — третьего по величине города Германии — принял решение о переводе компьютерного парка на операционную систему Linux. К настоящему времени в целом ряде стран решения об отказе от массового использования проприетарных продуктов приняты на правительственном уровне. Среди них Германия, Франция, Индия, Китай (в том числе Тайвань), Япония и другие. Более подробную информацию об операционной системе Linux и другом свободном программном обеспечении можно найти на веб-сайте `http://www.linux.org`, русскоязычные материалы — по адресу http://www.rus-linux.net.

Завершим этот параграф обсуждением ещё одного типа программ — *компьютерных вирусов*. Компьютерным вирусом называется программа, которая способна создавать свои копии (не обязательно полностью совпадающие с оригиналом) и внедрять их в различные объекты (ресурсы) компьютерных систем, сетей и т. д. без ведома пользователя. Подавляющее большинство современных вирусов «живёт» в ОС Windows, а заражение сейчас чаще всего происходит по сети. Интернет-черви — так называют вирусы, получаемые по электронной почте. Они рассылают свои копии всем, с кем вы ведёте переписку.

Поведение вирусов весьма разнообразно. Некоторые вирусы достаточно безобидны, другие могут переименовать файлы на диске или даже уничтожить их. Есть и такие, которые способны вывести из строя некоторые из компонент компьютера. Так называемые *троянские программы* отличаются от вирусов тем, что они вместо разрушительных действий собирают и отправляют по известным им адресам пароли и другую секретную информацию пользователя. Зачастую это даже более неприятно, чем физическая потеря данных!

К сожалению, единственный надёжный метод борьбы с вирусами и троянцами — не включать компьютер вовсе. Можно ещё посоветовать ничего на него не устанавливать и ничего не запускать. И ни в коем случае не подключаться к сети Интернет. Только тогда какой смысл иметь компьютер? Использовать ОС, отличную от Windows (например, Linux) — тоже весьма надёжное средство. Вирусов в операционной системе Linux практически не существует. Если же на вашем компьютере установлена Windows — используйте *антивирусы* — программы, призванные обнаруживать и удалять известные им «нехорошие» программы. При этом нужно постоянно обновлять антивирусную базу, так как новые вирусы появляются очень часто, и быть готовым к тому, что заражение всё-таки произойдёт.

Упражнения

1. Сформулируйте программный принцип управления компьютером.
2. Что такое прикладное и системное программное обеспечение?
3. Перечислите основные отличия свободного программного обеспечения от проприетарного.
4. Что такое компьютерные вирусы и как бороться с ними?

§ 5. Компьютеры и сети

Мы уже неоднократно упоминали о сети Интернет. По последним данным в ней работает каждый десятый житель планеты. Вполне возможно, что и вам уже приходилось работать в сети. Именно бурное развитие общемировой сети за последние несколько лет совершило подлинную революцию в сфере информационных технологий. В этом параграфе мы познакомимся с историей развития компьютерных сетей и с тем, как работает Интернет сегодня.

Одновременно с развитием компьютерной техники развивались и средства обмена информацией. Ещё в начале 70-х годов XX века был разработан прообраз современной высокоскоростной технологии Ethernet. В то же время несколько университетов США стали обмениваться данными с помощью модемов — устройств для подключения компьютеров к обычным телефонным линиям. В 1989 году в глобальной сети работало около ста тысяч компьютеров из более чем десяти стран. Пользователи стали воспринимать такое свободное объединение компьютеров (называемых часто «хостами» от английского host — владелец, хозяин, собственник) как нечто единое — глобальную сеть Интернет. В 1991 году была разработана технология *World Wide Web* (WWW или «Всемирная паутина»), которая совершила подлинную революцию, объединив все информационные ресурсы сети воедино и обеспечив доступ к ним людям, не имеющим какой-либо предварительной подготовки. В этом же году подключилась к общемировой сети и Россия.

Сеть Интернет или просто Интернет часто называют «сетью сетей», так как она состоит из взаимосвязанных сетей, эксплуатируемых университетами, государственными учреждениями, библиотеками, больницами, частными лицами и т. д. Эти сети связаны друг с другом с помощью различного оборудования: маршрутизаторов, мостов и коммутаторов. С помощью Интернета можно получить доступ к огромному объёму информации, включающей в себя полные тексты книг, журналов и газетных статей, радиопередачи, видеофильмы, музыкальные композиции, медицинские справочники, библиотечные каталоги, кулинарные рецепты, компьютерные игры, научные работы, постановления правительства, слова песен, календари спортивных событий, прогноз погоды и многое другое.

В начале лета 2004 года сеть Интернет содержала около 180 миллионов компьютеров, а её услугами пользовалось примерно 700 миллионов человек (из шести с небольшим миллиардов живущих на Земле). По адресу `http://www.nua.ie/surveys/how_many_online/index.html` можно найти информацию о темпах роста числа пользователей сети Интернет. Аналогичная информация о числе компьютеров (hosts) в сети размещена по адресу `http://www.isc.org/ds/host-count-history.html`.

Информационный сервис, предоставляемый сетью Интернет, менялся в процессе становления и развития глобальной сети. В первые годы её существования основными услугами были электронная почта (e-mail), телеконференции (news), пересылка файлов (ftp) и работа на удалённом компьютере (telnet). Особую роль в развитии нового информационного общества играла электронная почта, принципиально изменившая возможности межперсонального взаимодействия.

Электронная почта является аналогом обычной бумажной почты, а электронный адрес позволяет однозначно идентифицировать пользователя этой услуги среди миллионов других пользователей сети. Зная адрес электронной почты, можно отправлять текстовые сообщения, программы, изображения, словом, любую информацию, способную храниться в электронном виде на компьютере. Она будет доставлена через несколько минут в любую точку планеты.

Электронный почтовый адрес состоит из двух частей: имени пользователя и адреса почтового сервера. Это две компоненты разделяются символом «@», официальное название которого — «коммерческое эт». Вот пример электронного адреса: `max@mail.ru`.

Для работы с электронной почтой существует много различных программ, и каждый может выбрать для себя наиболее удобную. Но специализированные средства для работы с e-mail можно не использовать — в последнее время многие информационные порталы и университетские веб-сайты предоставляют возможность работать с почтой с помощью так называемого *веб-интерфейса*. При этом достаточно научиться пользоваться только браузером (термины «информационный портал», «веб-сайт» и «браузер» объясняются ниже).

Телеконференции, или, как их ещё называют, группы новостей, похожи на электронную почту. Телеконференция — это огромный, непрерывно обновляющийся электронный журнал, разбитый на множество разделов по интересам. На них можно подписаться и получать сообщения только из интересующих вас разделов. Вы сможете не только читать сообщения, поступающие в телеконференции, но и посылать туда свои вопросы и предложения, высказывать своё мнение, о котором узнают все подписчики этих разделов.

Важнейшим событием в истории развития сети Интернет стало появление нового информационного сервиса — WWW. Эта «всемирная паутина» состоит из огромного количества различных документов, содержащих так называемые *гиперссылки*. При просмотре такого документа с помощью специальной программы (браузера) можно перейти от одного документа к другому при помощи щелчка мыши по ссылке. Основное достоинство WWW состоит в том, что гиперссылки могут указывать на документы, хранящиеся на другом компьютере сети. В результате получается единое гипертекстовое пространство, по которому можно перемещаться в любом направлении в поисках нужной информации.

Широчайшее развитие и распространение WWW в сети привело к тому, что, говоря «Интернет», часто подразумевают именно WWW. Функционирование этого сервиса обеспечивается большим числом веб-серверов, которые и содержат распределённую базу данных гипертекстового пространства. Каждый из серверов наполняется информацией на какую-либо тему, включая тексты, графические изображения, музыкальные произведения, видео и т. п. В результате получается то, что принято называть веб-сайтом. Большие по объёму, хорошо структурированные сайты, способные предоставить пользователю ряд дополнительных услуг, называются информационными порталами.

С технологией WWW связаны такие понятия, как URL (универсальный адрес ресурса), HTTP (протокол передачи гипертекста) и HTML (язык разметки гипертекста). Это далеко не всё, на чём базируется «всемирная паутина» сегодня, но без них она не смогла бы появиться.

URL — специальная форма адреса информации в сети Интернет, содержащая обычно не менее трёх компонент: способ связи с сервером (протокол), имя или адрес сервера, на котором размещена информация, и локальный адрес информации на сервере. Локальный адрес на сервере, который иногда опускается, чаще всего представляет собой полное имя файла, например, `http://www.msiu.ru/education/index.php`. В некоторых случаях дополнительно указывается номер порта для связи с сервером. Заметим, что на одном и том же компьютере могут одновременно размещаться несколько различных серверов.

Чтобы различать компьютеры сети, каждому из них централизованно выделяется IP-адрес[6], состоящий из четырёх чисел от нуля до 255, например 10.2.2.4. Непосредственное использование IP-адресов весьма неудобно, поэтому применяется так называемая *доменная система имён*. Например, `www.msiu.ru` — это доменное имя компьютера, имеющего адрес 10.2.2.4. Как и IP-адрес, доменное имя состоит из компонент, отделяемых друг от друга точками. Последняя из компонент (в приведённом примере «`ru`») называется доменом (областью) первого уровня. Среди наиболее распространённых доменов первого уровня можно отметить «`com`», «`net`», «`org`» и двухбуквенные домены, соответствующие английским названиям отдельных стран: «`ru`» — Россия, «`ua`» — Украина и т. д. Домены первого уровня создаются специальным органом по развитию сети Интернет, и владеют ими крупные международные организации или правительства стран.

Внутри доменов первого уровня под контролем их владельцев могут быть созданы домены второго уровня, обычно принадлежащие уже каким-либо промышленным, образовательным, научным и иным организациям. В рассматриваемом нами примере доменом второго уровня является «`msiu`» — аббревиатура Московского государственного индустриального университета (Moscow State Industrial University). В адресе `www.msiu.ru` три компоненты, первая из которых (`www`) представляет собой имя некоторого конкретного компьютера в сети организации `msiu.ru`. Вообще говоря, доменное имя может состоять и из большего числа компонент. При этом первая из них — имя компьютера в локальной сети.

Хотя на уровне операционной системы все компьютеры сети Интернет общаются между собой на одном языке, прикладные программы применяют несколько различных протоколов обмена информацией, соответствующих различным сервисам. Протокол HTTP — наиболее активно используемый в настоящее время. Среди других протоколов отметим HTTPS — аналог HTTP, обеспечивающий конфиденциальность передачи информации,

[6] IP — Internet Protocol, протокол обмена информацией в сети Интернет.

FTP — один из первых сетевых протоколов, NEWS — протокол, используемый в группах новостей (телеконференциях).

Сейчас сеть Интернет настолько обширна, что возникает проблема нахождения нужной информации. Для этого существуют так называемые *поисковые серверы*, которые постоянно «прошаривают» всю глобальную сеть и индексируют имеющиеся в ней ресурсы, чтобы затем практически мгновенно предоставить список ссылок на все документы, в которых встречается искомый термин или комбинация слов. К сожалению, в большинстве случаев пользователь получает десятки или даже сотни тысяч ссылок на документы, формально удовлетворяющие его запросу — слишком велик объём информации в сети Интернет с одной стороны, и недостаточно точно сформулирован запрос — с другой. Перечислим некоторые наиболее популярные поисковые серверы.

Информационный портал Yahoo (`http://www.yahoo.com`) является не только поисковой машиной, но и крупнейшим классификатором ресурсов глобальной сети. Здесь выделено несколько разделов верхнего уровня: искусство, бизнес, компьютеры, образование, здоровье, развлечения, правительство и др. Каждый из разделов, помимо ссылок, содержит подразделы, которые, в свою очередь, тоже содержат подразделы и т. д. Поисковый сервер Google (`http://www.google.com`) отличается использованием особой техники нахождения страниц, соответствующих запросу. Для этой цели применяется специальное число, похожее по смыслу на индекс цитирования: чем больше ссылок на данный документ, тем это число больше. Если сервер не находит запрашиваемой комбинации в своём каталоге, то он пользуется тематическим каталогом Yahoo. AltaVista (`http://www.altavista.com`) — поисковый сервер, способный находить нужную информацию не только среди веб-страниц (WWW), но и в группах новостей.

Согласно исследованию фонда «Общественное мнение», в российском сегменте сети, весьма часто называемом «Рунетом», наиболее популярным является информационный портал «Яндекс» (`http://www.yandex.ru`); на втором месте находится «Рамблер» (`http://www.rambler.ru`), а замыкает тройку лидеров «Mail.ru» (`http://www.mail.ru`). Заметим, что все три перечисленных сайта не просто «поисковики» — это информационные порталы, содержащие классификационные каталоги, которые охватывают все основные тематические направления «Рунета».

Пример 5.1. Найдём в сети информацию, подтверждающую происходящий в последние годы в различных странах процесс перехода на правительственном уровне от широко распространённой операционной системы Windows к свободной ОС Linux.

Решение. Воспользуемся для поиска сервером `www.google.ru`. Если поискать просто слово «Linux», то мы получим перечень, содержащий около 116 000 000 ссылок. Это пример очень неточного запроса.

Поиск строки из двух слов «Linux правительство» даёт уже значительно меньший по объёму список, содержащий примерно 22 000 ссылок на различные документы. Однако и этот перечень можно значительно сократить, уточнив запрос. Если, например, мы попробуем поискать строку «"переход на Linux" правительство», кавычки в которой требуют обязательного наличия в документе словосочетания «переход на Linux», то мы получим ссылки всего на 131 документ. Этот список при желании уже можно внимательно просмотреть целиком.

Пример 5.2. Выясним, какая информация на русском языке, связанная с лицензиями на свободное программное обеспечение, имеется в сети.

Решение. Поиск строки «свободное программное обеспечение» приводит к слишком большому списку объёмом около 19100 ссылок, который легко уточнить, добавив в строку поиска слово «лицензия». Получаемый в этом случае перечень состоит из примерно 1830 ссылок, большая часть из которых действительно представляет интерес.

Интернет сейчас — не только огромное хранилище информации, но и средство связи. Кроме давно возникшей электронной почты, сегодня широко распространены форумы и «чаты» (от английского chat — болтать), а также сервис ICQ. Для того чтобы принять участие в каком-либо форуме или пообщаться в «чате», достаточно обычного браузера, а появившийся в 1996 году ICQ (созвучно английской фразе «I Seek You — я ищу тебя») стал одним из самых популярных способов интерактивного взаимодействия людей в сети. В отличие от электронной почты ICQ, называемый русскоязычными пользователями просто «аськой», позволяет «увидеть» всех ваших знакомых, как только они появляются в сети.

В заключение поговорим о некоторых проблемах, порождённых глобальной сетью. Чрезмерное пристрастие к сети врачи уже много лет считают симптомом психического заболевания. Истинные «интернетоманы» проводят в сети более тридцати часов в неделю, причём на серфинг (переход с помощью браузера от одного документа к другому без определёной цели), игры, покупки, участие в форумах и чатах они тратят в 10 раз больше времени, чем на работу или учёбу. Такие люди часто теряют семью, работу, социальные связи, то есть «интернетомания» приводит почти к такому же разрушению личности, как алкоголизм или наркомания.

Важнейшим вопросом последнего времени стала проблема борьбы с массовой рассылкой рекламы по электронной почте. Этим вопросом занимаются уже на межправительственном уровне: в странах ЕС, например, принят закон, запрещающий рассылку электронной почты коммерческого содержания, не санкционированной получателем. Количество спама[7] настоль-

[7]Это слово, уже включённое в современный орфографический словарь русского языка, произошло от английского spam, изначально означавшего консервированный колбасный фарш. В 1994 году два американских юриста разослали с помощью сети несколько тысяч рекламных сообщений, которые получатели окрестили «спамом».

ко возросло, что потери предприятий Европейского Союза, вынужденных ежедневно удалять терабайты электронного мусора, составили в 2003 году более трёх миллиардов евро.

Сеть Интернет уже сейчас предоставляет почти безграничные возможности для свободного обмена идеями, данными исследований и другой информацией, но в то же время пока существует ряд серьёзных проблем делового, потребительского и этического характера, связанных с доступом, стоимостью, конфиденциальностью, мошенничеством, безопасностью, авторскими правами и стандартизацией. Будущее сети Интернет связано с разработкой и внедрением определенных стандартов в целях создания стабильной инфраструктуры, которая сделала бы компьютерную сеть более надёжной, доступной и простой для пользователя, приблизив её к таким коммунальным услугам, как электро- и водоснабжение, телефонная связь.

Упражнения

1. Перечислите основные возможности, предоставляемые в настоящее время сетью Интернет.

2. Какие из следующих понятий, объектов и программных продуктов появились только после широкого распространения сети Интернет: а) браузер; б) URL; в) гипертекст; г) файл; д) электронная таблица?

3. Какие этические проблемы породил Интернет?

§ 6. Информационные технологии и юриспруденция

Сложившаяся к началу XXI века новая информационная структура, образованная объединёнными в глобальную сеть компьютерами с разнообразным программным обеспечением, дала человечеству невиданные ранее возможности, некоторые из которых мы уже обсудили. Что же ещё получает человек, работающий на компьютере? С каким программным обеспечением ему следует знакомиться ещё в школе или в институте? Чем компьютер может помочь именно юристу в его профессиональной деятельности?

Попытаемся ответить на все эти вопросы. Начнём с того, что сегодня может дать любому человеку компьютер, оснащённый современным программным обеспечением и подключённый к общемировой сети. Существует несколько слегка отличающихся друг от друга классификаций программного обеспечения, разделяющих всё его многообразие на отдельные категории. Так как мы хотим получить лишь самое общее представление об интересующем нас предмете, можно выбрать любую из них. Воспользуемся адресом `http://linuxshop.ru/linuxbegin/win-lin-soft/index.shtml`. Он интересен тем, что его автор не просто рассматривает различные категории ПО (в основном прикладного), но и указывает аналогичные друг другу разработки для двух основных современных ОС: Windows и Linux.

Программы для работы в сети. В предыдущем параграфе мы узнали, что для работы в сети необходим браузер. В Windows это чаще всего

Internet Explorer, в Linux есть несколько достойных конкурентов, например Mozilla. Кроме обмена текстовыми сообщениями, сеть Интернет с помощью специального ПО обеспечит и голосовое общение, и даже видеоконференции. Для этого необходим лишь обычный мультимедийный компьютер и весьма недорогая видеокамера. Голосовое общение вполне заменяет телефон, причём при значительно более низкой стоимости, а видеоконференции позволяют организовывать дистанционное обучение и даже защиту дипломных работ!

Программы для работы с файлами. Мы пользуемся компьютером прежде всего для работы с информацией, а информация хранится на дисках и других носителях в файлах. Это — одна из причин, по которой любой пользователь вынужден иметь дело с операционной системой, установленной на компьютере. Чтобы переписать, скажем, файл с дискеты на жёсткий диск, необходимо воспользоваться либо соответствующей командой, либо специальной программой — файловым менеджером с удобным *графическим интерфейсом*[8], который выполнит нужную команду за пользователя. В Windows в качестве файлового менеджера в последнее время чаще всего используют браузер Internet Explorer. В операционной системе Linux сейчас наиболее распространёнными файловыми менеджерами являются Konqueror и Nautilus.

Ещё одним важным классом программ, относящихся к данной категории, являются архиваторы, позволяющие сжать информацию, содержащуюся в одном или нескольких файлах, в несколько (иногда до десяти) раз. Хранить, переносить на магнитных или иных носителях, пересылать по сети (в том числе и по электронной почте) почти любую информацию целесообразно именно в архивированном виде.

Избранные прикладные и системные программы. В этом разделе мы кратко расскажем о возможностях основных программ. Ещё раз напомним, что рассматриваемое распределение ПО по различным категориям достаточно условно.

Антивирусы очень полезны, если на компьютере установлена одна из операционных систем фирмы Microsoft (см. §4). При наличии сканера необходимы программы, обеспечивающие работу с ним. Полезными могут оказаться, например, программы распознавания текста. Существует и такое программное обеспечение, которое позволяет распознавать (то есть преобразовывать в текст) человеческую речь. Конечно же, можно выполнять и обратное преобразование — компьютер уже в состоянии «читать вслух» данный ему текст.

Текстовая информация используется наиболее часто, причём нередко приходится работать с самым обыкновенным (plain) текстом, о котором шла

[8]О компьютерной программе говорят, что она имеет графический интерфейс, если для работы с ней предусмотрены одно или несколько окон графической среды, клавиатура и мышь.

речь ещё в §1. Иногда требуется зашифровать информацию. Зашифровать можно конкретный текст, все файлы на диске или информацию, посылаемую по электронной почте. Соответствующее программное обеспечение вполне доступно (в том числе и свободное), надо только научиться им пользоваться.

Значительная часть информации в сети представлена в таких распространённых графических форматах[9], как PostScript или PDF. Основное достоинство этих форматов — возможность получить качественную бумажную копию документа. Чтобы просмотреть и напечатать документ, необходимо специальное программное обеспечение, которое в нужный момент запускается браузером почти незаметно для пользователя.

Компьютер предоставляет удобную возможность использовать большое количество словарей (например, англо-русский; ведь, несмотря на быстрый рост «Рунета» за последние несколько лет, основная часть информации в сети Интернет представлена на английском языке).

Программы для работы с мультимедиа. Как уже отмечалось, наиболее распространёнными форматами для хранения музыкальных произведений являются MP3 и OGG. Существует, впрочем, немало компакт-дисков, оцифрованный звук на которых записан без использования какого-либо сжатия (аудиокомпакты). ПО для прослушивания музыки обычно устанавливается на любой мультимедийный компьютер. Часто к этому добавляют программы, дающие возможность использовать Karaoke, слушать радио и т. д. В результате современный мультимедийный компьютер с качественной аудиосистемой превращается в полноценный музыкальный центр.

На самом деле возможности подобного компьютера гораздо больше: существуют аудиоредакторы, синтезаторы и редакторы нот, предоставляющие всем желающим возможность настоящего творчества. Дополняется этот пакет программами, позволяющими преобразовывать звук из одного формата в другой. Можно, например, прочитать композицию с аудиокомпакта и «сжать» её в формат MP3 или OGG. Подготовив подборку любимых композиций, легко затем записать их на компакт-диск.

Для создания или модификации изображений существуют графические редакторы. Напомним (см. §2), что есть две основных формы представления графической информации, растровая и векторная. Для работы с каждой из них предназначены свои программы. Наиболее известными и универсальными (и потому профессиональными) являются PhotoShop в Windows и GIMP в Linux. Специальные программы позволяют использовать Flash-технологию[10] и создавать трёхмерную (3D) графику. Существует, наконец, программное обеспечение, предназначенное для облегчения работы с цифровыми фотоаппаратами, которые вытесняют плёночные.

Многие мультимедийные компьютеры позволяют работать с DVD-дисками и просматривать видеозаписи в формате Mpeg. Если на компьютере

[9]Напомним, что форматом называют способ кодирования информации.

[10]Flash — объединение анимации и векторной графики для оформления веб-страниц.

установлен TV-тюнер, то программное обеспечение позволит превратить его в очень качественный телевизор. Им можно управлять как с помощью пульта, так и по сети, можно сохранять отдельные кадры или записывать целые передачи. Если добавить к этому возможность монтажа видео как на любительском, так и на профессиональном уровне, а также возможность создания анимированного изображения, то станет ясно, что мультимедийный компьютер значительно превосходит по своим возможностям стандартную «двойку» — телевизор и видеомагнитофон.

Офисные программы. В последние годы в связи с развитием сети Интернет значение офисных программ несколько уменьшилось, однако текстовые процессоры и электронные таблицы — самые используемые после браузера. Обычно подобные программы объединяют в пакет, позволяющий работать с текстовыми документами, электронными таблицами, презентациями, графической информацией и базами данных. Самый известный из них — Micrososft Office для операционной системы Windows. В последнее время всё большую популярность приобретает его свободный конкурент Open Office, способный функционировать как в Windows, так и в ОС Linux. По своим возможностям эти пакеты вполне сопоставимы и обычно не возникает проблем с совместимостью документов: можно создать документ в одном пакете, а затем работать с ним в другом.

Другие программы. В этот раздел входят игры, среды для программирования и разработки ПО, программы для серверов, научные и специальные программы, эмуляторы и т. п.

Значительно более точная и полная классификация свободного программного обеспечения (на английском языке), охватывающая все сферы применения современного компьютера, содержится на известном сайте `http://sourceforge.net`. По состоянию на начало лета 2004 года там даны ссылки почти на 82 тысячи программных продуктов. Основные разделы, подразделяемые на многочисленные секции, таковы (в скобках указано количество проектов, относящихся к данной категории):

Communications (10322);
Desktop Environment (2236);
Games/Entertainment (9634);
Multimedia (8254);
Other/Nonlisted Topic (1664);
Religion (185);
Security (1780);
Software Development (11247);
Terminals (408);
Database (4189);
Education (2132);
Internet (16480);
Office/Business (3341);
Printing (303);
Scientific/Engineering (6298);
Sociology (228);
System (13471);
Text Editors (18591).

Рассмотрев многочисленные возможности современных компьютерных технологий, попробуем ответить на второй вопрос — с каким программным обеспечением надо знакомиться в первую очередь, хотя определить необходимый минимум знаний и навыков в любой сфере весьма непросто. Однозначного ответа на этот вопрос нет, но кое-что очевидно. Неразумно тратить усилия на глубокое изучение любого конкретного ПО, так как оно заведомо скоро изменится. Зато нужно знакомиться с общими принципами работы определённых классов программ. Выбор того или иного представителя при этом не так существенен, хотя для учебных целей по многим причинам часто целесообразно использовать именно свободное программное обеспечение.

Теперь обсудим, что дают юристу современные информационные технологии. Заметим прежде всего, что юристы, как и представители других профессий, могут в полной мере использовать все достижения современных компьютерных технологий: оперативно получать информацию через Интернет, создавать и редактировать документы в электронном виде, применять базы данных и системы электронного документооборота... Многие аудиторские и юридические конторы выдают выезжающему в командировку сотруднику ноутбук, поскольку обмениваться электронной корреспонденцией гораздо быстрее и удобнее.

Специально для юристов разработаны так называемые *справочные правовые системы* (СПС). Именно эти программы коренным образом изменили методы работы правоведов и значительно расширили возможности для анализа законодательства. Справочная правовая система — это компьютерная программа по законодательству, в которой, кроме базы данных с текстами нормативных актов, содержится множество сопутствующей справочной юридической и экономической информации. Сегодня число различных систем по отечественному праву измеряется десятками. Самыми известными из них являются «Гарант», «КонсультантПлюс», «Кодекс», «Референт», «Эталон», «ЮСИС».

СПС «Гарант» (`http://www.garant.ru`) возникла ещё в 1990 году и сейчас содержит в себе такое количество информации, что если распечатать всё её содержимое, то получится стопка бумаги высотой с 26-этажное здание. Так много различных документов принято нашими законодателями! СПС «КонсультантПлюс» (`http://www.consultant.ru`) активнее других старается работать в Интернете.

Правовые системы предоставляют богатый инструментарий для обработки информации, позволяя производить поиск, делать выборки и т. д. Традиционным поиском по реквизитам документа — номеру, дате принятия и регистрации в Министерстве юстиции, эмитенту[11], контексту, позиции в классификаторе — оснащены все без исключения СПС. Ещё одной важной характеристикой правовых систем является оперативность обновления информации. Профессиональные СПС («Гарант», «КонсультантПлюс», «Кодекс») обновляются ежедневно. При этом старые редакции документов

[11] Эмитент — организация, выпустившая ценные бумаги для финансирования своей деятельности и развития.

тоже остаются доступными.

Представьте себе юриста крупной фирмы, не использующего компьютер, глобальную сеть и СПС, который узнаёт о том, что десять пунктов некоторого закона подверглись изменениям. После долгих поисков он найдёт искомый справочник, возьмёт текст изменяющего документа и, вооружившись ручкой, внесёт изменения. Но через некоторое время закон вновь изменится! А поддерживать в актуальном (соответствующем действительности) состоянии юрист должен далеко не один, а десятки, сотни, а может быть и тысячи нужных ему документов!

Только компьютеры и специализированные правовые системы позволяют специалистам в области юриспруденции быстро реагировать на чуть ли не ежедневные изменения законодательных и подзаконных актов. Компьютеры и СПС стали сегодня для юриста таким же рабочим инструментом, какими несколько веков назад были толстый свод законов и гусиное перо.

Упражнения

1. Перечислите категории прикладного программного обеспечения.
2. Опишите возможности справочных правовых систем.

Глава III

Обработка результатов эксперимента

Явления, происходящие в природе, в обществе, в человеке, очень сложны и разнообразны. Учёные изучают разные стороны этих явлений, причём каждая наука вырабатывает свои специфические методы исследования. Например, таким важным социальным явлением, как преступность, занимаются не только юристы, но и социологи, психологи, медики и иные специалисты. Есть тут серьёзная работа и для математиков. Их задача состоит в том, чтобы подвергнуть математической обработке огромный статистический материал: отчёты органов внутренних дел и другие документы, содержащие различные числовые данные. Цель этой работы — выделить наиболее существенные сведения об интересующем нас явлении.

Результаты обработки обычно представляют в виде таблиц, графиков, диаграмм и различных числовых характеристик, которые называют параметрами. Важнейшие из них — среднее арифметическое и дисперсия.

§ 1. Среднее арифметическое

Понятие средней величины используется для описания разнообразных явлений природы и общественной жизни. Так, говорят о средней температуре воздуха, средней скорости движения, средней зарплате, средней продолжительности жизни и т. д. В науке и технике на основе взаимосвязей между средними величинами изучают и рассчитывают всевозможные проекты, в экономике — оптимальные планы, в военном деле — возможные стратегии и основанные на них военные доктрины, в общественной жизни — прогнозы общественно-политической ситуации.

Например, во время предвыборной кампании службы по изучению общественного мнения составляют прогнозы, в которых оценивают шансы на успех различных кандидатов. Ясно, что провести опрос всех избирателей невозможно, поэтому проводят опрос небольшой части населения. По результатам опроса прогнозируют средние проценты популярности кандидатов у различных социальных групп и в разных регионах. Если обработка результатов опроса проведена математически грамотно, то выводы будут достаточно точно отражать реальную ситуацию.

Под средней величиной чаще всего подразумевают среднее арифметическое. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа. Их средним арифметическим называется число

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,. \tag{1}$$

Пример 1.1. По сведениям автоинспекции количество дорожных происшествий на улицах Дрюкова в первую декаду октября было таким: 6, 8, 10, 7, 6, 11, 9, 8, 7, 11. Найдите среднее число дорожных происшествий в день за первую декаду октября.

Решение. Среднее $\overline{x} = \dfrac{1}{10}(6+8+10+7+6+11+9+8+7+11) = 8{,}3.$

Пусть в сводке за следующие 10 дней оказались другие данные: 0, 5, 7, 7, 12, 11, 14, 13, 7, 6. Их среднее арифметическое

$$\overline{y} = \frac{1}{10}(0+5+7+7+12+11+14+13+7+6) = 8{,}2$$

будет весьма незначительно отличаться от среднего значения за первую декаду. Поэтому среднее число дорожных происшествий можно прогнозировать, причём достаточно точно. Этот факт подтверждается и отчётами ГАИ за много лет. Из них видно также, что чем больше отчётный период (декада, месяц, квартал, год, пятилетка), тем средняя величина устойчивее. Иными словами, среднее число происшествий за декаду колеблется меньше, чем число происшествий за каждый день; среднее число происшествий за месяц колеблется ещё меньше и т. д.

Конечно, средние величины могут различаться, и довольно значительно. Например, количество дорожных происшествий зависит от погоды, времени года, состояния дороги и от многих других случайных факторов. Однако свойство средних величин состоит в том, что различие между ними всё-таки меньше, чем различие между исходными данными. Описанное свойство средних представляет собой одно из важнейших проявлений закона больших чисел, открытого Чебышевым[1].

Если таблица исходных данных содержит много чисел (несколько десятков или более), то составляют более сложную таблицу, в которой для каждой из величин указывают, сколько раз она наблюдалась.

Пример 1.2. УВД города Дрюково опубликовало сводку о количестве правонарушений, совершённых подростками за первые 20 дней сентября: 8, 6, 13, 4, 13, 13, 12, 9, 7, 6, 12, 14, 13, 12, 17, 6, 8, 12, 7, 12. По этим данным составлена следующая таблица 10, в которой m_i — число дней, в каждый из которых было совершено $\tilde{x}_i$ правонарушений. Найдите среднее число правонарушений за день.

Таблица 10

$\tilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
m_i	1	3	2	2	1	5	4	1	1

Решение. Из таблицы видно, что был всего 1 день, в течение которого произошло 4 правонарушения; в течение трёх дней было по 6 правонарушений и т. д. Заметьте, что в первой строке числа расположены в порядке возрастания, а если сложить все числа второй строки, то получится общее число дней, то есть 20. Среднее число правонарушений за один день будет

[1]Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) — российский математик.

равно

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4\cdot1+6\cdot3+7\cdot2+8\cdot2+9\cdot1+12\cdot5+13\cdot4+14\cdot1+17\cdot1) = \frac{1}{20}\cdot204 = 10{,}2.$$

Таким образом, мы получаем новую формулу для подсчёта среднего арифметического:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots + \tilde{x}_k m_k\right). \tag{2}$$

Здесь $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$ — *различные* среди заданных n чисел, причём значение $\tilde{x}_1$ встречается m_1 раз, значение $\tilde{x}_2$ повторяется m_2 раз, и так далее, наконец, значение $\tilde{x}_k$ встречается m_k раз. Числа m_i называются *абсолютными частотами*, при этом $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Напомним, что *средним геометрическим n положительных чисел* x_1, x_2, x_3,… x_n называется корень n-й степени из их произведения:

$$\tilde{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторые свойства среднего арифметического и среднего геометрического.

Предложение 1.1. *Среднее арифметическое n заданных чисел заключено между наименьшим и наибольшим из них.*

Заметим сначала, что в рассмотренных выше примерах это свойство было выполнено: в первом из них наименьшее из данных чисел равнялось шести, наибольшее — одиннадцати, а среднее арифметическое — 8,3; во втором примере эти три числа равнялись соответственно 4, 17 и 10,2. Теперь проведём общее рассуждение.

Доказательство. Обозначим буквами a и b соответственно наименьшее и наибольшее из данных чисел x_1, x_2, x_3,… x_n. Покажем, что среднее арифметическое $\overline{x}$ меньше или равно b. Для этого оценим сумму всех данных чисел так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leqslant b + b + b + \ldots + b = nb.$$

Поделив на n, найдём, что $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = \overline{x} \leqslant b$. Аналогично получается и неравенство $\overline{x} \geqslant a$ (сделайте это самостоятельно). □

Предложение 1.2. *Среднее геометрическое n заданных чисел заключено между наименьшим и наибольшим из них.*

Доказательство. Пусть опять b есть наибольшее из чисел x_1, x_2, x_3, …, x_n и a — наименьшее из них. Тогда

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b = b^n.$$

Извлекая корень степени n, получим $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \tilde{x} \leqslant b$. Аналогично доказывается, что $a \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ (сделайте это самостоятельно). □

Предложение 1.3. *Среднее геометрическое двух положительных чисел не больше, чем их среднее арифметическое.*

Доказательство. Для доказательства нужного нам неравенства рассмотрим очевидное соотношение $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$, которое после возведения в квадрат преобразуется к виду

$$x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 \geqslant 2\sqrt{x_1 x_2}$ и, следовательно, справедливо неравенство $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, что и требовалось доказать. □

Среднее арифметическое двух чисел легко построить на числовой оси. Пусть точка A имеет координату a, точка B — координату b, а точка C — середина отрезка AB — неизвестную нам пока координату x (рис. 4). Так как длины отрезков AC и CB равны, то получаем равенство $x - a = b - x$, откуда следует, что $x = \dfrac{a+b}{2}$. Таким образом, *среднему арифметическому соответствует середина отрезка AB.*

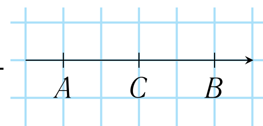


Рис. 4

Упражнения

1. В 2003 году в районах области зарегистрированы следующие данные о количестве убийств и покушений на убийство: 21, 18, 25, 13, 7, 15, 2, 12, 3, 21, 3, 3, 5, 24, 3, 8, 0, 17, 17, 4, 2, 1, 6, 8, 0, 7, 2, 3, 3, 1, 13, 7, 1, 1, 3, 7, 20, 6, 5, 5. Составьте таблицу, аналогичную таблице 10, и, пользуясь формулой (2), найдите среднее арифметическое.

2. Докажите, что среднее геометрическое трёх положительных чисел не превосходит их среднего арифметического.

§ 2. Частоты

В предыдущем параграфе мы получили формулу (2) для вычисления среднего арифметического, которой удобно пользоваться, если исходные данные представлены в форме таблицы 10. Но на практике случается так, что частоты m_i неизвестны, зато известны доли, которые эти частоты составляют от их общей суммы n. Эти доли называются *относительными частотами*, или просто *частотами*. Например, в таблице 10 число всех дней равно 20, поэтому единицу заменим на $1/20 = 0{,}05$; 3 — на $3/20 = 0{,}15$ и т. д. В результате получим таблицу 11.

Как и в таблице 10, в первой строке таблицы 11 указано число правонарушений за день, а во второй — соответствующая частота. Из определения

Таблица 11

$\tilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
$\tilde{p}_i$	0,05	0,15	0,10	0,10	0,05	0,25	0,20	0,05	0,05

частоты следует, что сумма чисел, стоящих во второй строке, равна единице. Используя понятие частоты, мы можем подсчитать среднее значение $\overline{x}$ иным способом:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4\cdot 1+6\cdot 3+7\cdot 2+8\cdot 2+9\cdot 1+12\cdot 5+13\cdot 4+14\cdot 1+17\cdot 1) =$$
$$= 4\cdot\frac{1}{20}+6\cdot\frac{3}{20}+7\cdot\frac{2}{20}+8\cdot\frac{2}{20}+9\cdot\frac{1}{20}+12\cdot\frac{5}{20}+13\cdot\frac{1}{20}+14\cdot\frac{1}{20}+17\cdot\frac{1}{20} =$$
$$= 4\cdot 0{,}05+6\cdot 0{,}15+7\cdot 0{,}10+8\cdot 0{,}10+9\cdot 0{,}05+12\cdot 0{,}25+13\cdot 0{,}20+14\cdot 0{,}05+17\cdot 0{,}05.$$

Таким образом, среднее арифметическое $\overline{x}$ равно сумме произведений чисел, взятых из первой строки таблицы 11, на их частоты. Запишем эту формулу в общем виде. Вводя обозначения $\tilde{p}_1 = m_1/n$, $\tilde{p}_2 = m_2/n$, ..., $\tilde{p}_k = m_k/n$, преобразуем формулу (2) из предыдущего параграфа к виду

$$\overline{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{p}_k. \qquad (4)$$

Пример 2.1. В городе Дрюково каждому пассажиру междугороднего автобуса вручают страховой полис на 5 000 рублей, взимая за это один рубль. Какова средняя прибыль страховой компании от продажи одного полиса, если страховые случаи происходят в среднем с одним пассажиром из 10 000? Учтите, что по обычаям города Дрюково страховка выплачивается только в случае гибели пассажира.

Решение. Прибыль может принимать два значения: 1 рубль, если несчастного случая не произошло, и −4999 рублей при автокатастрофе (знак «минус» означает, что компания терпит убыток). Прибыль −4999 рублей появляется в одном случае из 10000, следовательно, частота этого значения прибыли равна 0,0001. Частота другого значения — 1 рубль — равна 0,9999 (таблица 12). Среднее значение прибыли найдём по формуле (4):

Таблица 12

Прибыль	1	−4999
Частота	0,9999	0,0001

$$\overline{x} = 1\cdot 0{,}9999 + (-4999)\cdot 0{,}0001 = 0{,}9999 - 0{,}4999 = 0{,}5\ (\textit{руб}).$$

При обработке вручную большого количества информации числовые данные предварительно оформляют в виде таблицы 11 и затем составляют расчётную таблицу, заполняя которую, постепенно выполняют все необходимые вычисления.

Пример 2.2. За контрольную работу по математике студенты первого курса получили следующие оценки: 4, 4, 2, 3, 5, 3, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 4, 3, 1, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2 , 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 3, 5, 3, 1, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 3, 2. Найдите среднее арифметическое этих чисел (его можно назвать средней оценкой в группе).

Решение. Составим расчётную таблицу 13 из четырёх строк и семи столбцов. В первой строке мы расположим значения оценок $\tilde{x}_i$ в порядке их возрастания от 1 до 5. Во второй строке для каждой оценки укажем число её повторений, то есть абсолютные частоты m_i. Сумма всех абсолютных частот равна количеству всех оценок, в нашем случае она равна 50. Запишем её в последний столбец. В третьей строке таблицы запишем относительные частоты $\tilde{p}_i$. Так как у нас $n = 50$, то общая формула для вычисления частот примет вид $\tilde{p}_i = m_i/50$. В последнем столбце третьей строки записывается сумма всех частот, которая должна быть равна единице. Если получится другое число, то в расчётах допущена ошибка. В четвёртой строке записываются произведения оценок на их частоты — числа $\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$. Согласно формуле (4) их сумма и равна среднему арифметическому $\overline{x}$. Эта сумма записывается в последнем столбце четвёртой строки.

Таблица 13

$\tilde{x}_i$	1	2	3	4	5	6
Сумма m_i	2	8	20	14	6	50
$\tilde{p}_i$	0,04	0,16	0,40	0,28	0,12	1
$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	0,04	0,32	1,20	1,12	0,60	3,28

Рассмотрим пример, аналогичный примеру 7.5 из первой главы, но решим его другим способом, используя понятие частоты.

Пример 2.3. Данные по раскрываемости краж в пяти районах города (в процентах от общего числа зарегистрированных краж) сведены в таблицу 14. Найдите средний процент раскрываемости краж по городу.

Таблица 14

Номер района	1	2	3	4	5
Число краж	30	10	18	15	7
Число раскрытых	16	9	7	8	7
Процент раскрытых	53,333%	90,000%	38,889%	53,333%	100,000%

Решение. Общее число краж равно $30 + 10 + 18 + 15 + 7 = 80$. Число раскрытых краж равно $16 + 9 + 7 + 8 + 7 = 47$. Искомый процент равен $47/80 \cdot 100\% = 58{,}75\%$. Преобразуем эту запись следующим образом:

$$58{,}75 = \frac{47}{80} \cdot 100 = \frac{16 + 9 + 7 + 8 + 7}{80} \cdot 100 =$$

$$= \frac{30 \cdot \dfrac{53{,}333}{100} + 10 \cdot \dfrac{90}{100} + 18 \cdot \dfrac{38{,}889}{100} + 15 \cdot \dfrac{53{,}333}{100} + 7 \cdot \dfrac{100}{100}}{80} \cdot 100 =$$

$$= \frac{30 \cdot 53{,}333}{80} + \frac{10 \cdot 90}{80} + \frac{18 \cdot 38{,}889}{80} + \frac{15 \cdot 53{,}333}{80} + \frac{7 \cdot 100}{80} =$$
$$= 53{,}333 \cdot \frac{30}{80} + 90 \cdot \frac{10}{80} + 38{,}889 \cdot \frac{18}{80} + 53{,}333 \cdot \frac{15}{80} + 100 \cdot \frac{7}{80}.$$

Дробь $\frac{30}{80}$ представляет собой отношение числа краж в первом районе к общему числу краж по городу, то есть показывает долю числа краж в первом районе от общего числа краж в городе. Такую долю мы назвали выше относительной частотой, или просто частотой. Аналогично, дробь $\frac{10}{80}$ есть частота числа краж во втором районе, $\frac{18}{80}$ — в третьем и т. д.

Таким образом, полученный выше результат можно сформулировать в виде правила: *чтобы найти средний процент раскрываемости краж по городу, нужно процент раскрываемости в каждом районе умножить на соответствующую частоту, а затем полученные числа сложить*. Это правило аналогично сформулированному выше правилу нахождения среднего арифметического по формуле (4): *среднее арифметическое $\overline{x}$ нескольких чисел равно сумме произведений этих чисел на их частоты*. Заметим, что среднее арифметическое чисел, стоящих в последней строке таблицы 14, равно $\frac{1}{5}(53{,}333 + 90 + 38{,}889 + 53{,}333 + 100) \approx$ $\approx 67{,}111\%$, что существенно отличается от правильно найденного числа $58{,}75\%$.

Использование электронных таблиц, о которых рассказывается в заключительных параграфах текущей главы, позволяет автоматизировать процесс решения подобных задач и избавиться от утомительных вычислений при обработке статистических данных.

Упражнения

1. Число краж в восьми районах города оказалось 180, 151, 93, 89, 421, 135, 927, 1455, а проценты раскрываемости — 86,2; 80,6; 92,8; 96,7; 73,6; 97,0; 54,9; 57,7 соответственно. Найдите процент раскрываемости преступлений по городу.

2. Используя формулу (4), найдите процент раскрываемости по городу краж из складов и торговых точек, если данные по районам представлены в таблице 15.

Таблица 15

Район	Число краж	Процент раскрываемости
Заволжский	7	75,0
Московский	69	41,9
Пролетарский	25	34,8
Центральный	29	13,3

§ 3. Дисперсия

В описанных выше примерах среднее арифметическое даёт достаточно точное представление о ситуации. Но иногда, как показывают следующие истории, одного среднего арифметического недостаточно.

История первая. Двух студентов юридического факультета послали на практику, одного в город Дрюково, другого — в город Стуково. Практиканты узнали, что в это время года среднесуточная температура в обоих городах равна нулю. Тот из них, кто поехал в Стуково, будучи человеком осторожным, взял с собой только тёплые вещи. Другой, более легкомысленный, оделся по-летнему. Оказалось, что в течение всей практики в обоих городах температура была стабильной: в Дрюкове $+2$ днем и -2 ночью, в Стукове $+15$ днём и -15 ночью. В результате, несмотря на то, что среднесуточная температура была нулевой, оба студента заболели, так как один постоянно перегревался, а другой — постоянно мёрз.

История вторая. Один из торговцев в Дрюкове был очень набожным человеком. Как-то раз, под впечатлением воскресной проповеди о благотворительности, он в первой половине недели сдавал каждому покупателю сдачу на 1 рубль больше, чем нужно. Но потом действие проповеди ослабело, и нашего торговца одолела природная корысть. В следующие три дня он уже брал с каждого покупателя на 1 рубль больше стоимости товара. Поскольку число покупателей в первые и последние три дня недели было одинаковым, то получается, что в среднем размер неправильной сдачи равен нулю, то есть в среднем покупатели получали сдачу правильно!

Из этих историй видно, что, помимо средней величины, нужно знать ещё и то, как заданные числа рассеяны около их среднего значения. Для этой цели вводятся дисперсия и среднее квадратическое отклонение. *Дисперсией* величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$D = \frac{1}{n}\left((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2\right), \tag{5}$$

где $\overline{x}$, как и выше, среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример 3.1. В таблице 16 указано время в минутах, затраченное на обследование каждого из десяти автомобилей на станции техобслуживания. Символом x_i обозначено время, затраченное на обследование автомобиля с номером i. Найдите дисперсию величин x_i.

Таблица 16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	25	30	22	22	54	36	41	45	25	40

Решение. Найдём среднее арифметическое чисел x_i и составим таблицу 17 из трёх строк:

- в первой строке разместим числа x_i;

- во второй — отклонения этих величин от их среднего значения $\overline{x}$;
- в третьей — квадраты этих отклонений.

Таблица 17

x_i	25	30	22	22	54	36	41	45	25	40	340
$x_i - \overline{x}$	−9	−4	−12	−12	20	2	7	11	−9	6	0
$(x_i - \overline{x})^2$	81	16	144	144	400	4	49	121	81	36	1076

В последнем столбце записаны суммы чисел по строкам. В частности, в последнем столбце первой строки записано общее время (340 минут) обследования всех автомобилей. Поделив его на 10, найдём среднее время обследования $\overline{x} = 34$ мин. Разности $x_1 - \overline{x}$, $x_2 - \overline{x}$, …, $x_{10} - \overline{x}$, записанные во второй строке, представляют собой отклонения величин x_1, x_2, …, x_{10} от их среднего значения. *Сумма отклонений всегда равна нулю*, что показано в последнем столбце второй строки. Это важнейшее свойство средней величины. Наконец, в последнем столбце третьей строки находится сумма квадратов отклонений, равная 1076. Дисперсию находим по формуле (5): $D = 1076/10 = 107{,}6$ *мин*^{2}.

Если известны частоты $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$, …, $\tilde{p}_k$, то для вычисления дисперсии вместо формулы (5) следует использовать формулу

$$D = \tilde{p}_1(\tilde{x}_1 - \overline{x})^2 + \tilde{p}_2(\tilde{x}_2 - \overline{x})^2 + \ldots + \tilde{p}_k(\tilde{x}_k - \overline{x})^2, \tag{6}$$

где, $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, …, $\tilde{x}_k$ суть различные среди заданных чисел x_1, x_2, …, x_n.

Средним квадратическим отклонением величин x_1, x_2, …, x_n от их среднего значения $\overline{x}$ называется величина

$$S = \sqrt{D}. \tag{7}$$

В рассмотренном выше примере $S = \sqrt{107{,}6} = 10{,}373\ldots \approx 10{,}4$ мин.

Формула (5) показывает, что дисперсия является средним арифметическим квадратов разностей $x_1 - \overline{x}$, $x_2 - \overline{x}$, …, $x_n - \overline{x}$. Поэтому величину S можно рассматривать как среднее отклонение величин x_1, x_2, …, x_n от их среднего значения $\overline{x}$. Из определения дисперсии и среднего квадратического отклонения следует, что последнее не превышает наибольшей из величин $|x_i - \overline{x}|$ (абсолютная величина отклонения). Так, в примере 3.1 значение S существенно меньше максимального отклонения ($10{,}4 < 20$). Зато в историях, которые мы рассказали в начале параграфа, среднее квадратическое отклонение S является максимально возможным, так как все отклонения от среднего значения одинаковы по абсолютной величине. Вычислив по формуле (5) среднее квадратическое отклонение температуры в Дрюкове и Стукове, мы найдём, что оно равно максимальной температуре (2 и 15 соответственно); во второй истории среднее квадратическое отклонение (1 рубль) также совпадает с величиной максимального отклонения.

Можно доказать, что для дисперсии и среднего квадратического отклонения верны следующие оценки «сверху» (как и ранее, a — наименьшее, а b — наибольшее из чисел).

Предложение 3.1. $D \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$, $S \leqslant \dfrac{b-a}{2}$.

Если объём исходных данных достаточно велик, например несколько десятков чисел, то для вычисления дисперсии составляют расчётную таблицу, подобную той, которую мы заполняли в предыдущем параграфе, рассматривая пример 2.2.

Пример 3.2. За контрольную работу по математике студенты первого курса получили следующие оценки: 4, 4, 2, 3, 5, 3, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 4, 3, 5, 4, 3, 1, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 2 , 4, 4, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 3, 5, 3, 1, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 3, 2. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Расширим таблицу 13, составленную в предыдущем параграфе при вычислении среднего арифметического оценок. К четырём строкам этой таблицы добавим ещё три (таблица 18). В пятой строке запишем разности $\tilde{x}_i - \overline{x}$, они представляют собой отклонения оценок от их среднего арифметического $\overline{x} = 3{,}28$. Например, $\tilde{x}_1 - \overline{x} = 1 - 3{,}28 = -2{,}28$. Рассчитав все отклонения, будем находить их квадраты $(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$ и записывать полученные числа в шестой строке. Например, первым числом в этой строке будет $(\tilde{x}_1 - \overline{x})^2 = (-2{,}28)^2 = 5{,}1984$. Заполнив шестую строку таблицы, перейдём к седьмой. Сюда мы поместим произведения чисел шестой строки на соответствующие частоты $(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\tilde{p}_i$. Первым числом в этой строке будет $(\tilde{x}_1 - \overline{x})^2\tilde{p}_1 = 5{,}1984 \cdot 0{,}04 = 0{,}207936$. Согласно формуле (6), сумма чисел седьмой строки даёт значение дисперсии, которое запишем в последнем столбце.

Таблица 18

$\tilde{x}_i$	1	2	3	4	5	Сумма
m_i	2	8	20	14	6	50
$\tilde{p}_i$	0,04	0,16	0,40	0,28	0,12	1
$\tilde{x}_i\tilde{p}_i$	0,04	0,32	1,20	1,12	0,60	3,28
$\tilde{x}_i - \overline{x}$	−2,28	−1,28	−0,28	0,72	1,72	—
$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	5,1984	1,6384	0,0784	0,5184	2,9584	—
$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\tilde{p}_i$	0,2079	0,2621	0,0314	0,1452	0,3550	1,0016

Сделаем важное замечание. Кто-то при заполнении таблицы захочет округлить и, например, вместо 5,1984 записать 5,20. Не спешите округлять! При сложении даже десяти слагаемых, погрешность каждого из которых равна 0,01, суммарная ошибка может возрасти до 0,1. При дальнейших вычислениях она может увеличиться ещё больше, особенно при умножении, делении и возведении в степень.

Точные значения величин последней строки таблицы 18 имеют в своей записи 6 знаков после запятой. Округлив их до четырёх знаков, мы получили приближённые значения с точностью до 0,0001. Накопленная после сложения пяти значений ошибка будет меньше 0,0005. Это вполне допустимо, поскольку студенты получают только целые оценки: 2, 3, 4 и 5 (оценки 4,1 не бывает). Из таблицы 18 находим, что $D = 1{,}0016$ и, следовательно, по формуле (7) среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{1{,}0016} = 1{,}0007996 \approx 1{,}0008$.

Упражнения

1. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение процента раскрываемости краж по данным таблицы 14 из §2.

2. Докажите справедливость предложения 3.1 для двух и трёх чисел.

§ 4. Генеральная совокупность и выборка

Введём весьма важное понятие *переменной величины*. В примере 3.1 предыдущего параграфа центральную роль играет таблица 16, в которой каждому автомобилю ставится в соответствие время его обследования. Математики в этом случае говорят, что время обследования есть переменная величина X, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. В примере 1.1 из §1 переменной величиной является число дорожных происшествий, в примере 2.1 из §2 — прибыль страховой компании.

Допустим, что нужно обследовать *все* автомобили города Дрюково. Число автомобилей так велико, что описать все значения величины X (X — время обследования) практически невозможно, однако мы можем, не проводя самого обследования, предсказать его результаты приближённо, с помощью примера 3.1 из §3. Предварительно, используя таблицу 16, составим другую таблицу 19, в которой укажем время обследования $\tilde{x}_i$ и соответствующую частоту $\tilde{p}_i$.

Таблица 19

$\tilde{x}_i$	22	25	30	36	40	41	45	54
$\tilde{p}_i$	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Обычно прогноз содержит следующую информацию: диапазон изменения (значений) величины X; её среднее значение $\overline{x}$; среднее квадратическое отклонение S и *интервал наиболее вероятных значений величины* X. Так обычно называют интервал, серединой которого является точка $\overline{x}$ — среднее арифметическое, и в который попадает более половины значений величины X.

По данным примера 3.1 время обследования автомобиля изменяется в пределах от 22 до 54 минут, среднее время обследования одного автомобиля $\overline{x} = 34$ минуты, а среднее отклонение величины X от её среднего значения $\overline{x}$ составляет $S = 10{,}4$ минуты. Из данных таблицы 19 следует, что в интервал

$(\overline{x} - S, \overline{x} + S) = (23{,}6; 44{,}4)$ попадет 5 значений величины X: 25, 30, 36, 40 и 41, частоты которых соответственно равны 0,2, 0,1, 0,1, 0,1 и 0,1. Следовательно, в интервал (23,6; 44,4) попадает 60% (то есть бóльшая часть) значений величины X, так как сумма частот равна 0,6. Таким образом, интервал (23,6; 44,4) можно считать интервалом наиболее вероятных значений величины X.

Часто бывает полезно исследовать также долю значений исследуемой величины, попадающих в какой-либо другой промежуток. Обычно оценивают долю больших и малых значений. В нашем примере доля автомобилей, на обслуживание которых затрачивается меньше 23,6 минут, составляет 20% от общего количества автомобилей (в таблице 19 имеется одно такое значение — 22, а его частота равна 0,2). Доля автомобилей, на обслуживание которых затрачивается больше 44,4 минут, составляет также 20% от общего количества автомобилей.

Результаты, полученные при обследовании десяти автомобилей, можно распространить на все автомобили города Дрюково. С определённой степенью достоверности на обследование каждого автомобиля в городе затрачивается 34 минуты; время обследования примерно 60% процентов автомобилей заключено в промежутке от 23,6 до 44,4 минут, и так далее. Такие приблизительные расчёты могут весьма пригодиться, например тому, кто хочет открыть новую станцию техобслуживания, поскольку они (то есть расчёты) характеризуют рынок в этой сфере бизнеса.

При обработке статистического материала используется специальная терминология. Совокупность всех рассматриваемых объектов называют *генеральной совокупностью*, а часть объектов, каким-либо способом выбранных для обследования, — *выборкой*. В нашем примере с автомобилями генеральную совокупность образуют все автомобили города Дрюково, а выборку — те 10 автомобилей, которые рассматривались в примере 3.1. Очень важно сделать выборку правильно. От этого зависит точность и достоверность прогноза. В математической статистике существуют специальные методы, позволяющие сделать выборку так, чтобы полученная с её помощью информация давала достаточно полное и адекватное представление об интересующем нас признаке изучаемой генеральной совокупности. Тогда среднее арифметическое $\overline{x}$ и дисперсия D будут близки к гипотетическим величинам — среднему арифметическому и дисперсии, которые могли бы быть получены при обработке всей генеральной совокупности.

Пример 4.1. Комиссия изучала состояние борьбы с преступностью в регионе. Случайным образом выбрано 20 районов (вообще-то их больше двадцати) и по ним были представлены данные о числе раскрытых убийств: 11, 6, 12, 1, 3, 1, 6, 20, 10, 1, 1, 3, 3, 1, 23, 11, 3, 6, 10, 3. Составьте по этим данным прогноз для всего региона.

Решение. Совокупность всех районов данного региона — это генеральная совокупность. Изучается переменная величина X, которая представляет собой число раскрытых в районе убийств. Мы обработаем выборочные данные для заданных 20 объектов генеральной совокупности по приведёной выше схеме и тем самым опишем свойства всей генеральной совокупности, то есть составим представление о борьбе с преступностью во всех районах региона. Оценку точности и надёжности подобного прогнозирования мы обсудим позже.

Найдём среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по данной выборке. Для этого составим расчётную таблицу 20. Сейчас мы выполним все выкладки «вручную», а в последних параграфах главы научимся применять для решения подобных задач компьютер.

Таблица 20

$\tilde{x}_i$	m_i	$\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\,\tilde{p}_i$
1	5	0,25	0,25	−5,75	33,0625	8,265625
3	5	0,25	0,75	−3,75	14,0625	3,515625
6	3	0,15	0,90	−0,75	0,5625	0,084375
10	2	0,10	1,00	3,25	10,5625	1,056250
11	2	0,10	1,10	4,25	18,0625	1,806250
12	1	0,05	0,60	5,25	27,5625	1,378125
20	1	0,05	1,00	13,25	175,5625	8,778125
23	1	0,05	1,15	16,25	264,0625	13,203125
Сумма	20	1	6,75	—	—	38,0875

Проведём проверку правильности вычислений. Число всех выборочных данных 20, оно равно сумме чисел второго столбца. Сумма всех частот равна 1, она записана в третьем столбце. Теперь найдём дисперсию. Она равна сумме всех чисел последнего столбца: $D = 38{,}0875$. Извлекая корень, найдём среднее квадратическое отклонение: $S = \sqrt{38{,}0875} = 6{,}1715071\ldots \approx$ $\approx 6{,}17$. Среднее квадратическое отклонение мы округляем с той же точностью, что и среднее арифметическое (в нашем примере — до сотых долей). Так обычно делают, когда заданные числа $\tilde{x}_i$ являются целыми.

Совокупность полученных нами результатов (выборочные значения, их частоты, среднее арифметическое, среднее квадратическое отклонение) представляет *математическую модель*, которая описывает ситуацию с раскрытием убийств в регионе. Пользуясь этой моделью, охарактеризуем изучаемую величину — число раскрытых убийств:

- число убийств, раскрытых в одном районе, изменяется от 1 до 23;
- наиболее вероятными значениями являются числа 1 и 3, так как они имеют наибольшую частоту 0,25;
- среднее значение числа убийств (среднее арифметическое) равно 6,75;
- среднее отклонение от среднего значения (среднее квадратическое отклонение) составляет 6,17;

- в интервал $(\overline{x}-S, \overline{x}+S) = (0{,}58; 12{,}92)$ попадают 6 значений случайной величины: 1, 3, 6, 10, 11, 12; сумма их частот равна $0{,}25+0{,}25+0{,}15+ + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}90$; следовательно, этот интервал содержит 90% значений величины и будет интервалом наиболее вероятных значений величины X;
- частота малых значений величины X (меньших 0,58) равна нулю;
- частота больши́х значений (бо́льших 12,92) равна $0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}10$; иными словами, число случаев, когда раскрытых убийств больше 12, составляет всего 10% от их общего числа.

В заключение сделаем несколько важных замечаний. Во-первых, переменная величина X считается известной, если указано правило, по которому можно находить частоту её попадания в любой заданный интервал (называемую частотой данного интервала). Эта частота равна сумме частот отдельных значений, попавших в данный интервал. Во-вторых, интервал $(\overline{x} - S, \overline{x} + S)$ не всегда является интервалом наиболее вероятных значений. Если его частота оказывается меньше 1/2, то его расширяют; если же частота больше 1/2, то интервал можно и сузить.

Наконец, мы сами определяем, что такое малые и большие значения случайной величины. Если такие понятия вообще требуются для описания конкретного материала, то их вводят, сообразуясь со спецификой задачи. Например, мы могли бы взять в качестве интервала наиболее вероятных значений промежуток $[3, 11]$, назвать малыми значения, меньшие трёх, и большими — значения, большие одиннадцати. Частоты этих промежутков равны 0,60, 0,25 и 0,15 соответственно.

Упражнения

1. Составьте прогноз по раскрытию убийств для региона по данным о количестве раскрытых убийств по двадцати его районам: 2, 8, 0, 17, 1, 7, 2, 5, 2, 4, 5, 20, 0, 19, 2, 7, 2, 4, 8, 5.

2. Проверьте неравенство $S \leqslant \dfrac{b-a}{2}$ во всех примерах этого и предыдущего параграфов.

§ 5. Интервальный ряд

При обработке большого числа экспериментальных данных их предварительно группируют и оформляют в виде так называемого *интервального ряда*.

Пример 5.1. Средняя месячная зарплата за год в некоторых условных единицах каждого из пятидесяти случайно отобранных работников хозяйства такова: 317, 304, 230, 285, 290, 320, 262, 274, 205, 180, 234, 221, 241, 270, 257, 290, 258, 296, 301, 150, 160, 210, 235, 308, 240, 370, 180, 244, 365, 130, 170, 250, 370, 267, 288, 231, 253, 315, 201, 256, 279, 285, 226, 367, 247, 252, 320, 160, 215, 350. Составим по этим данным интервальный ряд и построим *гистограмму*.

Решение. Здесь переменной величиной X является средняя месячная зарплата. Как видно из приведённых данных, наименьшее значение величины X равно 130, а наибольшее — 370. Таким образом, диапазон наблюдений представляет собой отрезок $[130, 370]$, длина которого равна $370 - 130 = 240$. Разобьём диапазон наблюдений на отрезки (*разряды*) так, чтобы каждый разряд содержал несколько экспериментальных данных. Можно, например, разделить отрезок $[130, 370]$ на 6 равных частей, тогда длина каждого разряда будет равна 40, а их границами будут числа 130, 170, 210, 250, 290, 330 и 370 (рис. 5). Подсчитаем далее число значений, попавших в каждый разряд. В первый попадают следующие числа: 150, 160 (дважды), 130 и 170. Теперь делаем важное предположение, которое, собственно говоря, и выражает идею интервального ряда: будем считать, что все числа, попавшие в один разряд, приблизительно равны друг другу, и на этом основании заменим их одним числом — серединой этого разряда. Середина первого разряда — это число 150. Мы будем считать, что оно заменяет собой (приближённо!) число 150 — 1 раз, число 160 — 2 раза, число 130 — 1 раз, но число 170 — только 0,5 раза, поскольку оно находится на границе между первым и вторым разрядами. Число 170 мы включим также и во второй разряд и тоже с кратностью 0,5. Сложив кратности, найдём *абсолютную частоту первого разряда*: $m_1 = 1 + 2 + 1 + 0{,}5 = 4{,}5$.

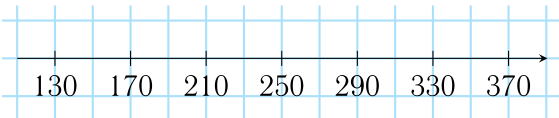


Рис. 5

В соответствии с вышесказанным, число m_1 имеет двоякий смысл: с одной стороны, это число попаданий переменной величины X в первый разряд, а с другой — кратность середины разряда — числа 150. Именно последний факт даёт нам основание назвать число m_1 абсолютной частотой, то есть использовать терминологию предыдущих параграфов. Разделив абсолютную частоту на число n всех наблюдений, найдём *относительную частоту* $\tilde{p}_1$ *первого разряда*: $\tilde{p}_1 = m_1/n = 4{,}5/50 = 0{,}09$.

Таблица 21

Разряды	$[130, 170]$	$[170, 210]$	$[210, 250]$	$[250, 290]$	$[290, 330]$	$[330, 370]$
m_i	4,5	5	12	14,5	9	5
$\tilde{p}_i$	0,09	0,10	0,24	0,29	0,18	0,10

Проделав аналогичные вычисления для всех разрядов, мы получим таблицу 21, в которой m_i — абсолютные частоты, а $\tilde{p}_i$ — относительные. Эта таблица и называется *интервальным рядом*. Сумма всех абсолютных частот равна числу всех приведённых в этой таблице значений переменной величины: $4{,}5 + 5 + 12 + 14{,}5 + 9 + 5 = 50$, что используется для проверки правильности вычислений. Из него следует, что сумма всех относительных частот равна единице: $0{,}09 + 0{,}10 + 0{,}24 + 0{,}29 + 0{,}18 + 0{,}10 = 1$.

Интервальный ряд изображают графически в виде гистограммы, которая строится так. Сначала вычисляют *плотности частот* h_i, разделив относительную частоту каждого разряда на его длину: $h_1 = 0{,}09 : 40 = 0{,}00225$, $h_2 = 0{,}10 : 40 = 0{,}00250$, $h_3 = 0{,}00600$, $h_4 = 0{,}00725$, $h_5 = 0{,}00450$, $h_6 = 0{,}00250$. Затем откладывают на оси X значения, соответствующие границам разрядов, и на каждом из отрезков длины 40, как на основании, строят прямоугольник, высота которого равна плотности частоты соответствующего разряда. Получившаяся фигура и называется *гистограммой* (рис. 6). В последнем параграфе главы рассказывается о том, как можно автоматизировать процесс построения гистограмм с помощью компьютера.

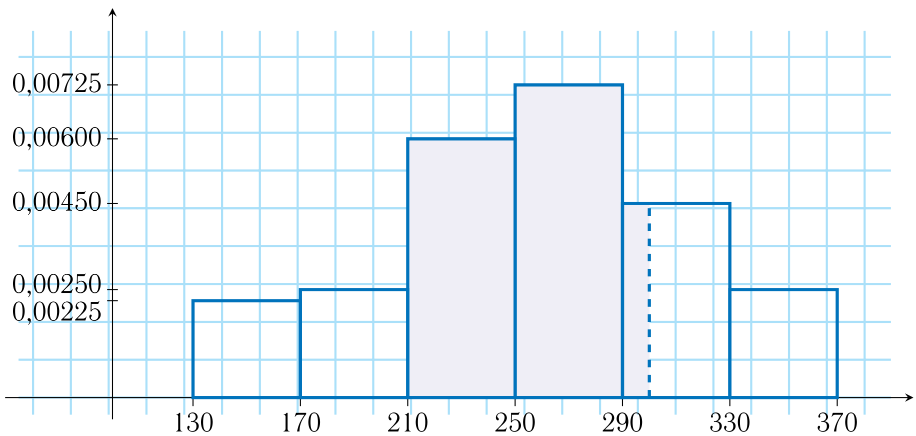


Рис. 6

Высоты $h_1, h_2, \ldots, h_6$ прямоугольников выбраны так, что их площади были равны соответствующим относительным частотам $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_6$. Поэтому, *доля значений величины X, попадающих в некоторый числовой промежуток, равна площади той части гистограммы, основанием которой является этот промежуток.*

Определим, например, долю значений переменной величины X, принадлежащих отрезку $[210, 300]$. Для этого вычислим площадь фигуры с основанием от 210 до 300 (на рис. 6 она заштрихована). Площади первых двух прямоугольников, составляющих фигуру, равны соответственно $\tilde{p}_3 = 0{,}24$ и $\tilde{p}_4 = 0{,}29$; площадь третьего равна $10 \cdot 0{,}0045 = 0{,}045$. Сумма площадей $0{,}24 + 0{,}29 + 0{,}045 = 0{,}575$ и даёт нужное число. Иными словами, 57,5% значений величины X находится в границах от 210 до 300.

Пример 5.2. В 2003 году по 40 районам области зафиксированы следующие данные о числе преступлений с применением оружия: 19, 32, 26, 3, 8, 26, 2, 14, 6, 18, 3, 5, 10, 35, 4, 7, 4, 12, 23, 8, 9, 2, 14, 6, 2, 6, 7, 13, 6, 9, 17, 4, 3, 2, 6, 9, 27, 1, 7, 2. Составьте по этим данным интервальный ряд, постройте гистограмму и ответьте на следующие вопросы. Каков диапазон значений переменной величины X — числа преступлений? Какой из полученных вами разрядов имеет наибольшую частоту и как это можно истолковать? Какова доля тех районов, для которых число преступлений с применением оружия заключено в пределах от 8 до 18?

Решение. Изучаемой величиной X является число преступлений с применением оружия, совершённых в одном районе. Самое маленькое из заданных 40 чисел $a = 1$, а самое большое $b = 35$, поэтому диапазоном значений величины X будет отрезок $[1, 35]$, длина которого равна 34. Разобьём этот промежуток на несколько частей (разряды интервального ряда). Обычно разряды имеют одинаковую длину, но это не очень существенно. Гораздо важнее, чтобы число разрядов было не меньше пяти—шести и количество значений величины X, попавших в каждый из разрядов, было не слишком маленьким (не менее четырёх—пяти).

Проведём прикидку. В нашей задаче дано всего 40 чисел, поэтому, полагая в среднем на один разряд 6—7 значений, мы получим 6 разрядов. Поскольку суммарная длина всех разрядов 34, то примерная длина одного разряда равна шести. Если выбрать длину первого разряда равной 4, то длины всех остальных могут быть равны 6. Составим интервальный ряд, дополнив его строкой, где записаны плотности частот h_i (таблица 22).

Таблица 22

Разряды	$[1, 5]$	$[5, 11]$	$[11, 17]$	$[17, 23]$	$[23, 29]$	$[29, 35]$	Сумма
Абс. част. m_i	12,5	14,5	4,5	3	3,5	2	40
Частоты $\tilde{p}_i$	0,3125	0,3625	0,1125	0,0750	0,0875	0,0500	1
	(0,31)	(0,36)	(0,11)	(0,08)	(0,09)	(0,05)	
Высоты h_i	0,0781	0,0604	0,0188	0,0125	0,0146	0,0083	—

В первый разряд попадают 13 чисел: 3, 2, 3, 5, 4, 4, 2, 2, 4, 3, 2, 1 и 2, но соответствующая частота равна 12,5, так как число 5 находится на границе отрезка и встречается только один раз. Во второй разряд попадают 15 чисел: 8, 6, 5, 10, 7, 8, 9, 6, 6, 7, 6, 9, 6, 9 и 7, но в таблицу мы запишем число $m_2 = 14{,}5$, так как половина пятёрки уже отнесена к первому разряду. Действуя аналогично, заполним последовательно все строки таблицы. Гистограмма далее (рис. 7) строится с использованием первой и последней строк таблицы 22 так, как это было описано ранее.

Хотя среди абсолютных частот могут быть дроби, их сумма всегда равна количеству n всех данных чисел (у нас сумма всех чисел второй строки равна 40). Если некоторые разряды имеют малую абсолютную частоту, то их можно объединять. Мы могли бы проделать такую операцию, объединив третий разряд с четвёртым, а пятый с шестым. В третьей строке таблицы 22 записаны частоты разрядов, то есть числа $\tilde{p}_i = m_i/n$, сумма которых должна равняться единице. Отсюда следует, что частоты разрядов можно округ-

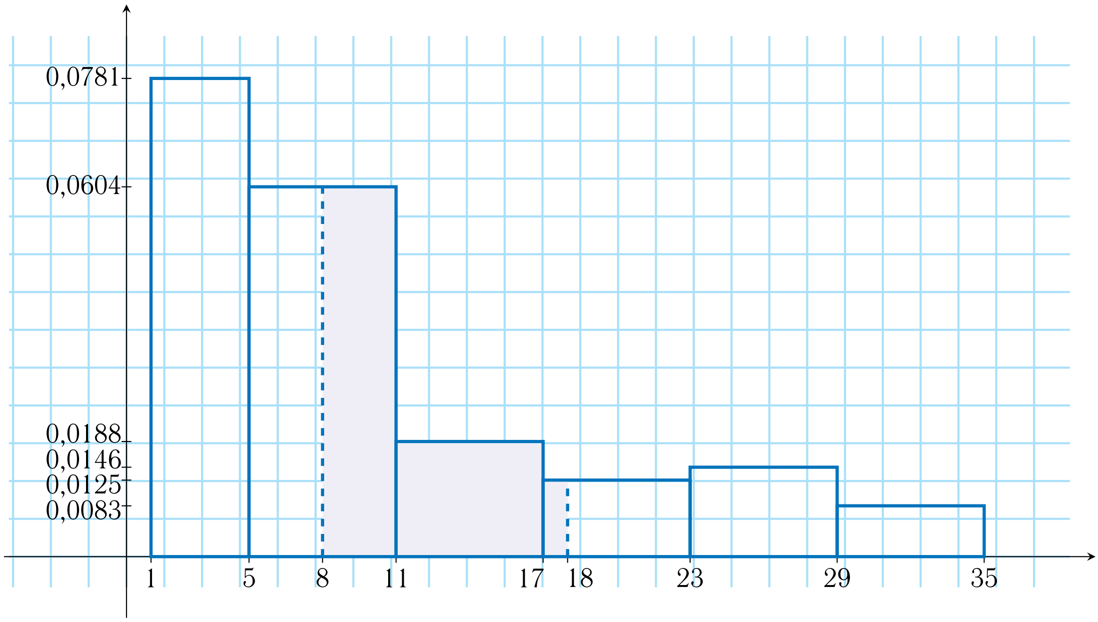


Рис. 7

лять только так, чтобы и после округления их сумма равнялась единице (как числа в скобках третьей строки таблицы).

Таким образом, число преступлений в одном районе может принимать значения от 1 до 35. Наибольшую частоту 0,3625 имеет разряд $[5, 11]$, и попадание значений величины X в этот разряд по сравнению с другими наиболее вероятно. Иными словами, следует ожидать в среднем по 5—11 преступлений в год. Чтобы найти частоту попадания величины X в заданный промежуток, нужно вычислить площадь части гистограммы, опирающейся на него. Так, на промежуток $[8, 18]$ опираются прямоугольник с основанием от 8 до 11 и высотой 0,0604, третий столбец гистограммы и прямоугольник с основанием от 17 до 18 и высотой 0,0125. Их суммарная площадь равна 0,3062. Поэтому число районов, в которых совершено от 8 до 18 преступлений, составляет примерно 31% от числа всех районов области.

Упражнения

1. Рассмотрите вновь пример 4.1 из предыдущего параграфа и постройте прогноз для всего региона, используя интервальный ряд.

2. Имеется годовая сводка о преступлениях с применением огнестрельного оружия в 40 районах: 7, 16, 15, 16, 6, 7, 12, 8, 3, 14, 13, 4, 9, 17, 2, 6, 3, 4, 19, 5, 5, 1, 7, 19, 1, 6, 3, 6, 1, 2, 9, 3, 2, 2, 1, 8, 10, 1, 3, 1. Составьте по этим данным интервальный ряд, постройте гистограмму и ответьте на следующие вопросы. Каков диапазон значений переменной величины X — числа преступлений? Какой из полученных вами разрядов имеет наибольшую частоту и как это можно истолковать? Какова доля тех районов, в которых совершено от шести до двенадцати преступлений с применением оружия?

§ 6. Вычисление средних значений по интервальному ряду

Как мы уже отмечали, интервальный ряд составляют при обработке больших массивов информации. В таких случаях, как правило, отдельные значения величины X не фиксируют, а подсчитывают абсолютные частоты разрядов, то есть количество значений величины X, попавших в каждый разряд. Например, статистические данные позволяют точно указать количество малолетних преступников в стране, но указать точный возраст для каждого из них практически невозможно — полученная таблица, если даже и удастся её составить, будет практически необозримой и крайне неудобной для статистической обработки. Поэтому исследователь, не зная отдельных значений наблюдаемой величины X, не может по приведённым выше формулам вычислить точные значения среднего арифметического, дисперсии и среднего квадратического отклонения. Но приближённое значение этих числовых характеристик можно найти с помощью интервального ряда.

Для этого вспомним идею интервального ряда: все числа, попавшие в один разряд, считаются приблизительно равными друг другу, и на этом основании заменяются одним числом — серединой разряда. Пусть всего имеется k разрядов, серединами которых являются величины $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$. Число $\tilde{x}_1$ заменяет собой m_1 чисел, попавших в первый разряд, поэтому будем считать, что число $\tilde{x}_1$ встречается m_1 раз. Иными словами, m_1 — это абсолютная частота значения $\tilde{x}_1$. Точно так же, абсолютную частоту m_2 второго разряда будем считать абсолютной частотой середины $\tilde{x}_2$ второго разряда и т. д. После этого, поделив каждую абсолютную частоту на сумму всех абсолютных частот, мы найдём относительные частоты $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \ldots, \tilde{p}_k$, а затем по известным формулам вычислим среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{p}_k; \tag{8}$$

$$D = (\tilde{x}_1 - \overline{x})^2\tilde{p}_1 + (\tilde{x}_2 - \overline{x})^2\tilde{p}_2 + \ldots + (\tilde{x}_k - \overline{x})^2\tilde{p}_k; \tag{9}$$

$$S = \sqrt{D}. \tag{10}$$

Пример 6.1. Найдите среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для интервального ряда, заданного таблицей 21.

Решение. Составим расчётную таблицу 23, в первом столбце которой запишем номера разрядов, во втором — числа $\tilde{x}_i$ (середины разрядов), в третьем — произведения $\tilde{x}_i\tilde{p}_i$, и т. д. Таблицу заполним по столбцам, а середину разряда вычислим как полусумму его границ: $\tilde{x}_1 = (130+170)/2 = 150$, $x_2 = (170 + 210)/2 = 190$ и т. д. Согласно формуле (8), сумма чисел третьего столбца даёт среднее арифметическое $\overline{x} = 256{,}8$. Оно записано в последней строке этого столбца. По формуле (9) находим, что $D = 3113{,}75$. Наконец, формула (10) даёт $S = \sqrt{3113{,}75} \approx 55{,}80$.

Таблица 23

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\,\tilde{p}_i$
1	150	13,5	−106,8	11406,24	1026,56
2	190	19,0	−66,8	4462,24	446,22
3	230	55,2	−26,8	718,24	172,38
4	270	78,3	13,2	174,24	90,53
5	310	55,8	53,2	2830,24	509,44
6	350	35,0	93,2	8686,24	868,62
Σ	—	$\overline{x} = 256{,}8$	—	—	$D = 3113{,}75$

Так как при решении задачи мы заменяли значения величины X их приближёнными значениями — серединами разрядов, в которые они попадают, то формулы (8)–(10) дают нам приближённые, а не точные значения среднего арифметического, дисперсии и среднего квадратического отклонения. Например, по данным примера 5.2 из §5 среднее арифметическое количества преступлений с применением огнестрельного оружия будет таким:

$$\frac{1}{40}(19+32+26+3+8+26+2+14+6+18+3+5+10+35+4+7+4+12+23+8+ \\ +9+2+14+6+2+6+7+13+6+9+17+4+3+2+6+9+27+1+7+2) = \\ = \frac{471}{40} = 11{,}7750.$$

Проведя вычисления по формуле (8) с использованием таблицы 22 (найдя середины промежутков — числа $\tilde{x}_i$: 3, 8, 14, 20, 26 и 32), получим:

$$3\cdot 0{,}3125+8\cdot 0{,}3625+14\cdot 0{,}1125+20\cdot 0{,}0750+26\cdot 0{,}0875+32\cdot 0{,}0500 = 10{,}7875.$$

Как видно, между точным и приближённым значениями среднего арифметического имеется существенное расхождение $\delta = 11{,}7750-10{,}7875 = 0{,}9875$. Попытаемся понять, насколько велико может быть это расхождение, или, как говорят математики, оценим максимально возможную погрешность.

Во-первых, заметим, что приближённая формула для среднего арифметического получается из точной формулы $\overline{x} = (x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$ заменой каждого значения x_k его приближённым значением — серединой отрезка. При этом возникает некоторая ошибка δ_k, которая не может быть больше половины того промежутка $[x_i, x_{i+1}]$, в котором находится значение x_k, так как $\delta_k = |x_k - \tilde{x}_i| \leqslant \dfrac{x_{i+1}-x_i}{2} = \dfrac{\Delta_i}{2} \leqslant \dfrac{\Delta}{2}$, где Δ — длина наибольшего разряда (рис. 8). Таким образом, при замене каждого значения x_k его приближённым значением в числителе формулы накапливается ошибка $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n$, которая при делении на n усредняется.

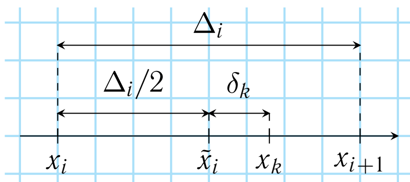


Рис. 8

Поэтому суммарная ошибка оценивается так:

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n}{n} \leqslant \frac{n \cdot \Delta/2}{n} = \frac{\Delta}{2}.$$

Полученная оценка ошибки является достаточно грубой. Точные вычисления в рассмотренном примере дали нам ошибку 0,9875, существенно меньшую, чем $\Delta/2 = 3$. Тем не менее, общий вывод улучшить нельзя. Полученное неравенство показывает, что при уменьшении длин разрядов (что автоматически приводит к увеличению их числа) погрешность при вычислении среднего арифметического уменьшается.

Пример 6.2. Управление сельского хозяйства Брюковского района представило сводку по пятидесяти хозяйствам. Согласно этим сводкам, урожайность ржи (в центнерах с гектара) в хозяйствах оказалась следующей: 16,8; 15,7; 19,6; 20,1; 16,8; 15,7; 19,0; 19,0; 19,0; 17,0; 17,0; 17,0; 21,3; 18,7; 19,6; 20,0; 15,8; 24,1; 21,0; 18,9; 17,2; 18,7; 20,0; 22,3; 20,1; 21,5; 20,2; 18,5; 19,3; 22,5; 18,1; 19,7; 18,4; 20,1; 19,5; 21,2; 19,7; 18,5; 17,4; 24,1; 22,2; 18,2; 19,7; 18,9; 18,4; 19,4; 17,5; 18,7; 17,7; 16,6. Постройте модель урожайности ржи для одного хозяйства.

Решение. Как мы знаем, в состав модели входят интервальный ряд, гистограмма и числовые характеристики. Начнём с построения интервального ряда: самое маленькое значение урожайности $a = 15{,}7$, самое большое $b = 24{,}1$, поэтому диапазон значений — промежуток $[15{,}7; 24{,}1]$, длина которого равна 8,4. Этот отрезок разобъём на 7 равных разрядов длиной 1,2. Полученный интервальный ряд представлен таблицей 24.

Таблица 24

Разряды	[15,7; 16,9]	[16,9; 18,1]	[18,1; 19,3]	[19,3; 20,5]	[20,5; 21,7]	[21,7; 22,9]	[22,9; 24,1]	Сумма
m_i	6	7,5	13,5	14	4	3	2	50
$\tilde{p}_i$	0,12	0,15	0,27	0,28	0,08	0,06	0,04	1
h_i	0,100	0,125	0,225	0,233	0,067	0,050	0,033	—

Для расчёта числовых характеристик составим таблицу 25, аналогичную таблице 23, в последней строке которой запишем среднее арифметическое и дисперсию. Далее найдём среднее квадратическое отклонение: $S = \sqrt{3{,}2614} = 1{,}8059\ldots$ Поскольку выборочные значения приведены с точностью до десятых, то в записи числовых характеристик следует оставить на один знак после запятой больше. Таким образом,

$$\overline{x} = 19{,}17; \quad D = 3{,}26; \quad S \approx 1{,}80.$$

После этого по данным таблицы 24 начертим гистограмму (рис. 9), отметив на ней число $\overline{x}$ и промежуток $(\overline{x} - S, \overline{x} + S) = (17{,}37; 20{,}97)$.

Таблица 25

I	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\,\tilde{p}_i$
1	16,3	1,956	−2,868	8,225424	0,987050
2	17,5	2,625	−1,668	2,849344	0,427401
3	18,7	5,049	−0,468	0,219024	0,059136
4	19,9	5,572	0,732	0,535824	0,150030
5	21,1	1,688	1,932	3,732634	0,298610
6	22,3	1,338	3,132	9,809424	0,588565
7	23,5	0,940	4,332	18,766224	0,750648
Σ	—	$\overline{x} = 19{,}168$	—	—	$D = 3{,}2614$

Проведём анализ полученных результатов. Урожайность ржи в хозяйствах Брюковского района принимает значения от 15,7 до 21,4 *ц/га*. Наиболее вероятные значения урожайности — от 19,3 до 20,5 *ц/га* (14% хозяйств); два процента составляют хозяйства с максимальной урожайностью, от 22,9 до 24,1 *ц/га*; 6% хозяйств имеют самую маленькую урожайность — от 15,7 до 16,9 *ц/га*. Среднее значение урожайности по всем хозяйствам составляет 19,17 *ц/га*, среднее отклонение от среднего значения равно 1,80. Хозяйства, в которых урожайность отклоняется от среднего значения не более, чем на 1,80 *ц/га*, составляют 69% от общего числа хозяйств. Сравнительно малые значения урожайности (меньше 17,37) наблюдаются в 16% хозяйств; 15% хозяйств имеют высокую урожайность, от 20,97 до 24,1 *ц/га*.

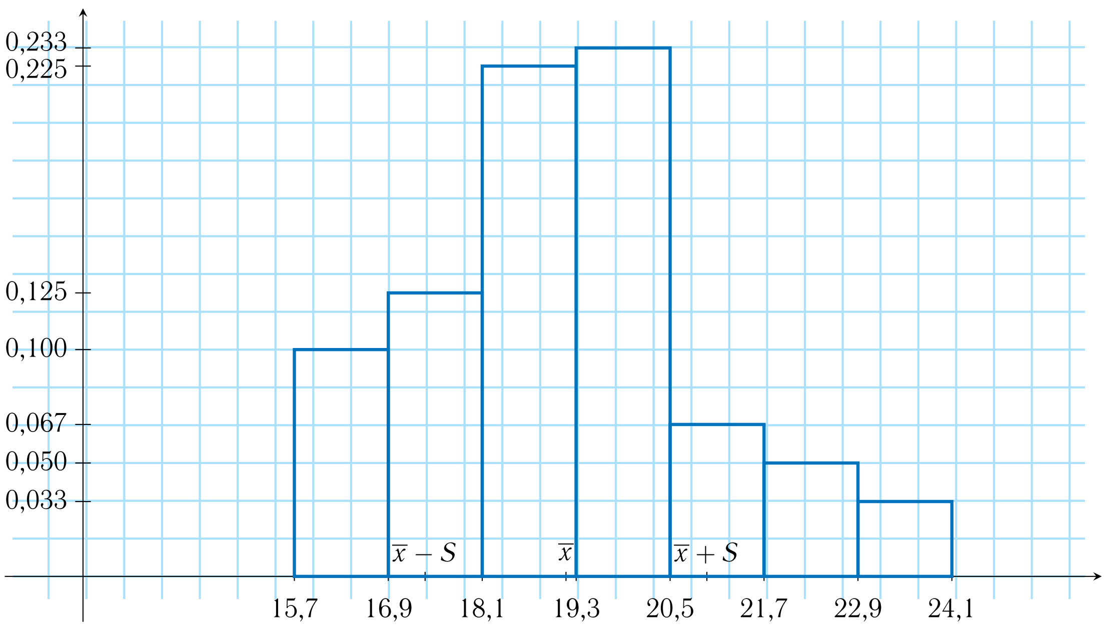


Рис. 9

Упражнения

1. Для проведения демографических исследований выбрали 50 семей и получили следующие данные о количестве членов семьи: 2, 5, 3, 4, 1, 3, 6, 2, 4, 3, 4, 1, 3, 5, 2, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 5, 3, 1, 4, 3, 4, 2, 6, 3, 2, 3, 1, 6, 4, 3, 3, 2, 1, 7. Укажите переменную величину, составьте таблицу по образцу таблицы 20 и найдите среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2. Управление сельского хозяйства Дрюковского района представило сводку по пятидесяти хозяйствам. Согласно этой сводке, урожайность ржи в них составила (в центнерах с гектара): 17,5; 17,8; 18,6; 18,3; 19,1; 19,9; 20,6; 20,1; 22; 21,4; 17,5; 18,5; 19; 20; 22; 20,6; 19,1; 18,6; 17,9; 19,1; 22; 19; 17,5; 22; 22,6; 21; 21,4; 19; 17,8; 18,3; 19,9; 20,1; 21,4; 18,5; 20; 20,6; 18,6; 21,4; 21; 20; 20; 18; 18; 18; 17,5; 18,6; 19,1; 20,6; 17,5; 18,6. Постройте интервальный ряд и гистограмму, а затем по формулам (1)–(3) найдите основные числовые характеристики (среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение) рассматриваемой величины.

3. Найдите по данным упражнения 2 предыдущего параграфа точные и приближённые значения среднего арифметического и дисперсии, определите допущенную ошибку δ и сравните её с половиной длины наибольшего разряда.

4. Майор Зимин увлёкся идеей интервального ряда и решил придумать такое разбиение на разряды, при котором величины $\overline{x}$, D и S получались бы не приближёнными, а точными. Что мы можем ему посоветовать?

§ 7. Электронные таблицы

Если работа с системами компьютерной алгебры для юриста — скорее исключение из правил, то так называемые офисные программы — повседневный инструмент любого современного специалиста в области юриспруденции. Среди этих программ выделяются *электронные таблицы* — программы, позволяющие обрабатывать большие массивы информации, проводить их статистический анализ и строить диаграммы, наглядно отображающие данные. Принципы работы всех электронных таблиц одинаковы, поэтому достаточно научиться пользоваться какой-либо одной программой. В этом учебнике мы рассказываем о программе Open Calc, входящей в свободный пакет Open Office, способный функционировать под управлением как различных версий Microsoft Windows, так и Linux. В этом параграфе мы рассмотрим только содержательные моменты работы с электронными таблицами, а все технические детали (запуск программы, использование меню и т. п.) отложим до следующей главы.

Прообразом электронных таблиц были бухгалтерские книги, в которых размещались листы (таблицы) с данными, поэтому пользователь работает с «книгой», содержащей листы. Каждый лист представляет собой сетку из ячеек, образующихся в результате пересечения строк и столбцов таблицы. Строки нумеруют числами, а столбцы — латинскими буквами, поэтому каждая ячейка получает адрес, составленный из номеров проходящих через неё столбца и строки, например, `A10` или `AD2`. В любую из ячеек можно записать текст, число или формулу, по которой значение этой ячейки определяется через величины, содержащиеся в других ячейках. На рис. 10 приведён простой пример: в ячейке `A3` вычисляется сумма величин, находящихся в ячейках `A1` и `A2`. Эта сумма автоматически пересчитывается при изменении значений в ячейках `A1` и `A2`.

	A	B
1	5	
2	2	
3	=A1+A2	
4		

	A	B
1	5	
2	2	
3	7	
4		

	A	B
1	5	
2	3	
3	8	
4		

Рис. 10

Пример 7.1. Электронная таблица (рис. 11) содержит информацию о количестве преступлений, совершённых в различных районах. Вычислите процент раскрытия преступлений по каждому району.

	A	B	C
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**
2	Заволжский	7	6
3	Московский	69	29
4	Пролетарский	25	8
5	Центральный	29	4
6			
7			

Рис. 11

Решение. Напомним, что для вычисления процента раскрываемости преступлений нужно число раскрытых преступлений поделить на их общее количество и затем умножить результат на 100. Добавим к заданной таблице ещё один столбец, озаглавив его «Процент раскрытых», и введём в ячейку `D2` формулу `=C2/B2*100`, по которой вычисляется процент раскрытых преступлений по Заволжскому району (рис. 12).

	A	B	C	D
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**
2	Заволжский	7	6	85,71
3	Московский	69	29	
4	Пролетарский	25	8	
5	Центральный	29	4	
6				
7				

Рис. 12

Поскольку формулы в других ячейках столбца `D` по сути не отличаются от формулы в ячейке `D2`, то её можно просто «размножить», скопировав в остальные ячейки. При этом происходит автоматическое изменение адресов ячеек, используемых в формуле. Чтобы скопировать, достаточно подвести указатель мыши к правому нижнему углу ячейки `D2` и при нажатой левой кнопке мыши переместить его вниз до ячейки `D5`. После того, как кнопка будет отпущена, в ячейках D2-D5 окажутся подправленные формулы и мы увидим результаты вычисления по ним (рис. 13).

	A	B	C	D
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**
2	Заволжский	7	6	=C2/B2*100
3	Московский	69	29	=C3/B3*100
4	Пролетарский	25	8	=C4/B4*100
5	Центральный	29	4	=C5/B5*100
6				

	A	B	C	D
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**
2	Заволжский	7	6	85,71
3	Московский	69	29	42,03
4	Пролетарский	25	8	32
5	Центральный	29	4	13,79
6				

Рис. 13

Пример 7.2. Добавьте в ячейку B6 таблицы, рассмотренной в предыдущем примере, суммарное число преступлений по всем районам, а в ячейках E2-E4 разместите долю (в процентах) числа преступлений, совершённых в том или ином районе, от общего количества преступлений.

	A	B	C	D	E
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**	**Доля (в %) от общего числа**
2	Заволжский	7	6	85,71	5,38
3	Московский	69	29	42,03	
4	Пролетарский	25	8	32	
5	Центральный	29	4	13,79	
6	**Итого**	130			

Рис. 14

Решение. Получим сначала таблицу, изображённую на рис. 14. Операция суммирования встречается очень часто, поэтому для её задания служит специальная кнопка с символом $\sum$, расположенная на панели инструментов программы. Нажав на неё, мы вставим в ячейку B6 функцию СУММ, около которой автоматически появится диапазон B2:B5 ячеек для суммирования (если машина «не угадает» диапазон, его можно легко изменить). Введём далее в ячейку E1 заголовок «Доля (в %) от общего числа», а в ячейку E2 — формулу =B2/B6*100.

	A	B	C	D	E
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**	**Доля (в %) от общего числа**
2	Заволжский	7	6	=C2/B2*100	=B2/$B$6*100
3	Московский	69	29	=C3/B3*100	=B3/$B$6*100
4	Пролетарский	25	8	=C4/B4*100	=B4/$B$6*100
5	Центральный	29	4	=C5/B5*100	=B5/$B$6*100
6	**Итого**	=СУММ(B2:B5)			

	A	B	C	D	E
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**	**Доля (в %) от общего числа**
2	Заволжский	7	6	85,71	5,38
3	Московский	69	29	42,03	53,08
4	Пролетарский	25	8	32	19,23
5	Центральный	29	4	13,79	22,31
6	**Итого**	130			

Рис. 15

Если мы попытаемся скопировать формулу из ячейки `E2` таблицы, изображённой на рис. 14, в другие ячейки этого столбца, то совершим ошибку. Дело в том, что значения в ячейках `E2-E5` должны вычисляться следующим образом: число преступлений в районе делится на общее число преступлений и умножается на 100. Следовательно, во всех строках столбца `E` делить нужно на одно и то же значение — величину, содержащуюся в ячейке `B6`. Поэтому необходимо, чтобы часть формулы `=B2/B6*100` (символы `B` и `6`) не изменялась при копировании из одной ячейки в другую Чтобы «заморозить» нужную компоненту адреса, перед ней ставят символ `$` и называют её абсолютной ссылкой. С учётом этого обстоятельства формула запишется так: `=B2/$B$6*100`. Итоговый результат изображён на рис. 15.

Пример 7.3. Поместите в электронную таблицу данные о времени, затраченном на обследование каждого из десяти автомобилей в примере 3.1, найдите среднее значение этой величины, её дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. При работе с электронными таблицами часто применяются различные функции, необходимые для организации вычислений. Так, в примере 7.2 мы использовали функцию `СУММ`. В данном случае необходимы статистические функции, вычисляющие среднее значение (`СРЗНАЧ`), дисперсию (`ДИСПР`) и среднее квадратическое отклонение (`СТАНДОТКЛОН`). В ячейку `K2` введём формулу `=СРЗНАЧ(A2:J2)`, в ячейку `L2` — формулу `=ДИСПР(A2:J2)`, а в ячейку `M2` — формулу `=СТАНДОТКЛОН(A2:J2)`. Заметим, что используя «автопилот функций» — встроенное в программу средство, облегчающее поиск нужной функции и правильное задание её аргументов, всё это можно сделать только с помощью мыши. Итоговый результат показан на рис. 16.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**m**	**D**	**S**
2	25	30	22	22	54	36	41	45	25	40	34	107,6	10,37

Рис. 16

Графическое представление информации гораздо нагляднее табличного, поэтому возможность электронных таблиц представлять размещённые в них данные в виде различных диаграмм, графиков и гистограмм используется очень часто. Подробное описание всех действий, необходимых для включения диаграмм, будет приведено в следующей главе, а пока лишь отметим, что все они очень естественны и интуитивно очевидны.

Пример 7.4. Добавьте в электронную таблицу, построенную в примере 7.2, гистограмму, содержащую данные о проценте раскрытых преступлений и о доле числа преступлений, совершённых в каждом из районов.

Решение. Выделим области `A1-A5`, `D1-D5` и `E1-E5`, содержащие изображаемые данные, а затем с помощью меню «Вставка | Диаграмма» в окне «Автоформат диаграммы» выберем в качестве типа диаграммы вариант «Гистограмма». Результат изображён на рис. 17.

	A	B	C	D	E
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**	**Доля (в %) от общего числа**
2	Заволжский	7	6	85,71	5,38
3	Московский	69	29	42,03	53,08
4	Пролетарский	25	8	32	19,23
5	Центральный	29	4	13,79	22,31
6	**Итого**	130			

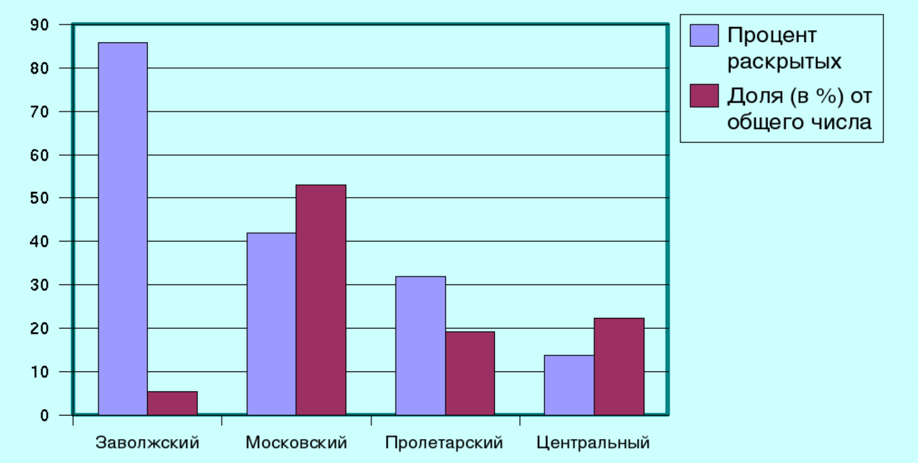


Рис. 17

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Год	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Сумма	1000	1050	1102,5	1157,63	1215,51	1276,28	1340,1	1407,1	1477,46	1551,33	1628,89

Рис. 18

Пример 7.5. Составьте электронную таблицу, иллюстрирующую увеличение вклада майора Зимина, о котором рассказывалось в §8 первой главы.

Решение. Итак, майор внёс на банковский счёт 1000 рублей. Пусть годовая процентная ставка составляет 5%. В первом столбце создаваемой таблицы укажем номер года, во втором — сумму вклада на конец этого года. Вычисление новой суммы сводится к умножению суммы предыдущего года на 1,05. Введём в ячейку `C2` формулу `=B2*1,05` и скопируем её в ячейки `D2-D10`. На рис. 18 показан итоговый результат, который отличается от вычисленного майором Зиминым с помощью бытового калькулятора на 5 копеек. Дело в том, что электронные таблицы считают значительно точнее калькулятора. Open Calc, например, проводит вычисления с точностью 20 знаков после запятой, а на калькуляторе майора помещалось лишь семь цифр после запятой. Данный пример ещё раз доказывает важность сохранения необходимого числа знаков после запятой и опасность некорректных округлений.

Пример 7.6. Создайте электронную таблицу, содержащую степени двойки всех целых чисел от 1 до 10, и включите в неё график функции $y = 2^x$ на указанном промежутке.

Решение. Сначала формируем таблицу из двух столбцов: первый содержит значения переменной величины x, второй — значения функции 2^x. Затем, как и выше, выделяем ячейки этой таблицы и в окне «Автоформат диаграммы» выбираем тип диаграммы «Линии». Результат показан на рис. 19.

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

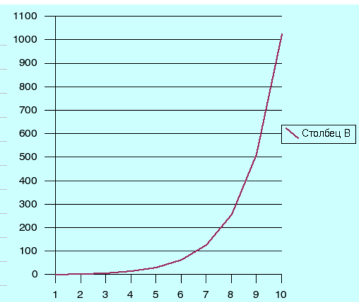


Рис. 19

Упражнения

1. Заполните электронную таблицу по данным примера 4.1 и составьте прогноз для региона.

2. С помощью электронных таблиц обработайте данные примера 5.2 и постройте гистограмму, аналогичную изображённой на рис. 6.

3. С помощью электронных таблиц обработайте данные примера 6.2 и постройте гистограмму, аналогичную изображённой на рис. 9.

4. До какой величины вырастет через тысячу лет вклад соседки майора Зимина (50 рублей), если в течение всех этих лет процентная ставка будет неизменной — 5%?

5. С помощью электронных таблиц постройте графики функций $y = \log_2 x$ и $y = x - x^3$.

Глава IV

Базовое программное обеспечение

В этой главе мы рассказываем о наиболее важном для большинства пользователей компьютеров программном обеспечении. Как и ранее, мы стараемся минимизировать количество обсуждаемых программных продуктов, выбрав наилучшие из тех, которые функционируют в обеих современных наиболее распространённых в России операционных системах — Windows и Linux.

Уже отмечалось что, свободное программное обеспечение (ПО), включая операционную систему Linux, почти идеально подходит для учебного процесса. Детальное знакомство с миром свободного ПО мы начнём с описания основных методов работы с этой операционной системой, которую сейчас всё чаще можно встретить в компьютерных классах различных университетов и с которой многие из вас, наверное, знакомы. Описываемые затем система для работы в сети Интернет Mozilla, офисный пакет Open Office, графический редактор GIMP и система компьютерной алгебры Maxima также представляют собой свободно распространяемые продукты. Они могут быть бесплатно получены и установлены на компьютер, работающий под управлением как Windows, так и Linux.

§ 1. Linux в компьютерном классе и дома

Все современные интегрированные графические среды в операционной системе Linux основаны на X Window System (на профессиональном жаргоне «Иксы»), появившейся задолго до возникновения операционной системы Windows для персональных компьютеров. В них активно используются все три кнопки мыши: левая кнопка позволяет запомнить текст, средняя — вставляет его, а правая служит для вызова контекстного меню. Наиболее распространёнными являются две свободные интегрированные графические среды общего назначения — GNOME и KDE. Они обе входят в состав всех стандартных дистрибутивов[1] ОС Linux и по большинству своих характеристик очень похожи друг на друга. Мы будем работать в первой из них, называя её просто «Гномом». В ней можно использовать самое разнообразное ПО, включая и программы, изначально созданные для функционирования в иных средах.

Напомним ещё раз, что человека, имеющего право работать в системе, принято называть *пользователем*, а для того чтобы им стать, необходимо зарегистрироваться у *системного администратора*, который сообщит вам *входное имя* (login) и *пароль* (password). Регистрация нужна даже при работе на домашнем компьютере; в этом случае вы сами являетесь системным администратором.

[1] Дистрибутивом называют совокупность файлов (часто на компакт-дисках), предназначенную для установки операционной системы на компьютер.

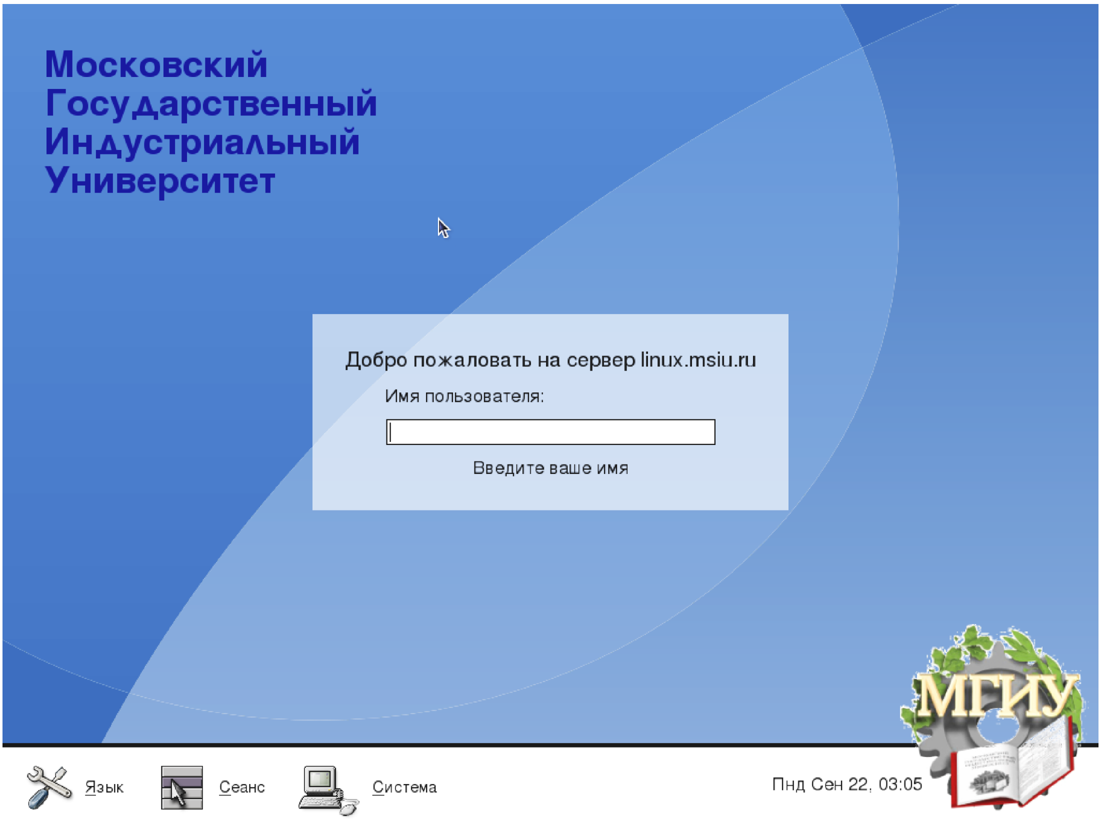


Рис. 20

Для входа в систему (рис. 20) пользователь должен ввести своё имя и пароль, отображаемый на экране звёздочками. Пароль необходим для того, чтобы другой человек не мог войти в систему под вашим именем, получить доступ ко всем вашим данным, читать электронную почту и отправлять сообщения от вашего имени и т. д. Если вы безошибочно введёте своё входное имя и пароль (в случае ошибки следует повторить ввод), то через небольшое время на экране появится рабочий стол, на котором размещаются пиктограммы домашнего каталога пользователя и мусорной корзины, а также панель управления, содержащая много различных пиктограмм запуска задач, кнопок меню и специальных аплетов (applet). Домашний каталог (называемый также директорией или папкой) — это часть файловой системы, которая выделена пользователю для хранения его файлов. Здесь он является хозяином и может создавать и удалять папки и файлы, размещать любую информацию, разрешая или запрещая доступ к ней другим пользователям.

В университетах число пользователей обычно составляет несколько тысяч человек, и поэтому системные администраторы устанавливают ограничения на максимальный объём домашнего каталога. При превышении лимита работа в системе становится практически невозможной — необходимо переместить накопившийся «мусор» (ненужные файлы и папки) в корзину, а затем опустошить её. Только выполнение последнего действия приводит к безвозвратному уничтожению информации — пока файлы находятся в корзине, они ещё существуют и занимают прежний объём. На домашнем компьютере ограничения на объём каталогов обычно не устанавливают, так как число пользователей обычно не более 2–3 человек. Что же касается «мусора», то удалять его необходимо всегда. Это надо делать даже в том случае, если вы являетесь единственным пользователем, зарегистрированным в системе. Для удобного выполнения операций над файлами среда «Гном» содержит файловый менеджер «Наутилус», возможности которого описаны ниже. Сейчас же мы расскажем, зачем нужна панель управления (рис. 21).

Рис. 21

По краям панели находятся небольшие кнопки, предназначенные для её скрытия влево или вправо (они имеют вид вытянутых по вертикали прямоугольников). Например, при нажатии на левую кнопку панель «уезжает» влево, освобождая рабочий стол для размещения окон различных приложений. Оставшаяся в углу экрана кнопка позволит в нужный момент вернуть панель управления на место. Можно убрать кнопки скрытия с панели или, наоборот, установить режим автоскрытия, при котором панель будет «уезжать» вниз, как только она будет становиться ненужной. Всё это и очень многое другое можно сделать, используя меню настройки панели управления, которое появится на экране, если щёлкнуть правой кнопкой мыши по любому месту панели, свободному от пиктограмм. Начинающим пользователям «Гнома», впрочем, не рекомендуется менять настройку панели управления и других компонент среды. Не зная всех последствий тех или иных действий, можно нечаянно сделать такие изменения, что потребуется вмешательство системного администратора.

При нажатии на пиктограмму  раскрывается *главное меню*, многие из пунктов которого представляют собой кнопки подменю и также могут быть раскрыты (рис. 22). Основное назначение главного меню — предоставление пользователю удобного способа запуска различных программ (приложений), установленных на компьютере. Другая функция меню — доступ к *центру управления*, предназначенному для настройки: одни пункты позволяют менять параметры рабочего стола и облик приложений, другие — настраивать мультимедиа, третьи — управлять свойствами клавиатуры и мыши, и т. д.

Пример 1.1. С помощью центра управления добейтесь того, чтобы окно, к которому подвели указатель мыши, через 2 секунды становилось активным и «всплывало» поверх других окон без дополнительного щелчка по нему.

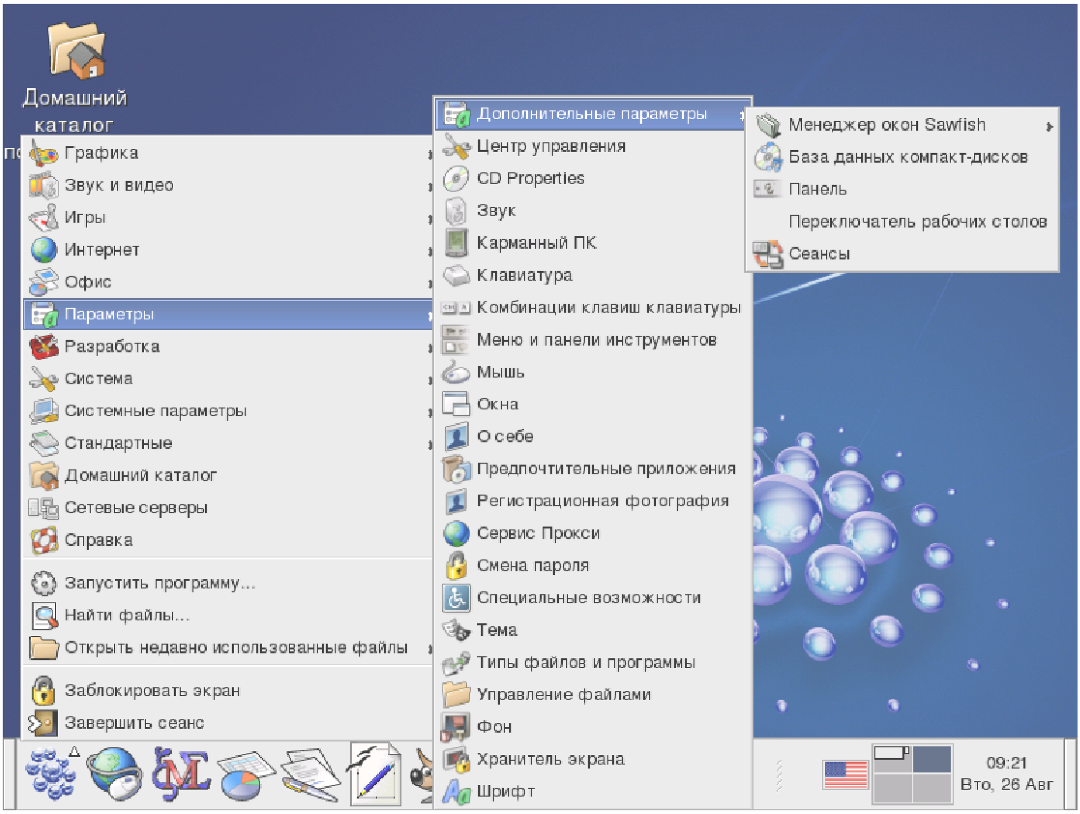


Рис. 22

Решение. Выберем в главном меню пункт «Параметры» и далее «Центр управления». В появившемся окне найдём раздел «Окна» и, щёлкнув по его пиктограмме, увидим вкладку «Настройки окна» (рис. 23). Отметим на ней пункты «Выбирать окно, когда указатель мыши находится над ним» и «Поднимать выбранное окно после определённого интервала». Задержку перед поднятием с помощью имеющегося на вкладке регулятора установим равной двум секундам и нажмём на кнопку «Закрыть».

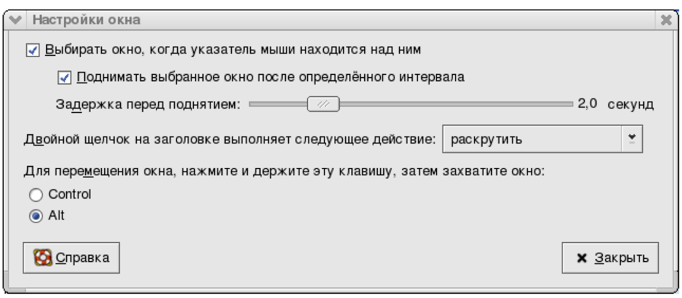


Рис. 23

Включить в меню всё необходимое невозможно, и администратор обычно выбирает структуру и наполнение главного меню, исходя из потребностей большинства пользователей системы. Опытные пользователи сами могут изменять своё меню, что, впрочем, можно и не делать — существует много других возможностей сделать более удобным запуск часто выполняемых приложений. Например, можно создать пускатель нужного приложения и разместить его пиктограмму на главной панели. На рис. 21 правее кнопки главного меню размещены шесть таких пиктограмм. При щелчке левой кнопкой мыши по ним стартует соответствующее приложение: система для работы в сети Интернет Mozilla, система компьютерной алгебры Maxima (использующая редактор TeXmacs), электронные таблицы Open Calc, текстовый процессор Open Writer и векторный графический редактор Open Draw из пакета Open Office, а также профессиональный растровый графический редактор GIMP.

Правее пиктограмм этих приложений, между двумя едва заметными вертикальными чертами, размещается аплет «Список задач» (task list), показывающий окна запущенных приложений и позволяющий быстро переходить от одного из них к другому. Переключатель рабочих мест (или «Путеводитель по столу» — desktop guide) находится на панели управления правее пиктограммы ещё одного аплета, предназначенного для переключения языка. В простейших ситуациях используется только два языка — английский и русский, символизируемых флагами США и России. Пиктограмма переключателя рабочих мест, как и все другие графические элементы среды «Гном», обладает ещё одним полезным свойством. Если подвести к ней указатель мыши, то появится подсказка, описывающая её назначение (рис. 24). Наличие нескольких рабочих мест приятно поражает людей, привыкших к работе в ОС Microsoft Windows. Там рабочее место всего одно, и при одновременном использовании нескольких приложений возникает проблема размещения их окон на столе. Обычно приходится накладывать одно окно поверх другого или временно сворачивать некоторые из них. При работе в Linux вы получаете несколько рабочих мест (обычно хватает четырёх—шести, но можно использовать и больше) и возможность удобного переключения между ними, что практически эквивалентно увеличению площади рабочего стола.

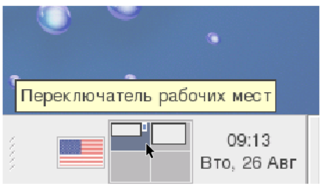


Рис. 24

Пример 1.2. Увеличьте число рабочих мест до шестнадцати.

Решение. Подведём указатель мыши к переключателю рабочих мест и щёлкнем её правой кнопкой. В появившемся после этого меню выберем пункт «Изменить настройки» и на вкладке «Настройки переключателя рабочих мест» установим число рабочих мест равным 16.

Свойства и внешний вид аплета, расположенного правее переключателя рабочих мест, показывающего время и дату, также можно модифицировать щелчком правой кнопки мыши. На рис. 25 изображён календарь, появляющийся при щелчке по нему левой кнопкой. Используя имеющиеся стрелочки, можно менять месяц и год, а закрывает календарь кнопка Esc.

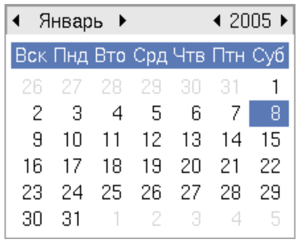


Рис. 25

Основная задача графической среды «Гном» — обеспечить пользователю удобные средства для запуска нужных ему приложений и для работы с ними. Каждому из приложений на рабочем столе выделяется окно, поэтому важной компонентой любой из современных графических сред является *менеджер окон*, делающий всевозможные манипуляции с находящимися на рабочем столе окнами простыми и удобными.

Каждое из окон имеет обрамление, включающее в себя рамку, полосу заголовка (совпадающую с верхней стороной рамки) и кнопки управления окном. Изображённое на рис. 26 меню окна вызывается при нажатии на самую левую кнопку управления, имеющую вид «галочки», и позволяет осуществлять над окном все возможные операции. Окно изменяет свой размер при перемещении (буксировке) его рамки мышью, а буксировка полосы заголовка, содержащей обычно название программы, перемещает его. Кнопки управления окном позволяют его закрыть, развернуть на весь экран, уменьшить, свернуть и т. д. В том случае, когда площади окна недостаточно для вывода всей информации, которая должна быть представлена, на правой и нижней сторонах рамки появляются полосы «прокрутки». Используя мышь, с их помощью можно увидеть нужную часть изображения.

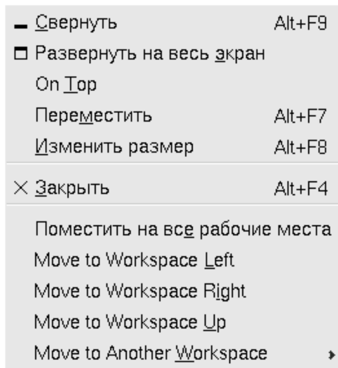


Рис. 26

Многие из описанных выше действий можно выполнить и с помощью клавиатуры. Центр управления позволяет узнать необходимые для этого комбинация клавиш. Там же можно изменить указанные в таблице 26 комбинации, однако новичкам делать это не рекомендуется.

Таблица 26

Клавиша	Выполняемое действие
Ctrl + стрелка	Переключение на соседнее рабочее место
Ctrl + F10	Раскрытие меню рабочего стола
Ctrl_R + Shift	Переключение языка клавиатуры
Alt + F1	Раскрытие главного меню
Alt + F2	Раскрытие окна запуска программ

Если щёлкнуть правой кнопкой мыши по свободному месту рабочего стола, то появится меню, предоставляющее ряд дополнительных возможностей. Наиболее полезные из них — это «Диски», «Создать терминал» и «Создать новое окно». Пункт «Диски» позволяет автоматизировать подключение (монтирование) и отключение (размонтирование) компакт и Zip дисков, flash-карт и обычных дискет. Необходимо помнить, что извлекать эти носители информации можно только после их отключения.

По запросу «Создать терминал» появляется окно с оболочкой shell, используя которое, можно общаться с операционной системой напрямую, с помощью команд. Команды вводят в ответ на приглашения, выдаваемые оболочкой. Какой бы сложной и удобной ни являлась графическая среда, она не способна полностью заменить возможность отдавать указания операционной системе с помощью командного языка shell. В наиболее простых и чаще всего встречающихся случаях использования системы меню вполне достаточно, но пользователи, желающие получить нечто не вполне стандартное, обойтись без командной оболочки не могут.

Команда «Создать новое окно» автоматически запускает *файловый менеджер* «Наутилус» (nautilus), облегчающий работу с файлами на дисках и на поверхности рабочего стола. Он позволяет выполнять над файлами все обычные действия (удаление, переименование, копирование, перемещение и т. п.), а также осуществлять предварительный просмотр многих типов данных (рис. 27).

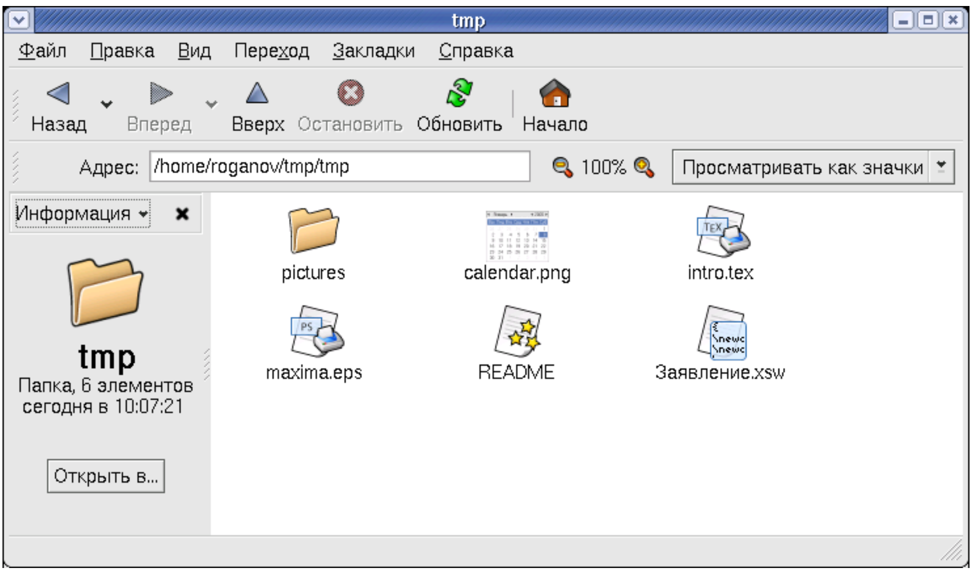


Рис. 27

«Наутилус» поддерживает операции переноса мышью (drag'n'drop), причём «перетаскивать» можно не только объекты, но и их свойства. Можно, например, «взять цвет» в окне выбора цвета и перенести его на панель управления, которая воспримет выбранный цвет. Для того чтобы «взять» файл или любой другой объект, надо нажать левую кнопку мыши (когда указатель мыши находится над ним) и, не отпуская её, «тащить» этот объект на рабочий стол, в мусорную корзину или другую папку. Когда цель будет достигнута, кнопку мыши следует отпустить и объект окажется перемещённым. Чтобы переместить файл из одной папки в другую, полезно открыть второе окно «Наутилуса», воспользовавшись меню «Файл | Создать окно».

Меню «Правка» позволяет выполнять операции над одним или целой группой выделенных файлов. Выделив файлы, их можно скопировать, переместить в корзину или вырезать и затем вставить в новую папку или на рабочий стол. «Наутилус» позволяет открывать файлы с помощью разнообразных программ, причём для многих типов файлов эти программы ему известны изначально. Пользователь может указать приложения (программы) для работы с другими типами файлов или изменить имеющиеся связи между типами файлов и приложениями.

С помощью файлового менеджера можно также просматривать и изменять всевозможные атрибуты (свойства) файлов, для чего достаточно щёлкнуть правой кнопкой мыши по пиктограмме нужного файла или раскрыть меню «Файл | Правка». У каждого из файлов, в частности, есть владелец, разрешающий доступ к информации, хранящейся в файле. Как правило, не следует разрешать доступ на запись к своим файлам другим пользователям системы. Иногда даже полезно запретить доступ на чтение к некоторой части информации, однако полный запрет обычно нецелесообразен. Например, при размещении домашней страницы в сети Интернет требуется доступ на чтение ко всем файлам, составляющим эту страницу.

Упражнения

1. Какие из следующих особенностей присущи всем современным интегрированным графическим средам: а) наличие иерархического меню; б) наличие панели управления; в) использование трёх кнопок мыши; г) наличие нескольких рабочих столов (мест); д) наличие обрамления (рамки, заголовка и кнопок управления) у окон?

2. Какими из следующих возможностей обладают все современные файловые менеджеры: а) копирование файлов; б) переименование файлов; в) изменение прав доступа к файлам; г) перенос мышью файлов; д) перемещение файлов в мусорную корзину; е) удаление файлов?

3. С помощью пункта «Комбинации клавиш клавиатуры» центра управления добейтесь того, чтобы переключение на соседнее рабочее место можно было осуществить с помощью комбинации клавиш «Ctrl + стрелка».

4. Каких из следующих возможностей администратора лишён обычный пользователь современных операционных систем: а) регистрация нового пользователя; б) замена используемой интегрированной графической среды; в) изменение пароля; г) изменение прав доступа к файлам; д) изменение системных времени или даты?

§ 2. Mozilla — система для работы в сети Интернет

Mozilla — свободная система для работы в сети Интернет, включающая в себя браузер «Навигатор» (рис. 28), средство для работы с электронной почтой, редактор (компоновщик) веб-страниц и некоторые другие компоненты. Для большинства пользователей наибольшую ценность представляет «Навигатор», признанный мировым сообществом лучшим программным продуктом в своей области. Его отличают, например, от Microsoft Explorer, высокая степень защищённости и соответствие стандартам сети Интернет. С помощью «Навигатора» удобно просматривать веб-сайты и получать информацию с FTP-серверов.

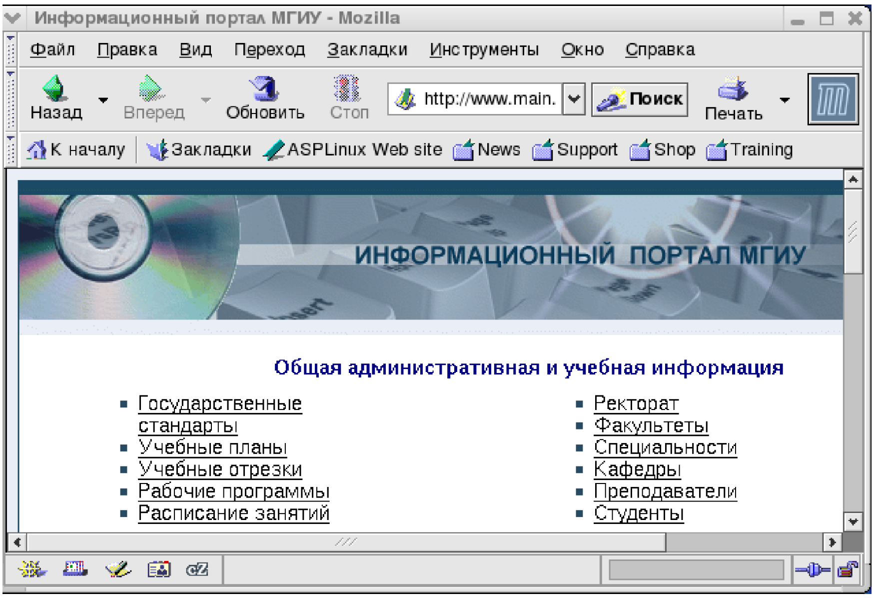


Рис. 28

Многочисленные меню и кнопки панели навигации позволяют быстро научиться пользоваться программой. Наиболее часто употребляемым из них соответствуют «горячие клавиши», позволяющие опытным пользователям работать с браузером быстрее и удобнее (рис. 29). Одна из полезных особенностей «Навигатора» — дополнительная «боковая» панель Sidebar, которую можно настроить по своему вкусу. С её помощью удобно передавать запросы на поисковые серверы и получать ссылки по интересующей вас тематике. Система закладок, аналогичная используемым в других браузерах, даёт возможность сохранять адреса сайтов и отмечать, чем именно вам понравилась та или иная страница. При необходимости боковая панель легко «сворачивается», освобождая место для основного окна просмотра.

Для одновременного получения информации с различных страниц од-

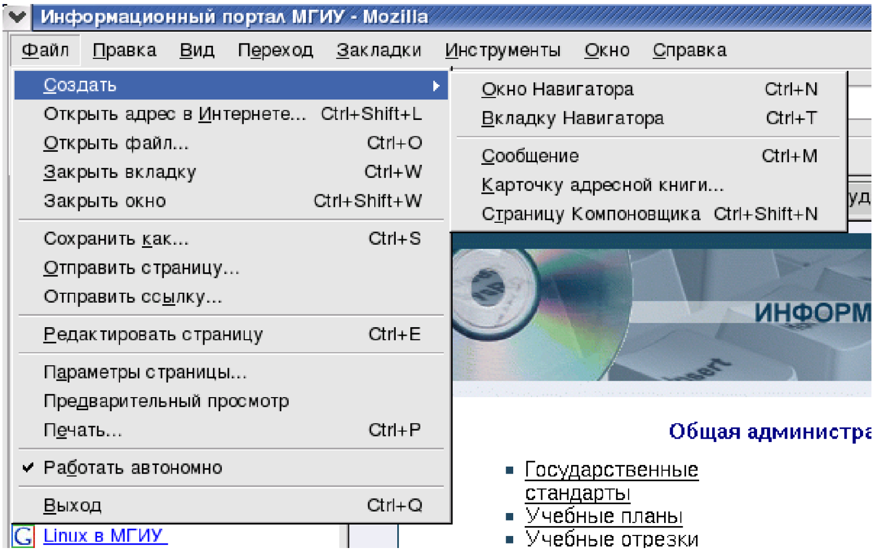


Рис. 29

ного веб-сайта или нескольких различных сайтов можно открывать новые окна или вкладки с помощью меню «Файл | Создать» (см. рис. 29). Особенно удобны вкладки, позволяющие увидеть любую из просматриваемых страниц в одном и том же окне. Подобная возможность, избавляющая вас от нагромождения многих одновременно открытых окон, имеется далеко не в каждом браузере. С помощью меню «Файл» можно просматривать не только страницы сети Интернет, но и информацию, размещённую на диске: обычные или гипертекстовые файлы, графические изображения и каталоги. Любую открытую браузером страницу можно сохранить на диске или распечатать на принтере.

Пример 2.1. Запустите браузер Mozilla (в той операционной системе, которая установлена на вашем домашнем компьютере или в университетском компьютерном классе), зайдите на главную страницу веб-сайта вашего университета и сделайте её стартовой. Используя вкладку, откройте далее в том же окне страницу с информацией о текущем рейтинге студентов вашей группы по дисциплине «Информатика и математика» и в закладках ссылку на эту страницу.

Решение. В операционных системах Linux и Windows запуск браузера Mozilla выполняется одинаковым образом: либо с помощью пиктограммы, размещённой на панели управления или на рабочем столе, либо с помощью меню. Для того чтобы сделать главную страницу веб-сайта университета стартовой, воспользуемся меню «Правка | Настройки | Навигатор». Выберем далее пункт «Открывать при запуске Навигатора начальную страницу», укажем адрес этой страницы (для МГИУ это `http://www.msiu.ru`) и завершим настройку нажатием кнопки «OK». При последующих запусках браузера эта страница будет загружаться автоматически, а сейчас перейти на неё можно с помощью кнопки «К началу» на панели управления браузера (рядом с пиктограммой «домика»).


Московский государственный инд... | Рейтинг

Группа 2411

Информатика и математика

Информатика и математика

ФИО	Рейтинг	Набранные баллы предыдущего семестра. макс.110	Типовой расчет макс.20	Домашняя страничка макс.10	Системы компьютерной алгебры макс.10	Работа с VMware ASPLinux макс.10
1. Агаянц Екатерина Ивановна	120.00	80	20	10	10	0
2. Данилов Дмитрий Александрович	115.00	80	17	8	10	0
3. Камынина Ирина Сергеевна	113.00	79	17	10	7	0
4. Самошина Анна Игоревна	109.00	64	15	10	10	10
5. Корнеева Елена Васильевна	108.00	65	17	6	10	10

Рис. 30

Для открытия новой вкладки воспользуемся меню « Файл | Создать | Вкладку Навигатора». На страницу, содержащую информацию о рейтинге студентов группы 2411, можно попасть различными способами. Например, зайдём сначала на главную страницу информационного портала МГИУ (`http://www.main.msiu.ru`), а затем, используя имеющиеся ссылки, последовательно переместимся сначала на страницу дисциплины «Информатика и математика для студентов юридического факультета», далее — на страницу группы 2411 и, наконец, на интересующую нас страницу с текущим рейтингом студентов этой группы (рис 30). Переключение между вкладками «Московский государственный индустриальный университет» и «Рейтинг» осуществляется щелчком кнопки мыши по нужному заголовку (рис. 31). Для сохранения ссылки в закладках воспользуемся кнопкой «Закладки» или комбинацией клавиш `Ctrl + D`.

Из дополнительных возможностей «Навигатора» отметим удобство работы с поисковыми серверами, управление заполнением форм, блокировку «закачки» рекламных изображений и запрет на появление «выскакивающих» окон. Эти и многие иные возможности браузера легко изменить с помощью гибкой системы настроек (меню «Правка | Настройки»).

Второй по значимости компонентой системы Mozilla является программа работы с электронной почтой и конференциями, позволяющая принимать и отправлять письма, участвовать в работе почтовых рассылок и групп новостей. Можно также отвечать на письма, переадресовывать полученные сообщения, отсылать и получать файлы. Письмо в почтовом ящике можно найти по теме, по отправителю, по словам в самом письме, по дате, приори-

Рис. 31

тету, адресатам и по различным комбинациям этих параметров. При работе с большим числом адресатов полезна адресная книга, существенно облегчающая переписку. Можно иметь несколько почтовых ящиков на разных серверах и работать с ними в одном окне, а с помощью системы фильтров размещать все рекламные сообщения в отдельных папках. Наконец, пакет Mozilla позволяет использовать GPG, обеспечивая электронную подпись и шифрование корреспонденции.

Работать с электронной корреспонденцией можно и без специальных почтовых клиентов, которые необходимо предварительно изучать и правильно настраивать. Каждый из пользователей МГИУ, например, может получать и отправлять почту просто с помощью браузера, воспользовавшись адресом `http://mail.msiu.ru` (рис. 32).

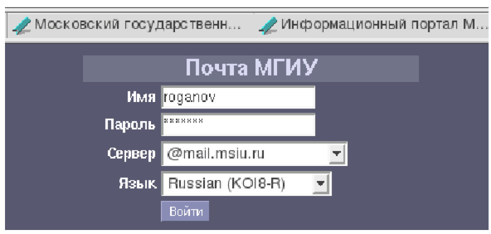


Рис. 32

Упражнения

1. Какие из следующих встроенных средств включены в пакет Mozilla: а) средство просмотра информации в сети Интернет; б) средство просмотра информации на диске компьютера; в) средство для работы с электронной почтой; г) средство для шифрования сообщений; д) средство для распознавания и уничтожения вирусов?

2. Перечислите основные преимущества браузера «Навигатор», отличающие его от широко используемого в операционной системе Windows браузера Microsoft Explorer.

3. Научитесь в системе Mozilla блокировать «закачку» рекламных изображений и включать запрет на появление «выскакивающих» окон.

§ 3. Пакет Open Office

Пакет офисных программ Open Office[2], как и рассмотренная в предыдущем разделе система Mozilla, совместим с любой операционной системой. Применение этого пакета не требует никаких лицензионных отчислений, его можно получить легально и бесплатно многими способами, например с веб-сайта OpenOffice.org (`http://ru.openoffice.org/index.html`).

В Open Office входят текстовый процессор Open Writer[3], электронные таблицы Open Calc, графический редактор Open Draw, редактор формул Open Math, система презентаций Open Impress и другие компоненты. По своим возможностям этот пакет сопоставим с аналогичными проприетарными программами, а по ряду параметров значительно превосходит всех своих потенциальных конкурентов, самым известным из которых является Microsoft Office.

Работая в Open Office, можно загружать документы Microsoft Office (Word, Excel, Powerpoint), редактировать их и сохранять как в оригинальном формате, так и в формате Open Office. «Родные» для пакета Open Office форматы файлов основаны на XML (стандартном современном языке разметки документов), значительно более компактны по сравнению с форматами Microsoft Office и, что ещё важнее, защищены от вирусов. На трёх панелях инструментов окна, открывающегося после старта программы Open Writer (рис. 33), находятся пиктограммы, позволяющие выполнять все основные действия: с их помощью можно изменять размер, стиль и начертание шрифта, устанавливать его цвет и форматировать абзацы. Более сложные операции всегда можно найти либо в главном, либо в контекстном меню. Первое содержит абсолютно все операции и состоит из восьми пунктов («Файл», «Правка», «Вид», «Вставка», «Формат», «Сервис», «Окно» и «Справка»). Второе вызывается щелчком правой кнопки мыши, а его содержание определяется *контекстом*, то есть тем объектом, над которым находился указатель мыши в момент открытия меню. Ознакомиться со всеми возможностями пакета можно с помощью очень подробной справочной системы на русском языке. Работу с графикой мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас сосредоточимся на основных особенностях пакета Open Office, связанных с обработкой текстовой и числовой информации.

В начале третьего тысячелетия трудно удивить кого-то возможностями современного текстового процессора. Поэтому, говоря о программе Open Writer, мы не будем описывать простейшие действия, выполняемые в процессе работы с текстом, а обсудим наиболее правильные подходы к процессу редактирования документа и специфические особенности этого текстового процессора. К таким особенностям можно отнести, например, возможность групповой работы над документом и работу с версиями одного и того же до-

[2]Официальное название пакета — OpenOffice.org.

[3]Вместо OpenOffice.org Writer мы используем более короткое название.

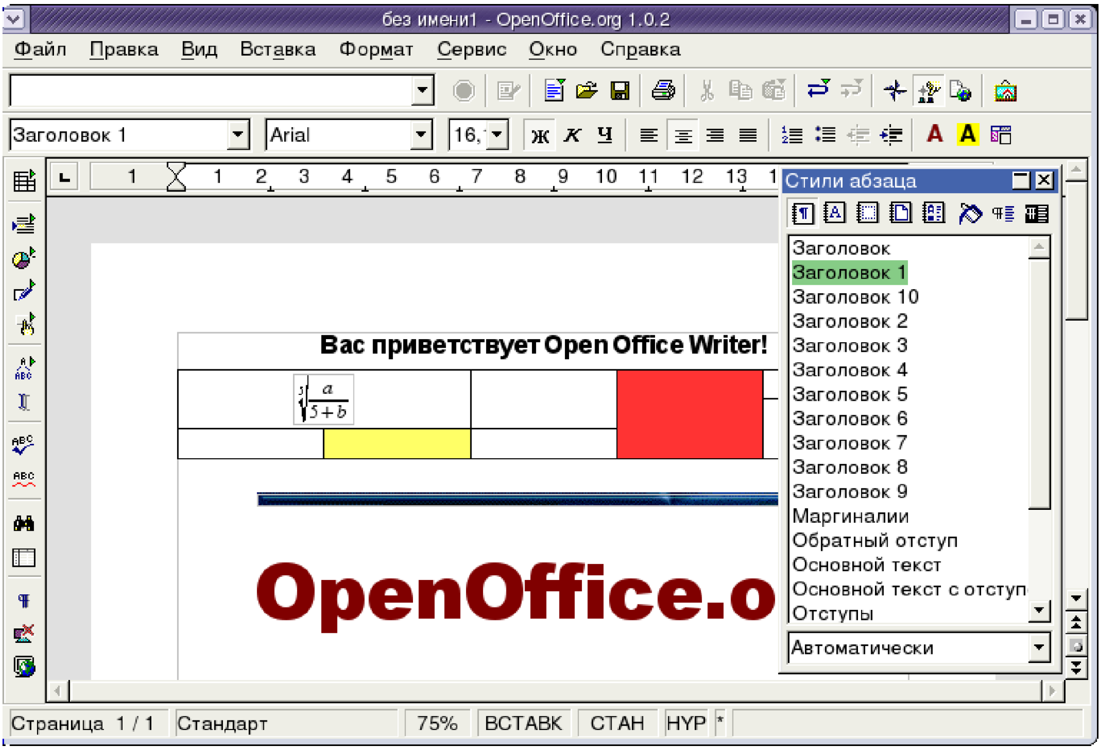


Рис. 33

кумента. Ситуации, когда это необходимо, встречаются чрезвычайно часто. Пусть, например, при работе над проектом договора требуется согласовать его текст с юристом и бухгалтером. В этой ситуации каждый участник работает независимо от других участников над своей копией договора. Затем необходимо получить итоговый вариант, учитывающий их замечания. Программа Open Writer позволяет автоматизировать этот процесс настолько, насколько это вообще возможно.

Для открытия или создания нового файла можно воспользоваться меню «Файл», а чтобы введённый текст можно было использовать впоследствии, следует сохранить документ в файле с уникальным в пределах каталога именем, состоящим из собственно имени и расширения. Расширение назначается автоматически в зависимости от типа документа: файлы с расширением XLS открываются программой Open Calc, а с расширением SXW или DOC — Open Writer. Для сохранения документа можно воспользоваться меню «Файл | Сохранить», кнопкой `Сохранить` на панели инструментов или комбинацией клавиш `Ctrl + S`. С помощью меню «Файл | Сохранить как...» можно получить гипертекстовую версию документа. Причём, в отличие от многих других текстовых процессоров (в частности, Microsoft Word), создаваемый таким образом в формате HTML файл будет весьма высокого качества. Связано это с тем, что внутренним форматом документов в пакете Open Office является язык XML — близкий «родственник» HTML.

Пример 3.1. Создайте в Open Writer документ, содержащий единственную строку с текстом «Сделано с помощью программы Open Writer», и сохраните его в файле с именем `example.sxw`. Подготовьте также гипертекстовый вариант этого документа для размещения его в сети Интернет и вариант для передачи своему товарищу, использующему Microsoft Word. Сравните размеры получаемых файлов и выясните, как они изменятся, если вместо одной строки в документе их будет десять.

Решение. После запуска программы Open Writer с помощью пиктограммы или меню (что осуществляется одинаковым образом в Linux и в Windows) набираем требуемый текст и сохраняем документ, выбрав в качестве его типа «OpenOffice.org 1.0 Текстовый документ» и записав в поле для имени `example`. Для получения гипертекстовой версии достаточно сохранить документ с помощью меню «Файл | Сохранить как...», выбрав в качестве типа файла «Web-страница (OpenOffice.org Writer)». Полученный файл `example.html` можно просматривать браузером и размещать на веб-сервере.

Для того чтобы Microsoft Word смог открыть наш документ, его необходимо сохранить в формате, известном этому текстовому процессору. В меню «Файл | Сохранить как...» выберем тип «Microsoft Word 97/2000/XP» и получим файл `example.doc`, который можно передавать товарищу. Заметим, что все описанные выше действия выполняются совершенно одинаково как в Linux, так и в Windows. С помощью файлового менеджера легко обнаружить, что размер последнего из сохранённых нами файлов (`example.doc`) почти вдвое превосходит размер первого (`example.sxw`). Для ответа на последний вопрос надо «размножить» имеющуюся в нашем документе строку в количестве 10 экземпляров с помощью меню «Правка | Копировать» и «Правка | Вставить», а затем сохранить документ в форматах `sxw` и `doc`.

Многие операции редактирования документа выполнимы только с выделенным фрагментом текста. Для его выделения можно воспользоваться мышью (при нажатой левой кнопке) или клавиатурой (при нажатой клавише `Shift`). Выделение слова осуществляется с помощью двойного щелчка по нему, а всего содержимого документа — комбинацией клавиш `Ctrl + A`. Для перемещения фрагмента текста его нужно выделить и с помощью мыши перетащить в нужное место. Если требуется не переместить, а скопировать фрагмент, то при этой процедуре следует держать нажатой клавишу `Ctrl`. Переместить или скопировать текст можно также с помощью меню или клавиатуры: `Ctrl + X` или `Shift + Del` для вырезания; `Ctrl + C` или `Ctrl + Insert` для копирования; `Ctrl + V` или `Shift + Insert` для вставки.

К выделенным фрагментам и вводимому тексту можно применять различное форматирование: например, изменять способ отображения символов, то есть делать их наклонными или утолщёнными (жирными), изменять размер и шрифт символов, цвет символов и фона. Помимо манипуляций с символами Open Writer позволяет производить форматирование абзацев, изменяя расположение текста на странице: абзац может быть выровнен по левому краю или по правому; можно установить автоматическую нумерацию для каждого нового абзаца, задать её тип и т. п. Доступ ко всей совокупности параметров возможен с помощью меню «Формат | Абзац». Здесь можно установить такие свойства, как величину отступов слева и справа от края страницы, отступ первой строки, величину интервала между строками и т. д.

При работе с большими документами вместо описанных в предыдущем абзаце возможностей физического редактирования всегда целесообразно применять структурное (или логическое) форматирование текста с помощью стилей. Для изменения внешнего вида таких документов впоследствии потребуется значительно меньше сил и времени. С помощью стилей каждую структурную единицу документа оформляют специфическим образом (шрифт, отступы, обрамление, нумерации и т. д.). «Стилист» вызывается из меню «Формат | Стилист» или клавишей `F11`.

Пример 3.2. Предположим, что мы создали документ с текстом «Сделано с помощью программы Open Writer мною» и выделили слова «Open Writer», используя жирный красный шрифт размером 18 пунктов. Пусть затем этот документ значительно увеличился в размере, а количество вхождений слов «Open Writer» возросло до нескольких сотен. И в этот момент нам стало ясно, что выбранный способ выделения слов «Open Writer» плох и требует замены, например на синий курсив обычного размера. Работа простая, но весьма утомительная. Чтобы такого не случилось в дальнейшем, воспользуемся возможностями «Стилиста» с самого начала.

Решение. Создадим документ с обычным текстом «Сделано с помощью программы Open Writer мною» и клавишей `F11` вызовем «Стилиста». Сконструируем новый стиль, для чего нажатием на пиктограмму с символом «A» перейдём на вкладку «Стили знаков» и с помощью пиктограммы «Создать стиль из выбранного» скопируем свойства стиля «Стандарт». Назовём новый стиль, например «Мой стиль», и изменим его свойства, войдя в категорию «Стили пользователя» и щёлкнув по имени стиля правой кнопкой мыши (рис. 34). В раскрывшемся после этого окне можно изменять самые разные свойства символов: тип, начертание, цвет, размер и язык шрифта, задавать эффекты выделения (подчёркивание, рельефное выделение, тень), масштаб, вращение текста, цвет фона и т. д. Выберем для нашего стиля жирный красный шрифт размером 18 пунктов (рис. 35) и нажмём на кнопку «ОК», завершая изменение свойств нового стиля. Если теперь выделить слова «Open Writer» в нашем документе и, вызвав стилиста, дважды щёлкнуть по имени стиля «Мой стиль», то к выделенным символам будет применено установленное форматирование. Теперь

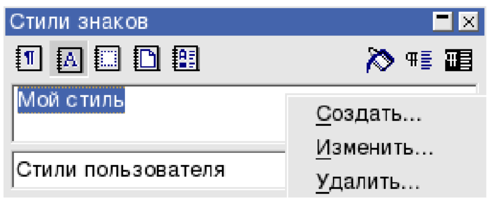


Рис. 34

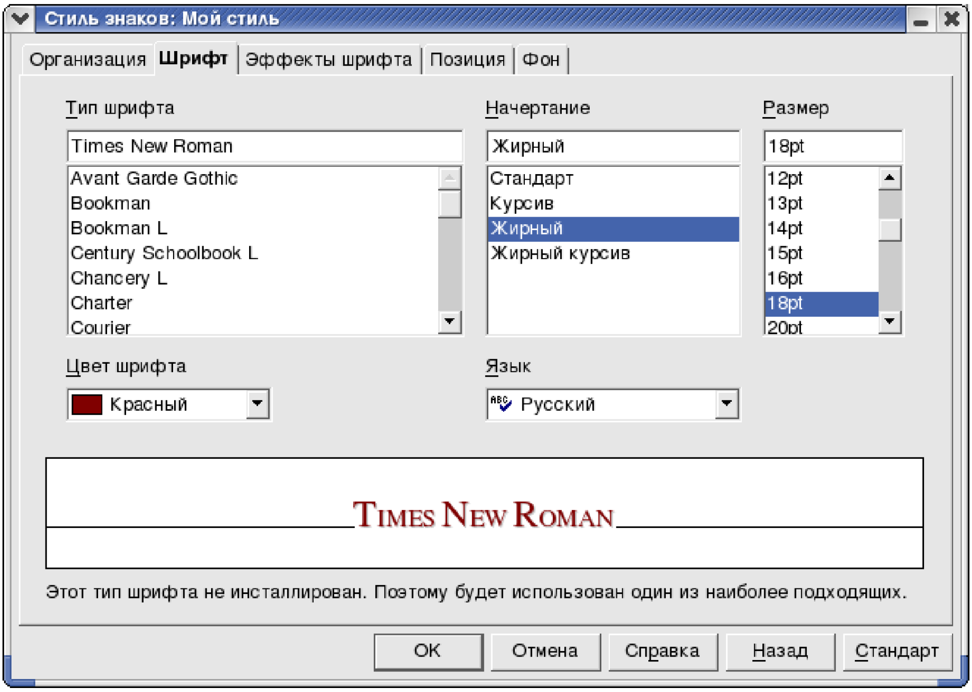


Рис. 35

наш документ может как угодно увеличиваться в размере и содержать любое число вхождений слов «Open Writer». Если нам потребуется изменить выбранное выделение *всех* этих слов, то просто изменим свойства стиля «Мой стиль».

С помощью панели инструментов в редактируемый документ легко вставлять таблицы, добавлять и удалять в них строки и столбцы, объединять и раскрашивать ячейки, менять обрамления. Часто в документах используют нумерованные и ненумерованные списки, математические формулы и специальные поля, содержимое которых изменяется в зависимости от определенных условий (например, поле даты). Можно вставлять в документ и графические объекты, причём простейшие из них (прямые линии, прямоугольники, овалы и т. п.) вставляются с помощью инструментов, находящихся на панели слева. Как создать более сложные графические объекты, мы расскажем в следующем параграфе, сейчас лишь отметим, что их включение в документ выполняется с помощью меню «Вставка | Рисунок | Из файла...». Изображения из «Галереи», вызываемой из меню «Сервис», могут быть вставлены в документ простым их перетаскиванием.

В заключение обзора отметим, что при вводе текста обычно используется функция автодополнения слов и система проверки правописания, поддерживающая в настоящее время 23 языка (включая русский). Для автоматической проверки нужно включить кнопку `Автопроверка орфографии` слева на панели инструментов или воспользоваться меню «Сервис | Правописание |

Автопроверка». В этом случае слова, которые программа не сможет найти в своём словаре, будут подчёркиваться волнистой красной линией. Наконец, правильные переносы — это наилучший способ сделать документ красивым, так как только их использование позволяет сократить промежутки между словами. Open Writer способен выполнять переносы автоматически.

Обсудим теперь более подробно некоторые из ещё не рассмотренных нами в третьей главе возможностей программы Open Calc — средства для работы с электронными таблицами, входящего в пакет Open Office. Основную площадь окна программы Open Calc, показанного на рис. 36, занимает рабочее поле текущего листа, состоящее из ячеек.

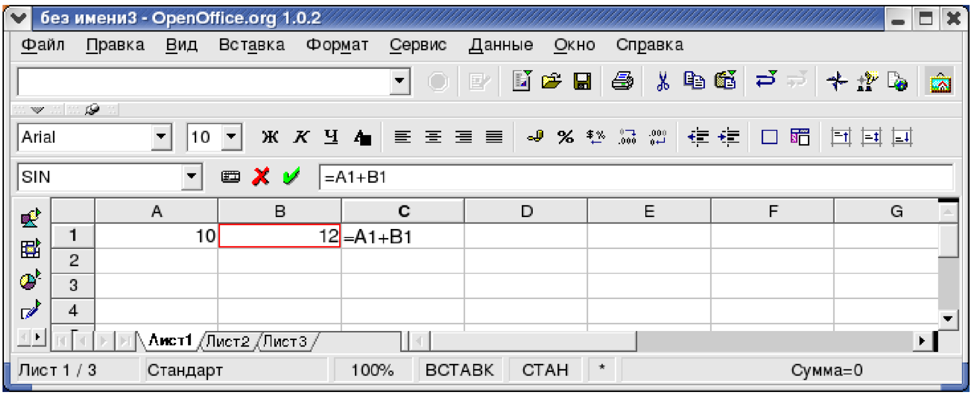


Рис. 36

Напомним, что ячейка — наименьшая структурная единица электронной таблицы — имеет адрес, определяемый её координатами по вертикали и горизонтали. Первая координата — это название столбца (столбцы нумеруют латинскими буквами: A, B, C, ..., X, Y, Z, AA, AB, ..., AZ, BA, ..., BZ, ..., IV); вторая — номер строки (от 1 до 32000). Таким образом, таблица максимального размера, с которой можно работать в Open Calc, имеет 256 столбцов и 32000 строк. Таблица может содержать несколько листов, поэтому полный адрес ячейки включает имя листа, на котором она расположена, например: Лист1.A3. Работу с листами обеспечивает «Навигатор листов», меню которого появляется при щелчке по имени листа правой кнопкой мыши.

Строка ввода (на рис. 36 в ней содержится формула =A1+B1) предназначена для ввода чисел, текста и формул в ячейки таблицы. Ввод производится в выделенную ячейку и должен быть либо подтверждён нажатием на кнопку (или клавишу Enter), либо отменён кнопкой . Строка ввода особенно полезна в ситуации, когда ширина ячейки не достаточна для отображения всех вводимых в неё символов. Чтобы отобразить информацию целиком, необходимо либо растянуть ячейку по ширине, либо разрешить разрыв строк.

Пример 3.3. Объясним, как можно получить электронную таблицу, изображённую на рис. 37, которая уже встречалась нам ранее (см. стр. 88).

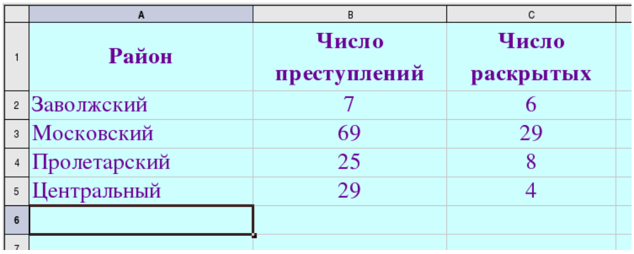


Рис. 37

Рис. 38

Решение. Если выбрать размер шрифта 14, то таблица примет вид, показанный на рис. 38. При этом часть текста, введённого в таблицу, не поместится в ячейках (см., например, ячейку `B1`). Перед тем, как исправлять этот дефект, целесообразно сначала изменить формат всех ячеек таблицы нужным нам образом.

Выделим первую строку и щелчком правой кнопкой мыши выберем в контекстном меню пункт «Формат ячеек». В окне «Атрибуты ячеек» на вкладке «Шрифт» установим начертание шрифта «Жирный», а на вкладке «Выравнивание» — «По центру» и «По середине» (рис. 39). Тут же нужно установить флажок, разрешающий разрыв строки.

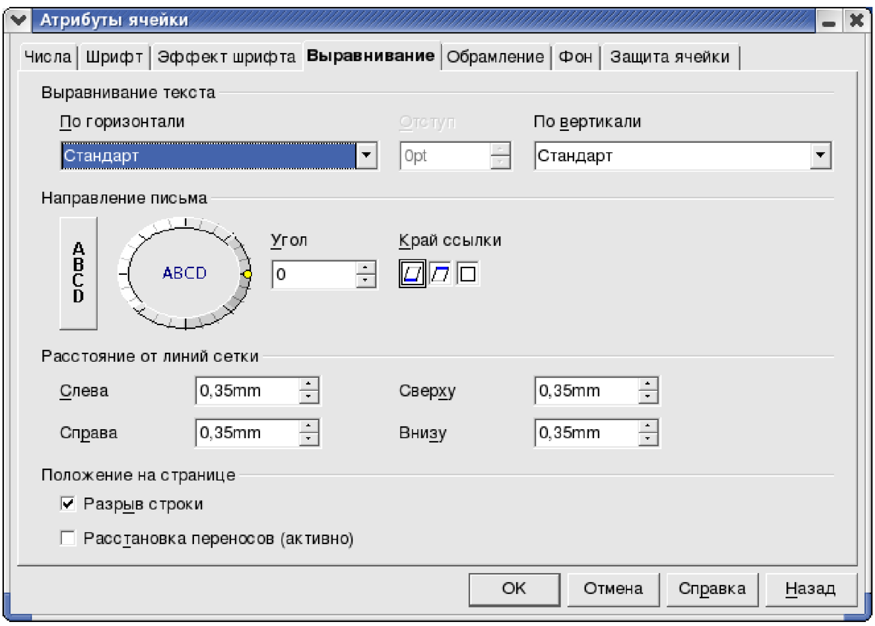


Рис. 39

После этого следует выделить все ячейки с числами (диапазон `B2-C5`) и совершенно аналогично описанному установить для них выравнивание «По центру». Затем выполняем последнюю операцию — устанавливаем нужную ширину столбцов таблицы. Двойной щелчок мыши по правой полоске границы названия столбца заставит Open Calc подобрать ширину, необходимую для отображения ячейки с самым длинным содержанием (то же самое можно сделать и с помощью меню «Формат | Столбец | Оптимальная ширина...»). Желаемую ширину можно также установить вручную с помощью мыши, щёлкнув левой кнопкой по полоске границы названия столбца и передвинув её затем в нужную позицию, или с помощью клавиатуры, вводя значение ширины в окне, открывающемся с помощью меню «Формат | Столбец | Ширина...». Именно установка нужной ширины с помощью мыши и позволяет получить изображённую на рис. 37 таблицу.

Ввод однотипных данных, таких как `понедельник`, `вторник`, `среда`, ... или 1, 2, 3, ... упрощается с помощью *автопродолжения*. Для этого следует ввести несколько (обычно хватает двух) первых значений ряда данных, переместить курсор в правый нижний угол выделения (он примет форму креста), нажать и, удерживая левую кнопку мыши, переместить курсор в нужную сторону. При этом в жёлтом прямоугольнике подсказки появляются новые значения ряда, которые будут внесены в ячейки таблицы после того, как вы отпустите кнопку мыши.

Формулы всегда начинаются со знака равенства и могут содержать обычные арифметические операции и операцию возведения в степень «`^`». Кроме того, в них можно включать многочисленные функции (математические, статистические, финансовые и другие), используя «Автопилот функций». После ввода знака равенства и какой-либо буквы Open Calc автоматически высвечивает имя функции, начинающейся на эту букву. Если предложенная функция является именно той, которая нужна, останется только нажать клавишу `Enter`. Когда в ячейку таблицы нужно включить текст, который начинается со знака равенства, но не является формулой, то необходимо перед знаком равенства поставить знак одинарной кавычки «`'`». Если же требуется начать строку со знака «`'`», то нужно напечатать кавычку дважды.

Напомним, что при копировании формулы компоненты адреса автоматически изменятся (относительная адресация), а если мы не хотим менять какую-то часть формулы, то выделяем её с помощью символа $ (абсолютная адресация). Для быстрой вставки этого символа в редактируемую ячейку удобно использовать сочетание клавиш `Shift + F4`. Если нажать эту комбинацию один раз, то знак $ добавится к координатам и столбца, и строки; два нажатия добавляют его только к координате строки, три — только к координате столбца, а четвёртое нажатие эквивалентно первому.

Построение диаграмм начинают обычно с выделения соответствующей области данных, после чего в меню «Вставка» выбирают пункт «Диаграмма...» и в окне «Автоформат диаграммы» конкретизируют тип диаграммы. Для каждого из типов («Линии», «С областями», «Гистограммы», «Линейчатые», «Круговые», «Диаграммы XY», «Сетчатые», «Биржевые») существует несколько различных вариантов их изображения. Например, круговая диаграмма может быть не только обычной, но и кольцевой или «разрезной». Кроме того, существуют и «трёхмерные» виды диаграмм.

Пример 3.4. Добавьте в электронную таблицу, построенную в примере 7.2 третьей главы, гистограмму, содержащую данные о проценте раскрытых преступлений и о доле числа преступлений, совершённых в каждом из районов.

Решение. Гистограмма должна быть построена по данным, содержащимся в ячейках столбцов `D` и `E` электронной таблицы (рис. 40), поэтому начать построение можно с выделения области `D1:E5`. Так как нам хочется использовать в качестве подписей имена районов, содержащиеся в первом столбце, то и диапазон `A1:A5` также должен быть выделен. Для выделения подобной несвязной области необходимо нажать и удерживать клавишу `Ctrl`, отпустив её только после завершения выделения.

	A	B	C	D	E
1	**Район**	**Число преступлений**	**Число раскрытых**	**Процент раскрытых**	**Доля (в %) от общего числа**
2	Заволжский	7	6	85,71	5,38
3	Московский	69	29	42,03	53,08
4	Пролетарский	25	8	32	19,23
5	Центральный	29	4	13,79	22,31
6	**Итого**	130			

Рис. 40

Затем в меню «Вставка» необходимо выбрать пункт «Диаграмма», что приведёт к появлению окна «Автоформат диаграммы» (рис. 41).

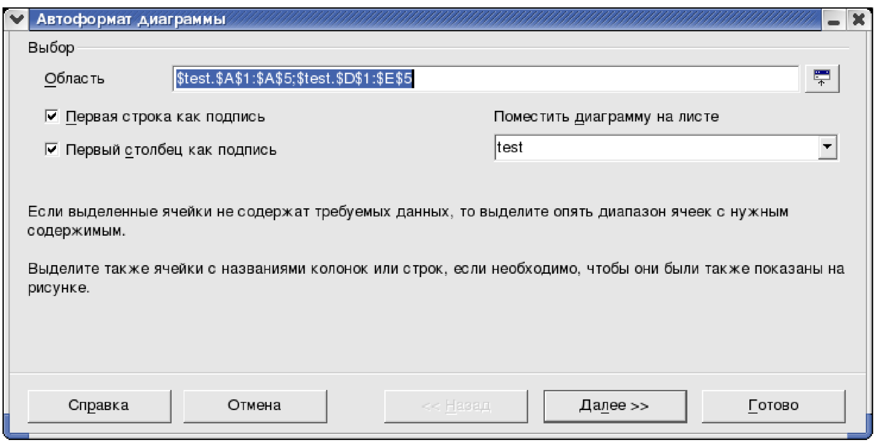


Рис. 41

Область выделена правильно, и мы действительно хотим использовать как первую строку, так и первый столбец в качестве подписи, поэтому нажимаем на кнопку «Далее», получая следующее окно (рис. 42).

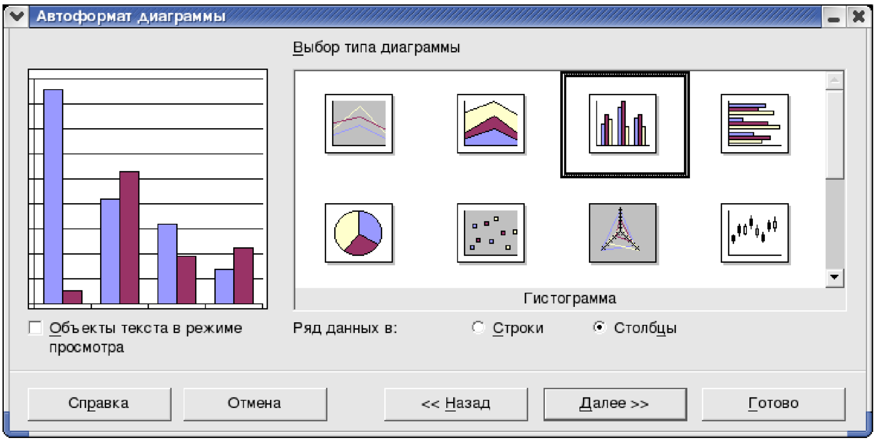


Рис. 42

Далее следует выбрать нужный нам тип диаграммы — гистограмму, а в следующем окне уточнить её вариант. Наконец, последнее окно «Автоформат диаграммы», изображённое на рис. 43, позволяет задать заголовок диаграммы и некоторые дополнительные параметры. Делаем заголовок пустым, соглашаемся с наличием «Легенды» (описания изображаемых данных) и нажимаем на кнопку «Готово».

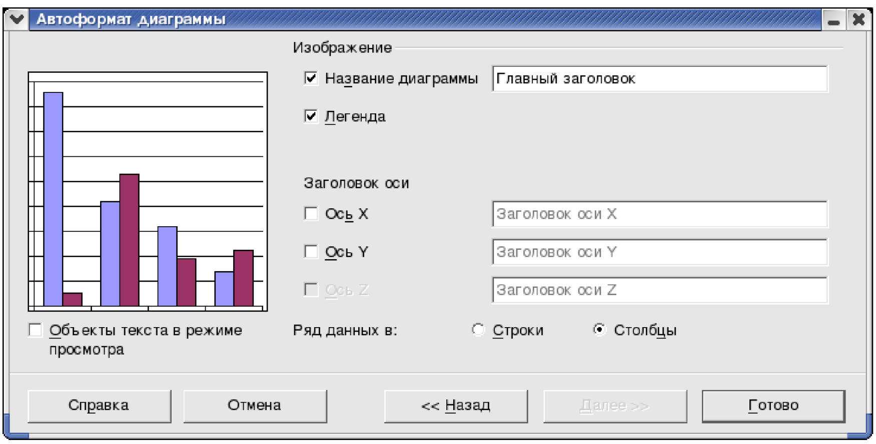
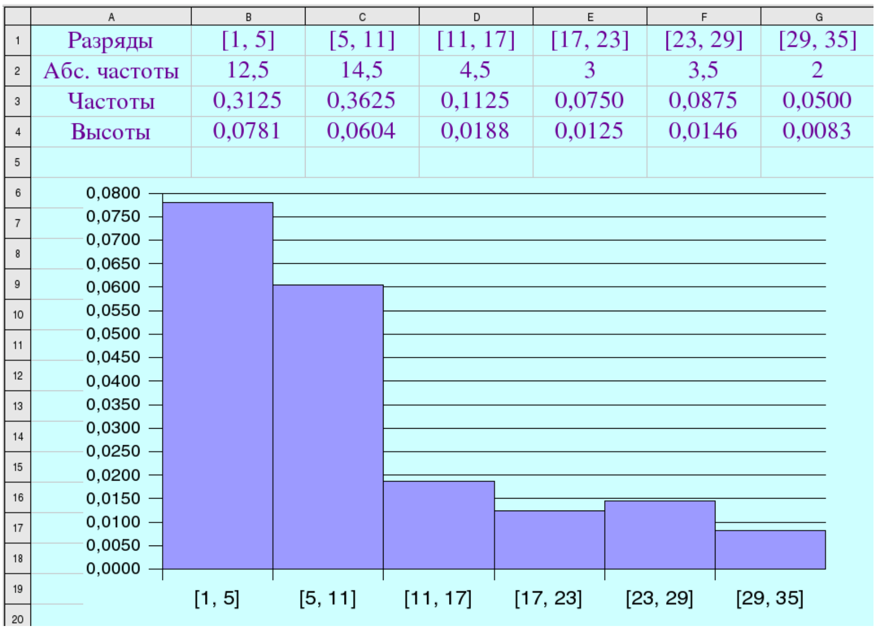


Рис. 43

Для получения итогового документа (см. рис. 17) требуется только переместить вставленную диаграмму и, возможно, измененить её масштаб. Для перемещения необходимо щёлкнуть левой кнопкой мыши, разместив её указатель над областью диаграммы. Затем следует найти такую позицию около границы диаграммы, в которой указатель примет вид креста. Теперь можно перемещать диаграмму в любое место таблицы, удерживая левую кнопку мыши. Изменение размеров диаграммы производится аналогично: нужно разместить указатель мыши около одной из восьми точек на её границе (по углам и в серединах сторон), чтобы он принял форму стрелки. Для завершения редактирования диаграммы необходимо щёлкнуть мышью вне её области.

Пример 3.5. Какие действия надо выполнить, чтобы включить в электронную таблицу гистограмму, изображённую на рис. 7 (стр. 82)?

Решение. По умолчанию столбцы гистограммы отделяются друг от друга пустыми промежутками, поэтому после вставки гистограммы выделим её и, щёлкнув правой кнопкой мыши по одному из столбцов гистограммы, выберем в появившемся меню пункт «Свойства объекта». В окне «Ряд данных» следует перейти на вкладку «Параметры» и установить на ней нулевые значения величин «Интервал» и «Пересечение». Итоговый результат показан на рис. 44.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Разряды	[1, 5]	[5, 11]	[11, 17]	[17, 23]	[23, 29]	[29, 35]
2	Абс. частоты	12,5	14,5	4,5	3	3,5	2
3	Частоты	0,3125	0,3625	0,1125	0,0750	0,0875	0,0500
4	Высоты	0,0781	0,0604	0,0188	0,0125	0,0146	0,0083

Рис. 44

В заключение напомним ещё раз о стилях — наборах свойств, описывающих произвольные объекты пакета Open Office. Любому листу и отдельным ячейкам электронной таблицы можно приписать свой стиль. По умолчанию используется стиль `Default`. Изменить его характеристики или создать новый стиль можно с помощью меню «Формат | Стилист» или клавишей `F11`.

Применение стилей позволяет значительно упростить последующее редактирование документа, а некоторые из возможностей электронных таблиц (например, условное форматирование ячеек) просто недоступны, если не использовать стили.

Упражнения

1. Какими из следующих возможностей обладает пакет Open Office: а) создание и редактирование текстовых документов; б) работа с электронными таблицами; в) выполнение символьных вычислений; г) создание презентаций; д) редактирование графических изображений?

2. Какие из следующих действий могут быть использованы в текстовом процессоре Open Writer для выделения фрагмента текста: а) перемещение мыши при её нажатой левой кнопке; б) двойной щелчок по слову; в) нажатие комбинации клавиш `Ctrl + A`; г) щелчок правой кнопкой мыши; д) использование меню?

3. Какие из ячеек электронной таблицы а) `A3`; б) `A4`; в) `C6`; г) `D6`; д) `C3`; е) `D4` входят хотя бы в одну из областей `A1:B3`, `B4:C8`, `B5:D7`?

§ 4. Обработка графической информации

Под обработкой графической информации понимают создание, отображение, редактирование и хранение на компьютере разнообразных графических образов. В §2 второй главы мы уже рассказывали о представлении графической информации. Напомним, что для кодирования цветов в компьютерной графике чаще всего используют схемы RGB и CMYK. Первая из них предназначена для представления цвета на экране монитора в виде комбинации трёх основных цветов: красного (**R**ed), зелёного (**G**reen) и синего (**B**lue). Цвет на бумаге (или любом другом не светящемся носителе) принято кодировать с помощью модели CMYK. При этом он представляется в виде комбинации голубого (**C**yan), пурпурного (**M**agenta), жёлтого (**Y**ellow) и чёрного (blac**K**).

Другим ключевым понятием, связанным с графической информацией, является формат файла, то есть способ его представления в виде последовательности нулей и единиц. В §2 второй главы рассказывалось о двух таких способах: векторной и растровой графике. При использовании векторной графики рисунок является комбинацией различных объектов (отрезков прямых линий, кругов, многоугольников и кривых), а растровое изображение представляет собой просто решётку точек (пикселов), и для его задания достаточно определить цвет каждой из них.

Формат файла определяется по расширению его имени. Наиболее распространёнными графическими форматами являются BMP, TIFF, PS, EPS, PDF, GIF, JPG (JPEG), PNG. Со всеми этими форматами могут работать Open Draw — одна из компонент пакета Open Office, рассмотренного в предыдущем параграфе, и профессиональный графический редактор GIMP. Оба продукта являются свободными и могут использоваться как в Linux, так и в Windows.

GIMP (GNU Image Manipulation Program) предназначен прежде всего для работы с чаще используемой растровой графикой. Его компонента GFig, впрочем, позволяет создавать векторные изображения и преобразовывать их в растровые. При запуске программы появляется окно с инструментами (рис. 45), в состав которых входят и такие традиционные инструменты, как кисть или карандаш. Нажатием на чёрный прямоугольник в окне инструментов вызывается окно выбора оттенка цвета, а при нажатии на чёрный кружок открывается вкладка выбора кисти. GIMP снабжён обширной справочной системой, всплывающие подсказки которой появляются на экране при подведении курсора к кнопкам и панелям. Нажатие на правую кнопку мыши в области рисунка приводит к появлению контекстного меню, содержащего все допустимые операции над текущим изображением. Круги, прямоугольники и другие геометрические фигуры могут быть построены с помощью встроенного редактора векторной графики, запускаемого с помощью меню «Фильтры | Визуализация | GFig», а затем нажатием на кнопку «Нарисовать» преобразованы в растровое изображение, накладываемое на текущий рисунок (рис. 46).

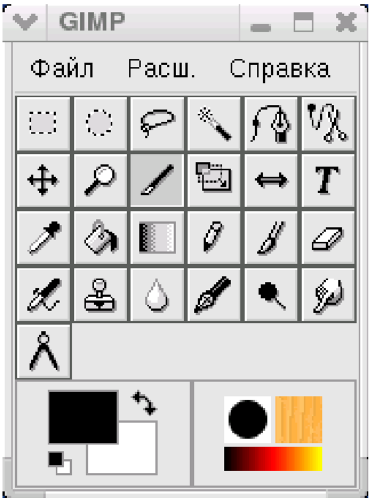


Рис. 45

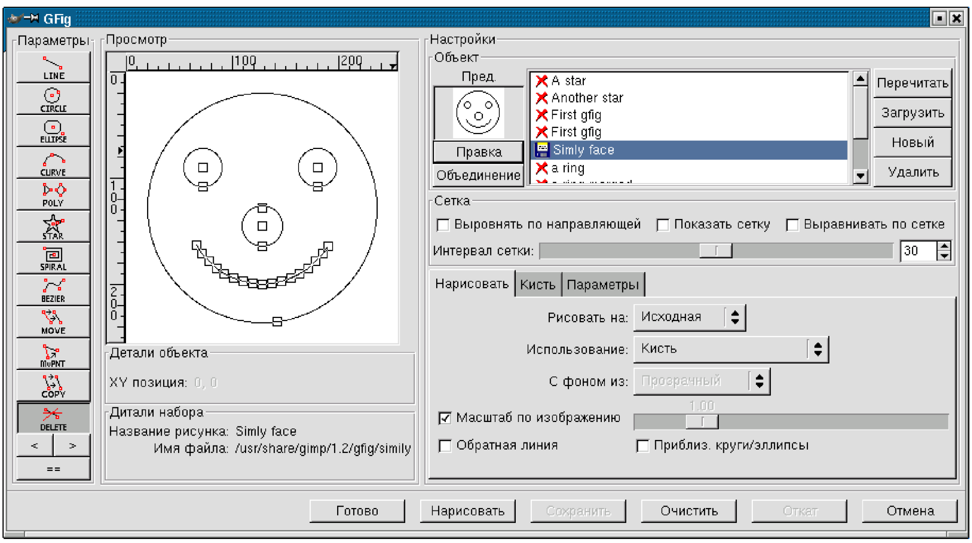


Рис. 46

В последние годы в связи с развитием цифровой фотографии значительно усовершенствовались методы обработки фотоснимков. Например, инструмент «Скальпель» позволяет удалить лишнюю часть рисунка. Контекстное меню «Изображение | Цвета» даёт возможность осветлить неудачный фотоснимок или изменить его контрастность. В нём же можно выбрать для обработки изображения (или его части) фильтр или скрипт[4] из коллекции «Скрипт-Фу» — расширяемом наборе специальных программ. Скрипт, например, позволяет устранить эффект «красных глаз» на фотоснимках. При любительской работе с фотоснимками чаще всего применяется формат JPEG, обеспечивающий высокий коэффициент сжатия изображения и большое количество цветов. При профессиональной работе с графикой применяют формат TIFF.

Другой широко распространённый графический формат GIF использует не более 256 различных цветов и по этой причине неприменим в целом ряде приложений. Однако компактность и возможность создания анимированных рисунков сделали его незаменимым для использования в сети. Эффект анимации достигается за счёт хранения в одном файле сразу нескольких изображений (слоёв рисунка или кадров). При просмотре такого файла пользователь видит «мультфильм», состоящий из демонстрируемых через небольшие промежутки времени кадров. Для получения анимированного рисунка в редакторе GIMP с помощью меню «Слои | Слои, каналы и контуры» создают несколько изображений, сохраняемых в формате GIF.

Входящий в Open Office редактор векторной графики Open Draw является удобным средством для создания иллюстраций к различным документам. Этот редактор работает с отрезками прямых линий, прямоугольниками, эллипсами и окружностями, многоугольниками, кривыми и целым рядом иных плоских и трёхмерных объектов (рис. 47). Каждый из объектов описывается совокупностью параметров, таких, как размер, цвет и т. д. Объекты можно перемещать, совмещать, вращать, можно изменять их размер, цвет и иные характеристики. Произвольный набор объектов можно сгруппировать в один новый объект, с которым можно работать так же, как и с другими. Open Draw позволяет создавать прямо-

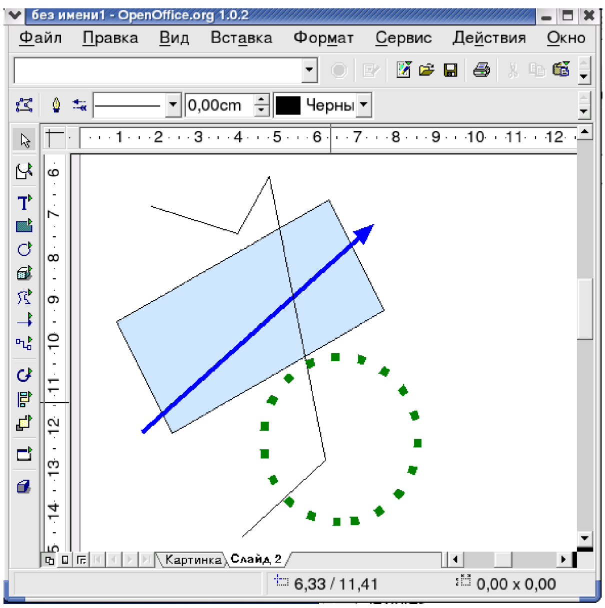


Рис. 47

[4]Так называют программу для обработки изображения.

угольники с текстом, связанные друг с другом, причём при перемещениях фигур связи сохраняются, что значительно упрощает создание рисунков и диаграмм.

Для облегчения перемещения и изменения размеров редактируемого объекта на его границе отображаются восемь узлов «изменения геометрии». После двойного щелчка мышью по объекту в него можно вводить текст, а для выхода из режима редактирования объекта достаточно щёлкнуть мышью за его пределами. Кроме главной панели инструментов, в Open Draw активно используется контекстное меню, с помощью которого удобно изменять различные свойства объектов. Следует также обратить внимание на возможности, предоставляемые «Стилистом». Он позволяет легко и быстро изменять существующие рисунки. При работе с фрагментами растровой графики их выделяют и тогда над основным полем появляется нужная панель инструментов.

Более подробную информацию о работе с цветами, градиентами[5], растровыми образами, штриховками и стилями можно получить в справочной системе программы Open Draw. Заметим, что эта программа по своим возможностям значительно ближе к профессиональным графическим редакторам, чем к средствам, традиционно включаемым в офисные пакеты.

В заключение кратко упомянем о презентациях — симбиозе разнообразных документов и эффектов. В презентацию можно включить текст, рисунки (как растровые, так и векторные), электронные таблицы и диаграммы. Демонстрация презентации может сопровождаться различными звуковыми и визуальными эффектами. Кроме того, имеется возможность связывать со щелчком мыши по тем или иным объектам презентации определённые действия — убирать и восстанавливать объекты, выполнять произвольную последовательность команд (макросов) и т. п. В Open Impress (компонента пакета Open Office) презентации создаются легко и быстро, так как сразу после старта программы запускается «Автопилот презентаций», предлагающий различные варианты работы: создание пустой презентации, создание презентации из шаблона или открытие уже существующей презентации.

Пример 4.1. Создадим презентацию, показывающую применение решета Эратосфена (см. стр. 3) для нахождения простых чисел.

Решение. Запустим программу Open Impress и создадим первый слайд, содержащий заголовок презентации (рис. 48). Для этого достаточно выбрать пункт «Слайд | Добавить слайд» в контекстном меню, которое вызывается нажатием на правую кнопку мыши. Создадим презентацию, показывающую поиск простых чисел среди первых тридцати натуральных чисел. Разместить эти числа в три строки удобнее всего с помощью электронных таблиц, что позволит воспользоваться автопродолжением для заполнения ячеек. Из меню «Вставка» выберем пункт «Электронная таблица» и после ввода чисел

[5] Градиентной заливкой (часто просто градиентом) называется плавный переход от одного цвета к другому.

изменим границы таблицы таким образом, чтобы остались видны только заполненные ячейки (рис. 49). Закончив редактирование таблицы с помощью щелчка мышью вне таблицы, растянем её до нужного размера.

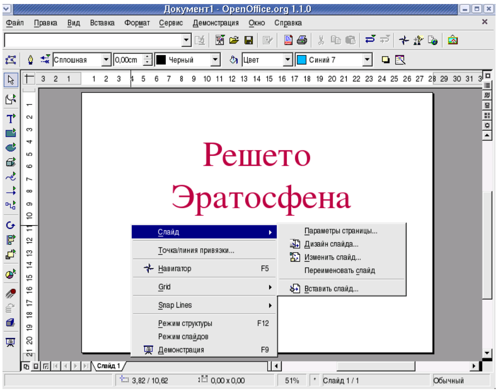


Рис. 48

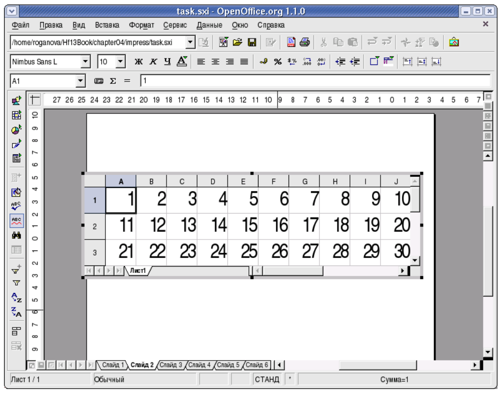


Рис. 49

Поскольку в процессе работы уже найденные и отмеченные простые числа далее не рассматриваются, то нам нужно, чтобы все изменения, сделанные на определённом шаге, отражались на всех последующих слайдах. По этой причине мы всегда будем создавать следующий слайд, дублируя текущий с помощью пункта меню «Вставка | Дублировать слайд».

Для подготовки третьего слайда продублируем второй слайд и зачеркнём отрезком прямой линии единицу, которая по определению не является простым числом. Для изменения цвета и толщины линии можно воспользоваться пунктом «Линия» контекстного меню. На четвёртом слайде, получаемым дублированием третьего, обведём первое простое число 2 в кружок, а на пятом зачеркнём все чётные числа, большие двух. Чтобы все отрезки, которыми мы будем зачёркивать числа, были одинаковыми, создадим один и затем размножим его с помощью меню «Правка | Дублировать» (рис. 50).

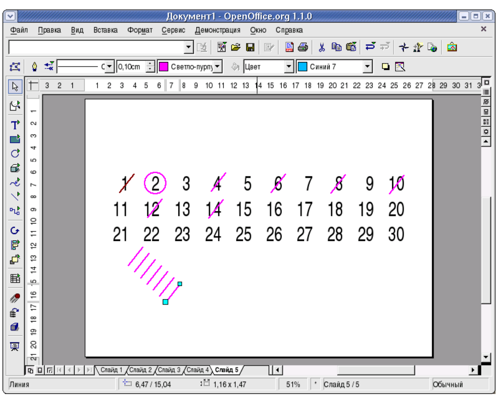


Рис. 50

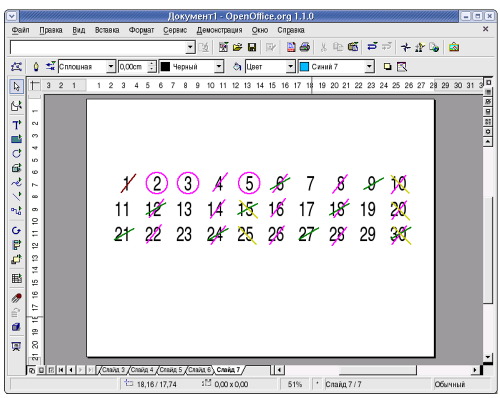


Рис. 51

Подготовку следующих слайдов презентации выполняем аналогично. При этом кружки, в которые мы заключаем простые числа, дублируем, чтобы они были одинаковыми, а у отрезков, используемых для зачёркивания чисел, кратных трём и пяти, изменяем цвет и наклон (рис. 51 и 52).

Напомним, что для нахождения простых чисел, не превосходящих n, нет необходимости рассматривать числа, кратные k, при $k \geqslant \sqrt{n}$. В нашем случае $\sqrt{30} < 6$, поэтому после того, как будут вычеркнуты все числа, кратные 5, незачёркнутыми останутся только простые числа, которые мы и обведём в кружки на предпоследнем слайде.

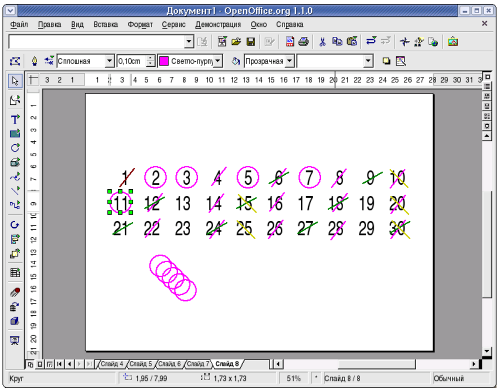


Рис. 52

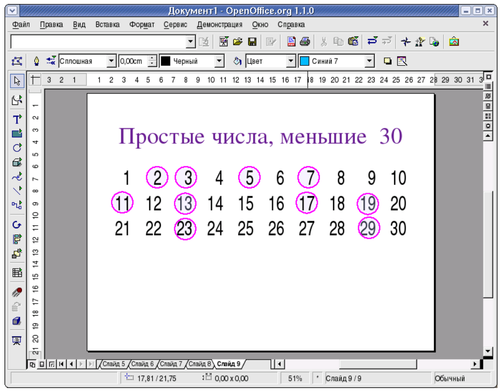


Рис. 53

На последний слайд добавим заголовок и сделаем цветным фон кружков, содержащих найденные простые числа (рис. 53). Для этого выделим все кружки, затем с помощью пункта «Область» из контекстного меню изменим фон на цветной и установим прозрачность 70%. Напомним, что выделение нескольких объектов выполняется при нажатой клавише `Shift`, а последовательные нажатия на клавишу `Tab` выделяют все объекты, присутствующие на слайде, один за другим. После удаления отрезков, зачёркивающих составные числа, добавим заголовок «Простые числа, меньшие 30» с помощью контекстного меню «Слайд | Изменить дизайн». Заметим, что к каждому слайду можно добавить невидимые при просмотре презентации примечания, которые могут быть включены в распечатываемые тезисы презентации.

Упражнения

1. Назовите основные модели, используемые для кодирования цвета в компьютерной графике.

2. С помощью справочной системы редактора GIMP научитесь работать с растровыми изображениями и примените их для редактирования какой-либо фотографии.

3. Научитесь вставлять векторные изображения (в пакете Open Draw) в текстовые документы.

4. Воспользовавшись существующими шаблонами и справочной системой Open Impress, подготовьте небольшую презентацию, посвящённую роли числа в математике.

5. Подготовьте презентацию, посвящённую знаменитым математикам-юристам и юристам-математикам (см. Приложение 1).

6. Подготовьте презентацию, представляющую описанное в текущей главе книги базовое программное обеспечение.

§ 5. Система компьютерной алгебры Maxima

Большинство компьютерных программ, предназначенных для вычислений, работают только с числовыми выражениями, а получаемые с их помощью результаты являются приближёнными, так как при операциях с действительными числами происходит округление. Такие программы не могут складывать простые дроби, приводя их к общему знаменателю, или оперировать с символьными выражениями. Им не под силу, например, воспользоваться в процессе преобразований известным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. С их помощью нельзя получить хорошо известные из школы формулы для корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ или найти производную от функции $y = x^2$. Для решения подобных задач существует специальный класс программ, называемых системами компьютерной алгебры, к которым относятся, в частности, Mathematica, Maple, Reduce и Maxima.

Мы уже видели в первой главе книги, как с помощью свободной программы Maxima можно автоматизировать простейшие действия над числами, решать уравнения, вычислять сложные проценты и делать алгебраические преобразования. В последующих главах книги мы продемонстрируем некоторые из других её возможностей: построение графиков функций, вычисление пределов, дифференцирование и интегрирование функций, работу с векторами и комплексными числами.

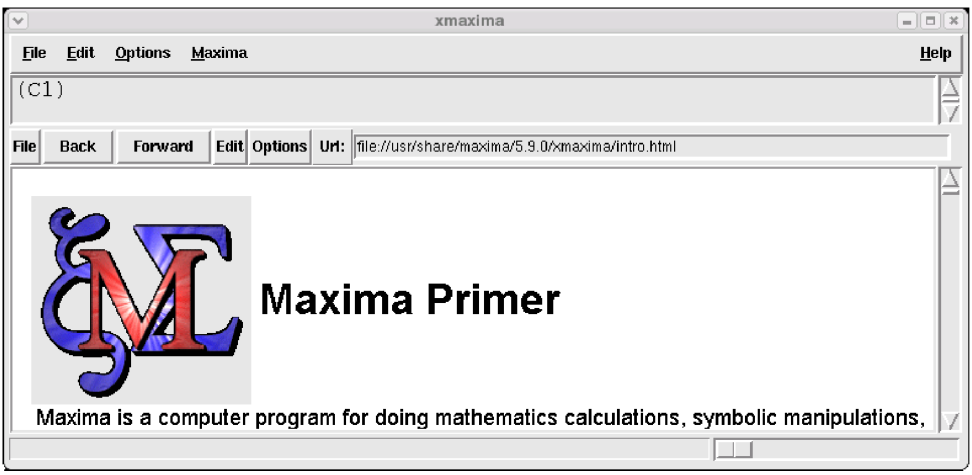


Рис. 54

Maxima является «потомком» одной из первых систем символьных вычислений Macsyma, работа над которой началось ещё в конце шестидесятых годов двадцатого века. Ставшие впоследствии широко известными системы компьютерной алгебры Maple и Mathematica также многим обязаны открытым исходным текстам Macsyma. В настоящее время Maxima, распространяемая на условиях лицензии GPL, является безусловным лидером среди свободных систем компьютерной алгебры и достойным конкурентом своих проприетарных аналогов. Наряду с большинством других свободных продуктов, Maxima может использоваться на компьютерах как с операционной системой Windows, так и с Linux. Внешний вид программы в среде Windows показан на рис. 54. Так же выглядит графическая оболочка xmaxima в ОС Linux.

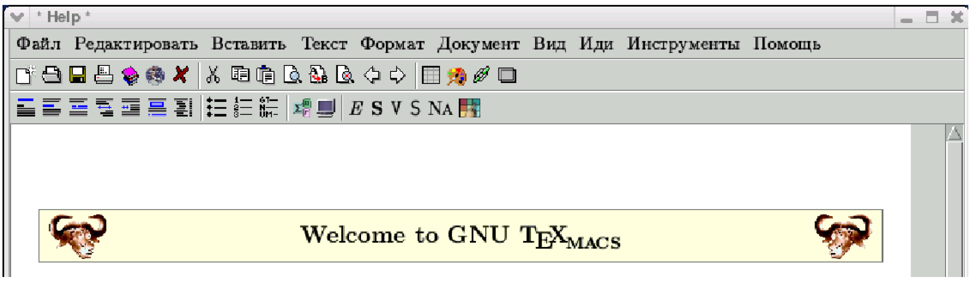


Рис. 55

Несколько более удобный интерфейс к системе Maxima предоставляет программа texmacs (рис. 55), доступная только пользователям ОС Linux. Важно отметить, что возможности самой системы компьютерной алгебры не зависят от используемой графической оболочки (xmaxima или texmacs). Основное отличие — вид, в котором выводится результат вычислений. В таблице 27 показан вывод команды `expand((a+1)^3)`, раскрывающей скобки в выражении $(a+1)^3$, в этих двух оболочках.

Таблица 27

xmaxima	texmacs
`3       2` `a  + 3 a  + 3 a + 1`	$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

Оболочка xmaxima предоставляет пользователю два окна. Верхнее из них (оно минимизировано на рис. 54) предназначено для ввода заданий и вывода получаемых системой результатов, а нижнее позволяет просматривать справочную информацию по системе с помощью встроенного браузера. Меню «File» даёт возможность прервать затянувшиеся вычисления или осуществить при необходимости повторный запуск системы, а меню «Options» позволяет убрать и вновь открыть (с помощью пункта «Toggle Browser Visibility») нижнее окно браузера со справочной информацией, выбрать шрифт (пункт «Fonts») и настроить некоторые другие параметры, влияющие на форму вывода информации. Вводить команды можно сразу после старта системы. На рис. 56 показан пример работы с оболочкой xmaxima. Каждая из вводимых команд нумеруется: первой из них присваивается «метка» (C1), второй — (C2) и т. д. Результаты также нумеруются, при этом вместо символа C (command) применяется D (display). Любая из введённых команд и каждый из полученных результатов могут быть использованы в дальнейшем: для повтора команды достаточно ввести два апострофа и её метку, например ''C2 или ''D2, а символ % (процент) позволяет обратиться к последнему результату. Выполнение команды начинается только после ввода точки с запятой и нажатия на клавишу Enter.

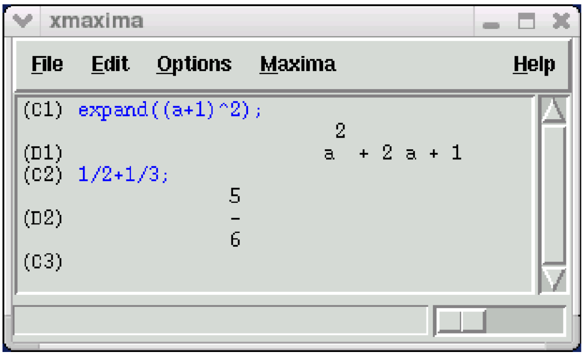


Рис. 56

В оболочке texmacs для начала работы необходимо выбрать в меню, раскрывающемся после нажатия на пиктограмму с изображением монитора, пункт «Maxima». Только после выполнения этих действий на экран будет выведена справочная информация и метка (C1). При работе в этой оболочке использование точки с запятой в конце команды не является обязательным. Прервать выполнение затянувшихся вычислений и осуществить повторный запуск системы можно с помощью пиктограмм, изображающих дорожный знак «Stop» и ножницы, разрезающие нить (рис. 57), соответственно. Если вы не сохраняли результаты вычислений, то при завершении работы (меню «Файл | Закрыть TeXmacs») оболочка напомнит об этом и потребует подтверждения выхода (вы должны ответить yes).

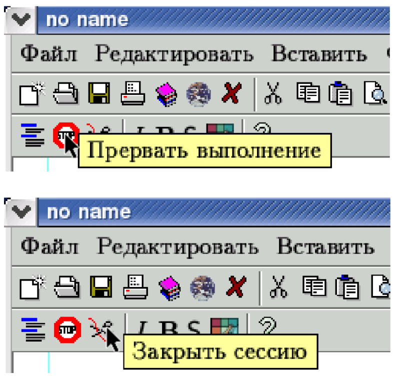


Рис. 57

Пример 5.1. Вычислите, используя Maxima, величины (5!)! и (10!)!.

Решение. После запуска программы выполним сначала команду 5!, которая выдаст результат 120 (не забудьте, что при использовании оболочки xmaxima в Linux или работе в Windows необходимо завершать каждую из вводимых команд точкой с запятой). Набрав затем %!, получим первое из требуемых чисел, в котором почти 200 цифр. Здесь мы воспользовались ссылкой на результат предыдущей команды с помощью символа %.

Для нахождения числа (10!)! сначала введём команду10!, результатом которой будет величина 3628800, а затем — вновь команду %! для подсчёта факториала последнего числа. К сожалению, поставленное нами задание современные компьютеры за несколько минут выполнить не в состоянии, поэтому нам, возможно, придётся прервать выполнение этого задания и повторно запустить программу Maxima.

Пример 5.2. Для ввода и вывода чисел в Maxima обычно используется десятичная система счисления. Чтобы изменить основание системы счисления, применяемой для ввода чисел, например с 10 на 5, следует выполнить команду `ibase:5`. Для изменения основания системы счисления, применяемой для вывода чисел, необходимо изменить значение переменной `obase`. Как перевести с помощью Maxima числа 9, 15 и 34 из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную?

Решение. Достаточно выполнить команду `obase:16`. После этого программа будет использовать для вывода всех результатов шестнадцатеричную систему счисления:

```
(C1) obase:16     (C2) 9       (C3) 15      (C4) 34
(D1) 10           (D2) 9       (D3) F       (D4) 22
```

Обратите внимание на то, что мы не изменяли значение величины `ibase`.

Пример 5.3. Проверьте с помощью Maxima, что $\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}=1$.

Решение. Так как константа π в системе Maxima записывается в виде `%pi`, то нам достаточно набрать команду `sin(%pi/3)^2+cos(%pi/3)^2`.

Пример 5.4. Убедитесь с помощью Maxima в справедливости основного тригонометрического тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Решение. Команда `sin(x)^2+cos(x)^2`, к нашему сожалению, выдаёт результат $\sin^2 x+\cos^2 x$, а вовсе не 1. Для получения единицы необходимо выполнить команду `trigsimp(%)`, упрощающую заданное тригонометрическое выражение.

Пример 5.5. Решите кубическое уравнение $x^3-2x^2-5x=6=0$.

Решение. Команда `solve(x^3-2*x^2-5*x+6=0,x)` сразу же печатает все три корня нашего уравнения:

$$[x=3, x=-2, x=1].$$

Пример 5.6. Решите с помощью системы компьютерной алгебры Maxima следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x-y &= 1,\\ 2x+y &= 3.\end{cases}$$

Решение. Для решения систем уравнений используется та же команда `solve`, в которой необходимо указать в квадратных скобках все уравнения, входящие в систему, и (тоже в квадратных скобках) искомые неизвестные. В данном случае требуемая команда такова: `solve([x-y=1,2*x+y=3],[x,y])`. Ответ будет напечатан в следующем виде:

$$\left[x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}\right].$$

Упражнения

1. Какими из следующих возможностей обладают современные системы компьютерной алгебры: а) числовые вычисления с любой степенью точности; б) символьное дифференцирование функций; в) нахождение первообразных произвольных функций; г) решение систем уравнений; д) доказательство теорем?

2. Используя встроенную в Maxima справочную систему, научитесь решать известные вам из школьного курса математики типы уравнений и систем уравнений.

3. Объясните следующие результаты:

```
(C1) ibase:8        (C2) obase:3          (C3) 17
(D1) 8              (D2) 10               (D3) 120
```

Глава V

Комбинаторные задачи

В практической деятельности юристу часто приходится сталкиваться с самыми разнообразными жизненными ситуациями. Умение анализировать сложившуюся обстановку, адекватно её оценивать и делать правильные выводы является важным качеством профессионала. Во многих случаях практика приводит к так называемым *комбинаторным задачам*.

§ 1. Комбинаторные задачи и методы их решения

Комбинаторные задачи обычно связаны а) с выбором из группы предметов таких, которые обладают заданными свойствами, б) с расположением этих предметов в определённом порядке и в) с нахождением числа всех возможных комбинаций. Ниже мы обсуждаем способы решения таких задач.

Пример 1.1. Майор Зимин ежедневно формирует наряд для поддержания общественного порядка в центре города Дрюкова. Наряд состоит из двух человек: старшего наряда и дежурного. В распоряжении майора находится 10 милиционеров. Чтобы избежать длительных контактов милиционеров с нарушителями правопорядка, майор составляет наряд каждый день по-разному. Сколько дней майор Зимин может спать спокойно (то есть до тех пор, пока какой-нибудь наряд не повторится)?

Решение. Прежде всего, майор пронумеровал личный состав числами 1, 2, …, 10. Далее, поскольку он был страстным болельщиком, то составил таблицу 28 наподобие той, в которой отмечал результаты футбольного первенства. Каждая клетка находится на пересечении столбца и строки, номера которых и определяют состав соответствующего наряда. При этом пары вида (1, 7) и (7, 1) считаются разными: хотя в них люди одни и те же, но обязанности у них разные. Клетки на диагонали таблицы не используются, потому что один и тот же человек не может быть и старшим, и дежурным одновременно. Будучи от природы человеком весьма сообразительным, майор Зи-

Таблица 28

	Дежурный									
Старший	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	@									
2		@								
3			@							
4				@						
5					@					
6						@				
7							@			
8								@		
9									@	
10										@

мин заметил, что в каждом из десяти столбцов записано 9 вариантов наряда, поэтому $9 \cdot 10 = 90$ дней он может спать спокойно.

Пример 1.2. В Стукове происходит ровно два ЧП в день. На место происшествия отправляют оперативную группу из трёх человек: следователя, оперативника и эксперта. В УВД несут службу 3 следователя, 2 оперативника и 3 эксперта. График их работы составляется таким образом, чтобы каждая очередная опергруппа отличалась от всех предыдущих (пока это будет возможно). Трое друзей — следователь Зубов, оперативник Прокопенко и эксперт Зульфия, всегда добиваются успеха. Как часто эта группа попадает в график?

Решение. Рассмотрим всевозможные составы оперативной группы, учитывая, что следователя можно выбрать тремя способами (C_1, C_2, C_3), оперативника — двумя (O_1 и O_2), а эксперта — тремя ($Э_1$, $Э_2$, $Э_3$). Составим так называемое *дерево*. Проведём из некоторой точки A три отрезка AC_1, AC_2 и AC_3, символизирующих выбор следователя. Из концов этих отрезков проведём по два новых отрезка C_1O_1, C_1O_2, C_2O_1, $\ldots$, C_3O_2, каждый из которых показывает, кто из оперативников включен в опергруппу. Из концов последних отрезков проведём ещё по три отрезка с концами $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$, которые указывают назначение в группу одного из трёх экспертов (рис. 58).

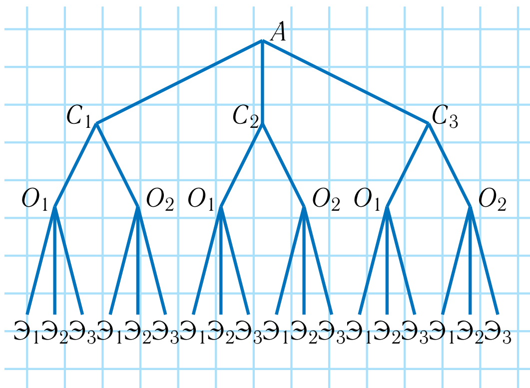


Рис. 58

Изображённую на рис. 58 схему и называют деревом. Всякий путь вдоль ветвей этого дерева от его вершины A к одной из вершин $Э_1$, $Э_2$ или $Э_3$ изображает состав некоторой оперативной группы. Например, путь $AC_2O_1Э_3$ изображает оперативную группу, в которую включены следователь C_2, оперативник O_1 и эксперт $Э_3$. Количество всех возможных путей, равное произведению $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$, даёт число всевозможных различных оперативных групп. Поскольку в день выезжают две группы, то через $18 : 2 = 9$ дней группы начнут повторяться. Итак, знатоки (Зубов, Прокопенко и Зульфия) встречаются на выездах раз в 9 дней.

Пример 1.3. В отделение милиции города Брюкова доставили гражданина N, задержанного по подозрению в хулиганстве. При этом дежурному передали запись с показаниями двенадцати свидетелей, каждый из которых на вопрос, хулиганил гражданин N или нет, отвечал ли-

Таблица 29

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
да	да	нет	да	да	да	нет	да	нет	нет	нет	нет

бо «да», либо «нет». В суматохе запись потерялась, и дежурный решил восстановить её по памяти. Он перенумеровал свидетелей и против каждого номера записал «да» или «нет» (таблица 29). Затем дежурный засомневался и составил другую таблицу, которая через некоторое время ему также показалась неправильной. А так как дежурный был человеком ответственным, то он решил перебирать комбинации до тех, пока не найдёт правильную.

По закону, если в течение десяти дней подозреваемому не предъявят обвинение, подтверждённое свидетельскими показаниями и иными доказательствами, то его обязаны освободить. Был ли выпущен подозреваемый, если дежурный работал по 6 часов в день, на составление одной комбинации тратил одну минуту, а правильная комбинация оказалась последней из всех возможных?

Решение. Число свидетелей так велико, что составление таблицы (как в примере 1.1) или графической схемы (как в примере 1.2) было бы слишком трудоёмко. Поэтому обойдёмся только логическими рассуждениями. Если бы свидетель был один, то было бы всего два варианта ответа: «да» или «нет». Если бы свидетелей было двое, то различных вариантов было бы 4: «да—да», «да—нет», «нет—да» и «нет—нет». Если бы было три свидетеля, то число вариантов получилось бы 8, так как к каждому из предыдущих четырёх пришлось бы добавить либо «да», либо «нет» из показаний третьего свидетеля.

Таким образом, при добавлении одного свидетеля число вариантов удваивается: четверо свидетелей дают $8 \cdot 2 = 16$ вариантов, пять свидетелей дают $2^4 \cdot 2 = 2^5$ вариантов, и т. д. Двенадцать свидетелей дадут $2^{12} = 4096$ вариантов. Итак, последний — нужный вариант появится через 4096 минут работы. Это 68 часов 16 минут, что более одиннадцати рабочих дней. Следовательно, гражданин N оказался на свободе.

Упражнения

1. В турнире принимают участие 6 команд: Динамо, Спартак, Торпедо, Локомотив, Химик, Волга. Каждая пара команд проводит две встречи — на своём поле и на чужом. Найдите число всех матчей.

2. В забеге участвует 5 спортсменов. Сколькими способами можно предсказать распределение первых трёх мест, считая, что победители показывают разное время?

3. Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырёх цифр от 0 до 9. Преступник пытается открыть сейф, перебирая различные варианты. Найдите наибольшее возможное число безуспешных попыток.

§ 2. Комбинаторные правила

В предыдущем параграфе мы обсудили три задачи, в каждой из которых занимались расчётом числа определённых комбинаций. Сейчас мы запишем общие формулы для решения задач подобного типа. В наиболее общем виде решение первой задачи выглядит так. Пусть требуется выполнить последовательно два действия (например, первое действие — выбор старшего наряда, второе — выбор дежурного).

Правило умножения. *Если первое действие можно осуществить m различными способами, а второе — n различными способами, то оба действия можно выполнить $m \cdot n$ различными способами.*

Это правило обобщается и на бóльшее число действий. Для трёх действий оно звучит так: пусть требуется последовательно выполнить три действия, причём первое действие может быть выполнено m способами, второе — n способами, и третье — k способами. Тогда три действия можно выполнить $m \cdot n \cdot k$ способами. По этому правилу мы решили вторую и третью задачи. Причём в третьей задаче 12 действий, и каждое из них выполняется двумя способами («да» и «нет»), поэтому ответом является произведение $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ — всего 12 сомножителей, то есть $2^{12} = 4096$. Таблица и дерево, с помощью которых мы решали первые две задачи, описывают правило умножения в некоторой специфической форме.

Пример 2.1. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и перебирает все возможные варианты последовательно. Каково наибольшее возможное число безуспешных попыток абонента?

Решение. Мы можем свести каждую попытку абонента к двум действиям: набор первой забытой цифры (первое действие) и набор второй забытой цифры (второе действие). На диске аппарата всего десять цифр: от 0 до 9. Поэтому как первое, так и второе действие выполняются десятью способами. По правилу умножения наибольшее число всевозможных способов набора двух цифр равно $10 \cdot 10 = 100$. Абонент заканчивает перебор, если очередная попытка оказалась удачной. Следовательно, наибольшее возможное число безуспешных попыток равно $100 - 1 = 99$.

Пример 2.2. Экзаменационный билет содержит два вопроса, а число всех билетов равно двадцати. Студент знает ответы на 20 вопросов программы. Каковы шансы получить положительную оценку, если она ставится при условии, что студент ответит хотя бы на один вопрос билета, а число билетов, которые студент знает полностью, равно восьми?

Решение. Из 20 известных студенту вопросов 16 содержатся в восьми «счастливых» билетах. Следовательно, есть ещё 4 билета, содержащих по одному известному студенту вопросу. Такие билеты назовём «нормальными». Успешный исход экзамена обеспечен, если студенту достанется или «счастливый» билет, или «нормальный» билет. Общее число таких билетов равно $4 + 8 = 12$. Таким образом, студент имеет двенадцать шансов из двадцати.

При решении этой задачи мы использовали так называемое *правило сложения*, которое в общем виде можно сформулировать так.

Правило сложения. *Если два действия взаимно исключают друг друга, причём одно из них можно выполнить m способами, а другое — n способами, то имеется $m+n$ способов осуществить хотя бы одно из этих действий.*

В нашем примере первое действие состоит в том, что студент выбирает счастливый билет, второе — в том, что он выбирает нормальный билет. Эти действия взаимно исключают друг друга, так как студент может выбрать только один билет.

Пример 2.3. Из двадцати восьми костей домино случайным образом выбирают две. Выбранная пара называется удачной, если обе кости содержат одно и то же число. (Например, кости 2—5 и 5—6 содержат одно и то же число 5.) Сколько всего существует удачных комбинаций?

Решение. Мы решим задачу в предположении, что порядок выбора костей является существенным. Это означает, например, что пара 2—5 и 5—6 отличается от пары 5—6 и 2—5. Рассмотрим две исключающие друг друга возможности: 1) первая выбранная кость является дублем; 2) первая кость не является дублем.

Допустим, что выбран дубль (1, 1). Тогда среди оставшихся костей имеется ровно 6 таких, которые вместе с ним составят удачную комбинацию: (1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6). Число всех подобных комбинаций можно найти, используя правило умножения. Действительно, дубль можно выбрать семью различными способами, а после выбора дубля вторую подходящую кость можно выбрать шестью способами. Таким образом, получится всего $7 \cdot 6 = 42$ комбинации.

Теперь рассмотрим второй возможный случай, когда первая выбранная кость не является дублем. Таких костей всего 21. Если первая кость, например, (6, 2), то удачную пару с ней образуют шесть костей с шестеркой и шесть костей с двойкой, то есть всего 12 костей. По правилу умножения число всех комбинаций подобного типа равно $21 \cdot 12 = 252$.

Две рассмотренные возможности (первая кость — дубль, первая кость — не дубль) взаимно исключают друг друга. Поэтому по правилу сложения находим, что число всевозможных удачных комбинаций будет $42 + 252 = 294$.

Замечание. Мы решали задачу в предположении, что порядок выбора костей является существенным. Если порядок костей в паре не является существенным, то ответ будет $294 : 2 = 147$.

Пользуясь правилом сложения, не забывайте о том, что рассматриваемые действия должны взаимно исключать друг друга. В противном случае можно получить ошибочные выводы.

Пример 2.4. В студенческой группе 20 человек, из которых 10 занимаются теннисом, 8 — водными лыжами, остальные спортом не занимаются. Для последних профком выделил 2 путёвки в профилакторий. Сколько студентов с ослабленным здоровьем не поедут в профилакторий, если известно, что в этой группе 4 студента занимаются двумя видами спорта?

Решение. На первый взгляд, все 20 студентов группы охвачены оздоровительной деятельностью. Действительно, 10 играют в теннис, 8 катаются на лыжах, двое поправляют здоровье в профилактории — всего 20. Но четверо студентов занимается двумя видами спорта, поэтому на самом деле расклад будет такой: четверо занимаются двумя видами спорта, $10 - 4 = 6$ только играют в теннис, $8 - 4 = 4$ — только катаются на водных лыжах. Таким образом, занимаются спортом $4 + 6 + 4 = 14$ человек, не занимаются спортом $20 - 14 = 6$ человек. Следовательно, $6 - 2 = 4$ студента с ослабленным здоровьем не поедут в профилакторий.

Правило включений и исключений. *Пусть первое действие можно выполнить m различными способами, а второе — n разными способами, причём среди этих $m + n$ способов имеется k таких, при которых выполняются и первое, и второе действия. Тогда по крайней мере одно из этих действий можно выполнить $m + n - k$ способами.*

В рассмотренной задаче о путёвках первое действие состоит в выборе теннисиста, второе действие — в выборе лыжника. По сформулированному выше правилу, число всех способов выбрать из данной группы спортсмена, то есть число всех спортсменов в группе, равно $10 + 8 - 4 = 14$.

Мы обсуждали пока довольно простые задачи. Их можно решить и без специальной подготовки, что в жизни часто и происходит. Достаточно иметь ясную голову и немного времени для того, чтобы не спеша обдумать ситуацию, разобраться и получить правильный ответ. Для чего же тогда доказывать теоремы, писать сложные формулы и т. п.?

Ответ простой. Жизнь сталкивает нас и с весьма сложными задачами, и поэтому важно иметь набор инструментов для их решения. Математика — один из самых сильных инструментов. Но все математические теории начинаются, как речка с ручейка, с простых истин, которые понятны и ребёнку. Обсуждая их, мы постепенно учимся решать и более сложные задачи. Уже в следующем параграфе мы увидим, как необходимы строгие доказательства даже при решении, казалось бы, весьма простых задач.

Упражнения

1. Некто написал 6 новогодних поздравлений своим друзьям, затем взял 6 разных конвертов и разложил открытки по конвертам наудачу. Каково число всех возможных комбинаций?

2. В некоторых странах ребёнку дают несколько имён. Сколькими способами можно назвать мальчика, если ему дают не более трёх имён, а всего различных мужских имён 50?

3. В отделе трудятся 12 юристов. Из них 8 человек владеют английским языком и 6 — немецким. Есть ли в отделе сотрудники, не знающие иностранных языков, если 3 сотрудника могут говорить и по-немецки, и по-английски?

§ 3. Метод математической индукции

Мы рассмотрели некоторые комбинаторные правила, но в общем виде их не доказывали. Между тем опытные юристы хорошо знают, что там, где нет доказательств, начинается скользкая дорожка, которая может завести куда угодно. Так считают и математики. *Метод математической индукции* является одним из наиболее универсальных методов проведения математических доказательств. Суть его заключается в следующем.

Предложение 3.1. *Докажите, что для любого натурального числа n справедливо равенство*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Доказательство. Легко проверить, что эта формула даёт правильный результат при $n = 1, 2, 3, 4$. Но её невозможно проверить для *всех* значений n, так как множество натуральных чисел бесконечно! Как же доказать, что утверждение верно для любых n, не проверяя этого непосредственно? Оказывается, что достаточно: A) проверить данное утверждение при $n = 1$; B) затем, предположив, что оно верно при $n = k$, доказать, что оно верно при $n = k + 1$. В этом и состоит метод математической индукции.

Условие A) для формулы (1) проверяется подстановкой в неё значения $n = 1$, что даёт тождество $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$. Теперь предположим, что формула (1) верна при $n = k$, то есть справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

и докажем, что формула (1) верна при $n = k + 1$, то есть, что выполняется равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Действительно, используя предположение, получаем:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 3.2. *Докажите, что при любом натуральном n число $8^n - 1$ делится на 7.*

Доказательство. Проверим условия A) и B). Подставив в заданное выражение $8^n - 1$ вместо n число 1, получим $8 - 1 = 7$. Это число делится на 7, то есть условие A) выполняется. Теперь допустим, что $8^k - 1$ делится на 7, и покажем, что в таком случае и $8^{k+1}-1$ также делится на 7. Преобразуем последнее выражение так:

$$8^{k+1}-1=8^{k+1}-8^k+8^k-1=8^k(8-1)+(8^k-1)=8^k\cdot 7+(8^k-1).$$

В результате преобразований мы получили сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 7. Действительно, первое слагаемое имеет множитель 7, а второе делится на 7 по предположению индукции. Следовательно, сумма также делится на 7. Условие В) выполняется, и утверждение доказано. □

Теперь методом математической индукции докажем общее правило умножения (см. предыдущий параграф).

Теорема 3.1. *Пусть требуется последовательно выполнить n действий, причём имеется m_1 способов выполнить первое действие, m_2 способов выполнить второе действие, и т.д., наконец, m_n способов выполнить n-е действие. Обозначим через S_n число всех способов, которыми можно выполнить n действий. Тогда*

$$S_n=m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_n. \tag{2}$$

Доказательство. При $n=1$ мы получаем одно действие, которое можно выполнить m_1 способами. Произведение (2) состоит в этом случае также из одного сомножителя m_1, следовательно, условие А) выполнено. Далее допустим, что формула (2) верна для $n=k$ действий:

$$S_k=m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k. \tag{3}$$

Докажем, что она верна для $n=k+1$ действий. Обозначим произвольный вариант выполнения k действий набором из k чисел. Например, набор $(3,\ 1,\ 6,\ \ldots,\ 5)$ означает вариант, в котором первое действие выполнено третьим способом, второе действие — первым способом и так далее, наконец, k-е действие выполнено пятым способом.

В случае, если выполняются $k+1$ действий, каждый вариант записывается как набор из $k+1$ чисел. Но всякий такой набор получается добавлением одного числа к какому-либо набору из k чисел. Например, из одного набора $(3,\ 1,\ 6,\ \ldots,\ 5)$ можно получить такие:

$$(3,1,6,\ldots,5,1),\quad (3,1,6,\ldots,5,2),\quad \ldots,\quad (3,1,6,\ldots,5,m_{k+1}),$$

то есть всего m_{k+1} вариантов. Поэтому число всех способов выполнения $k+1$ действий будет равно

$$S_{k+1}=S_k\cdot m_{k+1}=m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k\cdot m_{k+1}.$$

Таким образом, условие В) тоже выполняется. Теорема доказана. □

Пример 3.1. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают 3 карты. Каково число всех возможных наборов из трёх карт? Сколько из них содержат по крайней мере один туз? В скольких тройках ровно один туз?

Решение. Выбор трёх карт можно рассматривать как результат последовательного выполнения трёх действий, состоящих соответственно в выборе первой, второй и третьей карт. Число всех способов выполнения первого действия равно числу всех карт, то есть 36. Так как одна карта уже вынута, то число способов, которыми можно выполнить второе действие, равно 35. Аналогично получаем, что имеется всего 34 способа выполнить третье действие. По правилу умножения число всех возможных комбинаций равно произведению $36 \cdot 35 \cdot 34 = 42840$, что и является ответом на первый вопрос.

Мы перебираем все комбинации, в том числе и различающиеся порядком расположения карт. Например, комбинации вида «дама пик, туз бубен, король треф» и «король треф, туз бубен, дама пик» считались различными.

Теперь найдём число всех таких комбинаций из трёх карт, в которых нет тузов. Выкинем из колоды карт тузы и будем выбирать карты из оставшихся тридцати двух. Получается 32 способа выполнить первое действие (выбор первой карты), 31 способ — второе действие и 30 способов — третье действие. Следовательно, всего троек без тузов будет $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$. Если отнять это число от числа всех комбинаций, то получится число всех таких троек, в каждой из которых есть по крайней мере один туз. Оно равно $42840 - 29760 = 13080$, и мы нашли ответ на второй вопрос.

Чтобы ответить на последний вопрос задачи, рассмотрим процедуру выбора какой-нибудь тройки карт, в которой первая карта туз, а вторая и третья карты — не тузы. Поскольку тузов 4, то первое действие (выбор туза) осуществляется четырьмя способами. Следующая карта выбирается из оставшихся тридцати двух карт, третья — из тридцати одной карты. Правило умножения даёт $4 \cdot 32 \cdot 31 = 3968$ вариантов. Но карты можно выбирать и в другом порядке: «не туз, туз, не туз» (ещё 3968 вариантов), «не туз, не туз, туз» (столько же вариантов). Следовательно, всего будет $3968 \cdot 3 = 11904$ варианта.

Попытка обойти или «сократить» метод математической индукции может привести к неправильному результату. Рассмотрим, например, выражение $3^{2n} - 3^n - 1$. Полагая $n = 1$, получим: $3^2 - 3^1 - 1 = 9 - 3 - 1 = 5$ — простое число. При $n = 2$ получим $3^4 - 3^2 - 1 = 81 - 9 - 1 = 71$, то есть тоже простое число. При $n = 3$ имеем $3^6 - 3^3 - 1 = 729 - 27 - 1 = 701$ — опять простое число!

Возникает соблазн считать, что рассматриваемое выражение даёт простое число при любом n. Но уже при $n = 4$ мы получаем

$$3^8 - 3^4 - 1 = 6561 - 81 - 1 = 6479 = 589 \cdot 11,$$

то есть не простое, а составное число.

Упражнения

1. В отделе работает 7 человек. Найдите число всех вариантов очереди в кассу.
2. Сформулируйте и докажите правило сложения для n действий.

§ 4. Перестановки

При решении комбинаторных задач мы имеем дело с комбинациями из некоторых предметов. Эти комбинации могут отличаться одна от другой числом предметов, их составом или порядком.

Пример 4.1. В отделении сержанта Сбруева проходят службу 5 новобранцев: Белкин, Пенкин, Фенькин, Свечкин и Овечкин. В свободное от нарядов время сержант обучает их рассчитываться по порядку. По команде «В одну шеренгу становись!» солдаты выстраиваются справа от Сбруева и по команде «По порядку номеров рассчитайсь!» производят расчёт: «первый—второй—третий—четвёртый—пятый». После этого сержант перестраивает новобранцев по-новому, и расчёт повторяется. Сколько раз может Сбруев повторить это упражнение, используя только разные способы построения солдат?

Решение. Договоримся указывать порядок расположения солдат первыми буквами их фамилий. Например, комбинация ПСОФБ означает, что первым является Пенкин, вторым — Свечкин и т. д. Все комбинации отличаются одна от другой порядком букв и называются *перестановками* из пяти букв. Нам нужно найти число всех таких перестановок. Сначала мы выведем общую формулу, а потом закончим обсуждение примера.

Определение 4.1. Перестановкой из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов.

Напомним, что произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ называется «эн факториал» и по определению $0! = 1$. Величина $n!$ быстро растёт при увеличении n: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$.

Теорема 4.1. *Число всех различных перестановок из n элементов равно $n!$.*

Доказательство. Всякую перестановку из n элементов можно получить с помощью следующих действий: первое действие — выбор первого элемента, второе действие — выбор второго элемента, и т. д. Первый элемент можно выбрать n различными способами; второй выбирается из оставшихся $n-1$ элементов, поэтому число всех способов выполнения второго действия будет $n-1$. После выбора второго элемента их останется $n-2$, следовательно, число способов, которыми можно выполнить третье действие, будет $n-2$.

Таким образом, число способов, которыми выполняется очередное действие, будет на единицу меньше предыдущего. Следовательно, четвёртое действие можно выполнить $(n-3)$ способами, пятое — $(n-4)$ способами и т. д., наконец, последнее действие — одним способом. По правилу умножения число всех способов выполнения действий, то есть число всех перестановок, равно $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$. Теорема доказана. □

Число всех перестановок из n элементов обозначают P_n. Таким образом, мы доказали, что

$$P_n = n!. \tag{4}$$

Возвращаясь к рассматриваемому примеру с новобранцами, где $n = 5$, получим ответ $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Пример 4.2. В забеге участвуют 6 спортсменов. Найдите число возможных исходов забега, если известно, что время у всех разное.

Решение. Каждый исход забега можно рассматривать как перестановку из шести спортсменов в том порядке, в котором они прибежали к финишу. Поэтому число всех исходов равно числу всех перестановок из шести элементов, $P_6 = 6! = 720$.

Пример 4.3. На полку ставят шесть различных книг и журнал. Каково число таких расстановок, при которых журнал находится посередине?

Решение. При каждом варианте расстановки книг три из них находятся слева от журнала и три — справа от него. Один вариант отличается от другого порядком расстановки книг. Поэтому каждый такой вариант можно рассматривать как перестановку из шести книг. Следовательно, число всех возможных вариантов будет $P_6 = 6! = 720$.

Пример 4.4. Сколькими способами можно составить ведомость для начисления зарплаты, если в список должны войти десять лиц?

Решение. Традиционный способ составления ведомости состоит в перечислении лиц в алфавитном порядке. Отступив от него, мы получим другие способы, каждый из них является некоторой перестановкой из десяти элементов. Поэтому число всех способов составления ведомости равно числу всех перестановок из десяти элементов, то есть $P_{10} = 10! = 3628800$.

Пример 4.5. В маршрутном такси 12 мест. Сколькими способами могут занять их 12 пассажиров, среди которых 6 пенсионеров и для них отведены первые места?

Решение. Представим себе посадку в такси в виде двух действий. Первое действие: по своим местам рассаживаются 6 пенсионеров. Второе действие: на свои места рассаживаются остальные 6 пассажиров. Число способов выполнения каждого из этих действий равно $6! = 720$. По правилу умножения число всех вариантов посадки будет $720\cdot 720 = 518400$.

Упражнения

1. Выпишите все перестановки из букв a, b, c.

2. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 2, 4, 9, если каждая цифра используется в записи числа только один раз?

3. С помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 закодируйте буквы А, В, Д, Е, Л, О, С, Т, Ь, заменив каждую букву какой-нибудь цифрой, и зашифруйте слово СЛЕДОВАТЕЛЬ. Каково число возможных вариантов кода?

4. Докажите равенство $P_n = nP_{n-1}$.

5. Докажите равенство $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

§ 5. Размещения

Пример 5.1. Однажды утром по улицам города Дрюкова на высокой скорости пронеслась машина. Она сбила зазевавшегося поросенка и скрылась в неизвестном направлении. Возвращавшийся из ресторана житель N заметил номер автомобиля. Но когда появилась милиция, он с перепугу вспомнил только, что номер четырёхзначный, все цифры разные, причём первая цифра 1, а последняя 4. Сколько автомобилей должна проверить автоинспекция?

Решение. Второй и третьей цифрами номера могут быть любые две из следующих: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Выбрав любую пару различных цифр, автоинспектор получит номер какого-либо автомобиля. Например, пара (5,7) даёт номер 1574. Эти же цифры, но в другом порядке дают номер 1754. Следовательно, нужно перебрать столько номеров, сколько будет всевозможных комбинаций из восьми перечисленных цифр по две, но *с учётом их порядка*. Такие комбинации называют *размещениями*. В данном случае мы ищем число размещений из восьми цифр по две.

Определение 5.1. Размещением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n. Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k.

Теорема 5.1. *Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}}. \tag{5}$$

Доказательство. Каждое размещение можно получить с помощью k действий. Первое действие — выбор первого элемента — осуществляется n способами, второе действие — выбор второго элемента — $(n-1)$ способами, и т. д., наконец, последнее действие — выбор k-того элемента — $(n-k+1)$ способами. По правилу умножения число всех размещений будет равно $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, что и требовалось доказать. □

Вернёмся к примеру 5.1. Согласно формуле (5) автоинспекция должна проверить $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ автомобилей.

Формулу для числа размещений можно переписать в виде:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

воспользовавшись равенством $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1) \ldots (n-1) \cdot n$ (см. последнее упражнение предыдущего параграфа). Правая часть этой формулы имеет смысл при $k = 0$, так как $n!/n! = 1$, поэтому мы будем считать, что $A_n^0 = 1$.

При $k = n$ формула (5) превращается в формулу для числа перестановок из n элементов. Действительно,

$$A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n.$$

Пример 5.2. Из точки проведено 10 лучей. Сколько получилось углов, меньших 360°?

Решение. Каждый угол определяется парой лучей, причём указывается, какой из них первый, а какой второй. Угол отсчитывается от первого луча против часовой стрелки до второго луча. Но два луча, взятых в определённом порядке из данных десяти лучей, образуют некоторое размещение из 10 лучей по 2. Следовательно, число всех углов равно числу всевозможных размещений из 10 элементов по 2: $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$.

Пример 5.3. В юридической конторе работают 8 юристов. Сколькими способами можно распределить между ними пять дел (по одному на каждого)?

Решение. Для каждого дела указывается юрист, который будет им заниматься, то есть каждое поручение можно истолковать как некоторое размещение из 8 по 5. Поэтому число всех способов распределения поручений равно числу всех размещений из 8 элементов по 5: $A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

Пример 5.4. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если в записи числа каждая из цифр используется не более одного раза?

Решение. По условию задачи из данных цифр можно составлять однозначные, двузначные, трёхзначные и четырёхзначные числа. Количество однозначных чисел равно четырём (заметим, что $4 = A_4^1$). Всякое двузначное число можно рассматривать как некоторое размещение из четырёх цифр по две, поэтому их количество будет равно $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Точно так же мы найдём количество трёхзначных и четырёхзначных чисел, это соответственно $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ и $A_4^4 = 4! = 24$. Всего, таким образом, получим $4 + 12 + 24 + 24 = 64$ числа.

Пример 5.5. В Брюкове преступников мало, но на всякий случай места для их временной изоляции имеются. Однажды брюковская полиция задержала 5 дрюковцев и оставила их переночевать в удобном помещении. Там было 10 камер. Спрашивается, сколькими способами можно распределить задержанных по камерам?

Решение. Можно отправить каждого дрюковца в отдельную камеру. Тогда число всех вариантов будет $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$. Но есть и современный вариант — поместить всех арестованных в одну камеру; в этом случае число возможных вариантов будет равно числу имеющихся в наличии камер, то есть равно десяти. Кроме того, есть и другие (промежуточные варианты), при которых в камеру помещается произвольное число задержанных.

Такие размещения называют размещениями с повторениями. Подсчитаем их количество. Каждое размещение можно описать с помощью пяти действий — по числу рассаживаемых дрюковцев. Действие состоит в том, что мы помещаем арестованного в ту или иную камеру. Поскольку камер всего 10, то каждое действие можно осуществить десятью способами. Поэтому по правилу умножения число способов выполнения пяти действий равно $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$.

Упражнения

1. На трёх карточках написаны буквы Р, А, К. Сколько различных слов можно составить, если словом считается любой набор из трёх букв? Запишите эти слова.

2. В домоуправлении работают 6 человек. Поступило распоряжение о премировании трёх сотрудников (различными суммами). Сколькими способами можно это сделать?

3. На железнодорожной ветке Дрюково — Стуково имеется 10 станций. В течение дня с каждой станции на каждую другую выехало в точности по одному пассажиру. Сколько билетов было куплено в этот день?

4. Сколькими способами можно выбрать из семи разных книг какие-либо четыре и подарить их четырём милиционерам, занявшим первые четыре призовых места на конкурсе «Настоящий мужчина города Брюкова»?

5. Студенты одной группы должны сдать 5 экзаменов в течение восемнадцати дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?

§ 6. Сочетания

Пример 6.1. Суд присяжных города Брюкова приговорил гражданина N за сокрытие доходов к тюремному заключению на семь лет. Этот приговор вынесен в соответствии с законом города Брюкова, согласно которому обвиняемый по данной статье (самая суровая статья УК в Брюкове!) получает столько лет, сколько присяжных решат, что он виновен. Каково число всех возможных вариантов голосования присяжных, если их всего 10?

Решение. За приговор проголосовали 7 из десяти присяжных. Мы должны найти число всех возможных групп из семи присяжных. Здесь порядок выбора не играет никакой роли, поэтому рассматриваемые комбинации отличаются одна от другой только составом лиц. Комбинации такого типа называются *сочетаниями*.

Определение 6.1. Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов. Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k.

Теорема 6.1. *Число всех сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}. \tag{6}$$

Доказательство. Опишем процедуру, которая позволяет получить любое размещение из n элементов по k. Возьмём какое-нибудь сочетание из n элементов по k:

$$\underbrace{(a,\, b,\, c, \ldots,\, f)}_{k\ \text{букв}}.$$

Переставляя эти элементы всевозможными способами, получим $k!$ всех размещений из n по k одного и того же состава. Таким образом, из одного сочетания получается $k!$ размещений. Следовательно, из C_n^k сочетаний получится $C_n^k k!$ размещений, то есть $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда, учитывая формулу для числа размещений (формула (5) предыдущего параграфа), получаем формулу (6). □

В примере 6.1 нужно найти C_{10}^7. По формуле (6) получаем:

$$C_{10}^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 120.$$

Заметим, что формулы, по которым вычисляется число размещений или сочетаний, допускают более широкое толкование. Поскольку по определению $0! = 1$, то $A_n^0 = 1$, $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$.

Числа C_n^k обладают многими важными свойствами. Некоторые из них понадобятся нам в дальнейшем. Докажем, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{7}$$

Действительно, если из n элементов выбрать какие-то k элементов, то останется $n-k$ элементов. Следовательно, каждому сочетанию из n элементов по k соответствует определённое сочетание из n элементов по $n-k$. Поэтому их число одинаково и формула (7) верна.

Формулу (6) для числа сочетаний можно переписать в виде

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{8}$$

так как в ходе доказательства теоремы было получено равенство $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$, а в §5 мы установили, что $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Если написать формулу (6) для числа сочетаний C_n^{k+1}, то можно увидеть, что оно связано с числом C_n^k равенством

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k.$$

Эта формула позволяет последовательно вычислять числа C_n^k. Зная, что $C_n^0 = 1$, подставим $k = 0$ в эту формулу и найдём $C_n^1 = \dfrac{n}{1} \cdot C_n^0 = n$. Положив далее $k = 1$, получим $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, и т. д.

Следующее свойство носит имя Паскаля[1]:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Доказательство этой формулы можно провести непосредственным вычислением, используя формулу (6) или (8). Сделайте это самостоятельно.

Пример 6.2. Сколько различных произведений по три различных множителя в каждом можно составить из чисел 2, 3, 5, 7, 9?

Решение. Поскольку произведение не зависит от порядка сомножителей, то число всевозможных произведений будет

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Пример 6.3. На плоскости дано 20 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Сколько всего получилось прямых?

Решение. Через две точки проходит одна и только одна прямая. Каждая пара точек является сочетанием из 20 точек по две. Следовательно, число всех прямых равно $C_{20}^2 = \dfrac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$.

Пример 6.4. В состав жюри входят 7 судей. Какие-либо 4 из них всегда ставят высший балл, остальные на один балл ниже. Каково число возможных вариантов голосования?

Решение. Каждый вариант голосования определяется четвёркой судей, поставивших высший балл, то есть представляет собой сочетание из семи судей по четыре. Отсюда следует, что число всех вариантов голосования будет $C_7^4 = C_7^{7-4} = C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$.

---

[1] Блез Паскаль (1623–1662) — французский математик, физик и философ. Занимался геометрией, дифференциальным и интегральным исчислением. В его переписке с П. Ферма были впервые научно обоснованы начала комбинаторики и теории вероятностей.

Пример 6.5. В Брюкове живут добрые и жалостливые люди. Однажды, выходя из храма, благочестивый брюковец увидел на паперти 7 нищих из Дрюкова. Он дал им на всех два гривенника. Сколькими способами нищие могут распределить эти монеты?

Решение. Очевидны 2 варианта делёжки. Первый заключается в том, что два счастливчика получают по монете, а остальным не достаётся ничего. Число способов такого дележа $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$. При втором варианте оба гривенника забирает один нищий. Таких вариантов всего столько, сколько нищих, то есть 7. Таким образом, всего существует 28 способов дележа.

В последнем примере мы нашли число всех сочетаний с повторениями из 7 по 2. Сочетания с повторениями называются так потому, что в каждом сочетании один и тот же элемент может повторяться несколько раз. Такое сочетание возникло при втором варианте дележа, когда оба гривенника достались одному нищему. В этом случае получается пара, которую нищий образует сам с собой. Если каждому нищему приписать номер, то это будут пары вида (1,1), (2,2) и т. д.

Упражнения

1. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выбрать 6 делегатов для переговоров с администрацией института о продаже пива в студенческом буфете?

2. Сколькими способами можно поставить три пешки на белые клетки шахматной доски?

3. Для участия в соревнованиях тренер отбирает 5 спортсменов из двенадцати. Сколькими способами он может составить команду?

4. На окружности выбрано 7 точек. Сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?

5. На карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен зачеркнуть 4 клетки. Каково число всех возможных вариантов?

§ 7. Формула бинома Ньютона

Из школы вам известны формулы квадрата и куба суммы двух чисел: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Формулой бинома Ньютона[2] называют формулу возведения в степень n суммы двух слагаемых. Общий вид этой формулы был известен задолго до Ньютона математикам Древнего Востока. Имя Ньютона эта формула получила потому, что Ньютон распространил её на случай любого действительного показателя степени двучлена $a+b$. Иными словами, Ньютон объяснил современникам, как вычислять выражения $(a+b)^{1/2}$, $(a+b)^{\sqrt{3}}$, $(a+b)^{-4}$ и т. п.

Теорема 7.1. *Для любого натурального числа n имеет место формула*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \qquad (9)$$

[2] Исаак Ньютон (1643–1727) — английский математик, механик и астроном.

Доказательство. Заметим, что по определению степени

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b).$$

Раскрыв в правой части скобки, получим некоторое число слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n сомножителей, взятых по одному из каждой скобки. Какой вид имеют эти слагаемые? Например, если мы возьмём из каждой скобки первое слагаемое, то в результате умножения получится a^n. Если взять из одной скобки b, а из всех остальных взять a, то получим $a^{n-1}b$. В общем случае, выбрав k раз множитель b и остальные $n-k$ раз — множитель a, мы получим одночлен $a^{n-k}b^k$. Наконец, когда все выбранные множители равны b, то произведение равно b^n.

Одночлен a^n получится только один раз – когда все множители равны a, а произведений $a^{n-1}b$ будет столько, сколькими способами можно выбрать из n скобок множитель b. Понятно, что число таких способов равно числу скобок, то есть n. Поэтому после приведения всех подобных членов у одночлена $a^{n-1}b$ появится коэффициент n. Поскольку $n = C_n^1$, то этот одночлен можно записать в виде $C_n^1 a^{n-1}b$.

Это рассуждение можно применить для определения коэффициента у любого одночлена. Рассмотрим, например, произведение $a^{n-k}b^k$. Таких произведений будет столько, сколько существует способов выбрать k сомножителей b из n скобок. Но число всех способов выполнения такой операции, как мы знаем, равно числу всех сочетаний из n элементов по k, то есть C_n^k. Следовательно, произведений вида $a^{n-k}b^k$ имеется всего C_n^k. После приведения подобных членов получится выражение $C_n^k a^{n-k}b^k$.

При $k=0$ получим $C_n^0 a^{n-0}b^0 = a^n$, при $k=1$ — $C_n^1 a^{n-1}b$, при $k=2$ — $C_n^2 a^{n-2}b^2$, и так далее. Наконец, при $k=n$ мы получим последнее слагаемое $C_n^n a^{n-n}b^n = b^n$. В итоге получается формула (9) и теорема доказана. □

Формула (9), как уже было сказано, называется формулой бинома Ньютона. Коэффициентами одночленов, записанных в её правой части, оказались числа C_n^k, поэтому их называют также *биномиальными коэффициентами*. Выражение $C_n^k a^{n-k}b^k$ называется общим членом бинома Ньютона.

Мы видели, что все члены бинома получатся из формулы (9), если полагать в ней последовательно $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Следовательно, правая часть формулы (9) содержит $n+1$ слагаемых. Используя обозначение суммы $\sum$, формулу бинома Ньютона можно кратко записать так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k. \tag{10}$$

Пример 7.1. Напишите формулу бинома Ньютона при $n=4$.

Решение. Положим в формуле (9) $n=4$:

$$(a+b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + b^4.$$

Так как $C_4^1 = C_4^3 = 4$, $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$, то

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \qquad (11)$$

Пример 7.2. Разложите по степеням x многочлены $(x-3)^4$ и $(x^2+1)^4$.

Решение. Подставив в формулу (11) $a = x$ и $b = -3$, найдём:

$$(x-3)^4 = x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(-3)^2 + 4x(-3)^3 + (-3)^4 =$$
$$= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81.$$

Положив в формуле (11) $a = x^2$ и $b = 1$, получим:

$$(x^2+1)^4 = \left(x^2\right)^4 + 4\left(x^2\right)^3 + 6\left(x^2\right)^2 + 4x^2 + 1 = x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1.$$

Вспомним задачу о сложных процентах (см. §8 первой главы).

Пример 7.3. Допустим, вы собираетесь положить S рублей под 5% годовых и хотите прикинуть, сколько денег окажется на вашем счёте через десять лет. Сумма вычисляется по известной формуле $S \cdot (1 + 0{,}05)^{10}$, но ваш калькулятор сломался. Что делать?

Решение. Не расстраивайтесь, вам поможет формула бинома Ньютона. Положив в формуле (9) $a = 1$, $b = x$, получим

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (12)$$

Пусть число x значительно меньше единицы, например, 0,05. Тогда числа x^2, x^3, x^4 и так далее будут ещё меньше: $x^2 = 0{,}0025$, $x^3 = 0{,}000125$, $x^4 = 0{,}00000625$ и т. д. Поэтому слагаемыми, содержащими эти степени, можно пренебречь, заменив формулу (12) приближённой:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad (13)$$

(мы учли, что $C_n^1 = n$). Таким образом, через десять лет на вашем счёте будет приблизительно $S \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 10) = 1{,}5S$ рублей, то есть вклад увеличится примерно в полтора раза.

Пример 7.4. Найдите приближённое значение степени $0{,}97^2$.

Решение. Полагая в формуле (13) $x = -0{,}03$, получаем:

$$0{,}97^2 = (1 - 0{,}03)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}03 = 0{,}94.$$

Упражнения

1. Найдите приближённые значения степеней $1{,}003^2$, $0{,}984^3$, $1{,}06^5$.

2. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий даёт один из трёх ответов: «да», «нет», «не знаю». Найдите число всех различных способов заполнения анкеты.

3. Разложите многочлен $(x-1)^5$ по степеням x.

4. Найдите сумму $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$. Если у вас получилось 32, то подумайте, как получить этот ответ, используя тождество 1+1=2?

5. Докажите формулу бинома Ньютона методом математической индукции.

Глава VI

Понятие вероятности

Трудно найти такую сферу человеческой деятельности, в которой не использовались бы вероятностно-статистические методы. Они применяются практически во всех областях науки, в экономике, военном деле, технике, медицине, юридической практике, криминалистике и т. д. Эти методы базируются на понятиях *случайного события* и *вероятности*. Решающий вклад в теорию вероятностей внесли такие замечательные математики, как Ферма, Якоб Бернулли[1], Лаплас[2], Гаусс[3], Чебышев, Колмогоров[4].

§ 1. Случайные события

Окружающий нас мир пронизан явлениями, которые носят случайный характер. Мы встречаемся с ними, наблюдая состояние атмосферы, физические эксперименты, производственные процессы, изучая общественно-политическую ситуацию и т. д. Результаты многих наблюдений нельзя предсказать однозначно. Предположим, в 10 часов в Твери пошел дождь. Утверждение «в 11 часов дождь кончится» может оказаться либо верным, либо нет. То же самое можно сказать о прогнозе на следующий день уровня радиации, курса доллара, популярности мэра, количества дорожно-транспортных происшествий.

Допустим, что, исходя из каких-то соображений, мы прогнозируем на завтра 12 дорожно-транспортных происшествий на улицах нашего города. Это событие либо произойдёт, либо нет. Дело в том, что ситуация на дорогах зависит от большого количества факторов и учесть влияние каждого из них заранее невозможно (погода, видимость, направление и сила ветра, самочувствие водителей и пешеходов, количество транспорта на трассе и т. д.) Поэтому не исключено, что число происшествий окажется не 12, а, например, 10, 8 или 15. Каждый такой факт является *случайным событием*.

В теории вероятностей, как и в других математических теориях, для описания математических понятий используются слова русского языка. В русском языке слово «опыт» подразумевает протяжённость во времени (например, «жизненный опыт» или «опыт накапливается годами») Слово «испытание» подразумевает разовость, однократность. Слово «событие» подразу-

---

[1] Якоб Бернулли (1654–1705) — швейцарский математик.

[2] Пьер Симон Лаплас (1749–1827) — французский математик, физик и астроном.

[3] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — немецкий математик, астроном и физик.

[4] Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1990) — российский математик, внёсший весомый вклад во многие разделы математики, в особенности в теорию функций и теорию вероятностей.

мевает появление чего-то заранее ожидаемого. Наряду с термином «опыт» употребляется его синоним латинского происхождения — «эксперимент».

Будем считать, что все наблюдаемые события являются результатом некоторых опытов, то есть действий, совершаемых при определённых условиях. Пусть опыт состоит в однократном или многократном бросании монеты на гладкий достаточно большой горизонтальный стол. У каждого испытания в нашем примере возможны два исхода — выпадение орла или выпадение решки. Эти исходы называются *событиями*.

Различают три вида событий: достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* называют такое событие, которое обязательно происходит при каждом испытании. *Невозможным* называют событие, которое заведомо не может произойти ни при одном испытании. *Случайным* называют событие, которое в данном испытании может произойти, а может и не произойти.

Пример 1.1. В урне имеются шары синего и красного цвета. Испытание состоит в том, что наугад вынимают один шар. Событие «вынут либо синий, либо красный шар» — достоверное. События «вынут шар красного цвета» или «вынут шар синего цвета» являются случайными. Событие, состоящее в том, что вынутый шар является одновременно и красным, и синим, — невозможное.

Пример 1.2. Стрелок производит один выстрел по мишени, разделённой на 10 зон. Выстрел — это испытание; попадание в определённую зону, например, в «десятку» — событие; событие, состоящее в том, что мишень либо поражена, либо не поражена — достоверное событие; поражение одним выстрелом сразу трёх зон — невозможное событие (если пуля попадает на границу зон, то считается поражённой только одна зона).

Случайные события будем обозначать буквами A, B, C, $\ldots$; достоверное событие — греческой прописной буквой Ω; невозможное событие — символом $\varnothing$.

Определение 1.1. Случайные события A_1, A_2, $\ldots$, A_n называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же испытании.

Пример 1.3. При одном бросании монеты выпадает либо орёл (событие A), либо решка (событие B). События A и B несовместны.

В примере 1.2 обозначим через A_1, A_2, $\ldots$, A_{10} события, состоящие, соответственно, в поражении первой, второй, $\ldots$, десятой зоны. Поскольку при попадании в границу двух зон судья всегда делает выбор в пользу какой-нибудь одной из них, то события A_1, A_2, $\ldots$, A_{10} можно считать несовместными.

Определение 1.2. События A_1, A_2, $\ldots$, A_n называются *единственно возможными*, если в результате испытания происходит какое-либо одно из этих и только этих событий.

Пример 1.4. Игральную кость бросают один раз. События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 состоят, соответственно, в выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти события являются единственно возможными.

В примере 1.2 события A_1—A_{10} не будут единственно возможными, так как стрелок может вообще не попасть в мишень.

Определение 1.3. С каждым испытанием связана некоторая совокупность событий, которые являются попарно несовместными и единственно возможными. Такие события называются *исходами испытания* или *элементарными событиями*, а их совокупность называется также *пространством элементарных событий*.

Пример 1.5. Из колоды (36 карт) наугад вынимают одну. Это испытание имеет 36 исходов.

Пример 1.6. В лотерее разыгрывается 1000 билетов, имеющих выигрыши различной ценности. Участник приобретает один билет. Выбор билета является испытанием. Таким образом, мы имеем 1000 исходов.

Пример 1.7. Карточка спортлото содержит 49 наименований. Играющий зачёркивает 6 из них. Здесь исходом является набор из шести клеток карточки. Так как порядок зачёркивания не играет никакой роли, то число всевозможных исходов будет равно числу сочетаний из 49 по 6 — C_{49}^{6}.

Пример 1.8. При демографических исследованиях выбирают случайным образом супружеские пары и записывают возраст супругов. Исходом каждого такого испытания является *упорядоченная пара чисел* — возраст мужа и возраст жены.

Пример 1.9. В программе экзамена 30 вопросов. Студент выбирает 2 из них. Исходом здесь является любая пара вопросов из данных тридцати. Количество исходов равно числу сочетаний из тридцати по два — C_{30}^{2}.

Случайные события появляются в результате таких опытов, исход которых неоднозначен и не может быть предсказан заранее. Практическая потребность исследовать такие ситуации возникла с появлением азартных игр. Религиозные деятели первого тысячелетия анализировали результаты бросания игральных костей, придавая этим действиям мистический смысл. Более поздние попытки проанализировать игру в кости и другие игры содержатся в поэмах известных авторов XIII—XV веков, в математических книгах эпохи Возрождения. К XVII веку математики вынуждены были отвечать на вопросы высокопоставленных игроков, как действовать в тех или иных ситуациях, которые могут сложиться в игре. В обсуждении этих проблем принимали участие выдающиеся математики: Галилей[5], Ферма, Паскаль. Например, одна из статей Галилея, опубликованная в 1655 году, называлась «О выходе очков при игре в кости». Именно в этот период зародились

[5] Галилео Галилей (1564–1642) — итальянский физик, механик, астроном, математик, поэт, филолог и критик, один из основателей точного естествознания.

основные понятия комбинаторики и теории вероятностей и были доказаны первые теоремы.

Важнейшее понятие — вероятность случайного события — мы будем обсуждать в следующем параграфе. Там же рассмотрим легенду о Галилее и ландскнехте[6], повествующую о том, почему при бросании трёх игральных костей 11 очков выпадает чаще, чем 12.

§ 2. Классическое определение вероятности

В мире случайных явлений, несмотря на то, что они случайные, имеются закономерности, которые изучают с помощью понятия *вероятности*. Вероятность представляет собой количественную характеристику возможности наступления некоторого случайного события. Исторически сложились различные подходы к определению вероятности. Классическое определение вероятности сформировалось в XVII веке в результате анализа азартных игр и основано на понятии *равновозможности* исходов испытания. Это означает, что нет оснований предпочесть какой-либо из исходов другим. Например, выпадение орла или решки при одном подбрасывании монеты считают равновозможными исходами; 36 вариантов выбора игральной карты из колоды в 36 листов — тоже.

Рассмотрим испытание, в результате которого может произойти событие A. Каждый исход, при котором событие A происходит, называется *благоприятным* событию A. Пусть, например, событие A состоит в выпадении чётного числа очков при одном бросании игральной кости. Из шести равновозможных исходов (от одного до шести очков) три исхода (2, 4, 6) являются благоприятными событию A.

Определение 2.1. *Вероятностью* события A называется отношение числа исходов, благоприятных событию A, к числу всех исходов испытания.

Например, вероятность появления чётного числа очков при одном бросании игральной кости равна $1/2$, так как число всех исходов — шесть, а число исходов, благоприятных событию A — три. Вероятность события A обозначают $P(A)$; число исходов, благоприятных событию A, — через $m(A)$; число всех исходов — через n. Тогда по определению

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Ясно, что приведённое выше определение вероятности применимо только в том случае, когда число всех исходов испытания конечно, и все они равновозможны.

Пример 2.1. В урне 10 красных и 8 синих шаров. Наугад вынимают один. Какова вероятность того, что вынут шар красного цвета?

[6]Ландскнехт — наёмный солдат эпохи позднего Средневековья.

Решение. Это испытание имеет 18 равновозможных исходов. Каждый исход означает выбор одного шара. Пусть событие A означает выбор красного шара. Число исходов, благоприятных событию A, равно десяти. Итак, $m(A) = 10$, $n = 18$ и $P(A) = 10/18 = 5/9$.

Пример 2.2. Монету подбрасывают два раза. Найдите вероятность того, что выпадут и орёл, и решка.

Решение. Обозначим событие, состоящее в выпадении орла, буквой О, решки — буквой Р. Испытанием здесь является двукратное подбрасывание монеты. Всего может быть 4 исхода: ОО, РР, ОР, РО, поэтому $n = 4$. Событие A, состоящее в выпадении и орла, и решки, имеет два благоприятных исхода: РО и ОР. Следовательно, $m(A) = 2$ и $P(A) = 2/4 = 1/2$.

Пример 2.3. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Их них 15 выигрывают по 50000 рублей, 25 — по 10000 рублей, 60 — по 5000 рублей. Играющий приобрёл один билет. Какова вероятность выиграть не менее 10000 рублей?

Решение. Испытание состоит в выборе наугад одного билета из тысячи. Поэтому число всех равновозможных исходов будет $n = 1000$. Пусть событие A состоит в том, что участник лотереи приобрёл билет, который выигрывает либо 50000, либо 10000 рублей. Число всех таких билетов будет $m(A) = 40$. Поэтому $P(A) = 40/1000 = 0{,}04$.

Предложение 2.1. *Вероятность любого события заключена между нулём и единицей.*

Доказательство. Пусть n — число всех исходов испытания, в котором может произойти событие A, и $m(A)$ — число всех исходов, благоприятных событию A. Число $m(A)$, с одной стороны, неотрицательно и, с другой стороны, не превосходит числа всех исходов n: $0 \leqslant m(A) \leqslant n$. Разделив на n, получим $0 \leqslant \dfrac{m(A)}{n} \leqslant 1$, то есть $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. □

Предложение 2.2. *Вероятность достоверного события равна* 1.

Доказательство. Достоверное событие Ω появляется при любом исходе испытания, поэтому все исходы будут ему благоприятны. Следовательно, $m(\Omega) = n$. По определению вероятности $P(\Omega) = \dfrac{m(\Omega)}{n} = \dfrac{n}{n} = 1$. □

Предложение 2.3. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Доказательство. Невозможное событие $\varnothing$ не имеет благоприятных исходов, то есть $m(\varnothing) = 0$, поэтому $P(\varnothing) = \dfrac{0}{n} = 0$. □

Перечисленные свойства вероятности используют при решении задач. Если при расчётах вероятность у вас получилась отрицательной или большей единицы, то вы где-то ошиблись.

При нахождении вероятности того или иного события важно правильно определить число всех исходов и число благоприятных исходов. Может показаться, что это сделать просто. Тем не менее, решая задачу о подбрасывании монеты, разобранную выше в примере 2.2, крупный учёный XVIII века Д'Аламбер[7] допустил ошибку. Вычисляя вероятность появления орла, он рассуждал так. При двух бросаниях монеты орёл появится либо при первом бросании, либо при втором, либо вовсе не появится. Всех случаев три, из них благоприятствуют появлению орла два, следовательно, вероятность появления орла равна $2/3$. Но если вы помните, у нас получился ответ $1/2$. Подумайте, где же ошибка?

Понятие равновозможности исходов ещё сложнее, чем понятие несовместности. Дело в том, что оно основано на нашей интуиции и является в значительной степени субъективным. В примере 2.2 мы считали равновозможными исходы ОР, РО, РР и ОО. Ясно, что при таком допущении исходы Д'Аламбера равновозможными не будут. Однако Д'Аламбер до конца жизни не признавал своё решение ошибочным. Какими аргументами он руководствовался? Нам неясно.

Теперь, как было обещано ранее, рассмотрим задачу, поставленную ландскнехтом: почему при игре в кости 11 очков выпадает чаще, чем 12?

При бросании трёх костей наименьшая сумма выпавших очков может быть равна $1+1+1=3$, а наибольшая — $6+6+6=18$. Одиннадцать очков может образоваться шестью способами:

$$11 = 1+5+5 = 1+4+6 = 2+3+6 = 2+4+5 = 3+3+5 = 3+4+4.$$

Двенадцать очков — также шестью способами:

$$12 = 1+5+6 = 2+4+6 = 2+5+5 = 3+4+5 = 3+3+6 = 4+4+4.$$

Поэтому, казалось бы, 11 и 12 очков должны выпадать одинаково часто. Но богатый практический опыт ландскнехта показывал, что 11 очков выпадает чаще, чем 12.

Галилей разъяснил ландскнехту, в чём его ошибка. При бросании трёх костей исходом будет набор из трёх чисел. Но не все исходы, перечисленные ландскнехтом, являются равновозможными. Например, исход $4+4+4$ получается только в том случае, когда на каждой кости выпадет четвёрка. А исход $3+4+5$ будет появляться в шесть раз чаще! В самом деле, поскольку кости при бросании двигаются независимо друг от друга, то равносильны варианты

$$3+4+5, \quad 3+5+4, \quad 4+3+5, \quad 4+5+3, \quad 5+3+4, \quad 5+4+3.$$

Ландскнехт в своём рассуждении не различал кости, ему была важна только сумма, а мы заметили, что, меняя в сумме порядок слагаемых, мы

[7]Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783) — французский механик, математик и философ. По образованию — юрист, по профессии — адвокат.

будем получать ту же сумму шестью различными способами. В реальной игре это различные и равноправные варианты бросания. По-видимому, об этом и сказал Галилей ландскнехту.

Найдём вероятности выпадения сумм в 11 и 12 очков при бросании трёх костей. Для простоты рассуждений видоизменим условие задачи. Поскольку кости при бросании двигаются независимо друг от друга, то бросание трёх костей сразу можно заменить бросанием три раза по одной. Тогда исходом будет *упорядоченная* тройка чисел — количество очков, выпавших на первой, второй и третьей костях. При каждом бросании может выпасть от 1 до 6 очков, поэтому число всех исходов испытания $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Пусть событие A состоит в появлении суммы 11, а событие B — суммы 12. Найдём число исходов, благоприятных событию A:

1+5+5, 5+1+5, 5+5+1	— 3 варианта;
1+4+6, 1+6+4, 4+1+6, 4+6+1, 6+1+4, 6+4+1	— 6 вариантов;
2+3+6, 2+6+3, 3+2+6, 3+6+2, 6+2+3, 6+3+2	— 6 вариантов;
2+4+5, 2+5+4, 4+5+2, 4+2+5, 5+4+2, 5+2+4	— 6 вариантов;
3+3+5, 3+5+3, 5+3+3	— 3 варианта;
3+4+4, 4+3+4, 4+4+3	— 3 варианта.

Итак, $m(A) = 3 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$, и вероятность события A равна $P(A) = 27/216 = 1/8$. Рассуждая аналогично, легко найти $m(B) = 25$ (сделайте это самостоятельно). Поэтому $P(B) = 25/216 < P(A)$.

При вычислении вероятностей часто бывает весьма непросто найти число исходов испытания. В таких случаях используются комбинаторные формулы, которые мы обсуждали в предыдущей главе.

Пример 2.4. Найдите вероятность того, что четырёхзначный номер случайно замеченного автомобиля состоит из одинаковых цифр.

Решение. Каждая цифра номера может быть одной из десяти, а испытанием является выбор какой-либо четвёрки цифр. По правилу умножения количество всех возможных номеров, то есть число всех исходов, равно $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$. Пусть событие A состоит в том, что все цифры выбранного номера одинаковы. Благоприятных исходов будет 10: 0000, 1111, ..., 9999. Итак, $n = 10000$, $m(A) = 10$ и $P(A) = 10/10000 = 0{,}001$.

Пример 2.5. Во время процедуры опознания двух подозреваемых посадили на скамью вместе с восемью другими лицами. Какова вероятность того, что на скамье между подозреваемыми оказалось ровно 3 человека?

Решение. Занумеруем места на скамье числами от 1 до 10. Тогда любое расположение двух подозреваемых описывается парой чисел, причём пары (a, b) и (b, a) считаются различными. Например, если первый из подозреваемых сидит на третьем месте, а второй — на седьмом, то такому расположению отвечает пара (3,7). Испытанием будет выбор упорядоченной пары чисел, а число всевозможных исходов есть число размещений из десяти по два, то есть $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Событие A состоит в том, что разность между числами пары равна 4 или -4 (это и означает, что между подозреваемыми находится 3 человека) и ему благоприятны следующие исходы: (1,5), (5,1), (2,6), (6,2), (3,7), (7,3), (4,8), (8,4), (5,9), (9,5), (6,10), (10,6). Всего, как мы видим, получилось 12 пар. Поэтому $P(A) = 12/90 = 2/15$.

Пример 2.6. Программа экзамена содержит 30 вопросов. Студент знает 20 из них. Каждому студенту предлагают 2 вопроса, которые выбираются случайным образом. Положительная оценка ставится в том случае, если студент правильно ответил хотя бы на один вопрос. Какова вероятность успешной сдачи экзамена?

Решение. Рассмотрим испытание, состоящее в выборе двух из тридцати вопросов. Исходом испытания является пара вопросов. Поскольку порядок, в котором выбираются вопросы, несущественен, то число всех n исходов равно числу сочетаний из тридцати по два: $n = C_{30}^2 = \dfrac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435$.

Пусть событие A состоит в том, что студент знает хотя бы один вопрос из двух. Благоприятные событию A исходы разделим на две группы: в первую включим пары с одним известным студенту вопросом, во вторую — пары с двумя известными ему вопросами. Пары первого типа составляются так: один вопрос выбирается из двадцати знакомых, другой — из десяти незнакомых. По правилу умножения число таких пар равно $20 \cdot 10 = 200$. Пары второго типа получаются выбором двух из двадцати знакомых вопросов. Их число равно $C_{20}^2 = \dfrac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$. Число всех благоприятных исходов $200 + 190 = 390$ и $P(A) = 390/435 = 78/87 \approx 0{,}8965$.

Пример 2.7. Преступник знает, что шифр сейфа составлен из цифр 1, 3, 7 и 9, но не знает, в каком порядке их набирать. Какова вероятность того, что первые две цифры он набрал верно? Какова вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки?

Решение. Для ответа на первый вопрос будем считать исходом упорядочённую пару первых цифр шифра. Число таких пар равно числу размещений из четырёх по два, то есть $4 \cdot 3 = 12$. Поскольку в этом случае только один исход является благоприятным, то искомая вероятность равна $1/12$.

Во втором случае исходом испытания является произвольная перестановка из цифр 1, 3, 7, 9. Число всех исходов поэтому равно $4! = 24$. Так как только один из них является благоприятным, то вероятность открыть сейф с первой попытки равна $1/24$.

Пример 2.8. В студенческой группе (12 девушек и 8 юношей) разыгрываются 5 зарубежных путёвок. Какова вероятность того, что путёвки получат три девушки и двое юношей?

Решение. Рассмотрим испытание, состоящее в выборе пяти обладателей путёвок. Исход испытания — 5 студентов. Общее количество исходов — число сочетаний из 20 студентов по 5, $n = C_{20}^5$.

Пусть событие A состоит в том, что путёвки получат три девушки и двое юношей. Каждый исход, благоприятный этому событию, представляет группу, состоящую из трёх девушек и двух юношей. Составление такой комбинации можно описать с помощью двух действий: первое действие — выбор трёх девушек из двенадцати (число способов равно C_{12}^3) и второе — выбор двух юношей из восьми (число способов равно C_8^2). По правилу умножения $m(A) = C_{12}^3 \cdot C_8^2$ и

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{C_{12}^3 \cdot C_8^2}{C_{20}^5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} =$$
$$= \frac{11 \cdot 4 \cdot 5}{19 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{220}{969} = 0{,}22703\ldots \approx 0{,}2270.$$

Упражнения

1. Игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной: а) 11; б) 7; в) 8?

2. В партии из 100 деталей имеется 10 бракованных. Для проверки отобрали 5 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей окажется только одна бракованная.

3. Для включения в избирательный бюллетень нужно выбрать 8 из десяти кандидатов. Какова вероятность того, что в бюллетень попадёт интересующий нас кандидат, если все кандидаты имеют одинаковые шансы?

4. В течение месяца суд вынес 30 приговоров, в том числе 6 — за кражу. В порядке прокурорского надзора проверено 10% дел. Какова вероятность того, что в их числе оказалось два дела по обвинению в краже?

§ 3. Операции над событиями

В теории вероятностей изучаются методы вычисления вероятностей случайных событий. Часто бывает так, что вероятность некоторого события A можно найти, зная вероятности других событий, связанных с событием A. Для этого используют понятия суммы и произведения событий.

История о находчивом майоре. В городе Дрюкове объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших Дрюковоуниверсалбанк. Чтобы предотвратить утечку информации о ходе розыска, майор Зимин зашифровал сообщения в Центр следующим образом: Р — обнаружен Рыков; У — обнаружен Угрюмов; Ф — обнаружен Фомкин и Т — обнаружен Трошкин. С помощью этих обозначений майор Зимин мог передать любую информацию. Например, сообщение Р + У означало, что обнаружен по крайней мере один из двух преступников, Рыков или Угрюмов; сообщение УФ — обнаружены Угрюмов и Фомкин; сообщение $\overline{\text{Т}}$ — Трошкин не обнаружен.

Вскоре в Центр пришли следующие три сообщения: 1) У + Ф; 2) УТ; 3) $\overline{\text{Ф}}\ \overline{\text{Р}}$. Там их без труда расшифровали. Согласно первому сообщению, обнаружен кто-то из двоих — Угрюмов или Фомкин, причём не исключено, что и оба. Второе сообщение означало, что обнаружены и Угрюмов, и Трошкин. Из третьего сообщения следовало, что Фомкин и Рыков не обнаружены. Таким образом, на первом этапе розыска удалось обнаружить двоих преступников.

Далее пришли шифровки: 4) УТ(Ф + Р); 5) УТФ$\overline{\text{Р}}$; 6) УТФР. Первая из них означала, что обнаружены Угрюмов, Трошкин и по крайней мере один из двух других преступников. Вторая шифровка: обнаружены все, кроме Рыкова. Третья: обнаружены все четверо.

Вы уже поняли, конечно, что в высшей школе милиции майор Зимин изучал теорию вероятностей. Для шифровки донесений он использовал следующие понятия этой теории.

Определение 3.1. Если в некоторой ситуации произошло по крайней мере одно из двух событий A или B, то говорят, что произошло событие $A+B$. Так вводится понятие *суммы событий*.

Например, событие Т + Р + Ф означает, что взят по меньшей мере один из трёх преступников (Трошкин, Рыков, Фомкин).

Определение 3.2. Если произошли оба события, и A, и B, то говорят, что произошло событие AB — так вводится *произведение событий*.

Например, событие РТФ состоит в том, что взяты трое — Рыков, Трошкин и Фомкин.

Определение 3.3. Если событие A не произошло, то говорят, что произошло *противоположное событие* $\overline{A}$.

Например, событие $\overline{\text{Т}}\,\overline{\text{Ф}}$ означает, что не взяты ни Трошкин, ни Фомкин.

Пример 3.1. Стрелок произвёл два выстрела по цели. События A и B означают попадание в цель при первом и втором выстрелах соответственно. Что означают следующие события: а) AB; б) $A+B$; в) $A\overline{B}$; г) $\overline{A}B$; д) $\overline{A}\,\overline{B}$; е) $\overline{A}+\overline{B}$; ж) $\overline{AB}$; з) $A\overline{B}+\overline{A}B$?

Решение. а) По определению произведения событие AB состоит в том, что произошли оба события, A и B. В нашем случае событие AB означает попадание как при первом, так и при втором выстреле.

б) Событие $A+B$ означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B, то есть по крайней мере одно попадание при двух выстрелах.

в) Поскольку событие $\overline{B}$ состоит в том, что не появилось событие B (промах при втором выстреле), то произведение $A\overline{B}$ означает попадание при первом выстреле и промах при втором.

г) Так же, как и выше, получаем, что произведение $\overline{A}B$ означает промах при первом выстреле и попадание при втором.

д) Произведение $\overline{A}\,\overline{B}$ означает промах при обоих выстрелах.

е) По определению суммы событие $\overline{A}+\overline{B}$ означает хотя бы один промах при двух выстрелах, иными словами — не более одного попадания.

ж) Так как событие AB означает попадание в цель при обоих выстрелах, то по определению противоположного события событие $\overline{AB}$ состоит в том, что допущен по крайней мере один промах. Заметим, что события $\overline{AB}$ и $\overline{A}+\overline{B}$ совпадают.

з) Как мы уже установили, событие $A\overline{B}$ означает попадание только при первом выстреле, а событие $\overline{A}B$ состоит в поражении цели только при втором выстреле. Следовательно, сумма $A\overline{B}+\overline{A}B$ означает ровно одно попадание в цель при двух выстрелах.

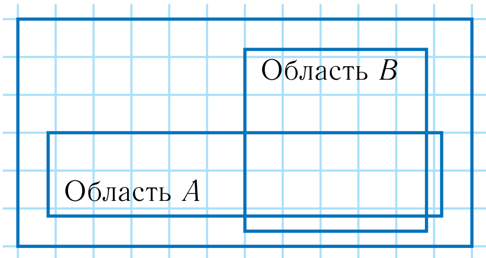


Рис. 59

Пример 3.2. Испытание состоит в том, что в заданном прямоугольнике случайным образом отмечают одну точку M. События A и B состоят соответственно в том, что точка M отмечена в прямоугольнике A или B (рис. 59). Какой смысл имеют события $\overline{A}\,\overline{B}$, $A+B$, $\overline{A+B}$, AB, $\overline{AB}$?

Решение. Используя определение операций над событиями, можно истолковать данные события следующим образом:

$\overline{A}$ означает попадание точки M во внешнюю часть прямоугольника A;

$\overline{B}$ — попадание точки M во внешнюю часть прямоугольника B;

$\overline{A}\,\overline{B}$ — попадание точки M в пересечение внешних частей прямоугольников A и B, то есть в область, не содержащую прямоугольников A и B;

$A+B$ — попадание точки M в объединение прямоугольников A и B;

$\overline{A+B}$ — попадание точки M во внешнюю часть объединения прямоугольников A и B (это событие совпадает с событием $\overline{A}\,\overline{B}$);

AB — попадание точки M в общую часть прямоугольников A и B, то есть в их пересечение;

$\overline{AB}$ — попадание точки M во внешнюю часть пересечения прямоугольников A и B.

Упражнения

1. Расшифруйте донесения группы захвата: а) Т + У; б) Т$\overline{\text{У}}$; в) У + Ф; г) У$\overline{\text{Ф}}$; д) У(Ф+Т).

2. Зашифруйте следующие донесения: а) взят только один преступник из четырёх; б) взят по крайней мере один; в) взяты не менее двух; г) взяли только двоих; д) взяли только троих.

3. Из колоды карт извлекают одну. Событие A — вынута карта красной масти; событие B — вынут туз. Что означают события: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A+B$, AB?

4. Событие A — выпадение чётного числа очков при бросании игральной кости; B — выпадение числа очков, кратного трём. Что означает событие $A+\overline{B}$? Запишите событие, состоящее в выпадении шести очков.

5. В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачёт. Событие A состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку; событие B — он сдал экзамен по философии; событие C — получил зачёт по физкультуре. Запишите события: а) студент не получил зачёта; б) сдал 2 экзамена; в) сдал по крайней мере один экзамен; г) получил зачёт, но не сдал ни одного экзамена; д) сдал только один из экзаменов и не получил зачёта; е) не сдал ничего; ж) сдал всё.

§ 4. Теоремы сложения вероятностей

Теорема 4.1. *Если события A и B несовместны, то вероятность их суммы вычисляется по формуле*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть число всех исходов испытания равно n. В число исходов, благоприятных событию $A+B$, входят все исходы, благоприятные событию A, и все исходы, благоприятные событию B. Поскольку события A и B несовместны, то $m(A+B) = m(A) + m(B)$. Следовательно,

$$P(A+B) = \frac{m(A+B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} = P(A) + P(B),$$

что и требовалось доказать. □

Пример 4.1. В урне 8 белых, 5 синих и 2 красных шара. Какова вероятность того, что вынутый шар будет синего или красного цвета?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что вынут синий шар, а событие B — вынут красный шар. Тогда $P(A) = 5/15$, $P(B) = 2/15$. Событие $A+B$ означает, что вынут шар синего или красного цвета. Так как события A и B несовместны, то вероятность события $A+B$ вычисляется по формуле (1): $P(A+B) = 5/15 + 2/15 = 7/15$.

Теорема 4.2. *Справедлива формула*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку события A и $\overline{A}$ несовместны, то по формуле (1) $P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. С другой стороны, событие $A+\overline{A}$ является достоверным, поэтому по свойству §2 имеем $P(A+\overline{A}) = 1$. Следовательно, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, откуда и вытекает формула (2). □

Пример 4.2. Один лотерейный билет выигрывает с вероятностью 0,0001. Какова вероятность того, что владелец одного билета не выиграет?

Решение. Пусть событие A означает выигрыш. Тогда по формуле (2) $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$.

Формулу (1) можно распространить на любое число событий. Методом математической индукции доказывается, что если события A_1, A_2, ..., A_n попарно несовместны, то вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (3)$$

Пример 4.3. В лотерее из тысячи билетов выигрыши распределены следующим образом: 5 билетов выигрывают по 50 рублей, 25 билетов — по 10 рублей и 60 билетов — по 5 рублей, 100 билетов выигрывают по одному рублю; остальные билеты ничего не выигрывают. Участник лотереи приобрёл один билет. Какова вероятность того, что он выиграет не менее пяти рублей?

Решение. Введём следующие события: A_1 — выигрыш 50 рублей, A_2 — выигрыш 10 рублей, A_3 — выигрыш 5 рублей, B — выигрыш не менее пяти рублей. Тогда $B = A_1 + A_2 + A_3$. По условию задачи имеем $P(A_1) = 0{,}005$, $P(A_2) = 0{,}025$ и $P(A_3) = 0{,}060$. Поскольку события A_1, A_2 и A_3 попарно несовместны, то $P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}005 + 0{,}025 + 0{,}060 = 0{,}090$.

Для произвольных (не обязательно несовместных) событий теорема сложения вероятностей записывается сложнее.

Теорема 4.3. *Вероятность суммы двух событий вычисляется по формуле*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть число всех исходов испытания равно n, при этом k исходов благоприятны событию A, s исходов благоприятны событию B и r исходов благоприятны произведению AB. Тогда $P(A) = k/n$, $P(B) = s/n$, $P(AB) = r/n$. Число исходов, благоприятных только событию A будет $k - r$. Поэтому событию $A + B$ благоприятны $k + s - r$ исходов: $m(A + B) = k + s - r$. По определению вероятности получаем:

$$P(A + B) = (k + s - r)/n = k/n + s/n - r/n = P(A) + P(B) - P(AB),$$

что и требовалось доказать. □

Пример 4.4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,7. Вероятность того, что оба стрелка с первого выстрела поразят мишень, равна 0,56. Найдите вероятность того, что промахнутся оба стрелка.

Решение. Пусть событие A означает попадание первого стрелка и событие B — попадание второго. По условию $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}7$; $P(AB) = 0{,}56$. Рассмотрим событие $A + B$; оно означает, что хотя бы один из стрелков попал в мишень. По формуле (4) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$.

Пусть событие C означает промах обоих стрелков. Тогда C и $A+B$ являются противоположными событиями и из формулы (1) следует, что $P(C) = 1 - P(A+B) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06$.

Заметим, что формула (1) следует из формулы (4). Действительно, если события A и B несовместны, то их произведение AB является невозможным событием, поэтому по третьему свойству вероятности из §2 $P(AB) = 0$ и формула (4) превращается в формулу (1).

Упражнения

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 выбирают две и составляют двузначное число. Событие A — обе цифры числа чётные; событие B — обе цифры нечётные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A+B$, $\overline{A+B}$, AB? Найдите вероятности перечисленных событий.

2. Вероятность того, что в течение суток в пригороде Брюкова будет отключён свет, равна 0,4. Какова вероятность того, что в течение суток свет не будет отключён?

3. Мишень состоит из трёх непересекающихся зон. Вероятности попадания в каждую из них при одном выстреле равны соответственно 0,3, 0,2 и 0,1. Найдите вероятность промаха при одном выстреле.

4. Из ста деталей отобраны для проверки две. Вероятность того, что первая деталь является бракованной, равна 0,05; для второй детали эта вероятность равна 0,03; вероятность того, что обе детали будут доброкачественными, равна 0,93. Найдите вероятность того, что по крайней мере одна из двух выбранных деталей будет доброкачественной.

§ 5. Условные вероятности

Следующая история показывает, что иногда вероятность события зависит от того, произошло или не произошло некоторое другое событие.

Пример 5.1. Дрюковцы и брюковцы решили выбрать общее правительство в составе мэра и вице-мэра. Согласно регламенту, каждый город выставляет четырёх кандидатов. Каждому кандидату дают шар, на котором тот записывает свою фамилию. Затем он опускает шар в урну. К урне подходит победитель конкурса «Настоящий мужчина города Дрюково», наугад вынимает один шар из урны и объявляет имя мэра. После этого то же самое проделывает победительница конкурса «Мисс Брюково» и объявляет имя вице-мэра. Какова вероятность того, что 1) вице-мэром станет брюковец; 2) вице-мэром станет брюковец, если мэром тоже стал брюковец; 3) вице-мэром станет брюковец, если мэром стал дрюковец?

Решение. Рассмотрим следующие события: событие A — вице-мэром избран брюковец; событие B — мэром избран брюковец; событие C — мэром избран дрюковец. Чтобы ответить на первый вопрос, найдём число всех исходов голосования и число благоприятных исходов. Так как мэр выбирается из восьми кандидатов, а вице-мэр из оставшихся семи, то по правилу умножения число всех исходов (то есть упорядоченных пар кандидатов) равно

$8 \cdot 7 = 56$. Число благоприятных исходов будет 28, так как число брюковских и дрюковских кандидатов одинаково. Таким образом, вероятность события A равна $1/2$.

Ответим на второй вопрос. Поскольку мэром стал брюковец, то в числе претендентов на должность вице-мэра осталось 4 дрюковца и 3 брюковца. Поэтому вероятность того, что вице-мэром выберут брюковца, равна $3/7$.

Последняя вероятность подсчитывается столь же просто. Если мэром стал дрюковец, то в числе претендентов осталось 4 брюковца; и вероятность того, что вице-мэром стал брюковец, равна $4/7$.

Итак, мы получили три разные вероятности. Последние две из них называются *условными вероятностями*. Во втором случае мы нашли вероятность события A при условии, что произошло событие B, в последнем случае — вероятность события A при условии, что произошло событие C.

Определение 5.1. *Условной вероятностью* $P(A/B)$ называют вероятность события A, найденную в предположении, что произошло событие B.

Вот как можно записать итоги выборов с использованием этого определения: $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(A/B) = \dfrac{3}{7}$, $P(A/C) = \dfrac{4}{7}$.

Пример 5.2. Из 36 карт выбирают одну. Событие A состоит в том, что выбрана карта красной масти, событие B — выбрана дама. Найдите вероятности $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$.

Решение. Половина из 36 карт имеет красную масть, поэтому $P(A) = 1/2$, и, так как в колоде 4 дамы, $P(B) = 1/9$. Число $P(A/B)$ представляет собой вероятность того, что вынутая дама имеет красную масть. Число всех дам равно 4, из них две — красной масти, поэтому $P(A/B) = 1/2$. Таким же образом найдём, что $P(B/A) = 1/9$ (среди 18 карт красной масти 2 дамы).

Теорема 5.1. *Если вероятность события B отлична от нуля, то справедлива формула*

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть испытание, в котором могут появиться события A и B, имеет n исходов, из которых $m(B)$ благоприятны событию B и $m(AB)$ благоприятны событию AB. Найдём вероятность события A при условии, что произошло событие B, то есть $P(A/B)$.

По смыслу определения условной вероятности $P(A/B)$ мы учитываем только те исходы, в которых произошло событие B, поэтому число всех возможных исходов при вычислении этой вероятности будет $m(B)$. Число же исходов, благоприятных событию A, будет $m(AB)$. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{m(AB)}{m(B)} = \frac{m(AB)}{n} : \frac{m(B)}{n} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

что и требовалось доказать. □

Из формулы (5) вытекает

Следствие. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого*:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B), \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{6}$$

Пример 5.3. Из колоды карт последовательно выбирают две. Какова вероятность того, что будут вынуты 2 туза?

Решение. Пусть событие B состоит в том, что первая карта туз, а событие A — вторая карта туз. Нужно найти вероятность произведения AB. По формуле (6) $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{35} = \frac{1}{105}$.

Методом математической индукции формулу (6) можно распространить на любое число событий. Например, для трёх событий аналогичная формула выглядит следующим образом:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB), \tag{7}$$

а для четырёх событий она имеет вид:

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC). \tag{8}$$

Формулы (6), (7), (8) и им аналогичные для бóльшего числа событий называются теоремами об умножении вероятностей.

Пример 5.4. Из одиннадцати карточек составлено слово

$$\boxed{\text{С}}\,\boxed{\text{Л}}\,\boxed{\text{Е}}\,\boxed{\text{Д}}\,\boxed{\text{О}}\,\boxed{\text{В}}\,\boxed{\text{А}}\,\boxed{\text{Т}}\,\boxed{\text{Е}}\,\boxed{\text{Л}}\,\boxed{\text{Ь}}.$$

Из них выбирают поочередно четыре карточки и приставляют одну к другой. Какова вероятность того, что получится слово «ДЕЛО»?

Решение. Введём события Д, Е, Л, О, состоящие в том, что первая выбранная буква Д, вторая — Е, третья — Л и четвёртая — О. Нам нужно найти вероятность произведения этих событий. По формуле (4) имеем:

$$\text{Р(ДЕЛО)} = \text{Р(Д)} \cdot \text{Р(Е/Д)} \cdot \text{Р(Л/ДЕ)} \cdot \text{Р(О/ДЕЛ)} = \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{1980}.$$

Пример 5.5. Вероятность того, что спортсмен улучшит свой личный рекорд с первой попытки, равна 0,5. Если первая попытка оказалась успешной, то вероятность улучшить этот результат в следующей попытке остаётся той же. В случае, если первая попытка оказалась безуспешной, вероятность улучшить результат со второй попытки равна 0,4. Найдите вероятность того, что спортсмен улучшит свой результат: а) в каждой из двух попыток; б) только в первой попытке; в) только во второй попытке; г) хотя бы в одной из двух попыток.

Решение. Пусть события A и B означают, что спортсмен улучшает свой личный рекорд соответственно в первой и во второй попытке. По условию задачи $P(A) = 0{,}5$, $P(B/A) = 0{,}5$ и $P(B/\overline{A}) = 0{,}4$.

а) Улучшение рекорда в каждой из двух попыток — это событие AB. По теореме умножения получаем: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

б) Здесь нас интересует событие $A\overline{B}$. Имеем: $P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}/A)$. Первый множитель правой части формулы нам известен, а для вычисления второго заметим, что свойство вероятностей противоположных событий, доказанное в предыдущем параграфе, сохраняет силу и для условных вероятностей, то есть справедлива формула $P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$. Используя эту формулу, получим $P(\overline{B}/A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. Отсюда $P(A\overline{B}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

в) В этом случае ищем вероятность события $\overline{A}B$. Применяя теорему, получаем: $P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$.

г) Улучшение рекорда хотя бы в одной из двух попыток можно представить в виде суммы $AB + A\overline{B} + \overline{A}B$. Слагаемые этой суммы попарно несовместны, поэтому $P(AB + A\overline{B} + \overline{A}B) = 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}7$.

Упражнения

1. Управление УВД Стукова выделило 3 премии для сотрудников оперативных групп. В фуражку начальника положили 8 фантов с фамилиями всех восьми сотрудников. Какова вероятность того, что первую премию получит следователь Зубов, вторую — оперативник Прокопенко, а третью — эксперт Зульфия?

2. В команде по плаванию университета города Дрюкова из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. Для участия в соревновании выбирают четверых. Какова вероятность того, что они все окажутся мастерами спорта?

3. В милицейском колледже города Брюкова экзамены сдают так. Студент выбирает пять вопросов и получает столько баллов, на сколько вопросов он правильно ответил. Студент Громов знает 15 вопросов из 24. Какова вероятность того, что он получит пятерку?

4. Охотник выстрелил два раза по убегающему зайцу. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,8. Если первый выстрел попал в цель, то вероятность второго попадания равна 0,9; в случае промаха при первом выстреле вероятность попадания при втором равна 0,5. Найдите вероятность того, что: а) охотник промахнётся оба раза; б) попадёт ровно один раз; в) попадёт хотя бы один раз.

§ 6. Формула полной вероятности

Задача о наборе в полицейскую академию. В Дрюкове живёт физически крепкий и умственно развитый народ, так что каждый третий выпускник средней школы вполне может быть принят в полицейскую академию. В академию принимают и жителей Брюкова, причём вероятность поступить туда для выпускника брюковской школы равна 0,1. В приёмную комиссию пришли 7 дрюковцев и 3 брюковца. Одного из них пригласили на собеседование. Какова вероятность того, что он поступит в полицейскую академию?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранный случайным образом молодой человек будет принят в академию. Нам нужно найти вероятность этого события. Пусть событие H_1 состоит в том, что на собеседование пригласили дрюковца, а событие H_2 означает, что приглашен брюковец. Согласно условию $P(H_1) = 0{,}7$ и $P(H_2) = 0{,}3$. Вероятности поступления дрюковцев и брюковцев нам тоже известны: $P(A/H_1) = 1/3$ и $P(A/H_2) = 0{,}1$. По теореме умножения вероятностей $P(AH_1) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) = 1/3 \cdot 0{,}7 = 7/30$. Точно так же находим вероятность произведения AH_2: $P(AH_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$. Нас интересует вероятность события $A = AH_1 + AH_2$, означающего, что выбранный юноша (независимо от того, из какого он города) принят в академию. Поскольку события AH_1 и AH_2 несовместны, то по теореме сложения вероятностей получаем $P(A) = P(AH_1 + AH_2) = P(AH_1) + P(AH_2) = 7/30 + 3/100 = 79/300 \approx 0{,}2633$.

В ходе решения этой задачи мы доказали формулу

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2), \tag{9}$$

которая называется *формулой полной вероятности*.

Пример 6.1. В одной урне находятся 3 белых шара и один чёрный, а в другой — 2 белых и 2 чёрных шара. Наугад выбирают одну урну и из неё наудачу извлекают один шар. Какова вероятность извлечь белый шар?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что извлечён белый шар. Это событие может произойти совместно с одной из гипотез (событий): H_1 — выбрана первая урна и H_2 — выбрана вторая урна. Вероятность выбрать ту или иную урну равна 1/2: $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$. Вероятность вынуть белый шар из первой урны — это условная вероятность $P(A/H_1)$. По условию задачи $P(A/H_1) = 3/4$. Аналогично, вероятность извлечь шар белого цвета из второй урны равна $P(A/H_2) = 2/4 = 1/2$. По формуле (9) находим, что $P(A) = 3/4 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 5/8$.

Формулу полной вероятности используют и при бóльшем числе гипотез. Например, если событие A может произойти лишь совместно с одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и эти гипотезы попарно несовместны, то формула полной вероятности запишется так:

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A/H_n) \cdot P(H_n). \tag{10}$$

Пример 6.2. В группе спортсменов имеется 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,9, для велосипедиста — 0,8, для бегуна — 0,75. Найдите вероятность того, что выбранный наугад спортсмен выполнит квалификационную норму.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что выбранный наугад спортсмен выполнит квалификационную норму. Событие A может произойти совместно с одной из трёх гипотез: H_1 — выбран лыжник, H_2 — выбран велосипедист и H_3 — выбран бегун. Поэтому для решения задачи можно воспользоваться формулой полной вероятности при $n = 3$. Имеем:

$$\begin{array}{lllllllll} P(H_1) & = & 20/30; & P(H_2) & = & 6/30; & P(H_3) & = & 4/30; \\ P(A/H_1) & = & 0{,}9; & P(A/H_2) & = & 0{,}8; & P(A/H_3) & = & 0{,}75. \end{array}$$

По формуле (10) получаем:

$$P(A) = 0{,}9 \cdot 10/15 + 0{,}8 \cdot 3/15 + 0{,}75 \cdot 2/15 = 43/50 = 0{,}86.$$

Пример 6.3. В клинику поступают в среднем 50% больных сердечно-сосудистыми заболеваниями, 30% — с заболеванием лёгких, и 20% поступивших имеют заболевание почек. Вероятность полного излечения больного первой группы равна 0,1, больного второй группы — 0,7 и для третьей группы она равна 0,5. Найдите вероятность того, что больной, поступивший в клинику, будет выписан здоровым.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что поступивший в клинику больной выйдет оттуда здоровым. Возможны три гипотезы: H_1 — больной имел сердечно-сосудистое заболевание, H_2 — больному лечили лёгкие и H_3 — больной жаловался на почки. По условию

$$\begin{array}{lllllllll} P(H_1) & = & 0{,}5; & P(H_2) & = & 0{,}3; & P(H_3) & = & 0{,}2; \\ P(A/H_1) & = & 0{,}1; & P(A/H_2) & = & 0{,}7; & P(A/H_3) & = & 0{,}5. \end{array}$$

По формуле (10) получаем: $P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}29$.

Пусть из клиники выписан выздоровевший пациент. Какова вероятность того, что ему лечили лёгочное заболевание? Мы не можем дать ответ 0,3 потому, что это число показывает вероятность $P(H_2)$ поступления в клинику с заболеванием лёгких, а нам требуется найти вероятность $P(H_2/A)$ того, что выздоровевший больной был лёгочником. Для её определения воспользуемся теоремой умножения вероятностей.

Согласно этой теореме $P(AH_2) = P(A/H_2) \cdot P(H_2)$. Отсюда $P(AH_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$. Но, как мы знаем, теорему умножения можно записать и в другом виде: $P(AH_2) = P(H_2/A) \cdot P(A)$. Подставив в эту формулу уже найденные значения, получим $0{,}14 = P(H_2/A) \cdot 0{,}29$, откуда $P(H_2/A) = 0{,}14/0{,}29 = 14/29 \approx 0{,}4828$. В общем виде проведённые рассуждения приводят к формулам

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}, \tag{11}$$

которые называются *формулами Байеса*. В примере мы проводили расчёт для $i = 2$. При значении $i = 1$ мы найдём вероятность того, что выздоровевший больной лечил сердечно-сосудистое заболевание: $P(H_1/A) = 0{,}05/0{,}29 = 5/29 \approx 0{,}1724$. А вероятность того, что выздоровевший больной лечил почки, получается при $i = 3$: $P(H_3/A) = 0{,}01/0{,}29 = 10/29 \approx 0{,}3448$.

Пример 6.4. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу проезжающих там же легковых машин как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. На заправку подъехала машина. Найдите вероятность того, что подъехавшая машина грузовая.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что проезжающая машина остановилась на заправку, а гипотезы H_1 и H_2 соответственно означают, что проезжающая машина грузовая или легковая. Нам нужно найти вероятность $P(H_1/A)$. Из условия следует, что $P(H_1) = 0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}4$, $P(A/H_1) = 0{,}1$ и $P(A/H_2) = 0{,}2$. Сначала по формуле полной вероятности находим $P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$. Далее применяем формулу Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1}{0{,}14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286.$$

Упражнения

1. Из пяти стрелков двое попадают в цель с вероятностью 0,6 и трое — с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный стрелок попадёт в цель.

2. На склад поступила продукция трёх фабрик, причём 10% продукции произведено первой фабрикой, 20% — второй и 70% — третьей. Известно, что в среднем продукция первой фабрики содержит 3% брака, второй — 2% и третьей — 1%. Найдите вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным.

3. В студенческой группе 8 девушек и 12 юношей. Вероятность того, что девушка напишет контрольную работу на отлично, равна 0,6; для юношей эта вероятность равна 0,4. Наугад выбранная для проверки работа получила отличную оценку. Какова вероятность того, что эту работу написала девушка?

4. Жители города Стуково отличаются высокой честностью — они почти никогда не берут то, что плохо лежит. Однако приезжие часто ведут себя иначе: вероятность того, что брюковец стянет подвернувшуюся под руку вещь, равна 0,2, а для дрюковца её полагают равной 0,3. В одном из магазинов произошла кража. Полиция задержала всех приезжих, находившихся в момент кражи в магазине — 8 брюковцев и 5 стуковцев. Какова вероятность того, что кражу совершил брюковец?

§ 7. Независимые события

Определение 7.1. События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло другое событие или нет. Иными словами, события A и B независимы, если выполняются следующие условия:

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B). \tag{12}$$

Формулы (6) для вычисления вероятности произведения двух событий в этом случае принимают более простой вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{13}$$

Итак, мы получили следующую важную теорему, которую называют теоремой умножения вероятностей независимых событий. Она справедлива для любого числа независимых событий.

Теорема 7.1. *Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Пример 7.1. Монета брошена два раза. Найдите вероятность выпадения двух орлов.

Решение. Пусть событие A состоит в выпадении орла при первом бросании, а событие B — при втором. Тогда произведение этих событий AB означает выпадение двух орлов. Вероятность появления орла при каждом бросании монеты равна 0,5: $P(A) = P(B) = 0{,}5$. Нам нужно найти вероятность $P(AB)$. События A и B независимы, так как исход любого бросания монеты не зависит от результатов других бросаний. Поэтому мы можем воспользоваться формулой (13): $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

Независимость рассматриваемых событий обычно усматривается из описания эксперимента, либо об этом явно объявляется в условии задачи.

Пример 7.2. Два стрелка независимо один от другого делают по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,5, вторым — 0,6. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

Решение 1. Пусть событие A состоит в том, что мишень поразил первый стрелок, а событие B — в том, что мишень поразил второй стрелок. По условию $P(A) = 0{,}5$ и $P(B) = 0{,}6$. Событие $A + B$ означает, что в мишень попал по крайней мере один из стрелков. По теореме сложения $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$, а по теореме умножения $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$, поэтому $P(A + B) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}8$.

Очевидно, что из независимости событий A и B вытекает независимость противоположных событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Это позволяет получить иное решение только что рассмотренной задачи.

Решение 2. Пусть, как и выше, события A и B состоят в поражении цели соответственно первым и вторым стрелком. Тогда событие $\overline{A}$, противоположное событию A, означает промах первого стрелка, событие $\overline{B}$ — промах второго стрелка. Используя формулу (2) для вероятностей противоположных событий, получаем: $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ и $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Произведение событий $\overline{A}\,\overline{B}$ означает промах обоих стрелков. По смыслу задачи, события A и B являются независимыми, поэтому и противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также будут независимыми. Следовательно, мы можем воспользоваться формулой (2) и найти вероятность того, что оба стрелка промахнутся: $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$. Нас же интересует вероятность противоположного события, состоящего в том, что мишень поражена. Поэтому искомая вероятность будет равна $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Пример 7.3. Найдите в условиях примера 7.2 вероятность того, что один и только один из стрелков попадёт в мишень.

Решение. Нас интересует событие $A\overline{B} + \overline{A}B$: либо первый стрелок попал, а второй промахнулся, либо наоборот. Имеем: $P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}5 \cdot$ $\cdot\, 0{,}4 = 0{,}2$, $P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$. В силу несовместности событий $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ получаем: $P(A\overline{B}+\overline{A}B) = P(A\overline{B})+P(\overline{A}B) = 0{,}2+0{,}3 = 0{,}5$.

Понятие независимости вводят для любого количества событий. Именно, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошли какие-то другие из этих событий или нет. Теорема умножения вероятностей для n независимых событий записывается так:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{14}$$

Пример 7.4. Найдите вероятность выпадения восемнадцати очков при бросании трёх игральных костей.

Решение. Сумма 18 получается при выпадении на каждой из трёх костей шести очков. Введём события A_1, A_2, A_3, состоящие соответственно в выпадении 6 очков на первой, второй и третьей костях. По смыслу задачи эти события независимы. Их произведение $A_1A_2A_3$ и означает выпадение суммы 18. По формуле (14) получим:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046.$$

Пример 7.5. Как показывает практика, в среднем в трёх автомобилях из каждой тысячи, проходящих таможенный досмотр, обнаруживают наркотики. Какова вероятность того, что наркотики будут обнаружены хотя бы в одной из пятисот проверенных машин?

Решение. Пусть событие A_1 состоит в том, что в первом из проверенных автомобилей обнаружен наркотик, A_2 — во втором из проверенных автомобилей обнаружен наркотик, и т. д., наконец, событие A_{500} состоит в том, что наркотик обнаружен в последнем из проверяемых автомобилей. Эти события можно считать независимыми, и вероятность каждого из них по условию равна 0,003. Рассмотрим событие B, состоящее в том, что наркотик не обнаружен ни в одном из проверенных автомобилей. Очевидно, что $B = \overline{A}_1\overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{500}$.

События $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_{500}$ независимы, и вероятность каждого из них равна $1 - 0{,}003 = 0{,}997$. Поэтому вероятность события B можно найти по формуле (14): $P(B) = 0{,}997 \cdot 0{,}997 \cdot \ldots \cdot 0{,}997 = 0{,}997^{500}$. Нас интересует вероятность противоположного события: $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}997^{500}$. С помощью калькулятора или компьютера находим, что $0{,}997^{500} \approx 0{,}2226$. Следовательно, $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}997^{500} \approx 1 - 0,2226 = 0,7774$.

Упражнения

1. Найдите вероятность того, что два мотора на самолёте выйдут из строя, если вероятность выхода из строя одного мотора не зависит от исправности других и равна 0,0001.

2. Вероятность того, что студент Громов сдаст экзамен по уголовному праву, равна 0,7, а вероятность успешной сдачи им экзамена по гражданскому праву — 0,8. Какова вероятность того, что он успешно сдаст: а) оба экзамена? б) по крайней мере один экзамен?

3. Ведутся поиски четырёх преступников. Каждый из них независимо от других может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

§ 8. Повторение опытов

Пример 8.1. Суд присяжных в составе пяти человек должен вынести решение большинством голосов. Вероятность того, что каждый отдельный заседатель выскажется за оправдание подсудимого, равна 2/3. Какова вероятность того, что подсудимый будет оправдан?

Решение. Подсудимый будет оправдан, если из пяти присяжных за его невиновность выскажется не менее трёх, то есть 3, 4 или 5 членов суда. Вероятность этого события (назовём её $P_5(3, 5)$) нам и требуется найти. Рассмотрим возможные варианты голосования. Пусть, например, первые трое присяжных примут решение, что подсудимый не виновен, а остальные — наоборот. Используя понятие произведения событий, это сложное событие можно записать в виде $H_1H_2H_3B_4B_5$ (событие H_1 означает решение первого заседателя «не виновен», H_2 — решение второго «не виновен» и т. д.).

По условию задачи $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 2/3$. Вероятности событий B_4 и B_5 найдём по известному нам правилу: $P(B_4) = 1 - P(H_4) = 1/3$, $P(B_5) = 1 - P(H_5) = 1/3$. Будем считать, что работа суда проходит в идеальных условиях: каждый член коллегии принимает решение независимо от других. Тогда можно воспользоваться теоремой умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(H_1H_2H_3B_4B_5) = P(H_1)P(H_2)P(H_3)P(B_4)P(B_5) =$$
$$= 2/3 \cdot 2/3 \cdot 2/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 = 8/243.$$

Но возможны и другие комбинации вида «3+2», при которых три голоса подаются в пользу подсудимого, а два — против него. Например, комбинация $H_1B_2H_3H_4B_5$ означает, что в пользу обвиняемого высказались первый, третий и четвёртый члены коллегии, а против него — второй и пятый. Ясно, что вероятность такой комбинации голосов также будет равна 8/243.

Сколько же всего будет подобных комбинаций? Согласно определению сочетания, данному в предыдущей главе, мы должны найти число сочетаний из пяти элементов по три. Пользуясь полученными там формулами, находим: $C_5^3 = C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$. Итак, всего будет 10 комбинаций, для каждой из которых получаем вероятность 8/243. Теперь мы можем найти вероятность того, что из пяти присяжных каких-либо 3 высказались за оправдание, а 2 — против. Обозначим эту вероятность $P_5(3)$. По теореме сложения вероятностей находим: $P_5(3) = 8/243 \cdot 10 = 80/243$. Если мы внимательно проследим ход наших рассуждений ещё раз, то заметим, что все проделанные вычисления можно объединить следующей формулой:

$$P_5(3) = C_5^3(2/3)^3(1/3)^2.$$

Но подсудимый будет оправдан и при других исходах голосования, в которых за него подано 4 или 5 голосов. Вероятность $P_5(5)$ того, что все присяжные проголосуют за освобождение, найти просто. Она равна

$$P_5(5) = P(H_1H_2H_3H_4H_5) = C_5^5(2/3)^5 = 32/243.$$

Для вычисления вероятности $P_5(4)$ голосования «4 + 1» нужно опять перебирать все возможные варианты, при которых какие-либо четверо присяжных голосуют «за», а один — «против». В итоге мы придем к аналогичной формуле:

$$P_5(4) = C_5^4(2/3)^4(1/3)^1 = 5 \cdot (16/81) \cdot (1/3) = 80/243.$$

Теперь, наконец, мы можем найти вероятность $P_5(3{,}5)$ оправдательного приговора. По теореме сложения вероятностей

$$P_5(3,5) = P_5(3)+P_5(4)+P_5(5) = 80/243+80/243+32/243 = 192/243 \approx 0{,}79.$$

Задачу мы решили. Но проводить подобные рассуждения каждый раз утомительно и непродуктивно. Математики давно нашли схему, по которой решаются подобные задачи. Эта схема изучения повторяющихся опытов называется *схемой Бернулли*. Изложим её в наиболее общем виде.

Пусть один и тот же опыт повторяется в одинаковых условиях n раз (в задаче опытом является голосование члена коллегии, $n = 5$). В каждом опыте может появиться событие A с одной и той же вероятностью p (событие в нашей задаче — голосование за оправдание, $p = 2/3$). Возьмём какое-нибудь целое число m, меньшее n, и найдём вероятность того, что в n опытах событие A появится ровно m раз. Эту вероятность обозначают $P_n(m)$. Она вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m(1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots n, \tag{15}$$

которую нашел швейцарский математик Якоб Бернулли. В задаче мы нашли вероятности $P_5(3) = 80/243$, $P_5(4) = 80/243$, $P_5(5) = 32/243$.

Формулу Бернулли применяют при решении многих задач, связанных с повторяющимися опытами. При этом считается, что результат каждого из них не зависит от исходов других опытов. Такие опыты называют также *независимыми испытаниями*.

Пример 8.2. Вероятность того, что вратарь возьмёт пенальти, равна 0,3. Какова вероятность того, что вратарь возьмёт один пенальти из четырёх?

Решение. Здесь мы имеем дело с повторением четырёх опытов (пробитие пенальти). В каждом опыте может появиться событие A (вратарь берёт пенальти), вероятность которого $p = 0{,}3$. По формуле Бернулли получаем:

$$P_4(1) = C_4^1(0{,}3)^1(0{,}7)^3 = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}343 = 0{,}4116.$$

Пример 8.3. Согласно учётным данным, рецидивисты составляют 20% от общего числа установленных правонарушителей. Органы правопорядка задержали 10 нарушителей. Какова вероятность того, что среди задержанных более двух, но не более пяти рецидивистов?

Решение. На языке теории вероятностей первая фраза означает, что вероятность задержать рецидивиста $p = 0{,}2$. Привяжем ситуацию к схеме повторяющихся опытов Бернулли. Здесь опытом будет проверка каждого задержанного на предмет того, является ли он рецидивистом (событие A) или нет. Опыт повторяется 10 раз и нам требуется найти вероятность $P_{10}(3, 5)$ того, что число рецидивистов будет больше двух, но не более пяти. По теореме сложения вероятностей

$$P_{10}(3, 5) = P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5).$$

Вероятности того, что среди задержанных имеется ровно m рецидивистов определяем по формулам Бернулли:

$$P_{10}(m) = C_{10}^m \cdot (0{,}2)^m \cdot (0{,}8)^{10-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 10.$$

При расчёте по этим формулам возникают трудности, связанные с нахождением чисел C_{10}^m. Когда число опытов не слишком велико, например не более двадцати, число сочетаний C_{10}^m можно находить с помощью *треугольника Паскаля*, одиннадцать первых строк которого изображены на рис. 60. Единица, размещённая в нулевой строке этого треугольника, соответствует числу C_0^0. В следующей его строке записаны числа C_1^0 и C_1^1, далее — величины C_2^0, C_2^1 и C_2^2 и т. д. Пользуясь треугольником Паскаля, найдём числа $P_{10}(m)$ для значений m от 3 до 5:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 = 120 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}20132 \approx 0{,}2013;$$
$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^6 = 210 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}08808 \approx 0{,}0881;$$
$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^5 = 252 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}02642 \approx 0{,}0264.$$

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

Рис. 60

Теперь вычислим вероятность $P_{10}(3{,}5)$:

$$P_{10}(3,5) = P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) = 0{,}2013 + 0{,}0881 + 0{,}0264 = 0{,}3158.$$

Замечание. Если найти значения всех вероятностей $P_{10}(m)$, придавая m значения от 0 до 10, и сложить их, то получится 1. Это можно увидеть и без вычислений. Действительно, по формуле бинома Ньютона

$$[(1-p)+p]^n = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p (1-p)^{n-1} + \ldots + C_n^n p^n (1-p)^0.$$

Левая часть этой формулы равна 1, а слагаемые в правой части есть в точности вероятности $P_n(m)$ для $m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Поэтому её можно переписать так: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(n) = 1$. Вероятности $P_n(m)$ называют *биномиальными*. Мы показали, что *при любом n сумма всех биномиальных вероятностей равна единице*. Как вычислять биномиальные вероятности при больших m и n, мы расскажем в седьмой главе.

Упражнения

1. Контрольный тест состоит из пяти вопросов, на каждый из которых нужно выбрать один из трёх указанных ответов. Студент отвечает на вопросы наудачу. Найдите вероятность того, что студент даст ровно два правильных ответа.

2. Монета брошена 6 раз. Найдите вероятности $P_6(m)$ того, что орёл появится m раз (для значений m от нуля до шести включительно) и убедитесь, что сумма всех этих вероятностей равна единице.

3. Четырёхмоторный самолёт может продолжать полёт, если работают не менее двух моторов. Вероятность выхода из строя одного мотора равна 0,0001. Какова вероятность того, что самолёт долетит до аэродрома?

4. Среди установленных правонарушителей 40% составляют лица, не имеющие постоянного дохода. Найдите вероятность того, что число таких среди восьми правонарушителей не превосходит четырёх.

Глава VII

Функции и графики

В первой главе книги мы обсуждали свойства чисел. Теперь мы будем рассматривать другой важнейший математический объект — *функцию*. В виде функциональных зависимостей формулируется бóльшая часть законов природы и невозможно себе представить естественную науку, в которой не использовалось бы понятие функции. Материал этой главы читателю знаком, поскольку почти все функции, которые мы здесь рассматриваем, изучаются в школе.

§ 1. Декартовы координаты

Метод координат представляет собой один из наиболее универсальных математических методов и используется для решения самых разнообразных задач. В основе метода лежит понятие *системы координат* на прямой, на плоскости и в пространстве.

Система координат возникла в результате осознания математиками того факта, что точек на прямой, образно говоря, столько же, сколько действительных чисел. Точнее, каждой точке на прямой можно сопоставить некоторое единственное действительное число, которое называется *координатой* этой точки. Проще всего это сделать с помощью так называемой *равномерной шкалы*, изображённой на рис. 61. Прямую с отмеченным на ней положительным направлением и выделенной точкой O называют *осью*, а саму точку O — *началом координат*.

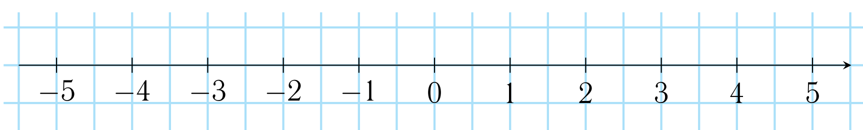


Рис. 61

Покажем, как получить равномерную шкалу. Сначала через равные промежутки от начала координат отметим точки с целочисленными координатами, как это сделано на рис. 61. Такую операцию легко выполнить с помощью циркуля на отрезке любой длины, но на всей прямой это можно сделать лишь мысленно, поскольку она бесконечна. Далее каждый из полученных отрезков, концы которых отмечены целыми числами, разделим на десять равных частей. На рис. 62 это сделано для отрезка $[0,1]$. В результате на шкале появятся точки, имеющие координаты с одним десятичным знаком после запятой[1].

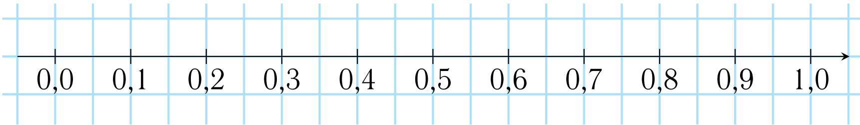


Рис. 62

Теперь делим на десять частей каждый из новых отрезков. В результате появятся точки, отмеченные координатами с двумя десятичными знаками после запятой (рис. 63).

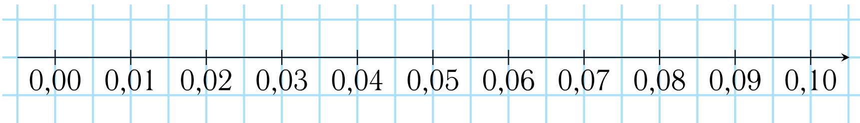


Рис. 63

Продолжая эту процедуру, мы получим точки, координатами которых будут дроби с тремя, четырьмя и т. д. десятичными знаками после запятой. При этом, какую бы конечную десятичную дробь мы ни взяли, после некоторого числа шагов мы получим на прямой точку, координатой которой является именно эта десятичная дробь.

Как нам известно из первой главы, на прямой есть и такие точки, координаты которых являются *бесконечными* десятичными дробями. Поэтому иногда говорят так: «Продолжая процедуру дробления до бесконечности, мы получим все точки, координатами которых являются всевозможные десятичные дроби». Возможность продолжать процедуру деления до бесконечности — это *математическая абстракция*.

Здесь необходимо принять во внимание два допущения. На первое из них указал ещё Евклид, определив точку так: это то, что не имеет частей. Во-вторых, предполагается, что при уменьшении длины отрезка все его свойства сохраняются, то есть с меньшим отрезком можно делать всё то же, что и с исходным. Однако это не будет верно, если прямые и точки считать *физическими* объектами. Современная физика утверждает, что бесконечно дробить нельзя, так как существует наименьшая величина — квант, и что свойства больших тел (макромир) отличаются от свойств малых тел (микромир).

Точки, координаты которых являются бесконечными десятичными дробями, можно описать и иным способом. Рассмотрим, например, точку A с координатой $7/3 = 2{,}333\ldots$ В силу неравенств $2{,}3 < 7/3 < 2{,}4$ можно утверждать, что точка A находится между точками $M_1(2{,}3)$ и $N_1(2{,}4)$. Так

[1] Хотя мы изобразили отрезок [0,1] бо́льшим, чем на предыдущем рисунке, мы не считаем, что он увеличился. Мы просто смотрим на него сквозь увеличительное стекло.

как $2{,}33 < 7/3 < 2{,}34$, то A лежит между $M_2(2{,}33)$ и $N_2(2{,}34)$; из неравенств $2{,}333 < 7/3 < 2{,}334$ вытекает, что A находится между $M_3(2{,}333)$ и $N_3(2{,}334)$ и т. д. Этот процесс можно продолжать неограниченно. При этом расстояние между точками M_i и N_i всё время уменьшается и стремится к нулю, поэтому существует *единственная* точка, принадлежащая всем отрезкам $[M_i, N_i]$. Это и будет точка $A(7/3)$, существование и единственность которой гарантируется аксиомой Дедекинда[2], входящей в систему аксиом евклидовой геометрии (см. § 2 десятой главы).

Расстояние $|MN|$ между точками $M(x)$ и $N(y)$ прямой вычисляется через их координаты x и y по формуле:

$$|MN| = |y - x|. \tag{1}$$

В § 1 третьей главы было показано, что координата середины отрезка MN является средним арифметическим координат его концов. Таким образом, если точка K — середина отрезка MN, то её координата равна $(x+y)/2$. Например, при $x = 2{,}2$ и $y = 3{,}6$ точка K имеет координату 2,9.

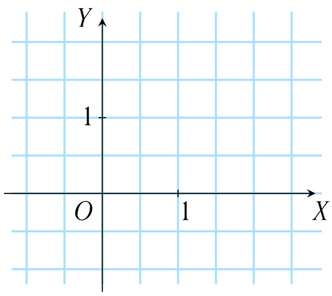


Рис. 64

Самая простая и наиболее распространённая система координат на плоскости называется *декартовой* по имени Декарта[3]. Она образована двумя перпендикулярными осями X и Y, точка пересечения которых называется *началом координат* и служит одновременно началом координат на каждой из осей (рис. 64). Масштаб на осях выбирается одинаковым. Если же на осях выбран разный масштаб, то система координат называется не декартовой, а *аффинной*.

Система координат нужна для того, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие две её координаты — два действительных числа x и y. Делается это следующим образом. Пусть M — произвольная точка плоскости. Спроектируем её на координатные оси, то есть опустим из точки M перпендикуляры на оси X и Y. Обозначим основания перпендикуляров через M_1 и M_2. Пусть точка M_1 имеет координату x на оси X, а точка M_2 имеет координату y на оси Y. Тогда числа x и y называются первой и второй координатами точки M. Записывается это так: $M(x, y)$.

Оси X и Y делят плоскость на 4 части, которые называются *квадрантами*. Если точка $M(x, y)$ лежит в первом квадранте, то $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; для точек второго квадранта выполняются неравенства $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; для третьего $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; а для четвёртого $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Точки, расположенные на оси X, удовлетворяют условию $y = 0$, а на оси Y — условию $x = 0$. Начало O имеет координаты $(0, 0)$.

[2]Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (1831 – 1916) — немецкий математик, один из основателей теории действительных чисел.

[3]Рене Декарт (1596–1650) — французский философ, математик, физик, физиолог.

Ещё в школе были доказаны два следующих важных утверждения. Первое: расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Доказательство основано на применении теоремы Пифагора к треугольнику M_1M_2N (рис. 65).

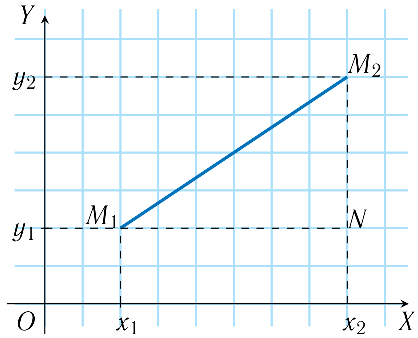


Рис. 65

Второе утверждение гласит, что координаты x и y середины отрезка M_1M_2 будут средними арифметическими соответствующих координат концов этого отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Например, для точек $M_1(1, 1)$ и $M_2(4, 3)$ имеем: $|M_1M_2| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}606$, $x = (1+4)/2 = 2{,}5$, $y = (1+3)/2 = 2$.

Упражнения

1. Постройте точки с координатами $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$. Какая фигура получится, если эти точки последовательно соединить отрезками? Найдите её площадь и периметр.

2. Изобразите на плоскости области, задаваемые следующими неравенствами: а) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$; б) $x < 0$, $y > 1$; в) $x > 1$, $y > 1$; г) $x > 2$, $y > 3$; д) $x < 2$, $y < 3$; е) $x > 2$, $y < 3$.

3. Отметьте на чертеже точки M_1 и M_2 и определите расстояние между ними:
а) $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$; б) $M_1(1, -2)$, $M_2(-3, 4)$; в) $M_1(1, 3)$, $M_2(1, -7)$; г) $M_1(3, 5)$, $M_2(-1, 5)$.

4. Найдите координаты середин отрезков M_1M_2, перечисленных в предыдущем упражнении.

5. Укажите все точки с целыми координатами, находящиеся внутри круга радиусом 2 с центром в начале координат, и отметьте их на чертеже. Найдите расстояния от этих точек до начала координат и округлите результаты до 0,01.

§ 2. Функции. Линейная и постоянная функции

Переменная величина и *функция* — важнейшие понятия современной математики и физики. Примеры переменных величин можно обнаружить в природе. Протекающие в ней процессы и закономерности учёные облекают в форму законов физики, математики, химии и т. д. Важнейшая переменная величина — *время* — входит практически во все физические законы, связанные с движением.

Например, известный закон прямолинейного и равномерного движения со скоростью v

$$s = vt \tag{3}$$

содержит две переменные величины: пройденное расстояние s (путь) и время t. Форма записи этого закона подчёркивает тот факт, что пройденный путь зависит от времени, а не наоборот. Математики в этом случае говорят, что *переменная величина s является функцией переменной величины t*, то есть s — *зависимая переменная*, а t — *независимая переменная*. Функция s, заданная формулой (3), называется *линейной*, так как переменная t стоит в первой степени. Скорость v при равномерном движении постоянна, то есть одна и та же в каждый момент времени. Но, выражаясь таким образом, мы, очевидно, считаем, что скорость является функцией времени. Это пример так называемой *постоянной функции*.

Равномерное движение представляет собой математическую абстракцию, так как на самом деле в природе таких движений не бывает. Например, на участке Тверь—Москва электричка несколько раз ускоряется, замедляется, останавливается. Тем не менее, может показаться, что в середине достаточно длинных перегонов скорость постоянна. Однако так можно считать лишь приближённо. Если бы мы измеряли скорость точным прибором, то обнаружили бы, что в разные моменты времени она, хотя и немного, но различна.

Когда же электричка, трогаясь с места, только набирает скорость, то последняя (опять же приближённо!) меняется с течением времени по закону $v = at$, где a — некоторая постоянная, называемая *ускорением*. Из школьного курса физики нам известно, что линейная зависимость скорости от времени характеризует так называемое *равноускоренное движение*, при котором пройденный путь вычисляется по формуле $s = \frac{1}{2}at^2$ (точнее, $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, если начальная скорость $v_0 \neq 0$). Заметьте, что эта функция уже не является линейной.

Предположение, что $v = at$, тоже является математической абстракцией. С помощью точных приборов можно установить, что на самом деле при разгоне электрички скорость меняется по более сложному закону, например, $v = at + bt^2$, где b — некоторое сравнительно маленькое число. Это означает, что движение на самом деле является ускоренным, но не равноускоренным, а пройденный путь вычисляется по более сложной формуле. Второе слагаемое bt^2 в силу его малости обычно отбрасывают, и тогда получаются приведённые выше формулы равноускоренного движения.

Рассмотрим ещё один физический закон — второй закон Ньютона, который запишем так:

$$a = \frac{F}{m}. \tag{4}$$

Будем считать переменными величинами силу F и ускорение a. Тогда равенство (4) отражает следующий физический эксперимент. На тело с массой m действует сила F, которую можно менять. В результате действия этой силы тело получает ускорение a, которое, следовательно, также является переменной величиной — функцией силы F.

С математической точки зрения оба физических закона — (3) и (4) — некоторые *линейные функции*. По сравнению с другими функциями, линейные функции устроены наиболее просто, при этом, однако, они являются и наиболее важными. Общепринятая форма записи произвольной линейной, но не постоянной функции имеет вид

$$y = kx + b, \tag{5}$$

где $k \neq 0$ и b — некоторые числа, а x и y — переменные, причём y зависит от x (или является функцией переменного x).

Всегда необходимо указывать, какие значения принимает независимая переменная x. Собственно говоря, символом x обозначается произвольный элемент некоторого числового множества[4], которое называется *областью определения функции*. Например, в законе равномерного прямолинейного движения (3) можно было считать, что $0 \leqslant t \leqslant 17$. Если же множество не указано, то по умолчанию считается, что t может быть любым действительным числом (то есть принимать любые действительные значения).

Используя систему координат, можно изобразить каждую функцию наглядно, в виде её *графика*. Построим, например, график линейной функции

$$y = 2x - 3, \tag{6}$$

для которой $k = 2$, а $b = -3$. Будем считать, что каждая пара чисел x и y, удовлетворяющих уравнению (6), служит декартовыми координатами некоторой точки на плоскости. Множество всех таких точек и называется графиком функции.

Таблица 30

x	0	1	−1	2	3	0,1	1,5	…
y	−3	−1	−5	1	3	−2,8	0	…

Некоторые из этих точек мы можем найти, подставляя вместо x различные числовые значения (таблица 30). График нашей функции изображён на рис 66. Как нам известно из школьного курса математики, он представляет собой прямую линию. Соотношение (6) называется уравнением этой прямой, а число $k = 2$ — её угловым коэффициентом, так как $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона прямой к оси X.

Если в уравнении (5) положить $k = 0$, то оно примет вид

$$y = b. \tag{7}$$

Это *постоянная функция*: величина y имеет одно и то же значение при любом x, поскольку в правую часть равенства (7) не входит x. Графиком постоянной функции $y = b$ будет прямая, параллельная оси X (см. рис. 67). Аналогично, уравнение

$$x = a \tag{8}$$

[4]Функции можно задавать не только на числовых множествах, но в этой главе мы такие функции не рассматриваем.

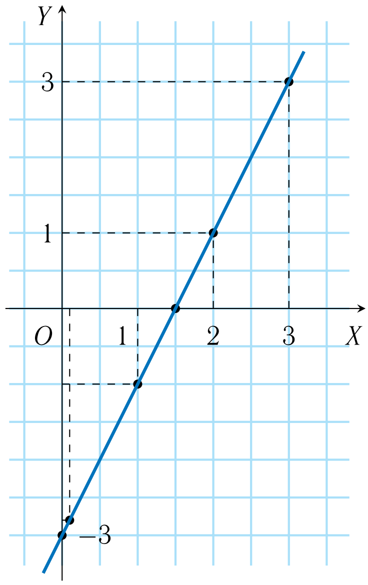


Рис. 66

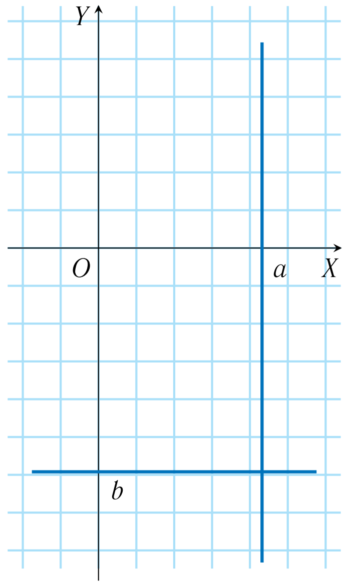


Рис. 67

также задаёт постоянную функцию, но здесь мы уже считаем, что зависимой переменной является x, а независимой переменной y. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси Y (рис. 67).

Если переменная y зависит от переменной x и не является постоянной, то и переменная x зависит от переменной y. Например, если из уравнения (6) выразить x через y, то получим

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Полученная функция называется *обратной* по отношению к исходной функции $y = 2x - 3$. Для любой линейной (непостоянной) функции всегда существует обратная к ней функция, так как из уравнения (5) всегда можно выразить x через y:

$$x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}. \tag{10}$$

Заметьте, что эта функция также является линейной. А вот для постоянной функции обратной не существует. Подумайте, почему?

Итак, графики линейной и постоянной функций представляют собой прямые линии (наклонные, вертикальные и горизонтальные). Их уравнения (5), (7) и (8) можно записать в единообразной форме:

$$Ax + By + C = 0, \tag{11}$$

где A, B и C — некоторые постоянные, причём A и B не могут быть нулями одновременно. Левая часть уравнения (11) представляет собой *многочлен* *первой степени относительно переменных x и y*. Уравнение (11) называется *общим уравнением прямой*.

Если и A и B отличны от нуля, то из уравнения (11) можно выразить x или y, и мы получим уравнение вида (5) или (10). Следовательно, в этом случае уравнение (11) определяет линейную непостоянную функцию. Если же $A = 0$, а $B \neq 0$, в уравнении остаётся только переменная y и его можно переписать в виде $y = b$. Аналогично, при $A \neq 0$ и $B = 0$ мы получаем функцию вида $x = a$. Таким образом, при равенстве нулю одного из коэффициентов A или B уравнение (11) задаёт постоянную функцию.

Поставим перед собой задачу изобразить график функции $y = kx + b$ и обратной к ней функции $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$ на одном и том же чертеже. Здесь есть некоторая проблема: в нашей записи обратной функции независимой переменной является y (то есть x выражается через y), в то время как у исходной функции независимая переменная обозначена через x. Но раз мы решили строить оба графика на одном и том же чертеже, независимую переменную в обоих случаях необходимо обозначить одинаково, например, x. Поэтому поменяем в уравнении (10) x и y местами, получая соотношение

$$y = \frac{x}{k} - \frac{b}{k}, \tag{12}$$

иначе записываемое как

$$x = ky + b. \tag{13}$$

Получившееся уравнение получается из уравнения исходной функции (5) заменой переменных $x \leftrightarrow y$. Поэтому, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (5), то координаты точки $M'(y, x)$ удовлетворяют уравнениям (12) и (13). Но точки M и M' симметричны относительно прямой $x = y$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов. Следовательно, *график функции* (5) *и график обратной ей функции* (12) *симметричны относительно прямой $x = y$*. Иными словами, они совпадут, если чертёж перегнуть по этой прямой.

Упражнения

1. Укажите точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям: а) $x = 0$, $x > 0$, $x \leqslant 0$; б) $y = 0$, $y \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; в) $x = 2$, $x \geqslant 2$, $x < 2$; г) $y = -3$, $y < -3$, $y > -3$; д) $y = x$, $y \geqslant x$, $y < x$; е) $y = x + 2$, $y > x + 2$, $y < x + 2$; ж) $x + y + 1 = 0$, $x + y + 1 \geqslant 0$, $x + y + 1 \leqslant 0$; з) $2x - 5y + 10 = 0$, $2x - 5y + 10 < 0$, $2x - 5y + 1 \geqslant 0$.

2. Постройте графики данных функций и функций, им обратных (если они существуют): а) $y = -\frac{1}{3}x + 4$; б) $y = -1$; в) $x = -3 + \frac{1}{2}x$; г) $x = 3$.

§ 3. Линейная интерполяция

Линейные функции часто используют для приближённого вычисления значений других, более сложных функций.

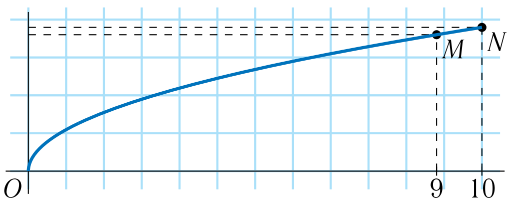


Рис. 68

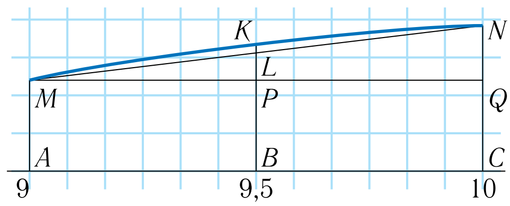


Рис. 69

Допустим, нам нужно вычислить $\sqrt{9{,}5}$, но нам известно только приближённое значение $\sqrt{10} \approx 3{,}162$. Кроме того, мы знаем, что $\sqrt{9} = 3$. Рассмотрим на плоскости точки $M(9, 3)$ и $N(10; 3{,}162)$, которые лежат на графике функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 68). Проведём хорду MN (рис. 69). Искомое число $\sqrt{9{,}5}$ есть значение функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 9{,}5$ и равно длине отрезка BK. Это число приближённо равно длине отрезка BL. Замена BK на BL фактически означает, что мы заменили часть параболы от точки M до точки N на прямую MN, то есть заменили функцию $y = \sqrt{x}$ на линейную функцию, графиком которой является прямая MN. В этом и состоит идея линейной интерполяции. Длину отрезка BL легко найти, рассмотрев подобные треугольники MLP и MNQ:

$$\frac{PL}{MP} = \frac{QN}{MQ}. \tag{14}$$

Обозначим длину отрезка BL, то есть ординату точки L, через y. Тогда

$$MP = AB = 9{,}5 - 9 = 0{,}5; \quad MQ = AC = 10 - 9 = 1;$$
$$PL = BL - BP = y - 3; \quad QN = CN - CQ = 3{,}162 - 3 = 0{,}162.$$

Подставляя эти значения в пропорцию (14), получаем $\dfrac{y-3}{0{,}5} = \dfrac{0{,}162}{1}$, откуда $y = 3{,}081$. Поскольку на самом деле $\sqrt{9{,}5} \approx 3{,}082$, то погрешность наших приближённых вычислений равна 0,001.

Полезно решить исходную задачу в более общем виде, при произвольном положении точки B на рис. 69. Обозначив координату точки B через x, а длину отрезка BL через y, находим:

$$MP = AB = x - 9{,}5; \quad MQ = AC = 10 - 9 = 1;$$
$$PL = BL - BP = y - 3; \quad QN = CN - CQ = 3; \quad 162 - 3 = 0{,}162.$$

Подставляя эти значения в (14), получаем пропорцию $\dfrac{y-3}{x-9{,}5} = \dfrac{0{,}162}{1}$, откуда

$$y = 3 + 0{,}162(x - 9). \tag{15}$$

Так как $L(x, y)$ — произвольная точка прямой MN, то полученное уравнение (15) является уравнением этой прямой. Его называют также формулой линейной интерполяции функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[9, 10]$. По этой формуле можно найти приближённое значение квадратного корня из любого числа x от 9 до 10 (в этих пределах меняется координата x точки B). В частности, $\sqrt{9{,}3} = 3 + 0{,}162 \cdot (9{,}3 - 9) \approx 3{,}049$, $\sqrt{9{,}8} = 3 + 0{,}162 \cdot (9{,}8 - 9) \approx$ $\approx 3{,}130$.

Найдём, наконец, самый общий вид формулы линейной интерполяции, выбрав координаты точек $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ произвольным образом. Повторив все рассуждения снова, придем к формуле

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{16}$$

точность которой зависит от свойств приближаемой функции и от длины отрезка MN.

Пример 3.1. Используя равенства $9{,}5^2 = 90{,}25$ и $10^2 = 100$, найдите приближённые значения квадратных корней из целых чисел от 91 до 99.

Решение. Положим в формуле (16) $x_1 = 90{,}25$, $y_1 = 9{,}5$, $x_2 = 100$, $y_2 =$ $= 10$, приводя её к виду $y = 9{,}5 + 0{,}0513 \cdot (x - 90{,}25)$. Для определения приближённого значения $\sqrt{91}$ подставим в эту формулу величину $x = 91$: $y = 9{,}5 + 0{,}0513 \cdot 0{,}75 = 9{,}5384\ldots \approx 9{,}538$. При $x = 92$ получим $\sqrt{92} =$ $= 9{,}590$ и т. д. Результаты вычислений сведены в таблицу 31. В третьей строке этой таблицы приведены приближённые значения тех же корней, но с правильным третьим знаком после запятой. Как видно, расчётные значения, полученные методом линейной интерполяции, отличаются от точных значений не более, чем на 0,003.

Таблица 31

x	91	92	93	94	95	96	97	98	99
y	9,538	9,590	9,641	9,692	9,744	9,795	9,846	9,898	9,949
$\sqrt{x}$	9,539	9,592	9,644	9,695	9,747	9,798	9,849	9,899	9,950

Пример 3.2. В таблице 32 приведены значения функции $f(x) = e^{-x}$ с шагом 0,01. Определите $e^{-0{,}042}$ и $e^{-0{,}075}$.

Таблица 32

x	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
e^{-x}	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139	0,9048

Решение. Значение 0,042 заключено между числами 0,04 и 0,05, которые есть в таблице. Поэтому мы используем формулу (16) при следующих значениях параметров: $x_1 = 0{,}04$, $y_1 = 0{,}9608$, $x_2 = 0{,}05$, $y_2 = 0{,}9512$ и $x = 0{,}042$. Получаем: $e^{-0{,}042} \approx 0{,}9608 + \dfrac{-0{,}0094}{0{,}01} \cdot 0{,}002 \approx 0{,}9589$. Для расчёта второго значения положим в формуле (16) $x_1 = 0{,}07$, $y_1 = 0{,}9324$, $x_2 = 0{,}08$, $y_2 = 0{,}9231$, и $x = 0{,}075$. Получим $e^{-0{,}075} \approx 0{,}9278$.

Пример 3.3. В электрической цепи в течение десяти секунд измеряют напряжение U с интервалом в одну секунду. Результаты измерений сведены в таблицу 33. Известно, что зависимость между U и t *линейная* и задаётся формулой $U = kt + b$, где k и b — некоторые числа (параметры), которые нужно определить по результатам измерений. Если бы измерения были точными, то хватило бы двух замеров, поскольку прямая линия вполне определяется двумя своими точками. Но на практике результаты любого измерения являются приближёнными, поэтому, если по данным таблицы 33 построить точки с координатами (t, U), то окажется, что они не лежат на одной прямой (рис. 70). Таким образом, задача состоит в определении таких параметров k и b, при которых линейная функция $U = kt + b$ максимально точно отражает результаты эксперимента, приведённые в таблице 33.

Таблица 33

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U	12	11	10	9	9	8	8	7	7	6

Решение. Решим эту задачу *методом наименьших квадратов*. Суть его в следующем: прямая выбирается так, чтобы сумма квадратов вертикальных отклонений экспериментальных точек от искомой прямой (см. рис. 70) была как можно меньше. Это условие приводит к формулам

$$k = \frac{\overline{tU} - \overline{t} \cdot \overline{U}}{D}, \quad b = \overline{U} - k\overline{t}. \tag{17}$$

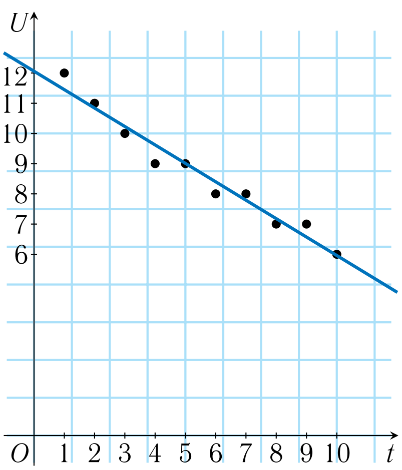


Рис. 70

Здесь $\overline{t}$, $\overline{U}$ и $\overline{tU}$ — средние арифметические значений t, U и tU соответственно, а D — дисперсия значений t (см. §3 третьей главы). Для вычисления этих величин составим таблицу 34, в последнем столбце которой запишем суммы всех чисел соответствующих строк. Средние арифметические и дисперсию найдём по формулам из третьей главы: $\overline{t} = 55/10 = 5{,}5$, $\overline{U} = 87/10 = 8{,}7$, $\overline{tU} = 428/10 = 42{,}8$. Подставив в формулу (17), получим $k = \dfrac{42{,}8 - 8{,}7 \cdot 5{,}5}{8{,}25} \approx -0{,}61$ и $b = 8{,}7 + 5{,}5 \cdot 0{,}61 \approx 12{,}06$. Следовательно, искомая линейная функция имеет вид

$$U = -0{,}61t + 12{,}06. \tag{18}$$

Её график изображён на рис. 70. Проверьте, что он проходит через точку $(t, U) = (5{,}5; 8{,}7)$.

Таблица 34

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
U	12	10	11	9	9	8	8	7	7	6	87
tU	12	22	30	36	45	48	56	56	63	60	428
$t-\bar{t}$	−4,5	−3,5	−2,5	−1,5	−0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	0
$(t-\bar{t})^2$	20,25	12,25	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	12,25	20,25	82,5

Упражнения

1. Используя равенства $5{,}1^2 = 26{,}01$ и $5{,}9^2 = 34{,}81$, найдите методом линейной интерполяции значения $\sqrt{30}$, $\sqrt{31}$ и $\sqrt{34}$.

2. Преобразуйте уравнение (16) к виду $y = kx + b$.

Таблица 35

s	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
v	115	108	102	98	93	89	87	72	65	60

3. В таблице 35 приведены результаты измерения силы звука самолёта v (она измеряется в децибелах) на расстоянии s *км* от точки взлёта. Используя метод наименьших квадратов, подберите линейную функцию, которая описывает зависимость v от s. Найдите, на каком расстоянии от точки взлёта звук становится смертельно опасным для человека (свыше 120 децибел), где можно строить жилые помещения (не более 75 децибел), детские учреждения и больницы (не более 60 децибел)?

§ 4. Степенные функции

Функция

$$y = x^2 \tag{19}$$

называется *квадратичной*, а её график, изображённый на рис. 71, — *параболой*. Точка O называется *вершиной параболы*. Ось Y является *осью симметрии* параболы, так как для каждой точки $M(x, y)$, лежащей на параболе, симметричная ей относительно оси Y точка $M'(-x, y)$ также лежит на параболе. Другими словами, если чертёж перегнуть по оси Y, то левая половина параболы совпадёт с правой.

Переменная x, стоящая в правой части уравнения (19), может принимать любые значения. Когда x возрастает от $-\infty$ до нуля ($x \in (-\infty, 0]$), то $y = x^2$ убывает от $+\infty$ до нуля. Следовательно, на промежутке $(-\infty, 0]$ функция (19) убывает. Это хорошо видно на рисунке: левая часть графика идёт сверху вниз, если двигаться в направлении возрастания координаты x, то есть слева направо. Правая часть графика демонстрирует нам тот факт, что функция возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

Обсудим вопрос об обратной функции. Уравнение $y = x^2$ имеет при каждом положительном y два различных решения относительно x: $x = \sqrt{y}$

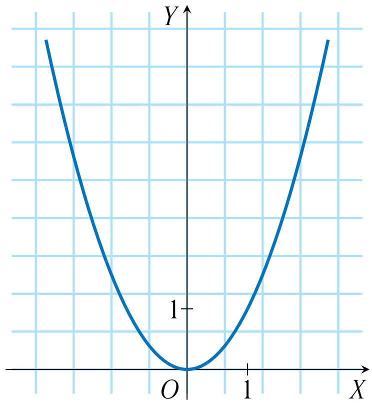


Рис. 71

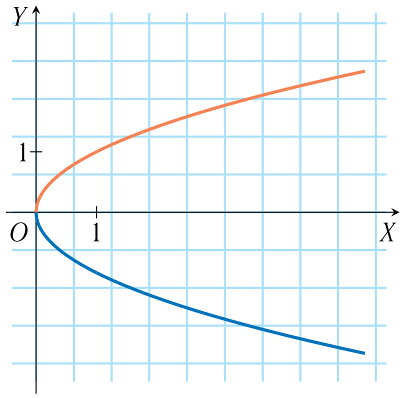


Рис. 72

и $x = -\sqrt{y}$. Поэтому мы будем искать обратную функцию на таком промежутке, где уравнение $y = x^2$ имеет единственное решение относительно x. Очевидно, что есть два таких промежутка: $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$.

Заметив это, поступим как и в случае с линейной функцией: поменяем местами переменные x и y, а затем выразим y. После замены получим $x = y^2$, откуда $y = \pm\sqrt{x}$. Таким образом, мы получаем две различные функции: первая, $y = \sqrt{x}$, будет обратной для $y = x^2$, $x \geqslant 0$, её графиком является верхняя половина параболы, изображённая на рис. 72 красным цветом. Вторая, $y = -\sqrt{x}$, будет обратной для функции $y = x^2$, $x \leqslant 0$, и её графиком является нижняя половина параболы на том же рисунке, изображённая синим цветом.

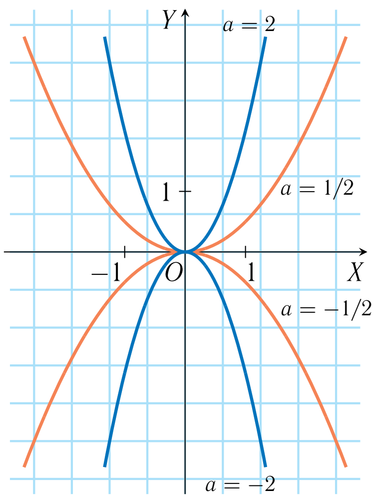


Рис. 73

График функции

$$y = ax^2 \tag{20}$$

при $a \neq 0$ также называется параболой. На рис. 73 изображены четыре различных параболы при $a = 2$, $1/2$, -2 и $-1/2$. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Сравнивая ординаты точек с одинаковыми абсциссами на графиках функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$, легко заметить, что второй график получается из первого *растяжением вдоль оси* Y, при котором каждая точка графика $y = x^2$ удаляется в два раза дальше от оси X (коэффициент растяжения равен двум).

Точно так же, сравнивая графики функций $y = x^2$ и $y = 1/2x^2$, мы видим, что последний получается из первого растяжением вдоль оси Y с коэффициентом $1/2$. Говорят также, что график функции $y = 1/2x^2$ получается из графика $y = x^2$ *сжатием вдоль оси* Y

с коэффициентом 2. Совершенно аналогичное наблюдение можно сделать и по поводу графиков с отрицательными коэффициентами a: графики функций $y = -2x^2$ и $y = -1/2x^2$ получаются из графика $y = -x^2$ с помощью растяжения или сжатия вдоль оси Y с коэффициентом 2.

Степенная функция

$$y = x^3 \tag{21}$$

называется *кубической*, а её график, изображённый на рис. 74 синим цветом — *кубической параболой*. Обратной к функции (21) будет функция $x = y^3$ или $y = \sqrt[3]{x}$. Её график, изображённый на том же рис. 74 красным цветом, также является кубической параболой, симметричной параболе $y = x^3$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Каждая из этих кубических парабол симметрична относительно начала координат, что вытекает из следующего наблюдения: если уравнению (21) удовлетворяют координаты точки $M(x, y)$, то ему же удовлетворяют и координаты точки $M'(-x, -y)$, которая симметрична M относительно начала координат.

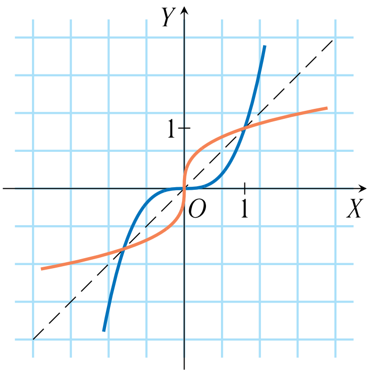


Рис. 74

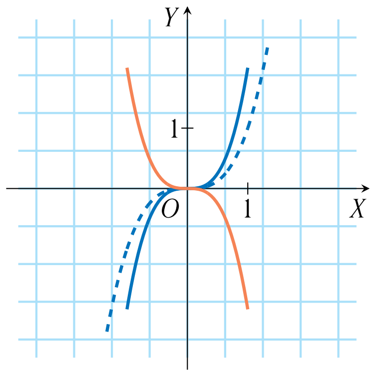


Рис. 75

Пример 4.1. Постройте графики функции $y = -2x^3$ и обратной к ней.

Решение. График функции $y = -2x^3$, изображённый красным цветом на рис. 75, получим преобразованием графика $y = x^3$. Для этого сначала параболу $y = x^3$ (пунктирная кривая на рис. 75) растягиваем вдоль оси Y с коэффициентом два (сплошная синяя линия), а затем полученную кривую симметрично отражаем относительно оси X. Для построения графика функции $y = \sqrt[3]{-\dfrac{x}{2}}$, обратной функции $y = -2x^3$, достаточно график последней симметрично отразить относительно биссектрисы $y = x$. Сделайте это самостоятельно.

Мы рассмотрели графики функций вида $y = x^\alpha$ лишь при некоторых значениях степени α. Но, как известно из школьного курса математики, существуют степенные функции, у которых показателем является произвольное действительное число, например, $y = x^{10}$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\pi}$. Все степенные функции обладают похожими свойствами, часть из которых мы рассмотрели выше.

Упражнения

1. Постройте график функции $y = 0{,}3x^2$ и укажите промежутки, на которых она имеет обратную функцию. Найдите эти функции и постройте их графики.

2. Постройте графики заданных функций и функций, им обратных на промежутках $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$: а) $y = 2x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = -2x^2$.

§ 5. Показательная и логарифмическая функции

Функция
$$y = a^x \tag{22}$$
называется *показательной*, потому что независимая переменная x находится в показателе степени. При $a = 1$ мы получаем постоянную функцию $y = 1$, поэтому считают, что в уравнении (22) $a \neq 1$. Если же, например, в равенстве (22) положить $a = -3$, то при $x = 1/2$ величина y оказывается равной $(-3)^{1/2} = \sqrt{-3}$. Но такого действительного числа не существует. По этой причине полагают, что в правой части равенства (22) $a > 0$. Отсюда следует, что все значения показательной функции положительны. Число a называется *основанием* показательной функции.

Пример 5.1. Постройте график показательной функции с основанием два:
$$y = 2^x. \tag{23}$$

Решение. Вычислим ряд значений этой функции (таблица 36). Как следует из формулы (23), при увеличении x величина y возрастает, а при уменьшении x величина y уменьшается, но остаётся положительной. Если x стремится к минус бесконечности (пишут $x \to -\infty$), то y стремится к нулю ($y \to 0$). График функции $y = 2^x$ изображён на рис. 76.

Таблица 36

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2^x	$1/32$	$1/16$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	16	32

Найдём теперь функцию, обратную показательной функции (22). Для этого, как и выше, сделаем в равенстве (22) замену $x \leftrightarrow y$; получим $x = a^y$. Здесь y представляет собой показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить x. Это принято записывать так[5]:
$$y = \log_a x. \tag{24}$$

[5]Вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$, а вместо $\log_e x$, где e — неперово число, пишут $\ln x$.

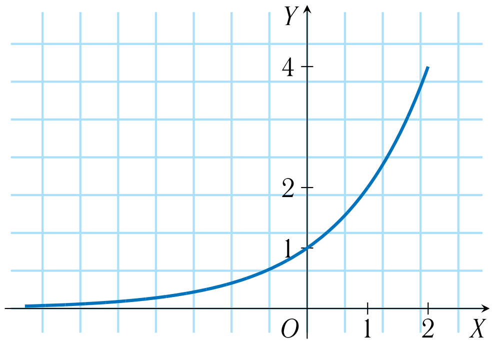


Рис. 76

Показатель степени y называют логарифмом, а полученную функцию — *логарифмической*. Правую часть формулы (24) читают следующим образом: «логарифм числа x по основанию a». Согласно определению степени,

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a a^k = k.$$

По известному нам свойству графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ симметричны относительно биссектрисы $y = x$. Обе функции — показательная и логарифмическая — являются возрастающими при $a = 2$ (на рис. 77 график первой из них изображён синим цветом, а график второй — красным). Аналогичная картина будет при $a = 3$, $a = 4$ и вообще при любом $a > 1$.

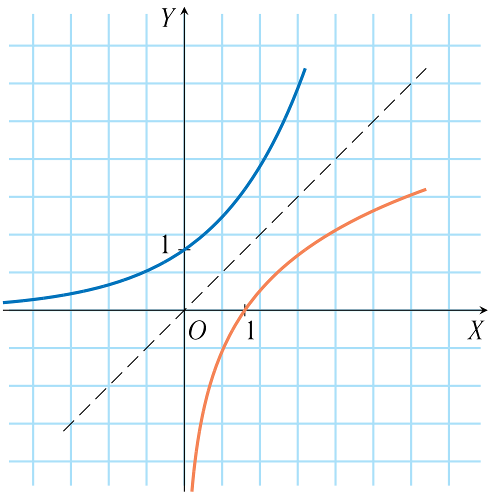


Рис. 77

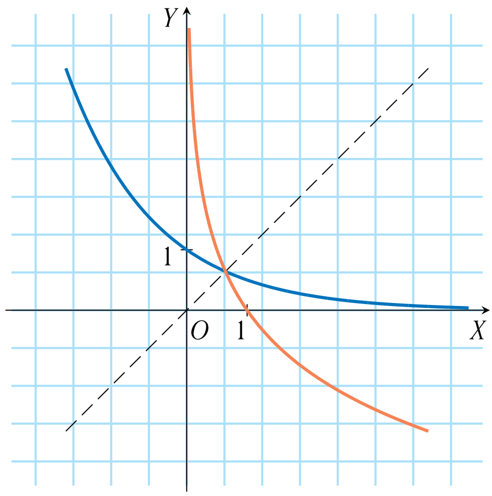


Рис. 78

Пример 5.2. Постройте графики функций $y = (1/2)^x$ и $y = \log_{1/2} x$.

Решение. Рассуждая аналогично, находим, что и показательная функция $y = (1/2)^x$, и обратная ей логарифмическая функция $y = \log_{1/2} x$ являются убывающими. Их графики изображены на рис. 78.

Пример 5.3. Постройте графики следующих функций:

а) $y = (1{,}5)^x$; б) $y = (2/3)^x$; в) $y = \log_{1,5} x$; г) $y = \log_{2/3} x$.

Решение. Достаточно построить только первый из этих графиков, все остальные получаются из него с помощью некоторых симметрий. Чтобы построить график функции $y = (1{,}5)^x$, с помощью калькулятора составим таблицу значений этой функции на отрезке $[-5, 5]$, округляя их до десятых долей (таблица 37). Далее отмечаем точки с координатами $(-5; 0{,}1)$, $(-4; 0{,}2)$ и т. д., и соединяем их плавной линией.

Таблица 37

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$1{,}5^x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1	1,5	2,2	3,4	5,1	7,6

По определению степени выражение $(2/3)^x$ можно преобразовать так: $(2/3)^x = (3/2)^{-x} = 1{,}5^{-x}$. Следовательно, функция б) получается из функции а) заменой x на $-x$. Это означает, что график функции $y = (2/3)^x$ симметричен графику функции $y = (1{,}5)^x$ относительно оси Y. Функции $y = \log_{1,5} x$ и $y = \log_{2/3} x$ являются обратными для функций $y = (1{,}5)^x$ и $y = (2/3)^x$ соответственно, поэтому их графики получаются из графиков последних симметричным отражением относительно биссектрисы $y = x$.

Показательная функция $y = e^x$ (e — неперово число, см. §5 первой главы) играет в математике особую роль. Она называется *экспоненциальной функцией* или *экспонентой*, её график часто также называют экспонентой. Экспоненциальная функция описывает такие процессы, в которых скорость изменения изучаемой переменной величины пропорциональна значению этой величины.

Пример 5.4. Степень экологической безопасности мест захоронения радиоактивных отходов зависит от скорости распада радиоактивной массы m. Известно, что эта скорость в момент времени t пропорциональна массе вещества $m(t)$, оставшейся к моменту времени t. Величина $m(t)$ вычисляется по формуле

$$m(t) = m_0 e^{-kt}, \tag{25}$$

где m_0 — масса отходов в начальный момент $t = 0$. Пользуясь приведённой формулой, вычислим массу отходов кобальта, которая останется через 5,2 года, при условии, что исходная масса была 100 граммов и для этого изотопа кобальта $k = 0{,}13$. Имеем: $m(5{,}2) = 100e^{-0,13\cdot 5,2} = 100 \cdot e^{-0,676} = 50{,}87г.$

Подобные уравнения позволяют решать многие важные задачи. Например, криминалисты с их помощью определяют момент наступления смерти. Временной промежуток, в течение которого распадается половина массы радиоактивного вещества, называется периодом полураспада. Зная время полураспада некоторых веществ, учёные определили возраст земной коры.

Графики различных функций легко строить с помощью системы компьютерной алгебры. Так, получив команду `plot2d((1.5)^x, [x, -5, 5])`, Maxima нарисует график функции $1{,}5^x$ на отрезке $[-5, 5]$. Первым аргументом команды `plot2d` является функция, график которой мы строим, а второй аргумент — так называемый список, состоящий из заключённых в квадратные скобки имени независимой переменной и границ отрезка.

Упражнения

1. Постройте графики следующих функций (без использования системы компьютерной алгебры): а) $y = (1{,}8)^x$; б) $y = (5/9)^x$; в) $y = \log_{1,8} x$; г) $y = \log_{5/9} x$.

2. Постройте график функции $y = 3e^{-2x}$ на отрезке $[0, 2]$ «вручную» и с помощью ЭВМ.

3. С помощью системы компьютерной алгебры Maxima постройте графики следующих функций: а) $y = 2 - 3^{x-2}$; б) $y = (1/3)^{2x+1} - 1$; в) $y = 2\log_3(2x - 1)$; г) $y = 1 - \log_{1/3}(1 - x)$.

§ 6. Тригонометрические функции и периодические процессы

К тригонометрическим функциям относят *синус*, *косинус*, *тангенс*, *котангенс*, *секанс* и *косеканс*, которые обозначаются символами sin, cos, tg, ctg, sec и cosec соответственно и записываются обычно в виде $y = \sin x$, $y = \cos x$ и т. д.

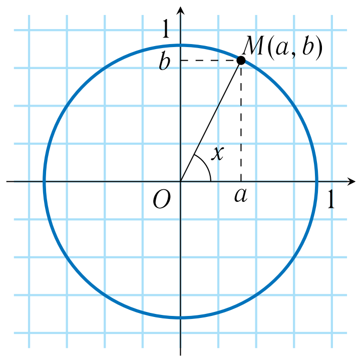


Рис. 79

По определению, $\sin x = a$ и $\cos x = b$, где (a, b) — координаты точки M, лежащей на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, а x — угол, образованный вектором OM и осью X (рис. 79). Углы измеряют в градусах или в радианах (напоминаем, что полный угол равен $360°$ или 2π радиан). Значения остальных функций просто выражаются через $\sin x$ и $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} = \frac{\sin x}{\cos x}; \ \operatorname{ctg} x = \frac{a}{b} = \frac{\cos x}{\sin x}; \ \sec x = \frac{1}{b} = \frac{1}{\cos x}; \ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sin x}.$$

Таким образом, у всех тригонометрических функций аргументом является угол x. Если точка M сделает полный оборот и придёт в исходное положение, то угол x увеличится на 2π. Но числа a и b в результате этой процедуры не изменятся. Отсюда вытекает, что синус, косинус и все другие тригонометрические функции являются *периодическими функциями с периодом* 2π, то есть их значение не меняется, если к аргументу x добавить 2π один или несколько раз:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi k), \quad \cos x = \cos(x + 2\pi k),$$

где k — любое целое число.

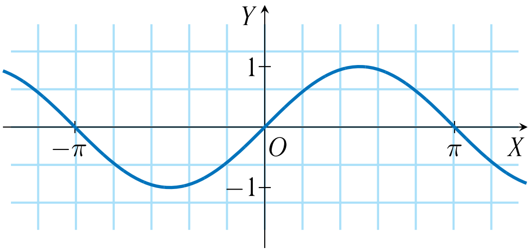


Рис. 80

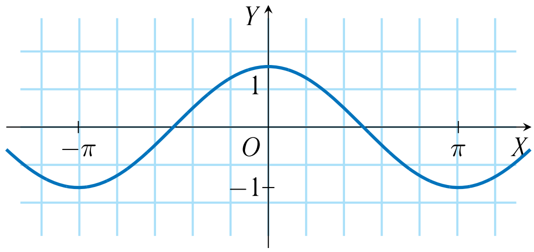


Рис. 81

Напомним, что график функции $y = f(x)$ есть множество всех таких точек плоскости XOY, у которых первая координата равна x, а вторая — $f(x)$. Графики основных тригонометрических функций изображены на рис. 80–83. Они называются, соответственно, синусоидой, косинусоидой, тангенсоидой и котангенсоидой. Из рис. 82–83 видно, что наименьший период тангенса и котангенса равен π.

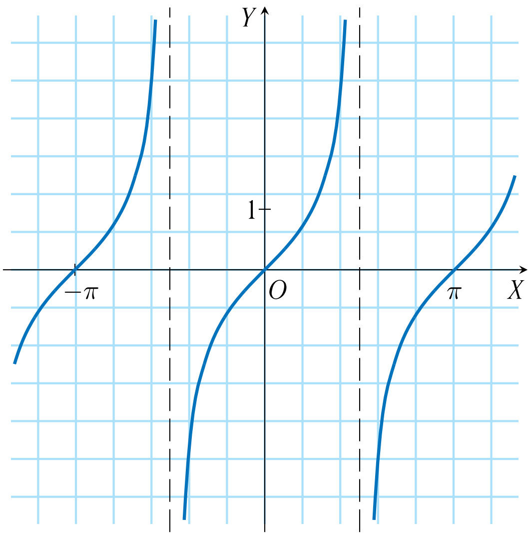


Рис. 82

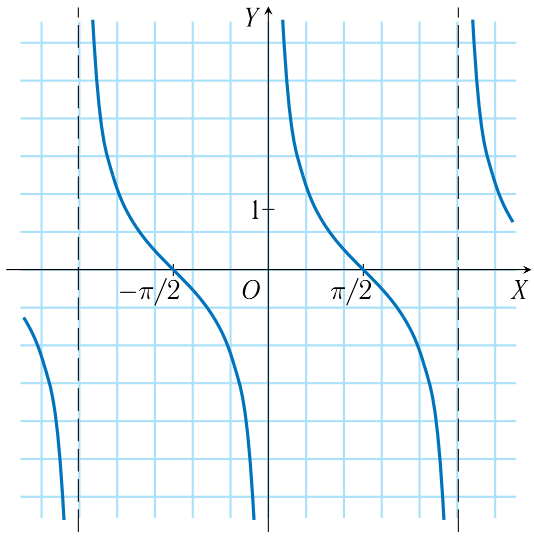


Рис. 83

Периодичность — важнейшее специфическое свойство тригонометрических функций. С их помощью описывают многие процессы, происходящие в природе: колебательные и вращательные движения, волновые явления, движение планет, биологические ритмы и т. д. Простейшие из них — *гармонические колебания*, при которых величина отклонения от положения равновесия является синусоидальной функцией времени.

Пример 6.1. При движении точки M по окружности её проекция на ось ординат — точка N — колеблется около начала координат (рис. 84). Положение точки M на окружности определяется углом x, а положение точки N на оси Y — её координатой y. Величины x и y связаны соотношением $y = \sin x$, которое и будет уравнением колебательного движения точки N.

Более сложные колебания описываются уравнениями вида

$$y = A \sin(\omega x + a), \tag{26}$$

и называются *простыми гармоническими колебаниями*. Такие функции и их графики называют также *простыми гармониками*. Число A называется *амплитудой колебания*, величина ω — *частотой*. Покажем, что любую простую гармонику можно получить с помощью преобразований сдвига и растяжения (или сжатия) из синусоиды $y = \sin x$.

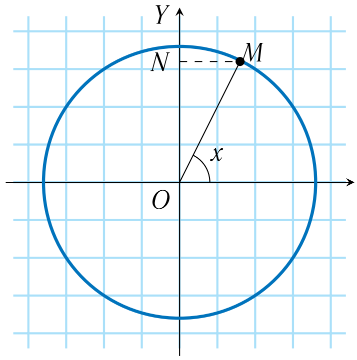


Рис. 84

Сравним сначала графики функций $y = \sin x$ и $y = \sin \omega x$. Пусть для определённости $\omega = 2$. Если первая из функций принимает некоторое значение y в некоторой точке $x = a$, то вторая примет это же значение в точке $x = a/\omega = a/2$. Поэтому синусоида $y = \sin 2x$, изображённая на рис. 85 красной линией, получается из синусоиды $y = \sin x$, изображённой синей линией, сжатием вдоль оси X с коэффициентом два. В результате каждая волна синусоиды становится в 2 раза у́же. При произвольном $\omega > 1$ синусоида $y = \sin \omega x$ будет в ω раз у́же синусоиды $y = \sin x$. Если же $0 < \omega < 1$, то график функции $y = \sin \omega x$ получается из синусоиды $y = \sin x$ растяжением вдоль оси X с коэффициентом $1/\omega$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \sin(x - a)$. Её графиком будет синусоида, изображённая на рис. 86 красной линией. Она получается из синусоиды $y = \sin x$ (которая изображена синей линией) сдвигом вдоль оси X на расстояние a вправо при $a > 0$, и на расстояние $-a$ влево, если $a < 0$ (на рисунке $a = -\pi/6$).

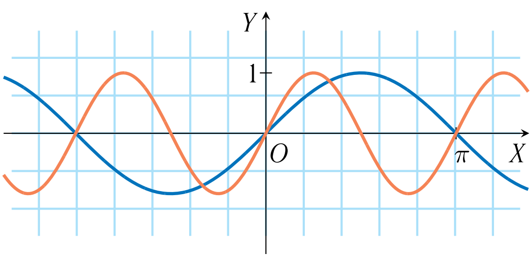


Рис. 85

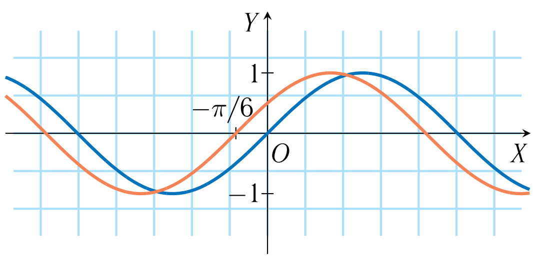


Рис. 86

Сравним, наконец, графики функций $y = \sin x$ и $y = A \sin x$. Пусть для

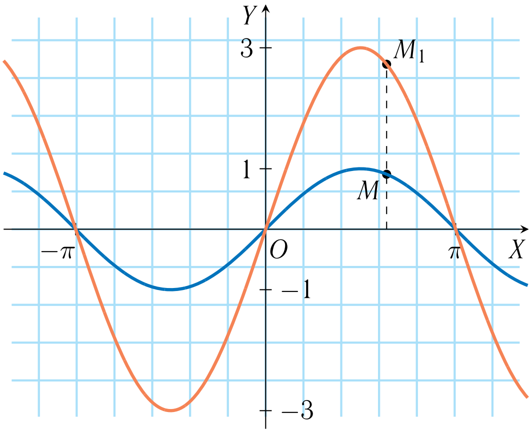


Рис. 87

определённости $A = 3$. Значение переменной y при одном и том же значении аргумента x у второй функции в 3 раза больше, чем у первой. Поэтому вторая синусоида в 3 раза выше первой или, точнее, получается из первой растяжением вдоль оси Y, причём коэффициент растяжения равен трём (на рис. 87 точка $M(x, y)$ переходит в точку $M_1(x, 3y)$). При произвольном $A > 1$ график растянется в A раз. Если же $0 < A < 1$, то произойдёт сжатие графика с коэффициентом $1/A$.

Пример 6.2. Переменный ток в электрической цепи описывают в некоторых единицах измерения формулой

$$y = 3\sin(2t + \pi/3), \tag{27}$$

выражающей зависимость силы тока от времени t. Это простое гармоническое колебание вида (26), в котором амплитуда $A = 3$, а частота $\omega = 2$. Число $\varphi = \pi/3$ называется *начальной фазой*. Построим график функции $y(t)$.

Решение. Перепишем уравнение (27) в виде $y = 3\sin 2(t + \pi/6)$. Согласно изложенному выше, график этой функции получается (на плоскости переменных t и y) из синусоиды $y = \sin t$ в результате трёх следующих последовательных преобразований. Сначала мы сжимаем вдвое синусоиду $y = \sin t$ (синяя пунктирная линия на рис. 88), получая график функции $y = \sin 2t$, изображённый красной пунктирной линией. Затем полученную кривую сдвигаем влево на расстояние $\pi/6$ (синяя сплошная линия). Наконец, мы растягиваем получившийся график вдоль оси Y с коэффициентом три. На рис. 88 итоговый график изображён красной сплошной линией.

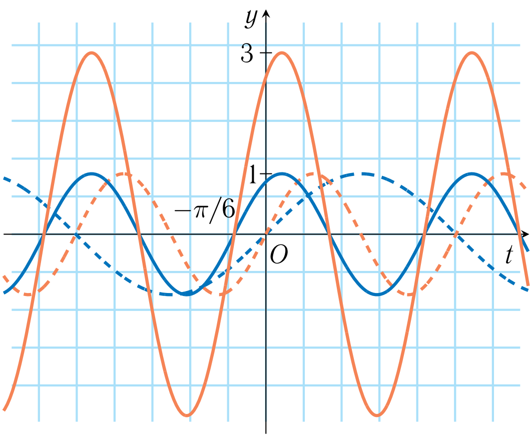


Рис. 88

Абсолютная величина y в формуле (27) равна силе переменного тока в момент времени t, а её знак показывает одно из двух возможных направлений тока в проводнике. Поскольку наибольшее значение синуса равно единице, то наибольшее значение силы тока равно трём, то есть амплитуде колебания. Множитель 2 под знаком аргумента (частота) показывает, сколько раз колебание повторится за 2π единиц времени. На графике функции это число волн на отрезке длиной 2π. Период функции (27) равен $2\pi{:}2{=}\pi$. В общем случае, если колебание задано формулой (26), период равен $2\pi/\omega$.

В результате сложения нескольких простых гармонических колебаний получаются так называемые *сложные гармонические колебания* (*сложные гармоники*). Например, в результате наложения двух простых гармоник $y = 2\sin 2x$ и $y = \sin(3x + \pi/2)$ получается сложная гармоника $y = 2\sin 2x + \sin(3x + \pi/2)$, график которой изображён на рис. 89.

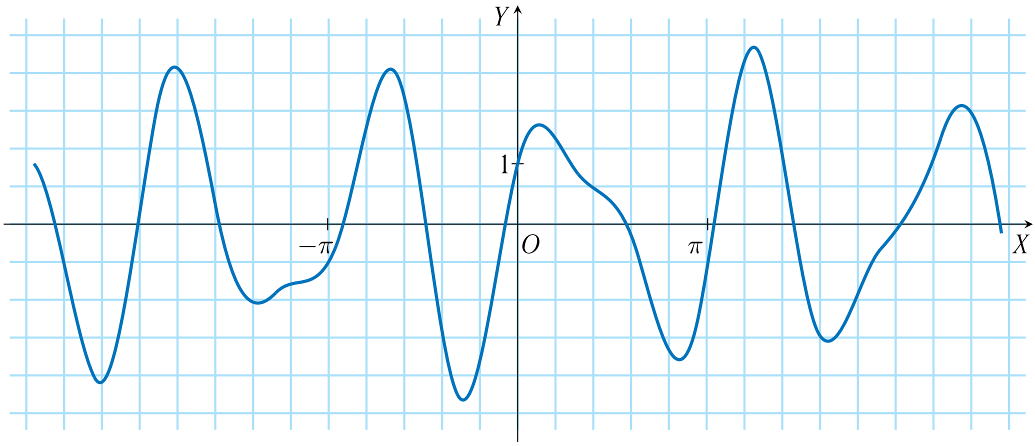


Рис. 89

Сложение гармоник приводит к самым разнообразным периодическим функциям. Естественно возникает вопрос: нельзя ли представить *любое* периодическое движение как сумму простых гармоник? Эта проблема была поставлена математиками XVIII века, которые пытались описать колебания звучащей струны: Д'Аламбером, Эйлером, Лагранжем[6], Д. Бернулли[7] и другими. Более двухсот лет математики решали эту задачу. Оказалось, что произвольное периодическое движение нельзя, вообще говоря, описать суммой *конечного числа* простых гармоник, но его всегда можно представить в виде ряда, то есть суммы *бесконечного числа* гармоник.

Общие принципы решения этой задачи сформулировал в начале XIX века Фурье[8]. Труды многих математиков XIX века по теории тригонометрических рядов способствовали созданию теории множеств и теории функций. К настоящему времени эти методы изучают в специальном разделе математики — гармоническом анализе. Большой вклад в эту теорию внесли Лузин[9],

---

[6]Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик.

[7]Даниел Бернулли (1700–1782) — швейцарский учёный, физик и математик.

[8]Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик.

[9]Николай Николаевич Лузин (1883–1950) — российский математик.

Меньшов[10], Колмогоров, Бари[11] и другие.

Упражнения

1. Постройте «вручную» графики следующих функций: а) $y = 2\sin 3x$; б) $y = -\cos(x - \pi)$; в) $y = \operatorname{tg}(2x + \pi/2)$.

2. Движение частицы, прикреплённой к пружине, описывается формулой $y = 2\sin(3t - \pi/4)$, в которой y — отклонение частицы от положения равновесия в момент времени t. Постройте график заданной функции и найдите: а) наибольшее отклонение частицы от положения равновесия; б) период колебания; в) положение частицы в начальный момент времени; г) моменты времени, в которые частица проходит через положение равновесия.

§ 7. Обратные тригонометрические функции

Напомним, что функция называется *монотонной*, если во всей области определения она либо возрастает, либо убывает. Периодические функции, вообще говоря, не монотонны, поэтому для определения обратных им функций нужно выбрать какой-нибудь промежуток монотонности. Например, функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Следовательно, на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ можно построить обратную синусу функцию, которая называется *арксинусом* и обозначается $y = \arcsin x$[12]. Некоторые значения функции $y = \arcsin x$ приведены в таблице 38.

Таблица 38

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin x$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

График арксинуса легко построить, используя симметрию графиков взаимно обратных функций относительно прямой $y = x$. На рис. 90 изображены графики синуса (синяя линия) и арксинуса (красная линия). Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1, 1]$ и возрастает на нём, принимая значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Арксинус (как и синус) является нечётной функцией, то есть удовлетворяет условию $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

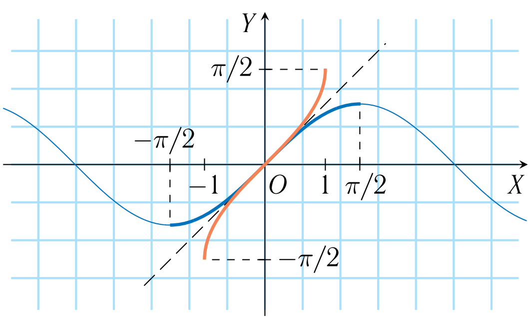


Рис. 90

[10] Дмитрий Евгеньевич Меньшов (1892–1988) — российский математик.

[11] Нина Карловна Бари (1901–1961) — российский математик.

[12] Обозначение $\arcsin x$ расшифровывается как «дуга, синус которой равен x», от латинского arcus — дуга.

Таблица 39

x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0,5	0	$-0{,}5$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\arccos x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π

Теперь построим график функции, обратной функции $y = \cos x$. Эта функция монотонно убывает на отрезке $[0, \pi]$, на котором и определяют обратную функцию $y = \arccos x$, называемую *арккосинусом*. Некоторые её значения приведены в таблице 39, а график изображён красной линией на рис. 91. При изменении аргумента x от минус единицы до плюс единицы функция $y = \arccos x$ убывает от π до нуля.

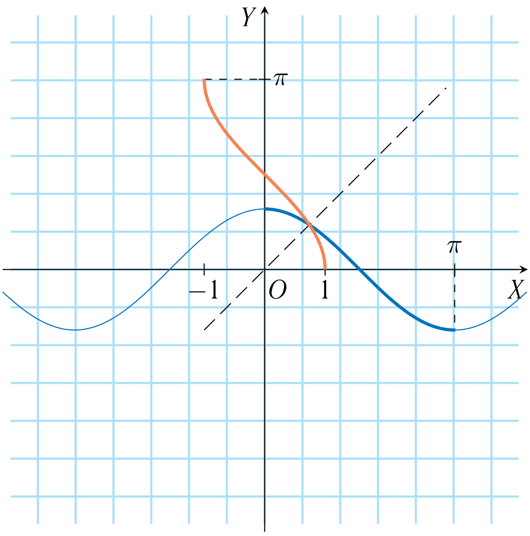


Рис. 91

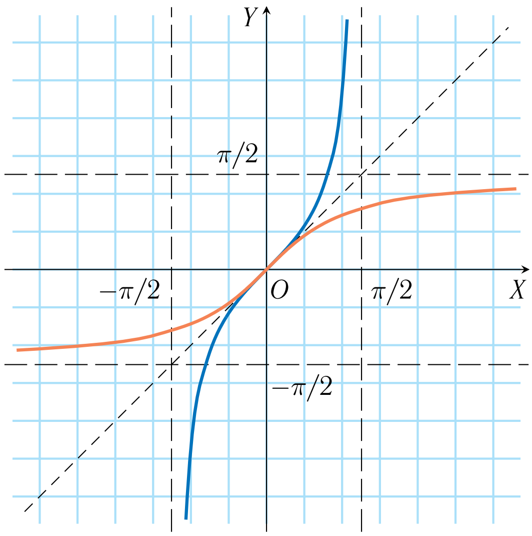


Рис. 92

График функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из бесконечного числа ветвей. На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ эта функция является монотонно возрастающей и имеет обратную функция $y = \operatorname{arctg} x$, которая называется *арктангенсом*. Её график, изображённый на рис. 92 красным цветом, естественно, симметричен ветке тангенсоиды, проходящей через начало координат, которая изображена синим цветом. Оба графика симметричны относительно начала координат, что означает их нечётность: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$. Отметим, что при неограниченном возрастании аргумента x значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ стремится к $\pi/2$, оставаясь меньше него. Нечётность арктангенса позволяет заключить, что $\operatorname{arctg} x \to -\pi/2$ при $x \to -\infty$.

Обратные тригонометрические функции применяются при решении тригонометрических и дифференциальных уравнений, при интегрировании, в теории вероятностей и в различных прикладных задачах.

Упражнения

1. Составьте таблицу значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ в интервале $(0, \pi)$, пользуясь таблицами синуса и косинуса. Убедитесь, что в этом интервале котангенс убывает и потому имеет обратную функцию (её называют *арккотангенс* и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$).

2. Постройте график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ и перечислите её основные свойства.

§ 8. Композиции функций. Элементарные функции

Понятие функции сложилось в процессе исторического развития математики, а сам термин «функция» ввёл Лейбниц. Математики XVII века оперировали с небольшим набором функций, называемых сейчас элементарными. К *основным элементарным функциям* относятся: постоянные и линейные функции, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Функции, как и числа, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Например, если разделить одну линейную функцию на другую, то получим так называемую *дробно-линейную функцию* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Если сложить несколько степенных функций вида ax^n, где n — натуральное число или нуль, то получим *многочлен*. Например, сумма трёх функций $y = ax^2$, $y = bx$ и $y = c$ даёт многочлен второй степени $y = ax^2 + bx + c$. Точно так же получается многочлен произвольной степени

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Многочлены играют важную роль и математике и её приложениях. Около ста лет назад Вейерштрасс доказал, что любую непрерывную на отрезке функцию можно с любой степенью точности приблизить некоторым многочленом подходящей степени. Если один многочлен поделить на другой, то получится *дробно-рациональная функция*, например: $y = \dfrac{x^2+3x-4}{x^3+1}$.

С функциями можно производить ещё одну операцию, которая не имеет аналога у чисел и называется *композицией*. Рассмотрим, например, функции $y = v^2$ и $v = x - 1$. Их композицией будет функция $y = (x-1)^2$, которая получается подстановкой значения $v = x - 1$ в выражение для y. Точно так же функция $y = e^{-x^2}$ представляет собой композицию функций $y = e^v$ и $v = -x^2$. Композиции функций называют ещё *сложными функциями*.

Пример 8.1. Найдите композицию следующих четырёх функций: $y = \sin u$, $u = v/z$, $v = x^2 + 1$, $z = 3x - 24$.

Решение. Выполнив все подстановки, получим $y = \sin \dfrac{x^2+1}{3x-24}$.

Теперь мы можем ответить на вопрос, что такое *элементарные функции*. К ним относят все перечисленные выше основные элементарные функции, а также функции, которые получаются из них с помощью *конечного*

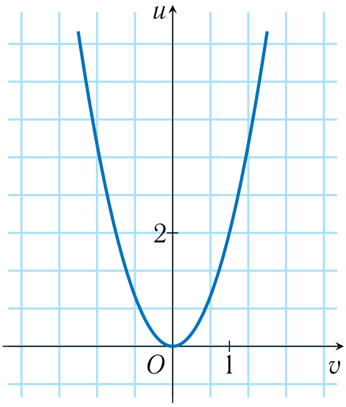


Рис. 93

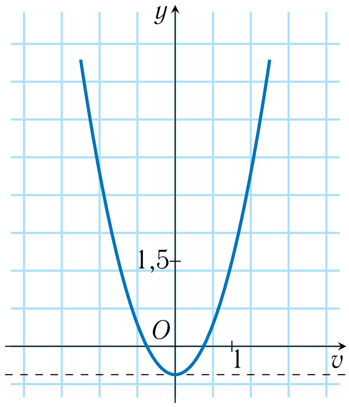


Рис. 94

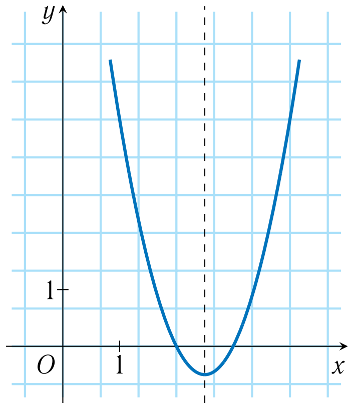


Рис. 95

числа арифметических операций и операции композиции. Например, элементарными являются функции $y = \ln\cos x$, $y = 2^{\sin x}$, $y = \lg x + \lg\lg x$. Более того, все функции, которые мы до сих пор рассматривали в этом курсе, являются элементарными. *Неэлементарные функции* получают с помощью предельного перехода, интегрирования и некоторыми другими способами. С неэлементарными функциями мы познакомимся в следующей главе.

Поскольку всякая элементарная функция является композицией каких-то основных элементарных функций, то её график можно построить, используя графики этих основных элементарных функций. Напомним, как это делается. Рассмотрим, например, квадратный трёхчлен

$$y = 2x^2 - 10x + 12. \tag{28}$$

Преобразуем правую часть, выделив полный квадрат:

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6{,}25) - 0{,}5 = 2(x - 2{,}5)^2 - 0{,}5.$$

Хорошо видно, что мы получили композицию трёх функций:

$$y = u - 0{,}5; \quad u = 2v^2; \quad v = x - 2{,}5. \tag{29}$$

Сначала построим график функции $u = 2v^2$ (рис. 93) на плоскости переменных u и v. Первое из равенств (29) $y = u - 0{,}5$ означает, что у каждой точки M плоскости мы уменьшаем её ординату u на 0,5, что равносильно перемещению горизонтальной оси v вверх. В результате получаем картину, изображённую на рис. 94, где прежнее положение оси обозначено пунктиром. Далее рассмотрим третье из равенств (29), записав его в виде $x = v + 2{,}5$. Это равенство означает, что прибавляя к абсциссе v каждой точки плоскости число 2,5, мы получаем в результате новое значение абсциссы x. Это равносильно тому, что мы сдвигаем ось Y на 2,5 единицы влево. На рис. 95 прежнее положение оси Y обозначено пунктиром.

Итак, график многочлена (28) получается сдвигом параболы $y = 2x^2$ на 2,5 единицы вправо и 0,5 единицы вниз. Числа 2,5 и $-0{,}5$ являются координатами вершины полученной таким образом параболы. С помощью аналогичных рассуждений строят графики и других элементарных функций.

Упражнения

1. Найдите композицию следующих функций: $y = u^v$, $u = \operatorname{arctg} z$, $z = 2x$, $v = \sqrt{x}$.

2. Представьте функцию $y = 1 + \ln(1 - \cos x)$ в виде композиции основных элементарных функций.

3. Постройте графики следующих функций вручную и с помощью системы компьютерной алгебры Maxima: а) $y = 2^{x-1} + 3$; б) $y = \lg(x + 1)$.

4. Процесс роста численности популяции описывается так называемой логистической функцией $f(t) = \dfrac{e^{0{,}1t}}{0{,}1 + 0{,}2e^{0{,}1t}}$, где $f(t)$ — численность популяции в момент времени t. Постройте график этой функции на отрезке [0,50] вручную и с использованием компьютера. Как ведёт себя функция $f(t)$ при неограниченном увеличении аргумента t?

§ 9. Дифференциальная функция Лапласа

Функция
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{30}$$
называется дифференциальной функцией Лапласа. Она широко применяется в задачах теории вероятностей и математической статистики, юристы встречаются с ней в курсе юридической статистики.

Прежде всего отметим, что функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде композиции следующих четырёх элементарных функций:
$$y = \frac{u}{\sqrt{2\pi}}, \quad u = e^{-v}, \quad v = \frac{z}{2}, \quad z = x^2. \tag{31}$$
Используя этот факт, можно находить значения функции $\varphi(x)$ в разных точках и анализировать её свойства. В Приложении 2 приведена подробная таблица значений этой функции, некоторые из них указаны в таблице 40.

Таблица 40

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	3	4
$\varphi(x)$	0,40	0,39	0,37	0,33	0,29	0,24	0,13	0,05	0,005	0,001

Переменные, входящие в правые части функций (31), могут принимать любые значения. Поэтому областью определения функции $\varphi(x)$ будет множество всех действительных чисел. Из формулы (30) вытекает равенство $\varphi(-x) = \varphi(x)$, означающее чётность дифференциальной функции Лапласа. Следовательно, её график симметричен относительно оси Y.

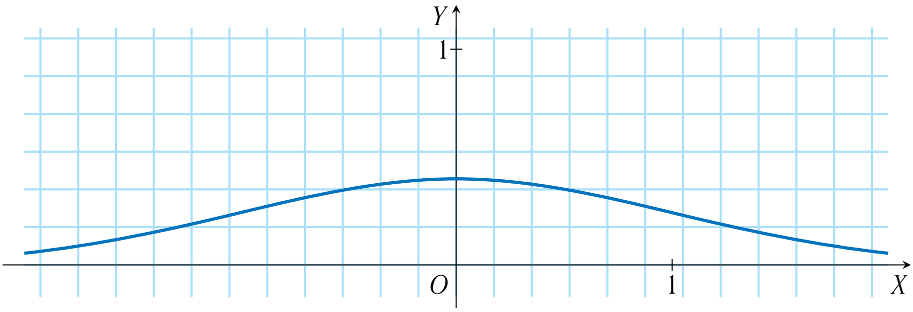


Рис. 96

Пользуясь этими свойствами и таблицей 40, построим график функции $\varphi(x)$ (рис. 96). Он имеет форму колокола, симметричного относительно оси Y. Вершина колокола лежит на оси симметрии, поэтому максимальное значение функции получается при $x = 0$, $\varphi(0) \approx 0{,}40$ (см. таблицу 40). С удалением от оси симметрии ветви графика асимптотически приближаются к оси абсцисс. Как видно из таблицы, при $x > 4$ и при $x < -4$ значения функции отличаются от нуля меньше, чем на 0,0001.

В приложениях часто используется также функция Гаусса

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{32}$$

где m и σ — некоторые числа (параметры), причём σ положительно, а число m может быть как положительным, так и отрицательным. Эта функция получается из функции Лапласа (30), если в последней переменную x заменить на $\dfrac{x-m}{\sigma}$ и затем поделить результат на σ. Поэтому функция Гаусса (32) связана с дифференциальной функцией Лапласа (30) соотношением

$$g(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{33}$$

С другой стороны, положив в последнем равенстве $m = 0$ и $\sigma = 1$, получим $g(x) = \varphi(x)$. Следовательно, дифференциальная функция Лапласа есть частный случай функции Гаусса. Гаусс использовал функции вида (32) при разработке *теории ошибок измерений*. Эти функции понадобятся нам в дальнейшем, когда мы будем изучать случайные величины. Построим график функции Гаусса, называемый также *колоколом Гаусса*.

Пример 9.1. Постройте график функции (32) при $m = 3$ и $\sigma = 2$.

Решение. Подставляя $m = 3$ и $\sigma = 2$ в уравнение (32), получим:

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}. \tag{34}$$

Применим те же рассуждения, что при построении простой гармоники преобразованиями синусоиды. Функция (34) получается из функции Лапласа (30) в результате следующих трёх преобразований: замены переменной x на переменную $x - 3$; деления аргумента на 2, то есть замены $x - 3$ на $\dfrac{x-3}{2}$; деления всей правой части на 2. В результате первого преобразования график функции Лапласа (см. рис. 96) сдвинется на 3 единицы вправо; при втором преобразовании график растянется в 2 раза вдоль оси X; третье сожмёт график в 2 раза вдоль оси Y. Окончательный результат изображён на рис. 97.

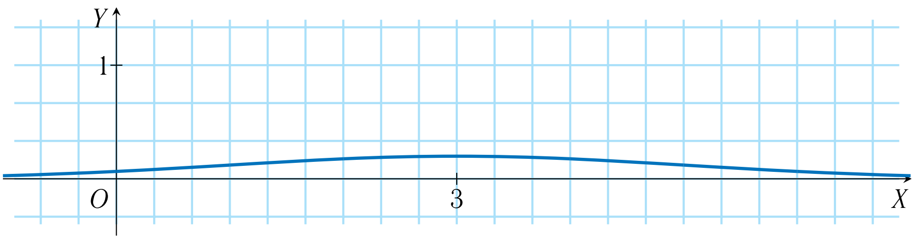


Рис. 97

Подобным образом можно построить график функции Гаусса (32) при любых m и σ. Осью симметрии этого графика является прямая $x = m$. При $\sigma < 1$ график функции Гаусса получается растяжением графика дифференциальной функции Лапласа вдоль оси Y и сжатием вдоль оси X, а при $\sigma > 1$ — сжатием вдоль оси Y и растяжением вдоль оси X.

Функцию Лапласа используют для приближённого вычисления биномиальных вероятностей. Напомним (см. §8 шестой главы), что биномиальные вероятности

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \tag{35}$$

возникают при решении задач, связанных с повторением опытов. Когда не было компьютеров, использование формулы (35) при больших значениях величин m и n приводило к значительным вычислительным трудностям. Лаплас доказал, что

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(a)}{\sqrt{np(1-p)}}, \tag{36}$$

где φ — функция Лапласа, а величина a вычисляется по формуле

$$a = \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}. \tag{37}$$

Погрешность формулы (36) уменьшается с ростом величины $np(1-p)$, поэтому её рекомендуется применять в тех случаях, когда $np(1-p)$ достаточно велико (например, не менее десяти).

Пример 9.2. Вероятность вступления в силу вердикта народного суда по гражданскому делу равна 0,6. (Иными словами, из десяти решений суда исполняются только шесть. Такова статистика!) В течение месяца судья принял решение по пятидесяти гражданским делам. Найдите вероятность того, что 30 из них вступят в законную силу без кассационного рассмотрения.

Решение. Назовём опытом проверку того, исполнен вердикт или нет. Согласно условию у нас 50 опытов, в каждом из которых может появиться событие A — вердикт вступил в законную силу. По условию задачи имеем $P(A) = p = 0{,}6$, поэтому $P_{50}(30) = C_{50}^{30}(0{,}6)^{30}(0{,}4)^{20}$.

Так как $n = 50$, а $p = 0{,}6$, то $np(1-p) = 12$. Поскольку $np(1-p) > 10$, то применение формулы (36) оправдано. Определим далее величину a по формуле (37). Так как $m - np = 0$, то $a = 0$. Таким образом,

$$P_{50}(30) \approx \varphi(0)/\sqrt{12} \approx 0{,}4/3{,}5 \approx 0{,}1.$$

Упражнения

1. С помощью формул (32) найдите значения функции $\varphi(x)$ в точках $x = 0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; 1.

2. Постройте график функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2(x+1)^2}$.

3. Решите пример 9.2 с помощью системы Maxima, проводя вычисления по формуле (35), и сравните результат с полученным выше.

4. На выборах мэра 40% избирателей Твери всегда голосуют за Петрова. Случайным образом отбирают 100 избирателей. Найдите вероятность того, что 50 из них проголосуют за Петрова.

Глава VIII

Идея предела

Идея предельного перехода — одна из самых плодотворных идей в математике. Предельный переход использовал ещё Архимед при вычислении площадей и объёмов. Эти вычисления совершенствовались два тысячелетия и привели к созданию дифференциального и интегрального исчисления — наиболее мощного и универсального математического метода. Он возник в трудах выдающихся учёных XVII–XVIII веков Ньютона и Лейбница и был усовершенствован усилиями математиков XIX–XX столетий: Коши[1], Вейерштрасса, Римана[2], Пуссена[3], Лебега[4], Лузина, Колмогорова, Хинчина[5] и многих других.

§ 1. Предел последовательности

Учёные исследуют окружающую действительность, разрабатывая для этого специальные приёмы, понятия и алгоритмы. Ниже мы рассмотрим простой механический процесс и опишем его с помощью понятия *последовательности*.

Бросим на пол теннисный мяч и будем фиксировать максимальную высоту отскока. Допустим, что первый раз мяч подскочил на один метр, второй — на $1/2$ метра, третий — на $1/3$ и т. д. Если этот процесс происходит в реальности, то мяч, в конце концов, остановится. Но если рассматривать математическую модель, то можно считать, что мяч продолжает отскакивать сколь угодно долго и высота n-го отскока равна $1/n$ метра.

В этой модели процесс описывается с помощью бесконечной последовательности чисел 1, $1/2$, $1/3$, $\ldots$, причём с увеличением номера n дробь $1/n$ уменьшается, приближаясь к нулю: $1/n < 0{,}001$ при $n > 1000$, $1/n < 10^{-6}$ при $n > 10^6$ и т. д. Говорят, что *число 0 является пределом последовательности* $\frac{1}{n}$ *при n, стремящемся к бесконечности*, и записывают это следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{1}$$

Знак lim есть сокращение от латинского слова «limes», то есть граница. Формулу (1) читают так: «предел дроби $\frac{1}{n}$ равен нулю при n, стремящемся к бесконечности».

[1]Огюстен Коши (1789–1857) — французский математик.
[2]Бернхард Риман (1826–1866) — немецкий математик.
[3]Валле Пуссен (1866–1962) — бельгийский математик.
[4]Анри Лебег (1875–1941) — французский математик.
[5]Александр Яковлевич Хинчин (1894–1959) — российский математик и педагог.

Рассмотрим ещё один пример. Зенон[6] в одном из своих парадоксов утверждает, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху. Действительно, рассуждает философ, пока Ахиллес добежит до того места, где была черепаха, она уже окажется в другом месте. Когда Ахиллес прибежит в это место, черепаха уже отползёт дальше, и т. д.

Рассмотрим парадокс Зенона более подробно. Предположим, что и Ахиллес, и черепаха — это точки, движущиеся по прямой с постоянными скоростями, причём скорость Ахиллеса в 10 раз больше скорости черепахи, а начальное расстояние между ними — 100 метров. Пока Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха отползёт на 10 метров, то есть расстояние между ними уменьшится в 10 раз. Когда Ахиллес пробежит эти 10 метров, она отползёт ещё на один метр, и т. д. Изобразим промежуточные старты Ахиллеса точками на числовой оси (рис. 98).

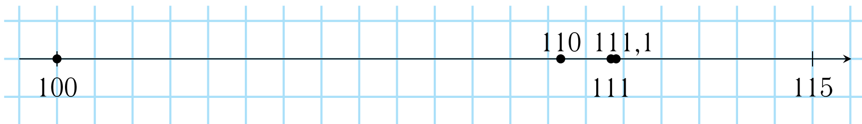


Рис. 98

Получившиеся точки образуют последовательность $S_1 = 100$, $S_2 = 100+10 = 110$, $S_3 = 100+10+1 = 111$, $S_4 = 100+10+1+0{,}1 = 111{,}1$ и т. д. Ясно, что они скапливаются около точки, координатой которой является периодическая дробь $S = 100+10+1+0{,}1+0{,}01+\ldots = 111{,}(1) = 111\frac{1}{9}$. Это число называется пределом последовательности S_1, S_2, S_3, …, что записывается следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 111\frac{1}{9}$. Именно в точке с координатой $111\frac{1}{9}$ Ахиллес и догонит черепаху.

Проблема, которую поставил Зенон в этом парадоксе, носит философский характер и связана не столько с обсуждением характера движения, сколько с более общими вопросами: что такое время, что такое непрерывность, можно ли придумать механизм, реализующий за конечное время бесконечное число процедур и т. д. Математики придумали много парадоксов — желающие могут прочитать об этом в популярной литературе.

Однако, вернёмся к последовательностям. Расстояния между соседними точками S_n, отмеченными на числовой оси (см. рис. 98), также образуют последовательность (100; 10; 1; 0,1; …), представляющую собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 0{,}1$. Её общий член $\dfrac{1}{10^{n-3}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ стремится к нулю при n, стремящемся к

---

[6]Зенон Элейский (ок. 490–430 до н.э.) — древнегреческий философ. При помощи парадоксальных доводов подвергал сомнению истины, кажущиеся несомненными.

бесконечности, поэтому предел этой последовательности тоже равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{10^{n-3}}=0$. Заметим, что путь S, который должен проделать Ахиллес до момента встречи с черепахой, равен сумме этой прогрессии, вычисляемой по известной из школы формуле

$$S=\frac{S_1}{1-q}=\frac{100}{1-0{,}1}=111\frac{1}{9}.$$

Естественно, мы получили тот же самый результат, что и выше.

Две последовательности из трёх, с которыми мы только что познакомились, имеют своим пределом число нуль. Такие последовательности называют *бесконечно малыми*.

Пример 1.1. Найдите и изобразите на числовой прямой несколько первых членов последовательности, задаваемой формулой $x_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$. Около какой точки скапливаются члены этой последовательности при стремлении n к бесконечности?

Решение. Найдём точки $x_1=2-1=1$, $x_2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, $x_3=2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$, $x_4=2-\dfrac{1}{8}=\dfrac{15}{8}$, $x_5=2-\dfrac{1}{16}=\dfrac{31}{16}$ и отметим их на прямой (рис. 99).

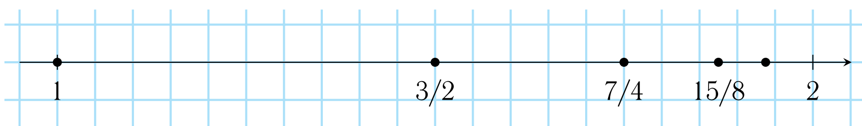


Рис. 99

Хорошо видно, что точки x_n скапливаются около точки с координатой 2. Это легко обосновать строго, вычислив разности $2-x_n$. В самом деле, $2-x_1=1$, $2-x_2=\dfrac{1}{2}$, $2-x_3=\dfrac{1}{4}$ …, $2-x_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$, …, то есть разности образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем 2. При увеличении n её члены становятся меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Например, при $n>31$ величина $\dfrac{1}{2^{n-1}}<\dfrac{1}{2^{30}}=\dfrac{1}{1024^3}<10^{-9}$. Поэтому последовательность $2-x_n$ является бесконечно малой, то есть имеет предел, равный нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0$. Об исходной последовательности x_n в этом случае говорят, что число два является её пределом, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Теперь дадим общее определение предела последовательности, используя понятие бесконечно малой последовательности.

Определение 1.1. Число A называется пределом последовательности a_1, a_2, a_3, ..., что записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \tag{2}$$

если разности $A - a_n$ образуют бесконечно малую последовательность, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(A - a_n) = 0$.

Пример 1.2. Найдите несколько первых членов последовательности, общий член которой задан формулой $u_n = \dfrac{3n-2}{7n+5}$, и вычислите её предел.

Решение. Получив три первых члена заданной последовательности

$$u_1 = \frac{3\cdot 1-2}{7\cdot 1+5} = \frac{1}{12}, \quad u_2 = \frac{3\cdot 2-2}{7\cdot 2+5} = \frac{4}{19}, \quad u_3 = \frac{3\cdot 3-2}{7\cdot 3+5} = \frac{7}{26},$$

мы не сможем сделать какие-то определённые выводы. Но если вычислим

$$u_{1000} = \frac{3000-2}{7000+5} = \frac{2998}{7005} \quad \text{и} \quad u_{10000} = \frac{30000-2}{70000+5} = \frac{29998}{70005},$$

то поймём, что при $n \to \infty$ величина u_n стремится к пределу $3/7$. Это можно обосновать строго, показав, что последовательность чисел $3/7 - u_n$ является бесконечно малой:

$$\frac{3}{7} - u_n = \frac{3}{7} - \frac{3n-2}{7n+5} = \frac{3(7n+5)-7(3n-2)}{7(7n+5)} = \frac{1}{7(7n+5)}.$$

Так как при возрастании n знаменатель последней дроби неограниченно возрастает, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{7} - u_n\right) = 0$, и, по определению 1.1, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3/7$.

Искомый предел можно найти проще, поделив числитель и знаменатель дроби на n:

$$u_n = \frac{3n-2}{7n+5} = \frac{3-2/n}{7+5/n}.$$

При $n \to \infty$ числитель получившейся дроби стремится к числу 3, а знаменатель — к числу 7, поэтому предел будет равен $3/7$. Законность таких рассуждений будет обоснована нами ниже.

Важное замечание. Понятие предела позволяет уточнить определение бесконечной десятичной дроби, рассматривая её как *предел последовательности десятичных приближений*. Например, число $1/3$ является пределом последовательности 0,3, 0,33, 0,333, ..., а число $\sqrt{2}$ — последовательности 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ... (см. стр. 14).

Упражнения

1. Будет ли последовательность $u_n = \dfrac{1}{3^n}$ бесконечно малой?

2. Выпишите несколько первых членов последовательности $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$, найдите значения u_{10}, u_{100}, u_{1000} и догадайтесь, чему равен предел этой последовательности. Обоснуйте полученный результат, преобразовав формулу, задающую общий член последовательности.

3. Найдите формулу для n-го члена последовательности, первые четыре члена которой равны соответственно $1/2$, $2/3$, $3/4$ и $4/5$. Выпишите ещё несколько её членов и найдите предел этой последовательности.

4. Превратите дробь $2/9$ в десятичную и выпишите последовательность u_1, u_2, u_3, ... её десятичных приближений. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2/9$.

§ 2. Задача Архимеда

Идею предельного перехода использовали ещё Евклид и Архимед для вычисления площадей фигур и решения других задач, хотя термина «предел» у них не было. Словом «limes» для обозначения предела впервые воспользовался Ньютон. Посмотрим, как с помощью предельного перехода величайший мыслитель древности Архимед решил задачу о вычислении площади под параболой. Вот как она формулируется в современных терминах.

Задача Архимеда. Найдите площадь S фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2$ и отрезками OA и AB, где O — начало координат, точка A лежит на оси абсцисс и имеет координаты $(1, 0)$, а точка В — координаты $(1, 1)$. Эта фигура изображена на рис. 100.

Решение. Разделим основание OA пополам и построим прямоугольник, основанием которого является отрезок $[1/2, 1]$, а высота равна значению функции $y = x^2$ в точке $x = 1/2$, то есть $1/4$. Обозначим площадь этого прямоугольника через s_1. Очевидно, что $s_1 = 1/2 \cdot 1/4 = 1/8$. Поскольку этот прямоугольник вписан в исходную фигуру OAB, то $s_1 < S$. Величину s_1 можно считать грубым приближением искомой площади S.

Чтобы найти более точное приближение числа S, разделим основание треугольника OA на бо́льшее число равных частей. Если разделить его на три равные части OA_1, A_1A_2 и A_2A и на отрезках A_1A_2 и A_2A построить прямоугольники, вписанные в криволинейный треугольник OAB (рис. 101), то их высоты будут равны значениям функции $y = x^2$ в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$ соответственно. Общая площадь s_2 этих прямоугольников равна $1/3 \cdot (1/3)^2 + (1/3) \cdot (2/3)^2 = 1/27 + 4/27 = 5/27$. Величина s_2 также удовлетворяет условию $s_2 < S$, но её значение больше, чем $s_1 = 1/8$, и она является более точным приближением числа S.

Если разделить основание OA на четыре равные части, то площадь трёх вписанных в криволинейный треугольник OAB прямоугольников окажется равной $s_3 = 1/4 \cdot (1/4)^2 + 1/4 \cdot (2/4)^2 + 1/4 \cdot (3/4)^2 = 7/32$. Действуя таким способом и дальше, мы получим последовательность s_1, s_2, s_3, ... площадей ступенчатых фигур, каждая из которых составлена из прямоугольников. На n-ом шаге длины оснований всех прямоугольников равны $\dfrac{1}{n+1}$, а их

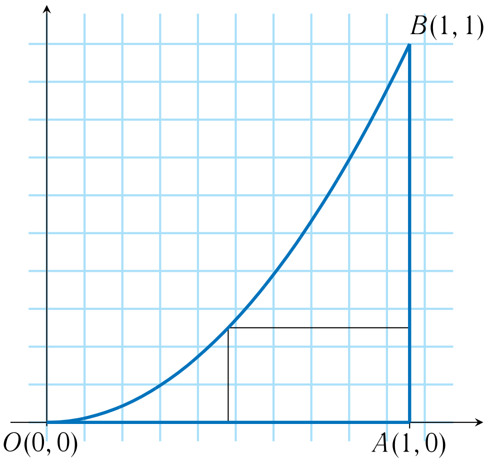


Рис. 100

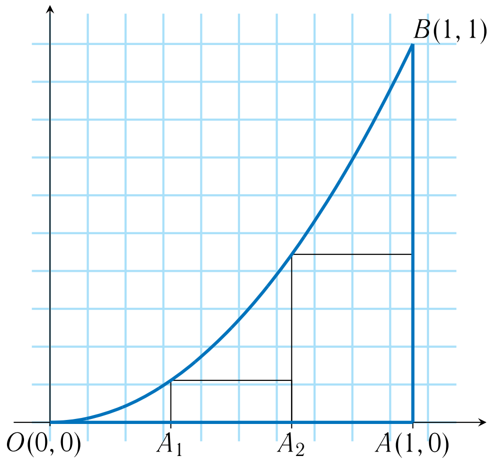


Рис. 101

высоты — значениям функции $y = x^2$ в точках $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$ (рис. 102). Сумма s_n площадей всех прямоугольников будет равна

$$s_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1^2}{(n+1)^2} + \frac{2^2}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)^3}.$$

Если далее воспользоваться известной формулой

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{3}$$

то выражение для величины s_n примет следующий вид:

$$s_n = \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)^2}.$$

Заметим, что $n(2n+1) = 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1$, поэтому после почленного деления на $(n+1)^2$ получим

$$s_n = \frac{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1}{6(n+1)^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+1)^2}. \tag{4}$$

Очевидно, что при любом n

$$s_n < S. \tag{5}$$

Рассмотрим далее последовательность ступенчатых фигур, *описанных* около нашего криволинейного треугольника OAB. Фигура, получающаяся на n-ом шаге, изображена на рис. 103. Она состоит из прямоугольников с длиной основания $\frac{1}{n+1}$ и высотами, равными соответственно $\frac{1^2}{(n+1)^2}$,

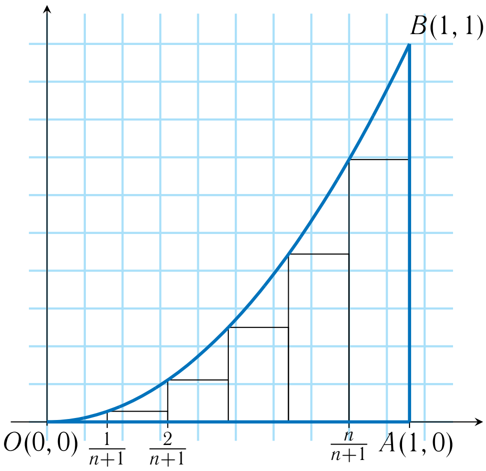


Рис. 102

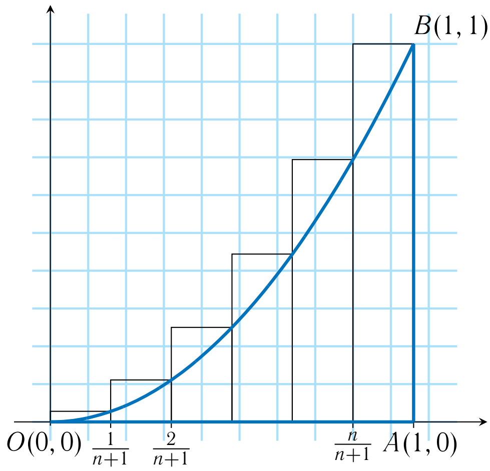


Рис. 103

$\dfrac{2^2}{(n+1)^2}, \ldots, \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = 1$. Обозначим сумму площадей этих прямоугольников через S_n.

Сравнивая рисунки 102 и 103, легко заметить, что величины S_n и s_n связаны между собой соотношением $S_n = s_n + \dfrac{1}{n+1}$. В самом деле, если сдвинуть все изображённые на первом из этих рисунков прямоугольники влево на расстояние, равное $1/(n+1)$, то мы получим картину, отличающуюся от второго рисунка только отсутствием самого правого из прямоугольников. Таким образом, площади S_n и s_n разнятся на величину площади этого прямоугольника, равную $\dfrac{1}{n+1}$, откуда, используя формулу (4), находим:

$$S_n = s_n + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+1)^2}. \tag{6}$$

Очевидно, что при любом n

$$S < S_n. \tag{7}$$

Итак, мы получили, что

$$s_n < S < S_n. \tag{8}$$

Из формул (4) и (6) следует, что при n, стремящемся к бесконечности, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$, поэтому из (8) получаем, что и $S = \dfrac{1}{3}$.

На протяжении двух тысяч лет учёные применяли рассмотренный метод для решения задач, связанных с вычислением площадей фигур, объёмов тел, координат центров тяжести тел и многих других задач. Великие учёные XVII века Ньютон, Лейбниц и другие блестящим образом подвели итоги этого многовекового марафона, заложив основы интегрального исчисления, о котором мы расскажем в параграфах 7 и 8.

Упражнения

1. Докажите формулу (3) методом математической индукции.

2. Замените в задаче Архимеда параболу $y = x^2$ на кубическую параболу $y = x^3$ и найдите площадь под ней, применив формулу

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{9}$$

3. Докажите формулу (9) методом математической индукции.

§ 3. Предел функции

Рассмотрим сначала одну из самых простых функций $y = x^2$. Обычно правую часть в аналитической записи функции обозначают через $f(x)$. Итак, у нас $f(x) = x^2$. Заметим, что значение этой функции в точке $x_0 = 2$ равно $y_0 = 4$, и возьмём на оси X бесконечную последовательность точек с координатами $x_n = 2 - 1/2^{n-1}$: $x_1 = 2 - 1 = 1$; $x_2 = 2 - 1/2 = 3/2$; $x_3 = 2 - 1/4 = 13/4$; ...

Эта последовательность, как мы выяснили в §1, имеет предел, равный двум: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Найдём значения функции $f(x)$ в выбранных точках:

$$\begin{gathered}
y_1 = f(x_1) = f(1) = 1;\\
y_2 = f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4};\\
y_3 = f(x_3) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
y_n = f(x_n) = f\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = 4 - \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{2n-2}}.
\end{gathered}$$

С увеличением номера n дроби $\dfrac{1}{2^{n-3}}$ и $\dfrac{1}{2^{2n-2}}$ стремятся к нулю, поэтому y_n стремится к четырём. В этом случае говорят, что предел функции $y = x^2$ при x, стремящемся к двум, равен четырём, и пишут:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

Говорят также, что предел функции $f(x)$ в точке $x = 2$ равен четырём.

Важное замечание. Математики любят придираться к своим результатам и проверяют их до тех пор, пока придраться уже будет не к чему. Такой подход гарантирует достоверность, или, как говорят математики, корректность. Так вот, в наших рассуждениях о пределе имеется существенный пробел. С самого начала мы выбрали последовательность $2 - 1$, $2 - 1/2$, $2 - 1/4$, ..., предел которой равен двум. Но такой же предел имеет и последовательность

$2-1$, $2-1/10$, $2-1/100$, ... Более того, последовательностей с пределом 2 бесконечно много.

Возникает вопрос: зависит ли предел функции $f(x)$ от выбора последовательности значений аргумента, то есть от того, *каким образом* независимая переменная x стремится к заданному значению 2? Оказывается, что нет, не зависит. Строгое определение предела функции включает в себя доказательство его независимости от выбора последовательности аргументов. Его мы здесь не приводим.

Мы рассмотрели простой пример, когда предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. В этом случае говорят, что функция *непрерывна* в точке x_0. Так, функции $kx+b$, x^2, e^x, $\sin x$ являются непрерывными в каждой точке. Но ценность столь сложных понятий, как последовательность, предел последовательности и предел функции состоит прежде всего в том, что с их помощью можно описывать поведение функций на границе области определения, то есть при таких значениях переменной x, в которых функцию определить трудно или невозможно.

Таблица 41

x	± 1	± 2	± 3	± 4	...
y	± 1	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 1/4$	...

Таблица 42

x	± 1	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 1/4$	...
y	± 1	± 2	± 3	± 4	...

Рассмотрим, например, функцию $y = f(x) = 1/x$, выражающую известный закон обратной пропорциональности. Значение $x = 0$ не входит в область определения этой функции, но мы можем описать это значение с помощью предела. Сначала найдём значения функции $f(x)$ в некоторых точках (таблицы 41 и 42). Из этих таблиц, а также из вида графика — гиперболы, изображённой на рис. 104, можно сделать следующие выводы. Если x стремится к бесконечности, то y стремится к нулю, что с использованием введённых выше обозначений можно записать так:

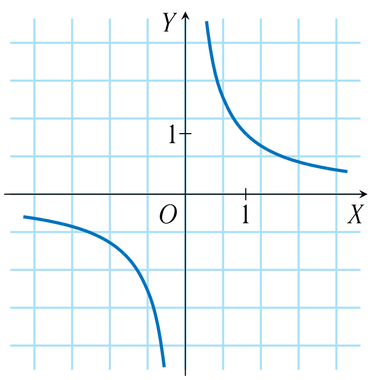


Рис. 104

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0. \tag{10}$$

Если же x стремится к нулю, то y неограниченно увеличивается:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty. \tag{11}$$

Заметим, что выражение «x стремится к бесконечности» означает, что x может принимать сколь угодно большие значения, или, как ещё говорят, становиться больше любого наперёд заданного числа. Геометрический смысл равенства (10) состоит в том, что расстояние от точки гиперболы до оси X стремится к нулю, когда эта точка неограниченно удаляется от начала координат. Прямые, к которым кривая подходит сколь угодно близко, называются *асимптотами*. Таким образом, ось X является горизонтальной асимптотой гиперболы $y = 1/x$. Точно так же из равенства (11) вытекает, что ось Y является её вертикальной асимптотой.

Следующие примеры показывают, что для нахождения предела иногда нужно проявить некоторую изобретательность.

Пример 3.1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-5}{x}$.

Решение. Здесь и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности, поэтому не ясно, к чему стремится дробь. Используем приём, который мы уже применяли в примере 1.2 этой главы: разделим почленно числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right).$$

Теперь видно, что если x увеличивается, то дробь $\dfrac{5}{x}$ уменьшается и стремится к нулю, поэтому рассматриваемый предел равен единице.

Пример 3.2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

Решение. Здесь сложность состоит в том, что при $x = 1$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Поэтому нельзя найти предел, просто подставив вместо x единицу. Но, поскольку многочлен, стоящий в числителе, обращается в нуль при $x = 1$, то это число будет его корнем. Заметив, что $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, запишем нашу функцию при $x \neq 1$ так: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}$. Сократив дробь на $x - 1$, получим функцию $g(x) = x - 2$, где аргумент x может принимать уже любые значения. Графиком функции $y = x - 2$ является прямая, а так как во всех точках, кроме $x = 1$, функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, то графиком функции $f(x)$ будет та же прямая, но без точки $(1, -1)$ (рис. 105).

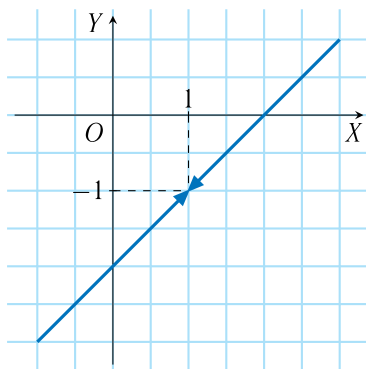


Рис. 105

Поэтому $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

При вычислении пределов последовательностей и функций используют следующие правила, которые мы приводим без доказательства.

1. Предел суммы функций равен сумме пределов этих функций.

2. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих функций.

3. Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если последний не равен нулю.

Пример 3.3. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x+7}{x^3}$.

Решение. Применим (после почленного деления) первое из правил:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+7}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} + \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^3} + \lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^3} = 1+0+0 = 1.$$

Пример 3.4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-2}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n}$.

Решение. В этой задаче нужно применить второе правило:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

Пример 3.5. Найдите $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^x(3x^2+2x-7)}{\sin\frac{\pi}{2}x}$.

Решение. Здесь можно применить третье правило:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2^x(3x^2+2x-7)}{\sin\frac{\pi}{2}x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2^x(3x^2+2x-7)}{\lim\limits_{x\to 1} \sin\frac{\pi}{2}x} = \frac{2(3+2-7)}{1} = -4.$$

Пример 3.6. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = \infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$.

Решение. Пусть x_n принимает значения 1, 2, 3 и т. д. Тогда соответствующие значения функции 3, 9, 27, ... также стремятся к бесконечности. Это и доказывает первое из равенств. Рассматрим далее значения функции $\dfrac{1}{3^x}$ в тех же точках x_n: $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{27}$, ... Поскольку это — бесконечно малая последовательность, то второе равенство тоже доказано.

Пример 3.7. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^2+1}$.

Решение. Воспользуемся последовательно правилами 3 и 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.8. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Решение. В этом примере имеется неопределённость вида $\infty-\infty$, которая может быть устранена умножением на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

При вычислении пределов с помощью системы компьютерной алгебры Maxima используется команда `limit`, аргументами которой являются функция (или последовательность), независимая переменная и точка, в которой ищется предел. В частности, команда `limit((x^3+3*x+7)/(x^3),x,INF)`. даёт решение примера 3.3. Имя `INF` (от infinity — бесконечность) используется здесь для обозначения бесконечности. Найти предел из примера 3.5 позволяет команда `limit((2^x*(3*x^2+2*x-7))/sin(%PI/2*x),x,1)`.

Компьютер даёт возможность мгновенно находить и такие пределы, для вычисления которых правил 1—3 недостаточно.

Пример 3.9. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Набрав `limit((x-sin(x))/x^3,x,0)`, получим ответ $\dfrac{1}{6}$.

Упражнения

1. Найдите предел функции $y=2x+3$ в точке $x=-1$; функции $y=\sin x$ в точке $x=\pi/4$; функции $y=e^x$ в точке $x=0$.

2. Найдите предел функции $y=1/x^2$ при $x\to\infty$ и при $x\to 0$. Постройте график этой функции и выясните, есть ли у него асимптоты.

3. Найдите следующие пределы «вручную» и с использованием ЭВМ:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3}{2-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to-\frac{7}{2}}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$.

4. С помощью системы компьютерной алгебры Maxima найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}}{x^5}$.

§ 4. Замечательные пределы

Вычисление сложных пределов — занятие весьма непростое, и для каждого из них приходится придумывать свой способ доказательства. Мы рассмотрим только два самых важных предела, которые называются, соответственно, *первым и вторым замечательными пределами*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{13}$$

Чтобы доказать второе из этих равенств, вспомним, что предел не зависит от выбора последовательности значений переменной x, стремящейся к бесконечности. Составим эту последовательность из натуральных чисел и вычислим соответствующие значения функции: $f(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$, $f(2)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $f(3)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$, … Для нахождения значения функции $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^n.$$

Подставляя сюда $a=1$ и $b=\frac{1}{n}$, получаем:

$$f(n)=2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}. \tag{14}$$

Правая часть этого равенства увеличится, если каждую из дробей $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$, … заменить на единицу, поэтому

$$f(n)<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \tag{15}$$

Правая часть полученного неравенства есть в точности сумма первых n слагаемых того самого ряда, с помощью которого мы определили неперово число e. Поэтому, устремляя n к бесконечности, мы получим

$$\lim_{n\to\infty}f(n)\leqslant e. \tag{16}$$

Обратите внимание, что из *строгого* неравенства (15) в результате предельного перехода получилось *нестрогое* неравенство (16). Это следствие одной из теорем теории пределов: если $f(x)<g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Вернёмся теперь снова к равенству (14). Все слагаемые в его правой части — числа положительные. Поэтому, если несколько последних слагаемых отбросить, оставив только k первых, то правая часть уменьшится и мы получим неравенство

$$f(n) > 2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}.$$

Устремим n к бесконечности. Поскольку при этом каждая из дробей $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}, \ldots, \frac{n-k+1}{n}$ стремится к единице, мы получаем неравенство

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}. \tag{17}$$

Из наших рассуждений вытекает, что k — число слагаемых слева — может быть любым, поэтому неравенство сохранится, если k устремить к бесконечности! Но тогда слева снова получится бесконечный ряд, то есть неперово число e. Таким образом, мы пришли к неравенству

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \geqslant e. \tag{18}$$

Из неравенств (16) и (18) следует

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

что и требовалось доказать.

Формулу (12) проще всего получить из геометрических соображений. Рассмотрим окружность единичного радиуса и острый угол x $(0 < x < \pi/2)$, опирающийся на дугу AN (рис. 106), длина которой по известной из школы формуле равна произведению радиуса на радианную меру угла: $|\smile AN| = 1 \cdot x = x$. Согласно определению синуса, $|AM| = \sin x$, а по определению тангенса длина отрезка BN равна тангенсу этого угла: $|BN| = \operatorname{tg} x$. Так как $|AM| < |\smile AN| < |BN|$, то справедливо неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, которое после почленного деления на x примет вид

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Перейдём к пределу при $x \to 0$, помня о том, что при этом строгие неравенства переходят в нестрогие. Кроме того, воспользуемся тем, что предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}.$$

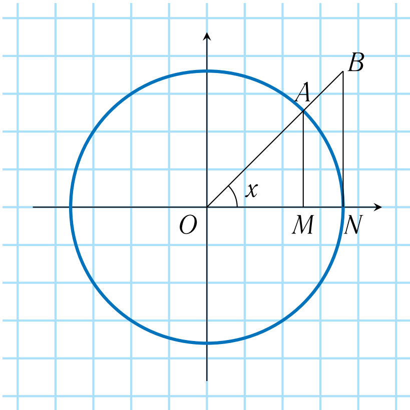


Рис. 106

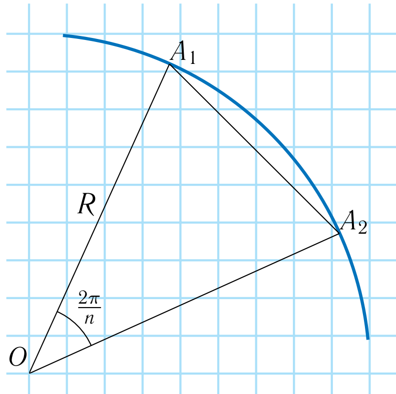


Рис. 107

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, то получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x},$$

откуда и вытекает равенство (12):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Покажем, как с помощью предела (12) вычислить площадь круга. Впишем в круг радиусом R правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. Он состоит из n одинаковых треугольников, один из которых изображён на рис. 107. Площадь треугольника OA_1A_2 вычисляется по известной формуле

$$S_{\triangle OA_1A_2} = \frac{1}{2}|OA_1||OA_2|\sin\angle A_1OA_2 = \frac{1}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Площадь S_n n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ в n раз больше: $S_n = \dfrac{1}{2}R^2 n \sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Если число n сторон многоугольника стремится к бесконечности, то он сам неограниченно приближается к окружности, а его площадь S_n стремится к площади круга (обозначим её S). Применяя правила вычисления пределов и формулу (12), находим:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \pi R^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi R^2 \cdot \lim_{\frac{2\pi}{n}\to 0} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi R^2.$$

Упражнения

1. С помощью формулы (12) найдите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

2. С помощью формулы (13) найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$.

§ 5. Производная и её вычисление

Наиболее естественно к понятию производной мы приходим из кинематических соображений. Напомним, что скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно, вычисляется по формуле $v = s/t$. Рассмотрим материальную точку, движущуюся прямолинейно, но не обязательно равномерно, и найдём скорость её движения в различные моменты времени. Предположим, что к моменту времени t тело прошло путь $s(t)$, а к моменту времени $t+h$ (то есть ещё через промежуток времени h) — путь $s(t+h)$. Тогда средняя скорость движения на этом участке вычисляется по формуле:

$$v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Если величина временного промежутка h будет стремиться к нулю, то и путь, пройденный за этот промежуток, также будет уменьшаться и стремиться к нулю. При этом их отношение — средняя скорость v_{cp} движения на этом промежутке — будет стремиться к некоторой величине, которая называется *мгновенной скоростью*, или просто *скоростью* движения в момент времени t, и обозначается через $v(t)$. Используя определение предела, можно записать формулу для мгновенной скорости так:

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}. \tag{19}$$

Эта формула является строгим определением мгновенной скорости и одновременно даёт способ для её вычисления. Предел $v(t)$ существует при естественном допущении, что в момент времени t не было никаких катаклизмов: поезд не сошел с рельсов, не было столкновения или резкого торможения, не изменился внезапно коэффициент трения, на пути не оказалась летающая тарелка и т. п.

Пример 5.1. Найдём мгновенную скорость равномерного движения.

Решение. При равномерном движении пройденный путь пропорционален времени, то есть $s(t) = kt$, где k — постоянное число. Используя формулу (19), вычислим мгновенную скорость в точке t:

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k(t+h)-kt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kh}{h} = k.$$

Пример 5.2. До Галилея считалось, что все тела падают с постоянной скоростью, а проверить это на практике было сложно. Галилей высказал предположение, что свободное падение является равноускоренным, то есть путь пропорционален квадрату времени, $s = ct^2$. В соответствии с этим предположением найдём скорость тела в момент времени t.

Решение. Вновь воспользуемся формулой (19):

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{c(t+h)^2 - ct^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c(t^2+2th+h^2) - ct^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2tc + ch) = 2ct.$$

Величина $2c$ была найдена опытным путём. Она называется ускорением свободного падения и обычно обозначается буквой g, причём $g \approx 9{,}8\,м/сек^2$.

Теперь откажемся от физической терминологии и перейдём к стандартным математическим обозначениям. Вместо «путь $s(t)$» будем говорить «функция $f(x)$», а вместо «скорость в момент t» — «производная от функции $f(x)$ в точке x». Будем записывать функцию, как обычно, $y = f(x)$, а производную от этой функции в точке x будем обозначать, как это принято, через $f'(x)$. Итак, по определению,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{20}$$

Обобщением полученных выше формул $(kx)' = k$ и $(cx^2)' = 2cx$ является формула производной от степенной функции:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{21}$$

Доказательство получается с помощью бинома Ньютона:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

По определению производной

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right).$$

Пользуясь далее правилом вычисления предела суммы, получаем

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \lim_{h\to 0} \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + \lim_{h\to 0} h^{n-1} = nx^{n-1},$$

так как все пределы, кроме первого, равны нулю. Хотя мы доказали формулу (21) только для натуральных n, она оказывается справедливой также для отрицательных, дробных и, вообще, для любых действительных степеней. Например,

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Сделаем одно замечание по поводу терминологии. Вместо «производная от функции $f(x)$» правильнее было бы говорить «производная функция от функции $f(x)$», но, как правило, употребляют более короткий вариант. Говорят также «производная функции $f(x)$».

При $n=0$ степенная функция превращается в постоянную, производная которой по формуле (21) оказывается тождественно равной нулю:

$$C' = 0. \tag{22}$$

Этот факт легко доказать и непосредственно, пользуясь определением (20).

Вычислим производные от других элементарных функций. Для нахождения производной синуса воспользуемся известной тригонометрической формулой разности синусов: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Пользуясь определением производной и свойствами предела, получаем:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Первый сомножитель равен единице, так как это первый замечательный предел, рассмотренный в предыдущем параграфе. Второй предел находится простой подстановкой: $\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right) = \cos(x+0) = \cos x$. Итак, *производная от синуса равна косинусу*:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{23}$$

Аналогично доказывается, что

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{24}$$

Производную от показательной функции $y=a^x$ можно найти, используя второй замечательный предел. Оказывается, что

$$(a^x)' = a^x\ln a. \tag{25}$$

Напомним, что $\ln a$ является сокращённой записью для $\log_e a$, где e — неперово число. В частности, при $a=e$ получаем важную формулу

$$(e^x)' = e^x. \tag{26}$$

Вычислим производную функции $y=\ln x$, преобразовав предварительно дробь $\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$ с помощью известных свойств логарифма:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln x^a = a\ln x.$$

Имеем:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = \ln\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h\cdot 1/x} =$$
$$= \ln\left(\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}\right)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}.$$

Обозначим $y = x/h$ и заметим, что при h, стремящемся к нулю, y стремится к бесконечности. При переходе к пределу (при $h \to 0$) получим:

$$(\ln x)' = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right).$$

Но $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y} = e$ — это второй замечательный предел, и, таким образом, $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}\right) = \ln e = 1$. Поскольку в рассматриваемой нами процедуре предельного перехода величина x является постоянной, то $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$. Окончательно получаем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{27}$$

Выведенная формула является частным случаем более общей формулы производной от логарифмической функции $y = \log_a x$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}. \tag{28}$$

При $a = e$ эта формула превращается в формулу (27).

Следующие правила вычисления производных вытекают из рассмотренных в предыдущем параграфе свойств пределов. В них предполагается, что производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x существуют.

1. Производная суммы функций равна сумме производных этих функций:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x).$$

Методом математической индукции легко доказать, что это правило справедливо для любого числа слагаемых.

2. Числовой множитель можно выносить за знак производной:

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

3. Производную от произведения двух функций находят по формуле

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

4. Производную от частного двух функций находят по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. Производную от сложной функции $f(u(x))$ (композиции функций $f(u)$ и $u(x)$) вычисляют по следующей формуле, называемой «цепным правилом»:

$$f(u(x))' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Это правило обобщается на любое число компонент. Например, для композиции четырёх функций имеем: $f(u(v(g(x)))) = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(g) \cdot g'(x)$.

Пример 5.3. Найдите производную от функции $\left(\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + \ln x\right)$.

Решение. Воспользуемся первыми двумя правилами и производными показательной и логарифмической функций:

$$\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \ln x\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)' + (\ln x)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$

Пример 5.4. Найдите производные от следующих функций: а) $3\sqrt{x}$; б) $\dfrac{4}{x}$; в) $-10\cos x$; г) $13 \cdot 2^x$; д) $6 \lg x$.

Решение. Опять воспользуемся первыми двумя правилами и найденными ранее формулами производных основных элементарных функций:

а) $(3\sqrt{x})' = 3 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$;

б) $\left(\dfrac{4}{x}\right)' = 4 \cdot \left(x^{-1}\right)' = 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \dfrac{4}{x^2}$;

в) $(-10\cos x)' = -10 \cdot (\cos x)' = 10 \sin x$;

г) $(13 \cdot 2^x)' = 13 \cdot (2^x)' = 13 \cdot 2^x \cdot \ln 2$;

д) $(6 \lg x)' = 6 \cdot (\lg x)' = 6 \cdot \dfrac{1}{x \ln 10} = \dfrac{6}{x \ln 10}$.

Пример 5.5. Найдите производные от функций а) $y = x^3 + x^2 + 1 + 1/x$ и б) $y = ax^2 + 2bx + c$, где a, b и c — постоянные.

Решение. Действуем аналогично:

а) $y' = (x^3 + x^2 + 1 + 1/x)' = (x^3)' + (x^2)' + 1' + (1/x)' = 3x^2 + 2x + 0 + (x^{-1})' = 3x^2 + 2x + (-1)x^{-2} = 3x^2 + 2x - 1/x^2$;

б) $y' = (ax^2 + 2bx + c)' = a(x^2)' + 2b(x)' + c' = a \cdot 2x + 2b = 2ax + 2b$.

Вычисление производных называют также *дифференцированием*.

Пример 5.6. Продифференцируйте функции: а) $y = x \sin x$ и б) $y = 3x^2 e^x$.

Решение. Здесь нужно воспользоваться третьим правилом:

а) $y' = (x \cdot \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$;

б) $y' = 3(x^2 e^x)' = 3\big((x^2)' e^x + x^2 (e^x)'\big) = 3(2xe^x + x^2 e^x) = 3xe^x(2 + x)$.

Пример 5.7. Продифференцируйте функции: а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ и б) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение. В этом случае необходимо применить четвёртое правило:
а) $y' = \dfrac{\sin' x \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$;
б) $y' = \dfrac{(e^x)' \cdot x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{x^4} = \dfrac{x^2 e^x - 2xe^x}{x^4} = \dfrac{x-2}{x^3} e^x$.

Пример 5.8. Продифференцируйте функции: а) $y = (2x-1)^2$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = e^{x^2}$.

Решение. Все три функции являются сложными и для решения задачи необходимо применененить пятое правило.
а) Имеем композицию функций $y = u^2$ и $u = 2x - 1$, поэтому

$$((2x-1)^2)' = (u^2)'(2x-1)' = 2u \cdot (2x)' = 2(2x-1) \cdot 2 = 4(2x-1).$$

б) Здесь $y = \sin u$, $u = 2x$, поэтому

$$(\sin 2x)' = (\sin u)'(2x)' = (\cos u) \cdot 2 = 2\cos 2x.$$

в) Положим $y = e^u$, $u = x^2$, тогда $\left(e^{x^2}\right)' = (e^u)'(x^2)' = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.

Пример 5.9. Найдите производную от функции $y = \ln(\sin(x^2))$.

Решение. Здесь мы имеем композицию трёх функций: $y = \ln u$, $u = \sin v$ и $v = x^2$, поэтому

$$(\ln(\sin(x^2)))' = (\ln u)' \cdot (\sin v)' \cdot (x^2)' = \frac{1}{u} \cdot \cos v \cdot (2x) = \frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}.$$

Хотя дифференцирование функций является простой процедурой и производные всегда могут быть найдены «вручную», системы компьютерной алгебры дают возможность находить производные заданных функций со значительно меньшими затратами сил и времени. Для нахождения производной в системе Maxima используется команда `diff`, первым аргументом которой является функция, а вторым — переменная, по которой производится дифференцирование. Например, производную от степенной функции $y = x^n$ можно найти, выполнив команду `diff(x^n,x)`, а для вычисления производной из примера 5.9 — команду `diff(log(sin(x^2)),x)`. С помощью компьютера можно найти производные весьма сложных функций.

Пример 5.10. Продифференцируйте функцию $(\sin x)^{(\cos x)^x}$ (здесь $\sin x$ возводится в степень $(\cos x)^x$).

Решение. Команда `diff(sin(x)^(cos(x)^x),x)` даёт результат

$$(\sin x)^{\cos^x x} \left(\cos^x x \left(\log\cos x - \frac{x\sin x}{\cos x} \right) \log\sin x + \frac{(\cos x)^{x+1}}{\sin x} \right),$$

в котором вместо принятого в русском языке обозначения ln используется его англоязычный вариант log.

Упражнения

1. Используя правила дифференцирования и считая производные от основных элементарных функций известными, найдите производные от следующих функций: а) $3{,}4x^2$; б) $2/\sqrt{x}$; в) $6/x^3$; г) $-\cos x$; д) $12\sin x$; е) $10\cdot 3^x$; ж) $17e^x$; з) $6\lg x$.

2. Используя правило вычисления производной от сложной функции, найдите следующие производные: а) $\big((5x-1)^4\big)'$; б) $(\cos 5x)'$; в) $(\sin 6x)'$; г) $(e^{-2x})'$; д) $\big(\ln(3x+2)\big)'$; е) $\Big(e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)'$.

3. Докажите следующее правило дифференцирования произведения:

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \tag{29}$$

Как оно будет выглядеть для произведения четырёх функций?

4. Найдите производную от функции $y = x^2e^x\sin x$, воспользовавшись формулой (29).

5. С помощью компьютера проверьте правильность всех вычислений в упражнениях 1—4.

6. Продифференцируйте с использованием системы компьютерной алгебры следующие функции: а) $\big(x\sin 3x + \cos(x^2)\big)^x$; б) $\sin x\Big(\operatorname{tg}\big(x^2(e^x - x)\big)\Big)$; в) $\sin\Big(\cos\big(\ln(1+x^n)+x^2\big)+x^3\Big)$.

§ 6. Приложения производной

Понятие производной имеет широкие приложения. Как мы уже знаем, производная от пути по времени — это скорость. Но понятие скорости возникает не только при движении. Скорость — важнейшая характеристика многих физических, химических, физиологических и других процессов, происходящих в природе, в человеке, на различных производствах и т. д.

Пример 6.1. Тело массой 50 *кг* движется прямолинейно по следующему закону: $s = t^2 + 3t + 1$, где s — путь (в метрах), а t — время (в секундах). Определите кинетическую энергию тела в момент $t = 10$.

Решение. Кинетическую энергию E движущегося тела находят по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса тела, а v — его скорость. Найдём скорость тела в момент времени t: $v = (t^2+3t+1)' = 2t+3$. При $t = 10$ получаем $v = 23\dfrac{\text{м}}{\text{сек}}$, поэтому $E = (50\cdot 23^2)/2 = 13225\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{сек}^2}$.

Пример 6.2. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в химической реакции, и временем t имеет вид $x = 150(1-e^{-10t})$, где e — неперово число. Найдите скорость реакции.

Решение. Скорость реакции (обозначим её v) — это скорость изменения с течением времени количества вещества, получаемого в результате реакции. Поскольку скоростью изменения функции является её производная, то в нашем случае скорость равна производной от x по t: $v = \big(150(1-e^{-10t})\big)' = 150\cdot(-e^{-10t})\cdot(-10t)' = 1500\cdot e^{-10t}$.

Производная от скорости называется ускорением, она характеризует скорость изменения скорости. При равномерном движении ускорение равно нулю, при равноускоренном движении оно постоянно. Если же движение (или процесс) описывается некоторой произвольной функцией, то ускорение, вообще говоря, не постоянно и представляет собой столь же важную характеристику, как и скорость.

Заметим, что производная от производной функции $f'(x)$ называется второй производной от функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$: $\big(f'(x)\big)' = f''(x)$. Таким образом, ускорение является второй производной от пути по времени.

Пример 6.3. Материальное тело под действием некоторой силы движется по закону $s = 1 + 2t + 9t^2$. Покажите, что действующая сила постоянна.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, действующая сила F равна произведению массы m тела на его ускорение: $F = ma$. Ускорение — это вторая производная от функции $s(t)$. Дифференцируя эту функцию, находим $a = (1 + 2t + 9t^2)'' = (2 + 18t)' = 18$. Следовательно, $F = 18m$.

Из определения производной вытекает важнейшее свойство дифференцируемых функций. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ положительна, то функция $f(x)$ на этом отрезке монотонно возрастает; если $f'(x) < 0$, то функция монотонно убывает.

Другое важное приложение производной — нахождение наибольших и наименьших, или, как ещё говорят, экстремальных значений функции. Оно основано на следующем утверждении, которое даёт необходимое условие существования экстремума.

Теорема 6.1. *Если функция принимает в некоторой точке x_0 экстремальное значение и производная в этой точке существует, то она, то есть производная, в этой точке равна нулю.*

Пример 6.4. Нужно огородить некоторую прямоугольную площадку, прилегающую к прямолинейному забору, решёткой длиной 120 *м* (рис. 108). Как выбрать размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

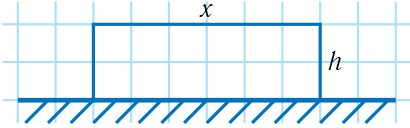


Рис. 108

Решение. Пусть длина стороны прямоугольника, примыкающей к забору, равна x, а длина другой — h. По условию задачи имеем $x + 2h = 120$, поэтому $h = 60 - x/2$, и площадь S прямоугольника равна $x(60 - x/2)$.

Эту функцию нам нужно исследовать на максимум, то есть найти такое значение x, при котором площадь будет максимальной. Перепишем полученную формулу в виде $S = 60x - x^2/2$ и найдём производную:

$$S' = (60x)' - (x^2/2)' = 60 - \frac{1}{2}(x^2)' = 60 - \frac{1}{2} \cdot (2x) = 60 - x.$$

Согласно теореме 6.1 в точке экстремума производная должна быть равна нулю. Приравнивая S' к нулю, получаем уравнение $60-x=0$, из которого находим $x_0 = 60$, и, следовательно, $h = 30$.

Как уже было сказано, сформулированная выше теорема даёт необходимое, но не достаточное условие существования экстремума. Для того, чтобы определить, есть ли экстремум в точке x_0 на самом деле, находят знак производной вблизи этой точки, справа и слева от неё. В нашей задаче, например, из равенства $S' = 60-x$ видно, что если $x < 60$, то производная S' будет положительна. Но если скорость изменения функции положительна, то функция возрастает. Следовательно, при $x < 60$ функция S возрастает. Если же $x > 60$, то $S' < 0$ и функция S убывает. Поэтому график функции S в окрестности точки $x_0 = 60$ имеет вид горба (рис. 109), и в этой точке функция действительно достигает максимума.

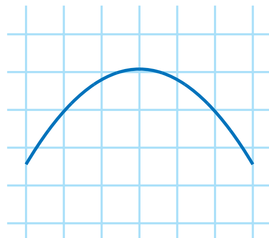


Рис. 109

Пример 6.5. Нужно перевезти груз на расстояние 2000 *км*. Суточные расходы при транспортировке складываются из двух частей: постоянной величины, равной 10 *руб.*, и переменной величины, равной кубу скорости, умноженной на коэффициент $k = 4 \cdot 10^{-8}$. При какой постоянной скорости транспортировка груза будет наиболее экономичной?

Решение. Пусть скорость транспортировки (обозначим её v) измеряется числом километров, пройденных за одни сутки (*км/сутки*). Тогда время, затраченное на транспортировку груза, равно $2000/v$ суток. Расходы на перевозку за одни сутки равны, согласно условию задачи, $10 + kv^3$. Следовательно, общая сумма расходов по транспортировке (обозначим её y) будет равна

$$y = (10 + kv^3)\frac{2000}{v}.$$

Наша задача — найти такое значение v_0 скорости v, при котором значение функции y будет наименьшим. Преобразуем выражение для y, переписав его в виде:

$$y = 2000\left(\frac{10}{v} + kv^2\right).$$

Пользуясь правилами дифференцирования, найдём производную:

$$y' = 2000\left(-\frac{10}{v^2} + 2kv\right) = 2000 \cdot \frac{-10 + 2kv^3}{v^2}. \tag{30}$$

Приравнивая производную к нулю, получим уравнение $2kv^3 - 10 = 0$, решением которого будет величина $v_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{k}}$. Подставляя сюда значение $k = 4 \cdot 10^{-8}$, найдём численное значение v_0:

$$v_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{4 \cdot 10^{-8}}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 2 \cdot 10^8}{8}} = \frac{10^3}{2} = 500 \text{ км/сутки}.$$

Из равенства (30) видно, что если $v < 500$, то производная отрицательна, а если $v > 500$, то положительна. Следовательно, при $v < 500$ функция y убывает, при $v > 500$ — возрастает, а в точке $v = 500$ имеет минимум. Таким образом, при скорости $v = 500$ транспортировка груза будет наиболее экономичной. Её стоимость найдём, подставив в формулу значение $v = 500$:

$$y = (10+kv^3)\frac{2000}{v} = (10+4\cdot10^{-8}\cdot500^3)\cdot\frac{2000}{500} = 4\left(10+\frac{4\cdot125}{100}\right) = 60 \text{ } \textit{руб.}$$

Пример 6.6. Лагерь геологов расположен на расстоянии 6 *км* от большой реки, протекающей с юга на север и отделённой от лагеря лесом. На расстоянии 10 *км* от лагеря находится переправа через реку. Геологу нужно дойти от лагеря до переправы. Он может продвигаться по лесу со скоростью 6 *км/час*, а вдоль берега реки — со скоростью 10 *км/час*. В какую точку на берегу реки должен направиться геолог, чтобы его путь до переправы занял наименьшее время? Найдите это время.

Решение. На рис. 110 лагерь обозначен точкой A, переправа — точкой C, а маршрут геолога — линией ADC. Так как $|AB| = 6$, а $|AC| = 10$, то по теореме Пифагора находим $|BC| = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$. Обозначив $|BD| = x$, получим $|CD| = 8-x$ и по той же теореме Пифагора найдём, что $|AD| = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{36+x^2}$. Пусть t — время движения геолога по маршруту ADC. Тогда по условию

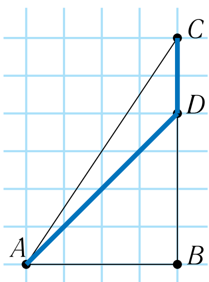


Рис. 110

$$t = \frac{AD}{6} + \frac{DC}{10} = \frac{\sqrt{36+x^2}}{6} + \frac{8-x}{10}.$$

Нам нужно найти такое значение x_0 переменной x, при котором время t будет наименьшим. Пользуясь правилами вычисления производных, найдём производную от функции t:

$$t' = \frac{2x}{6\cdot2\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{10}.$$

Приравнивая производную к нулю, получим уравнение $5x = 3\sqrt{36+x^2}$, которое после возведения в квадрат примет вид $25x^2 = 9(36+x^2)$. Положительный корень этого уравнения будет $x_0 = 4{,}5$. Из выражения для производной t' видно, что при $x < 4{,}5$ она отрицательна, а при $x > 4{,}5$ — положительна. Следовательно, в точке $x_0 = 4{,}5$ функция t достигает минимума, поэтому наименьшее время на путь до переправы будет затрачено по маршруту ADC, при условии, что точка D удалена от точки B на 4,5 *км*. Подставляя x_0 в выражение для x, получаем:

$$t_{\min} = \frac{15}{2\cdot6} + \frac{7}{2\cdot10} = 1\frac{6}{10} \text{ } \textit{часа} = 1 \text{ } \textit{час} \text{ } 36 \text{ } \textit{мин.}$$

Для сравнения вычислим время движения по маршрутам AC и ABC. По прямой AC время $t_1 = \frac{10}{6}$ *часа* $=$ 1 *час* 40 *мин.*, а по ломаной ABC — время $t_2 = 1\frac{8}{10}$ *часа* $=$ 1 *час* 48 *мин.*

Теорема 6.2. *Производная от функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке,* $y' = \operatorname{tg}\alpha$ (рис.111).

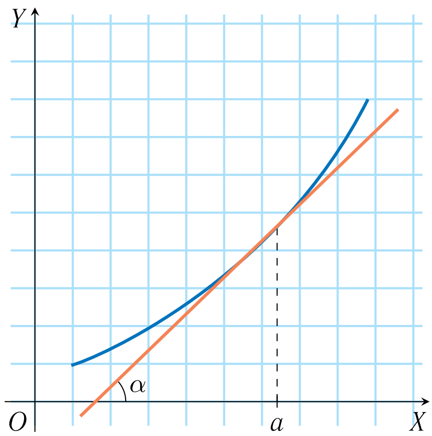


Рис. 111

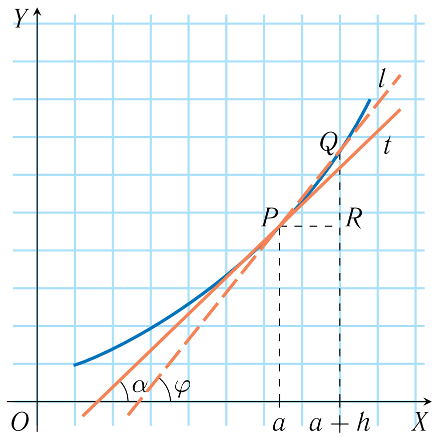


Рис. 112

Доказательство. Рассмотрим на графике заданной функции $y = f(x)$ произвольную точку $P(a, f(a))$ и ещё одну, близкую к P точку Q с абсциссой $a+h$ и ординатой $f(a+h)$ (рис. 112). Проведём через точки P и Q прямую l (она называется *секущей*), а угол наклона секущей к оси абсцисс обозначим через φ. Предположим, что точка Q движется по графику, приближаясь к точке P. Тогда секущая l будет поворачиваться вокруг этой точки, и когда точка Q совпадёт с точкой P, l займёт некоторое предельное положение t. Прямая t и называется *касательной к графику в точке P*.

Рассмотрим треугольник PQR. По определению тангенса,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|QR|}{|RP|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Обозначим угловой коэффициент касательной через k. Согласно определению касательной, при $h \to 0$ точка Q будет двигаться по графику к P, угол φ будет стремиться к значению α, а $\operatorname{tg}\varphi$ — к значению $\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\varphi = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

что и требовалось доказать. □

Пример 6.7. Найдём уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 3$ в точке $P(1, -1)$.

Решение. Сначала убедимся, что точка P лежит на параболе, подставив её координаты в заданное уравнение. Получится тождество, следовательно, точка P действительно лежит на параболе. Найдём далее производную: $f'(x) = (2x^2 - 3)' = 4x$ и вычислим её значение в точке $x = 1$: $f'(1) = 4$. Согласно доказанной теореме, это и есть угловой коэффициент k касательной к параболе в точке P. Как известно, уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку (a, b), имеет вид $y - a = k(x - b)$. В нашем случае $k = 4$, $a = 1$, $b = -1$, следовательно, уравнение искомой касательной будет $y - (-1) = 4(x - 1)$ или, после упрощения, $y = 4x - 5$. Парабола и найденная касательная изображены на рис. 113.

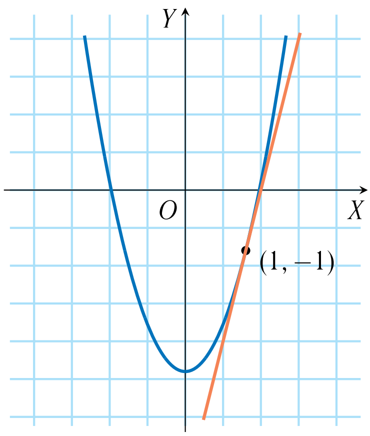


Рис. 113

Пример 6.8. Найдём уравнение касательной к графику функции $y = x + 1/x$ в точке $P(1, 2)$.

Решение. Убедившись, что точка P лежит на графике заданной функции $y(x)$, найдём производную: $y' = 1 - 1/x^2$. Так как при $x = 1$ она оказывается равной нулю, то $k = 0$ и уравнение касательной имеет вид $y = 2$. Поскольку $y'(1) = 0$, то в точке $x = 1$ функция $y = x + 1/x$ имеет экстремум, а именно минимум. Этот пример иллюстрирует общую ситуацию: *если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то касательная к графику функции в точке $P(a, f(a))$ параллельна оси абсцисс.*

Упражнения

1. Расстояние s, пройденное телом в течение t секунд от начала движения, определяется по формуле $s = t^3 + 3t^2 + t$. Найдите скорость и ускорение при $t = 5$.

2. Найдите такие размеры квадратного бассейна объёмом $32м^3$, при которых на его облицовку пойдёт наименьшее количество материала.

3. Постройте вручную или с использованием системы компьютерной алгебры график функции, рассмотренной в примере 6.8, и убедитесь, что прямая $y = 2$ касается этого графика.

§ 7. Неопределённый интеграл

Одна из самых распространённых практических задач — вычисление длин, площадей, объёмов и т. д. Если фигура достаточно простая (например, окружность, треугольник, пирамида или параллелепипед), то можно воспользоваться школьными формулами, многие из которых были известны ещё математикам древности. Если фигура сложная, то простыми формулами уже не обойтись. Тогда применяют *интегральное исчисление.*

Различают *определённый* и *неопределённый интегралы*. Осваивая понятие производной, многие из вас, несомненно, подумали: а как найти функцию, если известна её производная? Процедура нахождения производной от заданной функции называется, как мы знаем, дифференцированием, а обратная процедура, позволяющая находить по заданной производной исходную функцию, называется *интегрированием*. Результат интегрирования называют *первообразной функцией*.

Пусть, например, зависимость скорости v от времени t выражается формулой $v = 2t$. Как найти путь, пройденный к моменту времени t? Мы знаем, что скорость v есть производная от пути $s(t)$ по времени t, $v = s'(t)$. Следовательно, нужно найти функцию $s(t)$ по её производной $s'(t) = 2t$, то есть найти первообразную функции $2t$. Поскольку $(t^2)' = 2t$, то мы получаем, что $s(t) = t^2$. Таким образом, функция $s(t) = t^2$ является первообразной от функции $v = 2t$.

Но это не единственная первообразная от данной функции. Действительно, так как производная от постоянной функции равна нулю, то $(t^2 + 1)' = (t^2)' + 1' = 2t$. Следовательно, функция $t^2 + 1$ тоже будет первообразной от функции $2t$. По той же самой причине первообразными будут и функции $t^2 + 12$, $t^2 - 1$. Сколько же их всего? Бесконечно много, так как первообразной будет всякая функция вида $t^2 + C$, где C — любое число.

В общем случае, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечно много первообразных вида $F(x) + C$ (C — произвольная постоянная), так как $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$. Постоянную C называют *постоянной интегрирования*, а совокупность $F(x) + C$ всех первообразных от заданной функции $f(x)$ — *неопределённым интегралом*. Для записи интеграла используют обозначение $\int f(x)\,dx$.

Вот несколько простейших примеров неопределённых интегралов.

$$\int 0 \cdot dx = C, \tag{31}$$

так как $C' = 0$;

$$\int 1 \cdot dx = x + C, \tag{32}$$

так как $(x + C)' = x' = 1$;

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{при } n \neq -1), \tag{33}$$

так как $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = (n+1) \cdot \dfrac{x^n}{n+1} = x^n$.

Из известных нам равенств $(\ln x + C)' = 1/x$, $(\sin x + C)' = (\sin x)' = \cos x$, $(-\cos x + C)' = \sin x$ и $(e^x + C)' = (e^x)' = e^x$ вытекают формулы

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C; \tag{34}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C; \tag{35}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \tag{36}$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C. \tag{37}$$

Из формулы (33) следует, что $\int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} + C$; $\int x^5\, dx = \dfrac{x^6}{6} + C$; $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + C = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$; $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3}\, dx = \dfrac{x^{2/3}}{2/3} + C = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$ и т. п.

Следующие основные правила интегрирования вытекают из правил вычисления производных, сформулированных в §5.

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой из них:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Это правило справедливо для любого числа слагаемых.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.$$

Пример 7.1. Вычислим $\int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right) dx$.

Решение. Воспользуемся правилом интегрирования суммы:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int \sqrt{x}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Первый из интегралов был нами найден с помощью формулы (33), а второй вычисляется по формуле (34). В итоге получим: $\int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right) dx = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + \ln x + C$. Проверка: $\left(\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + \ln x + C\right)' = \left(\dfrac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)' + (\ln x)' = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

Пример 7.2. Найдём $\int (\sin x + x^5 + e^x)\, dx$.

Решение. Вновь применим первое правило вычисления интегралов, а также формулы (36), (33) и (37):

$$\int (\sin x + x^5 + e^x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int x^5\,dx + \int e^x\,dx = -\cos x + \frac{x^6}{6} + e^x + C.$$

Проверка показывает, что интеграл вычислен правильно:

$$\left(-\cos x + \frac{x^6}{6} + e^x + C\right)' = -(\cos x)' + \left(\frac{x^6}{6}\right)' + (e^x)' = \sin x + x^5 + e^x.$$

Пример 7.3. Найдём интеграл $\int (5x^2 + 3x + 7)\,dx$.

Решение. Здесь необходимо применить оба правила, после чего решение задачи сводится к применению формулы (33) для трёх различных значений степени:

$$\int (5x^2 + 3x + 7)\,dx = \int 5x^2\,dx + \int 3x\,dx + \int 7\,dx =$$

$$= 5\int x^2\,dx + 3\int x\,dx + 7\int dx = 5\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7x + C.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

Задача нахождения первообразной от заданной функции является гораздо более сложной, чем вычисление производной. Изложенные выше основные правила интегрирования позволяют находить первообразные только от самых простых функций. Даже для вычисления интеграла $\int \sin 2x\,dx$ уже необходимы некоторые дополнительные сведения. В этой ситуации можно с успехом использовать компьютер. Для нахождения неопределённых интегралов в системе Maxima используется команда `integrate`, первым аргументом которой является функция, а вторым — переменная, по которой производится интегрирование.

Пример 7.4. Найдём $\int \sin 2x\,dx$.

Решение. Для вычисления этого интеграла в системе Maxima наберём команду `integrate(sin(2*x),x)`. Обратите внимание на необходимость знака умножения между двойкой и переменной x в аргументе синуса. В ответе Maxima выдаёт лишь одну из бесконечного множества первообразных: $-\frac{1}{2}\cos 2x$. Постоянную интегрирования C необходимо добавить самим. Итак,

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Проверить найденный ответ можно и без компьютера:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)' = -\frac{1}{2}(\cos 2x)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot(2x)' = \frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2 = \sin 2x.$$

Пример 7.5. Найдём $\int x\sin x\,dx$.

Решение. Команда `integrate(x*sin(x),x)` выдаёт ответ $\sin x - x\cos x$. Таким образом,

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C.$$

Проверка показывает, что интеграл вычислен верно:

$$(\sin x - x\cos x + C)' = \cos x - (x\cos x)' =$$
$$\cos x - \big(x'\cos x + x(\cos x)'\big) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

Следует знать, что первообразная не обязательно является элементарной функцией. Например, функция $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ не является элементарной. Поэтому команда `integrate(sin(x)/x,x)`, введённая для вычисления интеграла $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, напечатает в качестве ответа исходный интеграл, так как первообразная функции $\frac{\sin x}{x}$ не может быть выражена в виде композиции конечного числа основных элементарных функций. Заметим, однако, что подобные интегралы могут быть записаны в виде ряда.

Упражнения

1. Зависимость скорости v от времени t выражается формулой $v = t^2$. Найдите путь, пройденный к моменту времени t.

2. Найдите: а) $\int x^3\,dx$; б) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$; в) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$; г) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

3. Используя формулы (31)–(37) и основные правила интегрирования, найдите следующие интегралы: а) $\int (x^3 - 3x^2 - 4)\,dx$; б) $\int (2e^x + 7x^6)\,dx$; в) $\int (5x^5 - 2\cos x - e^x)\,dx$.

4. Следующие интегралы найдите с помощью компьютера и проверьте ответы дифференцированием: а) $\int x^3e^x\,dx$; б) $\int \frac{x^2+3x-2}{x+1}\,dx$; в) $\int (x^2\cos x - x\sin x)\,dx$.

5. Используя компьютер, найдите такие комбинации трёх элементарных функций $\sin x$, e^x и x^2, первообразные от которых не являются элементарными функциями.

§ 8. Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла возникает при обобщении задачи Архимеда, рассмотренной нами в §2. Сейчас мы вычислим площадь S так называемой криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 114). Разделив отрезок $[a, b]$ на n равных частей, построим ступенчатую фигуру, площадь S_n которой будет приближённым значением искомой величины S.

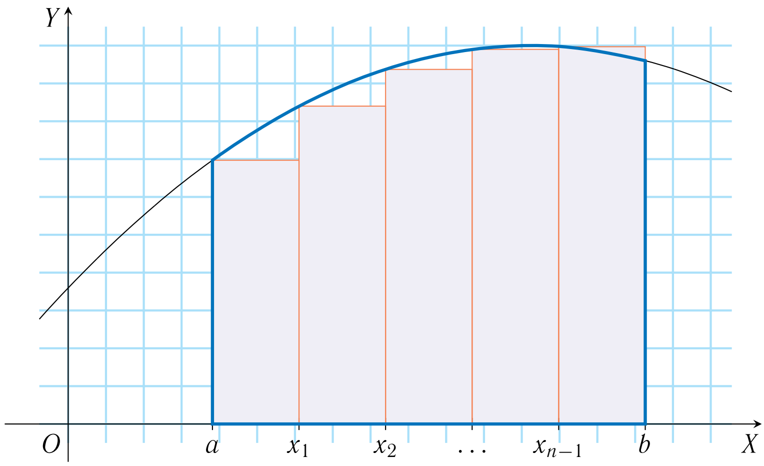


Рис. 114

Точки деления имеют следующие координаты:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = b.$$

Высотами прямоугольников будут значения функции f:

$$f(a), \quad f\left(a + \frac{b-a}{n}\right), \quad f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right), \quad \ldots, \quad f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right),$$

поэтому

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \ldots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

С помощью знака суммы это выражение можно записать короче:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right). \tag{38}$$

В начале XVIII века Коши доказал, что если функция $y = f(x)$ непрерывна, то площадь S криволинейной трапеции есть предел последовательности S_n:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{39}$$

Предел (39) называется *определённым интегралом от функции* $f(x)$ *в пределах от* a *до* b. Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*. Для обозначения определённого интеграла используется тот же символ, что и для неопределённого, дополненный указанием пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{40}$$

Например, площадь под параболой, которую мы вычислили вслед за Архимедом в §2, в этих обозначениях выражается формулой $S = \int_0^1 x^2\,dx$.

Вычисление предела (40) во многих случаях является весьма трудоёмкой задачей. Однако ещё в XVII веке Ньютон и Лейбниц доказали, что определённый интеграл весьма просто выражается через первообразную $F(x)$ подынтегральной функции:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{41}$$

Эту формулу, в которой в качестве $F(x)$ можно использовать любую из первообразных функции $f(x)$, называют *формулой Ньютона-Лейбница*. Она позволяет свести задачи, связанные с вычислением длин, площадей и объёмов, к задаче нахождения неопределённого интеграла.

Пример 8.1. Найдём интеграл $\int_0^1 x^2\,dx$.

Решение. Чтобы применить формулу Ньютона-Лейбница (41), нужно сначала найти неопределённый интеграл: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$. Итак: $\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$. Напомним, что этот интеграл выражает площадь под параболой в задаче Архимеда. Обратите внимание на то, насколько это решение проще, чем решение Архимеда, приведённое в §2.

Пример 8.2. Найдём площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $x = 1$ и $x = 2$.

Решение. В предыдущем параграфе мы выяснили, что функция $F(x) = \ln x$ является одной из первообразных для $\frac{1}{x}$, поэтому по формуле (41) получаем:

$$S = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Пример 8.3. Найдём площадь S_n под экспонентой $y = e^{-x}$ на промежутке от 0 до n, где n — произвольное натуральное число.

Решение. Функция $-e^{-x}$ представляет собой одну из первообразных функции e^{-x}, так как $(-e^{-x})' = -(e^{-x}) \cdot (-x)' = -(e^{-x}) \cdot (-1) = e^{-x}$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$S_n = \int_0^n e^{-x}\,dx = -\,e^{-x}\Big|_0^n = -e^{-n} + e^0 = 1 - e^{-n}.$$

Замечание. Мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$ (см. §5 предыдущей главы). Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Геометрически этот результат можно истолковать так: площадь бесконечной фигуры, ограниченной осями координат и графиком экспоненты e^{-x}, равна единице. Эту величину принято обозначать символом $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. Таким образом, мы доказали, что $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

Формулы (38) и (39) возникают не только при вычислении площадей. Аналогичные пределы получаются и при вычислении объёма и массы тела, пути, работы переменной силы и многих других величин. Рассмотрим, например, часто встречающуюся на практике задачу о вычислении пути по заданной скорости.

Пример 8.4. Пусть материальная точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v(t)$. Требуется вычислить путь $S(a, b)$, пройденный ею за промежуток времени от момента $t = a$ до момента $t = b$.

Решение. Разобьём временной промежуток $[a, b]$ на n равных частей. Скорость движения точки на каждом из них можно считать постоянной и равной, например, скорости в начале промежутка. Тогда путь S_n будет определяться формулой (38), в которой функция f заменена на v. Доказательство дословно повторяет рассуждения, с помощью которых мы пришли к формуле (38). Поэтому

$$S(a, b) = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b v(t)\,dt.$$

Пример 8.5. Тело движется прямолинейно со скоростью, изменяющейся по закону $v(t) = 2t$ (*м/сек*). Найдём путь, пройденный им за 6 секунд, начиная с четвёртой секунды движения.

Решение. В данном случае $a = 4$, $b = 10$. Так как $\displaystyle\int 2t\,dt = t^2 + C$, то по формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$S(4, 10) = \int_4^{10} 2t\,dt = t^2\Big|_4^{10} = 10^2 - 4^2 = 84 \text{ м}.$$

Формула Ньютона-Лейбница позволяет заключить, что правила вычисления неопределённых интегралов, которые мы сформулировали в предыдущем параграфе, сохраняют силу и для определённых интегралов.

Пример 8.6. Найдём $\int_1^3 (x^2+3x-7)\,dx$.

Решение. $\int_1^3 (x^2+3x-7)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx + 3\cdot\int_1^3 x\,dx - 7\cdot\int_1^3 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 + $
$+\,3\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 - 7\cdot x|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} + 3\cdot\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 21 + 7 = 6\frac{2}{3}.$

В системе компьютерной алгебры Maxima определённые интегралы можно вычислять с помощью той же команды `integrate`, которая применяется для нахождения неопределённых интегралов. Необходимо только добавить два дополнительных аргумента — нижний и верхний пределы интегрирования. Например, результат Архимеда получается с помощью команды `integrate(x^2,x,0,1)`.

Пример 8.7. Найдём $\int_0^{\ln 3} (e^{2x}+2e^{-x})\,dx$.

Решение. Команда `integrate(%e^(2*x)+2*%e^(-x),x,0,log(3))` немедленно выдаёт ответ $\frac{16}{3}$. В этой команде используются принятые в Maxima обозначения `%e` для неперова числа и `log(3)` для величины $\ln 3$.

Пример 8.8. Проверим с помощью компьютера, что $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$.

Решение. Воспользуемся другим допустимым обозначением функции e^x, `exp(x)`. Напомним также, что бесконечность обозначается символом `INF`. Команда `integrate(exp(-x),x,0,INF)` приведёт нас к уже известному результату.

Упражнения

1. Найдите площадь под одной волной синусоиды $y = \sin x$ (например, между $x = 0$ и $x = \pi$).

2. Найдите путь, пройденный материальной точкой за первые 12 секунд движения, если её скорость задана формулой $v(t) = \sqrt{t}$ (*м/сек*).

3. Вычислите:
а) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int_0^2 (x^3-5x^2+3x)\,dx$; в) $\int_3^5 \frac{1}{x-1}\,dx$; г) $\int_0^1 (x^4+2\sin x-3\cos x)\,dx$.

4. С помощью компьютера найдите следующие определённые интегралы:
а) $\int_0^1 x^3e^x\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^2+3x-2}{x+1}\,dx$; в) $\int_0^{\pi} (x^2\cos x - x\sin x)\,dx$.

5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \frac{\sin x}{x}$ и прямыми $x = \pi$ и $x = 2\pi$.

§ 9. Интегральная функция Лапласа

Количество функций, известных математикам, увеличивается с развитием этой науки. В XVII веке, когда Лейбниц ввёл термин «функция», использовался лишь очень небольшой набор элементарных функций, которые мы рассмотрели в предыдущей главе. Однако с появлением новых математических операций — предельного перехода, дифференцирования и интегрирования появились и новые функции, которые не могут быть выражены через элементарные (например, первообразная от функции $\sin x/x$). Важнейшей из таких функций является интегральная функция Лапласа $\Phi(x)$.

Как и дифференциальная функция Лапласа, о которой мы подробно говорили в последнем параграфе седьмой главы, функция $\Phi(x)$ возникает в связи с приближённым вычислением биномиальных вероятностей. Напомним (см. §8 шестой главы), что символом $P_n(m_1, m_2)$ принято обозначать вероятность наступления события A не менее m_1 и не более m_2 раз в серии из n повторяющихся испытаний. Эта вероятность может быть найдена как сумма вероятностей вида $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где p — вероятность наступления события A в одном испытании, а m принимает значения от m_1 до m_2. Напомним также (см. §9 седьмой главы), что вероятности $P_n(m)$ вычисляются приближённо с помощью дифференциальной функции Лапласа $\varphi(x)$ по формулам (36) и (37).

Для приближённого вычисления вероятностей $P_n(m_1, m_2)$ используют интегральную функцию Лапласа $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{42}$$

Найденная Лапласом формула имеет вид:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{43}$$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}. \tag{44}$$

Погрешность формул (43) и (44) велика при малых значениях величины $np(1-p)$, поэтому применять их рекомендуется только при достаточно больших значениях этого произведения, например, когда $np(1-p) > 10$.

Таблица 43

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$\Phi(x)$	0,00000	0,19146	0,34134	0,43319	0,47725	0,49865	0,49997

В силу важности интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$ для различных задач составлены таблицы её значений. Некоторые из значений приведены в таблице 43, а более подробная таблица содержится в Приложении 2.

С помощью ЭВМ можно вычислить значение интегральной функции Лапласа в любой точке и с любой точностью. В системе Maxima $\Phi(a)$ вычисляется так: `1/sqrt(2*%PI)*integrate(exp(-t^2/2),t,0,a),numer`. Поясним эту запись. Выражение `integrate(exp(-t^2/2),t,0,a)` означает определённый интеграл $\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, дробь $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ записывается как `1/sqrt(2*%PI)`, а команда `numer` требует показать получаемый результат в виде десятичной дроби.

Пример 9.1. Вероятность вступления в силу вердикта народного суда по гражданскому делу равна 0,6. Судья принял решение по пятидесяти гражданским делам. Найдите вероятность того, что число вступивших в законную силу решений заключено в пределах от двадцати пяти до сорока.

Решение. Нам нужно найти $P_{50}(25{,}40)$. Воспользуемся формулой (43). Сначала найдём величину $np(1-p)$. Имеем: $n = 50$, $p = 0{,}6$, $1 - p = 0{,}4$, $np(1-p) = 12$. Поскольку $np(1-p) > 10$, то применение формулы (43) оправдано. Теперь вычисляем по формулам (44) величины $x_1 \approx -1{,}4430$ и $x_2 \approx 2{,}8860$ и находим разность $\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0{,}9173$. Последнее можно сделать либо по таблице значений интегральной функции Лапласа, либо с помощью компьютера.

График интегральной функции Лапласа (рис. 115) также проще всего построить, воспользовавшись компьютером — достаточно применить команду `plot2d(1/sqrt(2*%PI)*integrate(exp(-t^2/2),t,0,x),[x,-5,5])`.

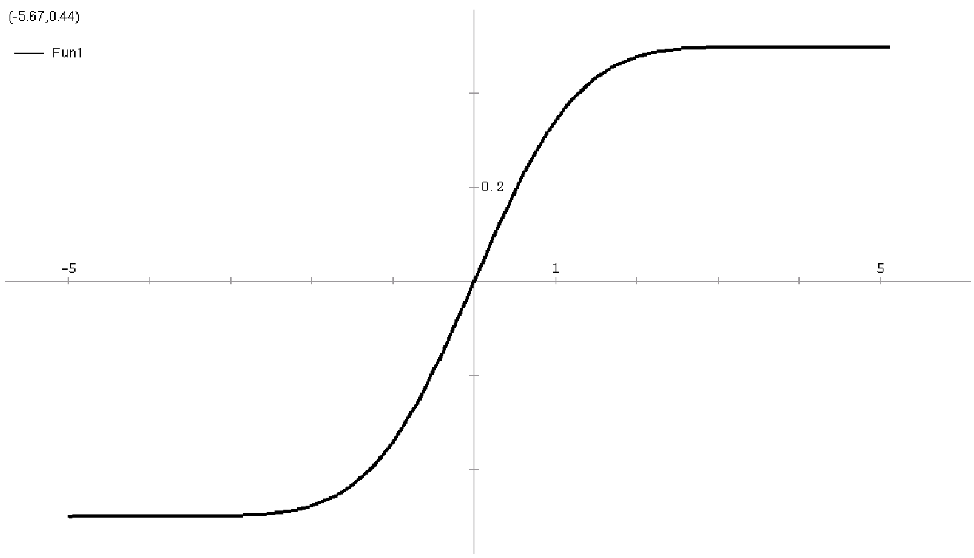


Рис. 115

Укажем некоторые свойства интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$, вытекающие из её определения и свойств определённого интеграла.

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то есть интегральная функция Лапласа является нечётной. На рис. 115 хорошо видно, что её график симметричен относительно начала координат.

2. Функция $\Phi(x)$ является возрастающей: если $x_1 > x_2$, то $\Phi(x_1) > \Phi(x_2)$.

3. График интегральной функции Лапласа имеет две горизонтальные асимптоты: $y = 0{,}5$ и $y = -0{,}5$. С помощью понятия предела этот факт записывается следующим образом: $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0{,}5$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = -0{,}5$. В частности, если $x > 3$, то $0{,}5 - \Phi(x) < 0{,}0005$.

Теперь отметим следующее. Поскольку $\Phi(0) = 0$, то формулу (42) можно переписать в виде $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(0)$. Сравнивая эту формулу с формулой Ньютона-Лейбница, мы видим, что функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $\varphi(x)$. Но тогда по той же формуле Ньютона-Лейбница при других значениях верхнего и нижнего пределов мы получим

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{45}$$

Формула (45) часто используется в теории вероятностей, математической статистике и в различных их приложениях. Вот пример, связанный с так называемым «правилом трёх сигм» (§7 одиннадцатой главы).

Пример 9.2. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-3}^{3} \varphi(t)\,dt$.

Решение. Воспользовавшись формулой (45), получаем:

$$\int_{-3}^{3} \varphi(t)\,dt = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

В третьей главе мы рассматривали различные случайные величины: число дорожных происшествий на улицах города, количество членов семьи, урожайность ржи, число заявлений, поступивших в отделение милиции и т. д. Сейчас мы познакомимся со *случайной ошибкой*.

Пример 9.3. В течение часа проведено 10 измерений постоянного уровня радиации одним и тем же прибором (в микрорентгенах в час): 12,0; 11,5; 11,7; 12,2; 12,1; 10,8; 11,6; 10,7; 12,0; 11,4. Результаты измерений получились различными вследствие того, что и сам прибор, и человеческий глаз не являются идеальными орудиями наблюдения. Погрешность не может быть меньше толщины стрелки прибора; стрелка может вибрировать; угол, под которым мы смотрим на стрелку, также меняется. Кроме того, влияние оказывают атмосферные условия, настроение наблюдателя и т. д. В составленном по результатам наблюдений отчёте указано среднее арифметическое наблюдений:

$$\overline{x} = \frac{12 + 11{,}5 + 11{,}7 + 12{,}2 + 12{,}1 + 10{,}8 + 11{,}6 + 10{,}7 + 12 + 11{,}4}{10} = 11{,}6.$$

Для решения многих экологических проблем важно уметь оценить, насколько найденное среднее отличается от истинного значения уровня радиации, который нам неизвестен. Как быть?

Решение. К счастью, математики умеют отвечать на этот вопрос. Назовём *случайной ошибкой* разность между замеренным и истинным значениями уровня радиации. Поскольку истинное значение нам неизвестно, то случайная ошибка тоже неизвестна. Многолетние наблюдения в различных экспериментах показали, что если число опытов достаточно велико, то случайные ошибки подчиняются некоторым общим закономерностям. Для их описания используют интегральную функцию Лапласа $\Phi(x)$.

Оказывается, что с её помощью можно вычислить вероятность того, что случайная ошибка не превосходит заданной величины h, и вероятность $P(h)$ того, что истинное значение наблюдаемой величины отличается от найденного среднего значения не более чем на h. Величину $P(h)$ находят по следующей формуле:

$$P(h) = 2\Phi(a), \quad \text{где} \quad a = \frac{h\sqrt{n-1}}{S}. \tag{46}$$

В этой формуле n — число измерений, а S — среднее квадратическое отклонение полученных значений. У нас $n = 10$, $D = \frac{1}{10}(0{,}16+0{,}01+0{,}01+$ $+\,0{,}36 + 0{,}25 + 0{,}64 + 0 + 0{,}81 + 0{,}16 + 0{,}04) = 0,244$, $S = \sqrt{D} \approx 0{,}494$. Выберем, например, $h = 0{,}3$. Тогда получаем $a \approx 1{,}83$ и $P(0{,}3) \approx 0{,}93$. Таким образом, с вероятностью 0,93 истинное значение уровня радиации заключено в промежутке от $11{,}6 - 0{,}3 = 11{,}3$ до $11{,}6 + 0{,}3 = 11{,}9$.

Как понимать полученный результат? Допустим, что радиационный фон в данной местности измеряли параллельно несколько бригад. Их результаты будут, вообще говоря, различными: у каждой получится своё среднее значение. Можно гарантировать, однако, что примерно 93% найденных средних отклоняются от истинного значения не более чем на 0,3.

Упражнения

1. Найдите $\displaystyle\int_{-2}^{2,5} \varphi(x)\,dx$.

2. Вероятность смягчения приговора осуждённому на пожизненное заключение равна 0,1. Найдите вероятность того, что из двухсот осуждённых на пожизненное заключение смягчение приговора получат от 5 до 15 человек.

3. В результате проведённого измерения уровня загрязненности атмосферы в центре города получены следующие значения индекса загрязнения: 27, 29, 23, 30, 31, 25, 30, 29, 24, 29, 31, 28, 28, 24, 29, 26, 30, 29, 28, 25, 28, 30, 29, 27, 25, 28, 27, 32, 31, 28. Найдите среднее значение индекса загрязнения и вероятность того, что оно отличается от истинного значения меньше чем на два.

§ 10. Корреляционная зависимость

Как мы уже отмечали, понятие функции является одним из самых важных в математике, физике и других естественных науках. Тем не менее, этого понятия недостаточно, чтобы описать всевозможные причинные связи, с которыми жизнь сталкивает нас повседневно. Ясно, например, что между ростом и весом человека существует определённая зависимость. Но столь же ясно, что существует много разных людей с одинаковым ростом, но разным весом. Следовательно, *зависимость веса от роста не является функциональной*, так как функции обладают тем свойством, что по заданному значению независимого переменного x можно найти *единственное* значение зависимой переменной y. Таким образом, не существует формулы, по которой, зная точный рост, можно было бы найти точный вес.

Ага, скажет наш догадливый читатель! Вес зависит не только от роста, но и от размера талии! Несомненно так, ответим мы, но в то же время можно найти много разных людей с одинаковым ростом и одинаковой талией, у которых, однако, вес различный. Значит, вес не является функцией только двух переменных — роста и размера талии.

Всё ясно, скажет читатель: вес зависит от роста, размера талии, объёма груди, размера обуви и так далее, и тому подобное. Вот тут-то мы и подошли к важному выводу: если искомая функциональная зависимость и существует (а пока ещё она никем не обнаружена), то она должна быть исключительно сложной. А поскольку нельзя пользоваться тем, чего нет, то проще описывать эту сложную причинную связь между весом, ростом и другими параметрами человека как-то по-иному, минуя классическое определение функции.

Вес и рост человека определяются практически одними и теми же факторами, число которых довольно велико (возраст, наследственность, физиологические особенности, социальные условия, экологическая среда и т. д.) Поэтому можно считать, что *вес человека зависит от ряда случайных величин, среди которых рост является одной из основных*. Эту зависимость описывают с помощью понятия вероятности. Например, имеет смысл говорить о вероятности того, что вес молодого человека с ростом 175 *см* равен 75 *кг* или заключён в пределах от 70 до 80 *кг*. Зависимости такого рода называются стохастическими, вероятностными или статистическими. Они существуют между биологическими параметрами человека, животного, растения, между способностями студента и его успехами в учёбе и т. п. Подобных примеров можно привести сколько угодно.

Важнейшим видом стохастической зависимости является *корреляционная зависимость*. Покажем на примере, как описать корреляционную зависимость по результатам наблюдений.

В таблице 44 приведены данные измерения веса и роста двадцати курсантов школы МВД. Эти результаты можно представить графически, построив точки с координатами (x, y), где x — рост, а y — вес курсанта. Полученные

Таблица 44

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рост	178	170	181	173	169	178	177	165	187	182	159	182	178	173	176	173	198	187	191	170
Вес	72	65	92	75	68	79	78	67	80	81	56	82	77	63	80	65	85	89	87	72

точки лежат внутри некоторой области, или «облака», которое ограничено на рис. 116 пунктирной линией. Хорошо заметно, что облако вытянуто вдоль какой-то наклонной прямой. Этот факт означает, что величины X и Y хорошо скоррелированы, то есть при увеличении роста вес, как правило, тоже увеличивается.

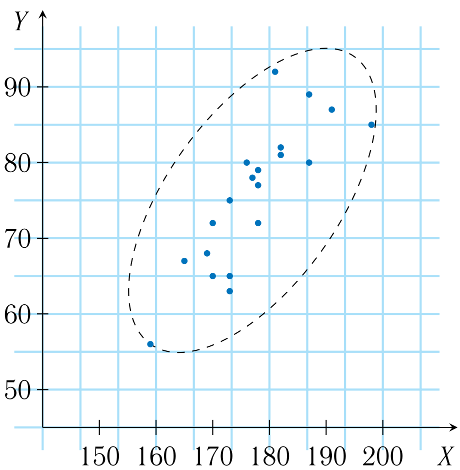


Рис. 116

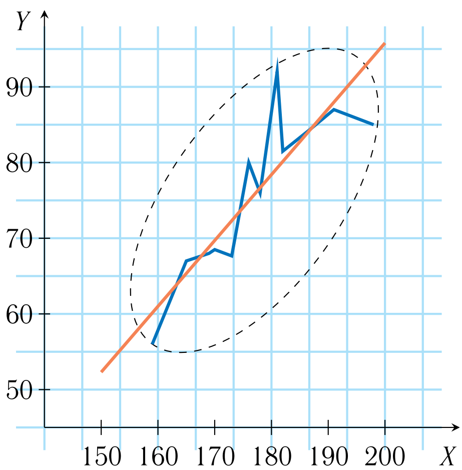


Рис. 117

Мы видим, что на некоторых вертикальных прямых внутри облака находится по несколько точек. Это объясняется тем, что, например, ростом 178 *см* обладают три курсанта с номерами 1, 6 и 13, а ростом 170 *см* — двое (2 и 20), и т. д. Для каждого роста определим средний вес. Так, для роста 178 *см* средний вес будет равен $(72+79+77):3=76$ *кг*. Если на какой-то вертикальной прямой находится лишь одна точка, то обозначаемый ею вес и является средним для данного роста.

Вычислив средний вес для каждого представленного в таблице 44 роста, соединим соответствующие точки отрезками прямых и получим ломаную линию, называемую *эмпирической линией регрессии* (рис. 117). С её помощью можно приближённо находить средний вес по заданному росту в пределах от 159 *см* до 198 *см*. Например, при росте 185 *см* получаем вес 83,4 *кг*. Если бы мы провели не 20, а 200 измерений, то точек внутри «облака» оказалось бы больше, соответствующая линия регрессии была бы по форме ближе к прямой и давала бы более точный средний вес при заданном росте.

Теоретически, каждую точку внутри облака можно считать результатом измерения роста и веса какого-то человека. При этом допущении эмпирическую линию регрессии, как показывает теория, можно считать прямой. Эта прямая называется *линией регрессии* и является графиком некоторой линейной функции, называемой *линейной регрессией*. Доказано, что *линейная регрессия является в некотором смысле*[7] *наилучшим решением задачи, о которой шла речь в начале этого параграфа — приближённо выразить вес как функцию роста*.

Если бы линия регрессии была нам известна, мы смогли бы её продолжить за пределы облака и вычислить с её помощью средний вес человека с ростом, например 195 *см*. Но в нашем распоряжении имеется только эмпирическая линия регрессии — ломаная, изображённая на рис. 117. Тем не менее, можно с достаточной степенью точности заменить ломаную линию прямой с помощью метода наименьших квадратов. Согласно этому методу уравнение искомой прямой записывается в виде

$$y = kx + b, \tag{47}$$

где

$$k = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{D_x}, \quad b = \overline{y} - k\overline{x}. \tag{48}$$

Здесь $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{xy}$ — средние значения роста, веса и их попарных произведений, а D_x — дисперсия роста. Используя формулы из §§1–3 третьей главы, по данным таблицы 44 последовательно вычисляем:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(178 + 170 + \ldots + 170) = 177{,}35;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{20}(72 + 65 + \ldots + 72) = 75{,}65;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{20}(178 \cdot 72 + 170 \cdot 65 + \ldots + 178 \cdot 72) = 13485{,}15;$$

$$D_x \approx \frac{1}{20}((178 - 177{,}35)^2 + (170 - 177{,}35)^2 + \ldots + (170 - 177{,}35)^2) = 79{,}1.$$

Подставляя эти значения в формулы (48), находим коэффициенты k и b:

$$k \approx \frac{13485{,}15 - 177{,}35 \cdot 77{,}65}{79{,}1} \approx 0{,}87; \quad b \approx 75{,}65 - 0{,}8675 \cdot 177{,}35 \approx -78{,}2.$$

Таким образом, уравнение (47) эмпирической линии регрессии, изображённой на рис. 117 красным цветом, принимает вид

$$y = 0{,}87x - 78{,}2. \tag{49}$$

Если подставить в эту формулу значение $x = 195$, то мы найдём средний вес курсанта с таким ростом — примерно 91,5 *кг*.

[7] Наилучшим в смысле метода наименьших квадратов, см. §3 седьмой главы.

Теперь мы можем найти интересующую нас вероятность $P(h)$ того, что вес курсанта с ростом x заключён в пределах $y-h$ до $y+h$, где y — средний рост, найденный по формуле (47). Вероятность $P(h)$ вычисляют с помощью интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$, с которой мы познакомились в предыдущем параграфе. Формула для её определения похожа на формулу для вычисления случайной ошибки:

$$P(h) = 2\Phi(\alpha), \tag{50}$$

где

$$\alpha = \frac{h}{S_y\sqrt{1-r^2}}\sqrt{\frac{n-2}{2n+8}}. \tag{51}$$

Здесь n — число наблюдений, а величину r находят по формуле

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{S_xS_y}. \tag{52}$$

Поскольку величины $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$ и D_x уже найдены, то для определения $P(h)$ достаточно вычислить только значения характеристик S_x, S_y и r:

$$S_x = \sqrt{D_x} \approx \sqrt{79{,}1} \approx 8{,}89;$$
$$D_y \approx \frac{1}{20}\Big((72-75{,}65)^2 + (65-75{,}65)^2 + \ldots + (72-75{,}65)^2\Big) \approx 86{,}03;$$
$$S_y \approx \sqrt{86{,}03} \approx 9{,}28; \quad r \approx \frac{13485{,}15 - 177{,}35\cdot 75{,}65}{8{,}89\cdot 9{,}28} \approx 0{,}83.$$

Теперь можно найти $P(h)$. Пусть, например, $h = 5$. Тогда

$$\alpha = \frac{5}{9{,}28\sqrt{0{,}3111}}\sqrt{\frac{3}{8}} \approx 0{,}59.$$

Значение $\Phi(0{,}59) \approx 0{,}22$ находим с помощью компьютера или по таблице значений интегральной функции Лапласа, а затем по формуле (50) получаем $P(5) \approx 0{,}44$. Таким образом, вероятность того, что вес курсанта отличается от среднего веса не больше чем на 5 *кг*, равна 0,44. Например, при росте 195 *см* средний вес курсанта будет 91,5 *кг*, следовательно, 44% курсантов с ростом 195 *см* имеют вес в пределах от 86,5 до 96,5 *кг*. Заметим, что формулу (50) применяют только для таких x, которые удовлетворяют условию $|x - \overline{x}| \leqslant 3S_x$.

Проведённые нами расчёты являются приближёнными, и их точность зависит от того, насколько близка эмпирическая линия регрессии к теоретической. Для увеличения точности необходимо увеличение числа наблюдений, то есть объёма выборки.

Величина r, определенная формулой (52), называется *коэффициентом корреляции* между величинами X и Y. Коэффициент корреляции играет важную роль в вопросах математической статистики. Он обладает следующими свойствами.

1. $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

2. Если величины X и Y независимы, то коэффициент корреляции между ними равен нулю.

3. Если величины X и Y связаны линейной зависимостью, то коэффициент корреляции равен 1 или -1.

4. Если коэффициент корреляции равен 1 или -1, то величины X и Y связаны линейной зависимостью.

При совместном изучении двух случайных величин X и Y прежде всего находят для них коэффициент корреляции, и если он оказывается достаточно близким к единице (по крайней мере, большим 0,5), то имеет смысл описывать корреляционную связь тем способом, который мы только что рассмотрели.

Упражнения

1. Используя формулу (52), докажите неравенство $-1 \leqslant r \leqslant 1$ для коэффициента корреляции r.

2. Майор Зимин решил сравнить среднее число книг, прочитанных среднестатистическим восьмиклассником за год, с количеством правонарушений, совершённых подростками в его микрорайоне в течение года. Проанализировав данные за 10 лет, он получил таблицу 45, в которой величина x — среднее число книг, прочитанных одним восьмиклассником за год, а y — число правонарушений в течение года. Изобразите эти данные графически, затем найдите коэффициент корреляции, постройте эмпирическую ломаную регрессии, определите параметры эмпирической линии регрессии и вычислите вероятность того, что при $x = 41$ число правонарушений отличается от среднего не более чем на два.

Таблица 45

x	19	25	24	22	18	38	39	30	35	38
y	20	20	15	15	10	4	6	10	10	5

Глава IX

Математические структуры

Математики называют *множеством* всякую совокупность каких-либо предметов[1]. Предметы, из которых состоит множество, называют его элементами. Если, например, в Твери 145 юристов, то можно сказать, что множество всех юристов города состоит из 145 элементов. Говорят о множестве студентов в аудитории, множестве всех озёр Тверской области, множестве книг в библиотеке и т. д. В математике рассматриваются числовые множества, множества, состоящие из точек, прямых, векторов, многочленов, функций. Они обозначаются специальными символами. Например, множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел обозначают, как мы знаем, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно.

Если элемент a принадлежит множеству M, то пишут $a \in M$. Например, $5 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. Если все элементы множества B принадлежат также множеству A, то говорят, что множество B является подмножеством множества A. Это записывается $B \subset A$ и читается «B содержится в A» или «B является частью A». Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$. По определению считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

В следующих параграфах мы будем рассматривать множества со специальными свойствами, или, как говорят математики, со *специальной структурой*.

§ 1. От Евклида до Лобачевского

Более двух тысяч лет назад Евклид предложил метод, который теперь называется *аксиоматическим* и широко применяется в математике и других науках. Суть его состоит в том, что при изложении некоторой математической теории формулируется ряд утверждений, называемых *аксиомами*, истинность которых считается несомненной[2]. Аксиомы должны быть достаточно простыми и соответствовать опыту. А дальнейшее развитие теории состоит в доказательстве теорем, вытекающих только из заданных аксиом. Система аксиом геометрии, предложенная Евклидом, на протяжении 2000 лет совершенствовалась многими авторами. В настоящее время существуют различные редакции этой системы аксиом. Вот одна из них.

Аксиомы евклидовой геометрии на плоскости

Первая группа: аксиомы связи

- Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.
- На каждой прямой имеются по крайней мере две различные точки.
- Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

[1] В то время как в русском языке слово «множество» означает «много».
[2] Про такие утверждения ещё говорят, что они «принимаются без доказательства».

Вторая группа: аксиомы порядка

- Если точка B лежит между точками A и C, то B лежит между C и A.
- Из трёх различных точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
- Всякая прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости таким образом, что для любого отрезка на плоскости выполняется следующее: если концы отрезка принадлежат одной и той же полуплоскости, то прямая a не пересекает этот отрезок; если же концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то прямая a его пересекает.

Третья группа: аксиомы движения

- Каждое движение сохраняет принадлежность точки прямой.
- Каждое движение сохраняет порядок точек на прямой.
- Композиция двух движений также является движением.
- Для каждого движения существует обратное движение.
- Если некоторое движение оставляет на месте луч и его начало, то оно оставляет на месте каждую точку этого луча.
- Какую бы пару точек мы ни взяли, существует движение, которое переставляет их местами.
- Какую бы пару лучей с общим началом мы ни взяли, существует движение, которое переставляет их местами.

Четвёртая группа: аксиома непрерывности (Дедекинда)

- Пусть все точки прямой разбиты на два непустых класса так, что каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Тогда либо в первом классе существует точка, следующая за всеми остальными точками первого класса, либо во втором классе существует точка, предшествующая всем точкам второго.

Пятая группа: аксиома параллельности (Евклида)

- На плоскости через точку M, не лежащую на прямой a, можно провести одну и только одну прямую, параллельную прямой a.

Аксиома параллельности (известная также как пятый постулат Евклида) — самое знаменитое математическое предложение в истории. Её обсуждение на протяжении 2000 лет завершилось гениальным открытием Лобачевским[3] неевклидовой геометрии и привело к возникновению новых разделов в математике, к новым взглядам на пространство и время.

Дело в том, что, начиная со времён Евклида, многие математики не воспринимали аксиому параллельности ввиду её сложности именно как аксиому, а стремились её доказать, то есть вывести из других аксиом[4]. Нико-

[3] Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) — российский учёный.

[4] Аксиома Дедекинда к тому времени ещё не была сформулирована.

лай Лобачевский, как и многие его предшественники и современники, тоже увлёкся доказательством пятого постулата. После нескольких неудачных попыток он решил применить доказательство «от противного». Для этого Лобачевский заменил аксиому параллельности Евклида на противоположную: *на плоскости через точку M, не лежащую на прямой a, проходит более одной прямой, параллельной данной прямой a*, оставив остальные аксиомы Евклида без изменения. Затем он стал доказывать с помощью новой системы аксиом различные теоремы в надежде получить противоречие. Если бы на некотором этапе рассуждений таковое появилось, то это означало бы, что аксиома параллельности Лобачевского неверна, а следовательно, верна только аксиома Евклида. Но, доказав несколько десятков теорем, Лобачевский никакого противоречия не получил. И тогда он понял, что с математической точки зрения его система аксиом имеет такое же право на существование, как и система аксиом Евклида.

Так родила́сь неевклидова геометрия. Датой рождения считается 1826 год, когда Лобачевский доложил результаты своих исследований на заседании совета математического факультета Казанского университета. Изменение всего лишь одной аксиомы привело к удивительным фактам. В новой, неевклидовой геометрии сумма углов любого треугольника оказалась меньше 180 градусов, причём эта сумма зависела от площади S треугольника: $\alpha+\beta+\gamma=\pi-S/k^2$. Здесь k — некоторая постоянная, определяемая выбором масштаба. Из этой формулы видно, что площадь любого треугольника не может быть более πk^2. Далее оказалось, что в геометрии Лобачевского нет подобных фигур! Например, получалась такая теорема: если у двух треугольников углы равны, то эти треугольники равны. Этот удивительный факт объясняется тем, что теория подобия основана на понятии параллельности. Отменяя аксиому параллельности Евклида, мы отменяем и подобие. Кроме параллельных и пересекающихся прямых, на плоскости Лобачевского существуют *расходящиеся* или *сверхпараллельные* прямые; помимо обычных окружностей, есть окружности, центр которых находится в бесконечности, и т. д.

Лобачевский понимал, что, открыв новую геометрию, он должен найти ответ на некоторые вопросы. Важнейший из них такой: как новая геометрия соотносится с реальным миром? Лобачевский был убеждён, что его геометрия — не абстрактная математическая теория, не только плод его ума, а что она отражает свойства реального пространства. Он считал, что во Вселенной действует именно его геометрия, но люди этого не замечают, так как различие между евклидовой и новой геометрией проявляется только при измерении очень больших расстояний. Если же измерять небольшие фигуры, то результаты, полученные с помощью формул старой и новой геометрии, отличаются настолько мало, что это различие заметить практически невозможно. Точнее: чем меньше измеряемые фигуры, тем геометрия Лобачевского ближе к геометрии Евклида.

Чтобы проверить эту гипотезу, Лобачевский решил найти сумму углов треугольника, две вершины которого находятся в противоположных концах земной орбиты, а третья — на звезде Сириус. Если бы сумма углов оказалась меньше 180°, то гипотеза Лобачевского получила бы подтверждение. Проведя предварительные вычисления, Лобачевский установил, что если сумма углов в этом треугольнике и окажется меньше чем 180°, то не более чем на 4 миллионные доли секунды! Напоминаем, что секунда — это 1/3600 часть градуса, а градус — 1/360 часть полного оборота. Поэтому практические измерения выполнить невозможно, так как ни один из астрономических приборов не обладал (и до сих пор не обладает) требуемой точностью.

Другая важная проблема заключалась в необходимости выяснить, не содержит ли система аксиом новой геометрии каких-либо внутренних противоречий. Ведь никто не может доказать *все* теоремы, поэтому нужно как-то гарантировать, что, пользуясь аксиомами, мы никогда не получим взаимоисключающих результатов. Лобачевский много работал над этой проблемой, но она оказалась настолько глубокой и сложной, что завершить её удалось только через несколько десятилетий усилиями многих замечательных математиков.

Новая геометрия не получила признания при жизни её творца. Она получила известность только после 1868 года, когда появилась её первая *модель*. Модель некоторой геометрии представляет собой совокупность математических объектов, называемых «точками» и «прямыми», для которых выполняются аксиомы этой геометрии. Модель евклидовой геометрии построить очень просто, для этого достаточно вспомнить, что такое декартовы координаты на плоскости. Назовем «точкой» всякую упорядоченную пару чисел (x, y), а «прямой» множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $Ax + By + C = 0$. Можно проверить, что для таких «прямых» и «точек» выполняются все перечисленные выше аксиомы евклидовой геометрии.

Модель Клейна[5] плоскости Лобачевского строится внутри некоторого круга K. «Точками» называются обычные точки, находящиеся внутри круга K (например, A, B и C на рис. 118), а «прямыми» — хорды окружности S, ограничивающей круг K (например, MN, MP и PQ). Параллельные прямые изображаются хордами, пересекающимися на окружности S (MN и MP); непересекающиеся хорды — это сверхпараллельные (расходящиеся) прямые (MN и PQ). Можно показать, что в этой модели выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского, то есть все, кроме последней, аксиомы евклидовой геометрии и сформулированная выше аксиома параллельности Лобачевского. В модели Клейна расстояние (в смысле геометрии Лобачевского) между точками A и B вычисляется по следующей формуле: $|AB| = k\left|\ln\left(\frac{MB}{BN} : \frac{MA}{AN}\right)\right|$. Аналогичную формулу можно записать и для углов.

[5]Феликс Клейн (1849–1925) — немецкий математик.

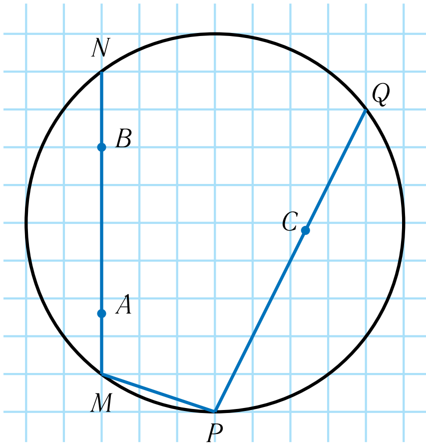


Рис. 118

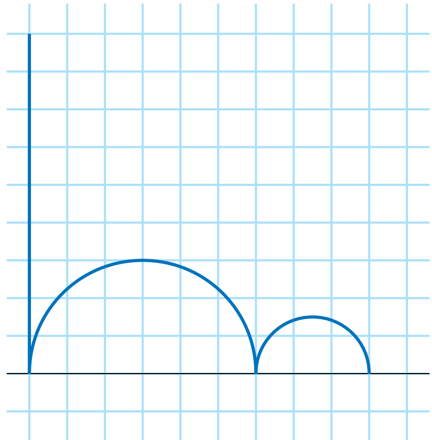


Рис. 119

В другой модели (Пуанкаре[6]) «точками» плоскости Лобачевского будут точки верхней полуплоскости $y > 0$, а «прямыми» — лучи, перпендикулярные оси X, и полуокружности с центрами на оси. На рис. 119 изображены три параллельные прямые плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. В этой модели действует своя формула для расстояния между точками, а для вычисления углов специальная формула не нужна: в модели Пуанкаре углы в смысле геометрии Лобачевского — это обычные углы. Существуют и другие модели геометрии Лобачевского.

Наличие моделей доказывает *непротиворечивость* системы аксиом Лобачевского. Так решается одна из важнейших проблем, над которой в последние годы жизни работал сам Лобачевский. С другой стороны, наличие моделей, или, как ещё говорят, реализаций геометрий Евклида и Лобачевского, закрывает проблему 2000-летней давности: можно ли *доказать* аксиому параллельности, то есть вывести её из других аксиом? Теперь ясно, что нельзя, потому что эта аксиома *не зависит от остальных аксиом*. Независимость вытекает из того факта, что после замены аксиомы параллельности Евклида на аксиому параллельности Лобачевского мы вновь получаем непротиворечивую систему аксиом.

Переоценить значение открытия Лобачевского невозможно. Никакой другой математический результат не имел столько значительных последствий. Благодаря открытию геометрии Лобачевского возникли новые важнейшие области математики: основания геометрии, основания математики, математическая логика. Математики поняли силу аксиоматического метода и стали его широко применять во всех разделах математики. Далее, поскольку возник новый математический объект — система аксиом — появились и специальные методы его исследования, так называемая метаматематика. Бурно развилась теория алгоритмов, тесно связанная с математическими

[6]Анри Пуанкаре (1854–1912) — французский математик и физик.

основами функционирования электронно-вычислительных устройств. В итоге было подвергнуто анализу всё здание математики. Идея Лобачевского, что наш мир только «в малом» подчиняется законам евклидовой геометрии, а в целом является неевклидовым, стала доминирующей идеей в науке с конца XIX века. Один из основных выводов теории относительности как раз и заключается в том, что пространство искривлено, то есть не является евклидовым.

Упражнения

1. Постройте середину — в смысле геометрии Лобачевского — отрезка AB, изображённого на рис. 118.

2. Изобразите какой-либо прямоугольный треугольник в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

§ 2. Кольца и поля

Математика, как и всякая другая наука, развивается путём постоянного обобщения и углубления уже имеющихся результатов и фактов. Каждое очередное фундаментальное открытие заставляет переосмысливать всё накопленное к этому моменту. Открытие неевклидовой геометрии, например, привело математиков к осознанию необходимости строгого обоснования основных математических понятий, в том числе и тех, которыми они уже пользовались несколько столетий. Этот процесс начался примерно со второй половины XIX века и одним из его главных участников стал выдающийся математик Гильберт[7].

Идея Гильберта состояла в том, чтобы максимально формализовать основные математические определения. Под формализацией понимают замену интуитивного понятия строгим, смысл которого раскрывается в соответствующей системе аксиом. Например, словами «точка» и «прямая» в системе аксиом евклидовой геометрии обозначаются не обычные точки и прямые, с которыми мы привыкли иметь дело в школе и дома, а элементы абстрактных множеств, природа которых нам безразлична, и от которых требуется только одно: чтобы они подчинялись заданной системе аксиом. С подобными множествами мы уже имели дело, рассматривая модели геометрии Лобачевского. Там «прямыми» назывались хорды окружности (модель Клейна), лучи и полуокружности (модель Пуанкаре).

Ценность формального определения, помимо того, что оно придаёт стройность математической теории, состоит ещё и в том, что оно выявляет общие свойства совершенно, казалось бы, различных математических объектов. Например, как мы отмечали в первой главе, числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ имеют одинаковые алгебраические свойства, то есть их элементы склады-

[7] Давид Гильберт (1862–1943) — немецкий математик.

вают, вычитают, умножают и делят по одним и тем же правилам:

$$\begin{array}{ll} 1)\ a+b=b+a; & 4)\ a+(-a)=0; \\ 2)\ (a+b)+c=a+(b+c); & 5)\ a(b+c)=ab+ac; \\ 3)\ a+0=a; & 6)\ ab=ba; \\ \multicolumn{2}{c}{7)\ (ab)c=a(bc).} \end{array} \qquad (1)$$

По этим же правилам производятся операции и с многочленами, со всеми элементарными функциями, с рядами (бесконечными суммами). Как мы увидим, есть и другие, более сложные множества, для которых выполняются правила (1). Таким образом, в них отражены некоторые общие свойства указанных множеств. Любое множество с такими свойствами называется *кольцом*[8]. Формальное определение кольца следующее: это некоторое множество, на котором заданы две функции, одна из них называется *сложением*, или операцией сложения, а вторая — *умножением*, или операцией умножения; сложение и умножение должны подчиняться правилам (1), которые называются *аксиомами кольца*[9].

Аксиомы 1), 2) и 5)–7) представляют собой тождества, которые должны выполняться для любых элементов a, b и c из кольца. Аксиома 3) означает, что в кольце должен существовать особый элемент, называемый *нулём*, такой, что равенство 3) выполняется при любом a. Аксиома 4) утверждает, что для каждого элемента a из кольца найдётся (в том же кольце!) *противоположный ему элемент* $(-a)$, причём равенство 4) можно рассматривать как уравнение, из которого и определяется этот элемент.

В формальном определении кольца операции сложения и умножения рассматриваются как функции. Такие функции в этом курсе нам ещё не встречались. Здесь сумма $a+b$ рассматривается как функция двух переменных a и b, то есть слагаемых; произведение $a \cdot b$ — как функция двух переменных a и b, то есть сомножителей. Таким образом, и независимые переменные a и b, и значения этих функций — сумма и произведение — являются элементами кольца. Как видно из системы аксиом (1), операция деления в кольце, вообще говоря, отсутствует. Кольца, в которых можно делить на любой элемент, кроме нуля, называются *полями*. Полями являются, например, кольца рациональных и действительных чисел. Формальное определение поля получается добавлением к аксиомам (1) ещё одной аксиомы, обеспечивающей возможность деления. Попробуйте сформулировать ее самостоятельно. В заключение рассмотрим два важных примера колец.

Пример 2.1. Докажем, что относительно обычных операций сложения и умножения числа вида $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b образуют поле. Обозначим рассматриваемое множество чисел через P. Прежде всего нужно показать, что *множество P замкнуто относительно операций сложения и умножения*, то есть что сложение и умножение можно рассматривать как

[8] Точнее, коммутативным и ассоциативным кольцом.

[9] Свойства 6) и 7) иногда не включают в систему аксиом кольца.

функции со значениями во множестве P. Иными словами, нужно проверить, что сумма и произведение любых двух чисел из множества P также принадлежат множеству P, то есть тоже будут числами вида $a + b\sqrt{2}$. Взяв пару чисел $a + b\sqrt{2}$ и $c + d\sqrt{2}$, где a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$, получаем:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2};$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Поскольку a, b, c, d — это рациональные числа (дроби), то и числа, которые получились в скобках, также будут дробями. Это мы и хотели показать.

Теперь докажем, что операция деления также не выводит нас из рассматриваемого множества. В самом деле,

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} =$$
$$= \left(\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\right)\sqrt{2}.$$

Знаменатель $c^2 - 2d^2$ отличен от нуля, что следует из иррациональности числа $\sqrt{2}$ (см. §3 первой главы). В последнем полученном выражении в скобках стоят рациональные числа, следовательно, результат деления двух любых чисел из множества P представляет собой число также из множества P. Итак, числа вида $a+b\sqrt{2}$ образуют поле, что и требовалось доказать.

Пример 2.2. Разделим множество всех целых чисел на шесть частей (подмножеств), которые обозначим P_0, P_1, …, P_5 и будем называть *классами вычетов по модулю* 6 или просто *классами*. По определению, класс P_0 состоит из чисел, кратных шести, то есть из чисел 0, ± 6, ± 12, ± 18, … Произвольное число из этого класса записывается в виде $6k$, где k может быть любым целым числом. Класс P_1 состоит из чисел, которые при делении на 6 дают в остатке единицу. Это, например, числа -11, -5, 1, 7. Произвольное число из этого класса записывается в виде $6k + 1$. Класс P_2 состоит из чисел, которые при делении на 6 дают в остатке два. Это числа, задаваемые формулой $6k + 2$: 2, 8, 14, 20, … и -4, -10, -16, … Наконец, класс P_5 состоит из чисел, которые при делении на 6 дают в остатке пять. Эти числа имеют вид $6k + 5$.

Определим сложение классов формулой

$$P_m + P_n = \begin{cases} P_{m+n}, & \text{если } m + n < 6, \\ P_{m+n-6}, & \text{если } m + n \geqslant 6. \end{cases}$$

Например, $P_2 + P_0 = P_2$, $P_3 + P_4 = P_1$.

Используя тот же принцип, определим умножение классов. Положим $P_m P_n = P_q$, где число q есть остаток от деления произведения mn на шесть. Например, $P_1 P_4 = P_4$, $P_2 P_5 = P_4$, а $P_3 P_4 = P_0$, так как $3 \cdot 4 = 12$ делится на 6 без остатка. Можно доказать следующее утверждение: *классы вычетов по модулю шесть образуют кольцо относительно введённых операций сложения и умножения, то есть для них выполняются аксиомы кольца* (1). Построенное нами кольцо обозначается $\mathbb{Z}_6$ и состоит всего из шести элементов, в то время как все рассмотренные ранее числовые кольца содержат бесконечно много элементов. Аналогичным образом можно построить кольцо $\mathbb{Z}_m$ классов вычетов по любому модулю m, содержащее ровно m элементов.

Возникает естественный вопрос: являются ли кольца классов вычетов полями? Иными словами, можно ли ввести операцию деления классов? Попробуем, например, разделить P_2 на P_3 в кольце $\mathbb{Z}_6$. Пусть существует некоторое x такое, что $P_2 : P_3 = P_x$. Тогда $P_2 = P_3P_x$. Но, согласно определению,

$$P_3P_0 = P_0;\ \ P_3P_1 = P_3;\ \ P_3P_2 = P_0;\ \ P_3P_3 = P_3;\ \ P_3P_4 = P_0;\ \ P_3P_5 = P_3.$$

Итак, при любом x имеем $P_3P_x \neq P_2$, а это означает, что частного $P_2 : P_3$ не существует. Следовательно, кольцо $\mathbb{Z}_6$ не является полем. С другой стороны, таким же способом можно показать, что, например, кольца $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_7$ будут полями. Общий результат формулируется так: кольцо $\mathbb{Z}_m$ является полем тогда и только тогда, когда m — простое число.

Кольца и поля вычетов играют в математике важную роль, особенно в теории чисел. С их помощью, например, находят целочисленные решения уравнений вида $ax + by = c$, где a, b, и c — целые числа.

Упражнения

1. Покажите, что кольцом является а) множество чётных чисел; б) множество чисел, кратных трём; в) множество чисел, кратных четырём.

2. Подумайте, образует ли поле кольцо целых чисел?

3. Будет ли кольцом множество всех рациональных чисел?

4. Составьте таблицы сложения и умножения элементов кольца $\mathbb{Z}_3$.

5. Найдите несколько целочисленных решений (x, y) уравнения $2x + 3y = 11$.

§ 3. Векторы и векторные пространства

Вектор — одно из важнейших понятий в математике, физике и технике. Эволюция этого понятия — от *направленного отрезка* до сложнейших *векторных пространств* — история интересная и поучительная. Первоначально вектором называли направленный отрезок, прикреплённый к какой-либо точке. С помощью направленных отрезков удобно иллюстрировать физические величины, которые характеризуются не только числом, но и направлением: силу, скорость, напряжённость электрического поля и т. д.

Векторы, прикреплённые к одной точке, можно складывать по правилу параллелограмма (рис. 120). С физической точки зрения, сумма векторов

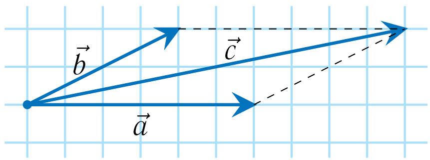


Рис. 120

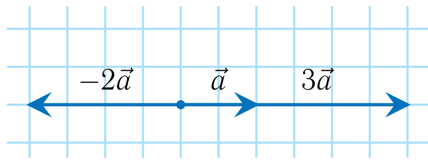


Рис. 121

представляет собой равнодействующую сил, приложенных к точке. Векторы, прикреплённые к одной точке, можно не только складывать, но и вычитать, а также умножать на числа. Разностью $\vec{b}-\vec{a}$ двух векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый равенством $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$. Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}=k\vec{a}$, прикреплённый к той же точке, что и вектор $\vec{a}$; длина вектора $\vec{b}$ определяется равенством $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если k число положительное, и противоположно вектору $\vec{a}$, если k — число отрицательное (рис. 121).

При этом, каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и числа k, l, всегда выполняются следующие равенства:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}; & 5)\ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}; \\ 2)\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}); & 6)\ k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}; \\ 3)\ \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}; & 7)\ (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}; \\ 4)\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}; & 8)\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}. \end{array} \qquad (2)$$

Математиков, которые рассматривают векторы вне их связи с физическим содержанием, не удовлетворяло, что нельзя складывать векторы, прикреплённые к разным точкам. Выход был найден в том, чтобы сделать векторы свободными от точки прикрепления и разрешить им передвигаться параллельно исходному положению. Иными словами, *свободный вектор* можно представлять себе в виде совокупности всевозможных направленных отрезков, параллельных между собой, имеющих одинаковые длину и направление. Такие отрезки называют *эквивалентными*.

Свободные векторы просто задавать с помощью координат. Напомним, что координатами вектора — направленного отрезка на плоскости называются его проекции на координатные оси X и Y (рис. 122). Очевидно, что все эквивалентные направленные отрезки имеют одинаковые координаты, поэтому последние можно считать координатами соответствующего свободного вектора.

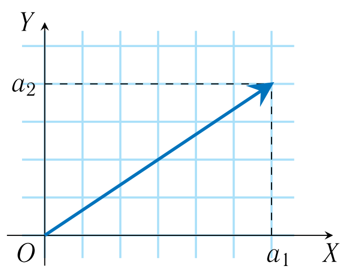


Рис. 122

В пространстве направленный отрезок имеет три координаты: проекции на координатные оси X, Y и Z. Следовательно, свободный вектор (далее просто вектор) в пространстве имеет также три координаты. Итак, теперь вектор можно заменить эквивалентным объектом — совокупностью его координат. Вектор на плоскости — это пара чисел (a_1, a_2), вектор в пространстве — тройка чисел (a_1, a_2, a_3). Сложение векторов и умножение их на числа теперь осуществляется также просто. Чтобы сложить два вектора, нужно сложить их соответствующие координаты, а чтобы умножить вектор на число, нужно умножить на это число все его координаты. Например, $(1, 2, -3) + (-4, 6, 4) = (-3, 8, 1)$, $2 \cdot (1, 2, -3) = (2, 4, -6)$.

Такая точка зрения на векторы оказалась исключительно плодотворной. Под определение вектора сразу подпало много физических и математических объектов. Например, всякое элементарное событие, происходящее в пространстве в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t, можно рассматривать как четырёхмерный вектор (x, y, z, t). Так мы приходим к *пространству событий* — одному из основных понятий современной физики. Другой пример. Всякий технологический процесс характеризуется набором различных параметров, которые фиксируются приборами, показывающими время, скорость процесса, давление, вязкость и т. п. Допустим, что таких параметров 10. Тогда состояние процесса определяется набором из десяти чисел, то есть десятимерным вектором.

Количество координат вектора называется *размерностью*. Векторы одной и той же размерности можно складывать и умножать на числа по тем же правилам, что двумерные и трёхмерные. И при любой размерности будут выполняться свойства (2). Таким образом, мы приходим к наиболее общему аксиоматическому определению векторного пространства: *векторным пространством называется всякое множество, для элементов которого, называемых векторами, определена операция сложения и определено умножение элементов на числа таким образом, что выполняются свойства* (2).

Свободный вектор называют ещё *параллельным векторным полем*. Термин «векторное поле» возник в физике, и его смысл вполне соответствует значению этого слова в обычном языке. Поле — некоторый участок земли, засеянный, скажем, пшеницей. Теперь представим себе, что колос пшеницы — это вектор, и что колосья (векторы) растут в каждой точке участка. Это и будет векторное поле, причём не обязательно параллельное. Параллельное поле получается в случае, когда все «колоски» параллельны и имеют одинаковую длину.

Множество примеров векторных полей мы находим в физике: электрические и магнитные поля, поле тяготения. Поток жидкости или газа в трубе порождает векторное поле скоростей: в каждой точке определён вектор скорости. Математики рассматривают векторное поле как функцию, которая каждой точке пространства сопоставляет вектор, как бы прикреплённый к этой точке. Векторные поля представляют собой один из важнейших объектов изучения в современной физике и математике.

Системы компьютерной алгебры позволяют автоматизировать работу с векторами. В Maxima, например, вектор с координатами $(1, 2, -3)$ записывается как `[1,2,-3]`, а для обозначения суммы, разности и произведения вектора на число используются обычные символы `+`, `-` и `*` соответственно. Так, команда `[1,2,-3]+[-4,6,4]` печатает результат `[-3,8,1]`, а команда `2*[1,2,-3]` — результат `[2,4,-6]`.

Упражнения

1. Изобразите векторное поле на плоскости, если координаты вектора, «прикреплённого» к точке с координатами (x, y), задаются формулой $(x + y, x - y)$.

2. Какими векторами в трёхмерном пространстве задаются рёбра и диагонали единичного куба, одна из вершин которого находится в начале координат, а противоположная — в точке с координатами $(1, 1, 1)$?

§ 4. Группы

Нетрудно заметить, что система аксиом кольца (1) и система аксиом векторного пространства (2) имеют некоторую общую часть. Следующие три свойства:

$$\begin{array}{ll} (a+b)+c = a+(b+c) & \text{(ассоциативность операции сложения),} \\ a+0 = a & \text{(существование нейтрального элемента),} \\ a+(-a) = 0 & \text{(наличие противоположных элементов)} \end{array} \qquad (3)$$

справедливы для любого кольца и любого векторного пространства. Укажем ещё два множества, для которых выполняются аксиомы (3).

Пример 4.1. Запишем по порядку числа от 1 до 6 и затем переставим их каким-либо образом, например, так: 2, 3, 5, 1, 6, 4. Результат нашей деятельности запишем в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} 123456 \\ 235164 \end{pmatrix}.$$

Эта таблица задает некоторую функцию, если считать, что верхний ряд — значения независимой переменной x, а нижний — соответствующие значения зависимой переменной y. Такая функция называется *подстановкой* или *перестановкой* из шести элементов и действует вполне понятным образом: единицу переводит в двойку, двойку — в тройку, тройку — в пятерку, четвёрку — в единицу, пятерку — в шестёрку, а шестёрку — в четвёрку. Количество различных перестановок из шести элементов, как мы знаем (см. §4 пятой главы), равно $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Результат последовательного действия двух перестановок тоже будет перестановкой. Запись

$$\begin{pmatrix} 123456 \\ 235164 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 123456 \\ 546321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123456 \\ 462513 \end{pmatrix}$$

показывает, что в результате последовательного действия перестановок

$$S_1 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 235164 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 546321 \end{pmatrix}$$

получилась перестановка

$$S = S_1 \circ S_2 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 462513 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, первая из них переводит единицу в двойку, а вторая — двойку в четвёрку. Следовательно, в результате совместных усилий они переводят единицу в четвёрку. Остальное аналогично.

Результат последовательного действия двух функций называется их *композицией*, или *сложной функцией*. Но по отношению к перестановкам допускается некоторая вольность речи. Говорят, что перестановка S является *произведением перестановок* S_1 и S_2.

Три любые перестановки S_1, S_2 и S_3 можно перемножить либо так: $S_1 \circ (S_2 \circ S_3)$, либо так: $(S_1 \circ S_2) \circ S_3$. Но результат получится один и тот же, поскольку в обоих случаях перестановки S_1, S_2 и S_3 действуют последовательно и в одном и том же порядке. Поэтому

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3. \tag{4}$$

Теперь заметим, что умножение *тождественной перестановки*

$$S_0 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 123456 \end{pmatrix}$$

на любую другую перестановку S не меняет последнюю:

$$S_0 \circ S = S \circ S_0 = S. \tag{5}$$

Наконец, для каждой перестановки S можно найти ей *обратную*, которая обозначается S^{-1} и действует так: если S переводит число k в число l, то S^{-1} переводит число l в число k. Например, для перестановки

$$S = \begin{pmatrix} 123456 \\ 235164 \end{pmatrix}$$

обратной будет перестановка

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 123456 \\ 412635 \end{pmatrix}.$$

Из определения обратной перестановки немедленно вытекает, что

$$S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = S_0. \tag{6}$$

Если в равенствах (4)—(6) заменить символ $\circ$ на $+$ и вместо S^{-1} записать $(-S)$, то эти равенства совпадут с равенствами (3).

Пример 4.2. Этот пример — геометрический. Мы рассмотрим *множество всех движений на евклидовой плоскости E*. *Движением* называется всякая функция D, переводящая точки плоскости E в точки той же плоскости E и сохраняющая длины отрезков. Последнее означает, что если $D(A) = B$ (то есть функция D переводит точку A в точку B) и $D(C) = E$, то длина отрезка AC равна длине отрезка BE.

Из данного определения, в частности, вытекает, что любое движение является взаимно однозначным преобразованием[10]: для каждой точки B существует единственная точка A, такая, что $D(A) = B$. Действительно, если бы движение D переводило в точку B две различные точки A_1 и A_2, то отрезок A_1A_2, имеющий ненулевую длину, перешёл бы в отрезок нулевой длины BB, что невозможно, так как движение сохраняет длины отрезков. Примерами движений являются *параллельные переносы*, *повороты* и *симметрии*.

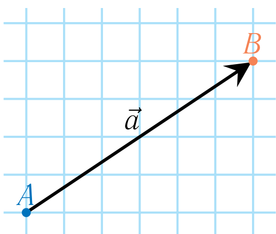


Рис. 123

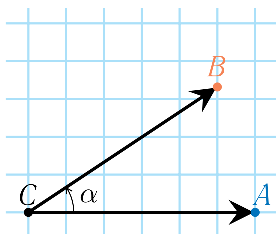


Рис. 124

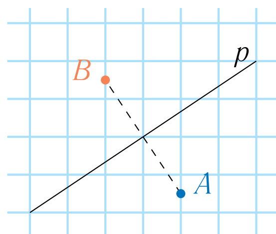


Рис. 125

Произвольный *параллельный перенос T* задаётся с помощью некоторого вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$ определяет в каждой точке A направленный отрезок AB (рис. 123). Тогда по определению $T(A) = B$. Ясно, что параллельных переносов на плоскости столько же, сколько векторов.

Произвольный *поворот R* задаётся точкой C, около которой происходит вращение, и углом α, на который каждая точка плоскости поворачивается около точки C. Если точка A после поворота около точки C на угол α перешла в точку B, то по определению $R(A) = B$ (рис. 124). Если поворот происходит против часовой стрелки, то угол α считается положительным, если по часовой стрелке — отрицательным. По определению $R(C) = C$.

Симметрия S — осевая симметрия относительно некоторой прямой p — переводит точку A в точку B, симметричную относительно этой прямой (рис. 125). Точки прямой p функция S оставляет на своих местах.

Как и для подстановок, для любых двух движений D_1 и D_2 можно определить их композицию $D_1 \circ D_2$ как результат последовательного действия:

[10]Как, впрочем, и всякая подстановка.

для любой точки A по определению $(D_1 \circ D_2)(A) = D_1(D_2(A))$. При этом, в силу тех же обстоятельств, что и выше, для любых трёх движений выполняется равенство $(D_1 \circ D_2) \circ D_3 = (D_1 \circ (D_2 \circ D_3)$, аналогичное равенству (4).

Согласно определению, *тождественное отображение* I, которое каждую точку плоскости оставляет на месте ($I(A) = A$), также является движением. Очевидно, что для произвольного движения D выполняются равенства $D \circ I = I \circ D = D$, аналогичные равенствам (5). Наконец, для каждого движения D существует ему обратное D^{-1}, которое определяется естественным образом: если D переводит точку A в точку B, то D^{-1} переводит точку B в точку A. Согласно этому определению, $D \circ D^{-1} = D^{-1} \circ D = I$, то есть выполняются равенства, аналогичные равенствам (6).

Можно доказать, что любое движение будет либо параллельным переносом, либо поворотом, либо симметрией, либо некоторой их композицией. Таким образом описываются все движения.

У рассмотренных в этом параграфе математических объектов есть нечто общее, а именно: 1) каждый из объектов представляет собой некоторое множество, на котором задана операция (композиции); 2) свойства этой операции описываются аксиомами (3). Такие множества называются *группами*. В соответствии с этим определением

- множество целых (рациональных, действительных) чисел является группой относительно операции сложения;
- множество рациональных (действительных) чисел без нуля является группой относительно операции умножения;
- множество всех подстановок из n элементов образует группу относительно операции композиции (умножения); в этой группе $n!$ элементов, она называется *симметрической группой* и обозначается S_n;
- множество всех движений на евклидовой плоскости образует группу относительно операции композиции.

Мы рассмотрели лишь некоторые наиболее простые, но важные группы. Разумеется, есть и другие группы, причём их так много, что задача классификации групп не решена до сих пор. Идея группы — одна из величайших идей в математике. Она возникла в работе математика XIX века Галуа[11]. Сейчас теория групп развита необычайно глубоко, и трудно указать такой раздел математики, где бы она ни принесла весомые результаты. Более того, группы хорошо работают, например в химии, кристаллографии, а современную физику вообще невозможно представить без теории групп.

Упражнения

1. Проверьте выполнение свойств (3) для множества подстановок из трёх элементов.

2. Проверьте выполнение свойств (3) для тех подстановок из четырёх элементов, которые единицу переводят в единицу.

[11] Эварист Галуа (1811–1832) — французский математик.

3. Будет ли группой множество всех таких подстановок из четырёх элементов, которые переводят единицу в двойку?

4. Что представляет собой композиция сдвига D_1 и вращения D_2 на плоскости? Верно ли, что $D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$?

5. Докажите, что множество всех действительных чисел, отличных от нуля, является группой относительно операции умножения.

6. Является ли группой относительно операции сложения множество всех натуральных чисел?

7. Придумайте группу из пяти элементов.

§ 5. Комплексные числа

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел ведёт себя идеально по отношению ко всем арифметическим операциям в том смысле, что при сложении, вычитании, умножении и делении двух действительных чисел снова получается действительное число. Однако квадратные корни можно извлекать только из положительных действительных чисел. Этот факт создает большие неудобства, в частности при решении алгебраических уравнений. Вы знаете, например, что квадратное уравнение имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант является неотрицательным. Таким образом, одни уравнения имеют два корня, а другие — ни одного. Аналогично обстоит дело и с уравнениями иных степеней. Например, уравнение $x^3 = 1$ имеет только один действительный корень $x = 1$, а уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$ — три корня: 1, 2 и -3.

Но уже в XVI веке математики поняли, каким образом можно записать решения любого квадратного уравнения, даже с отрицательным дискриминантом. История началась в 1545 году, когда Кардано[12] опубликовал формулу для вычисления корней кубического уравнения. Однако в некоторых случаях его формула давала странный результат. Например, корень $x = -3$ уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$ с помощью формулы Кардано записывался так:

$$\sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}}. \tag{7}$$

Значит, это выражение имело смысл несмотря на то, что содержало квадратный корень из отрицательного числа! Объяснение нашел другой математик XVI века, Бомбелли[13]. В 1572 году он опубликовал книгу «Алгебра», в которой изложил теорию *комплексных чисел*. Мы расскажем об основных идеях этой теории, используя современную математическую терминологию.

Обозначим выражение $\sqrt{-1}$ буквой i и назовём его *мнимой единицей*. Мнимая единица не является действительным числом, но мы распространим на неё все алгебраические свойства действительных чисел. Будем считать,

[12]Джероламо Кардано (1501–1576) — итальянский врач и математик.

[13]Рафаэль Бомбелли (1526–1572) — итальянский математик.

по определению, что мнимую единицу можно умножать на действительные числа и прибавлять её к действительным числам. Таким образом, мы расширим поле действительных чисел, добавив к нему новый элемент i. В результате появятся другие новые элементы, которые записывают в виде $a + bi$ и называют *комплексными числами*. Если $b = 0$, то комплексное число является действительным числом. Следовательно, действительные числа составляют часть комплексных чисел:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Комплексные числа будем складывать и умножать по таким правилам:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i; \qquad (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Второе равенство получается в результате почленного перемножения и приведения подобных членов с учётом соотношения $i^2 = -1$. Например,

$$(2 + 3i)(6 - i) = 12 - 2i + 18i - 3i^2 = (12 + 3) + (18 - 2)i = 15 + 16i.$$

Для каждого комплексного числа можно найти ему обратное. Для вычисления комплексного числа, обратного числу $a + bi$, используют умножение на *сопряжённое* число $a - bi$. Например,

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{(4+9)+0\cdot i} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

Для операций сложения и умножения комплексных чисел выполняются аксиомы (1), следовательно, множество всех комплексных чисел образует поле. Последнее содержит все действительные числа, поэтому говорят, что *поле комплексных чисел получено расширением поля действительных чисел*. С помощью комплексных чисел можно записать корни любого квадратного уравнения (это впервые сделал Бомбелли). Например, для уравнения $x^2 = -1$ корни равны i и $-i$, потому что $(\pm i)^2 = -1$, а корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$ можно найти по известной нам формуле:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Точно так же можно решить *любое* квадратное уравнение и оно всегда будет иметь ровно два корня. Теперь ясно и почему сумма (7) будет действительным числом. Первый из двух кубических корней представляет собой комплексное число $-\frac{3}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$, а второй равен $-\frac{3}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}$ (проверьте это возведением в куб!). Их сумма равна действительному числу -3.

Хотя комплексные числа были открыты в XVI веке, по-настоящему их роль поняли значительно позже, в начале XIX века. Этому предшествовал ряд замечательных открытий в математике. Вот некоторые из них. В конце

XVIII века Гаусс дал строгое доказательство так называемой основной теоремы алгебры: *всякое алгебраическое уравнение степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней*[14]. Иоганн Бернулли и Леонард Эйлер открыли формулу

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

из которой при $\alpha = \pi$ получается удивительное соотношение $e^{i\pi} = -1$, связывающее четыре знаменитых числа: e, π, i и 1. Наконец, ряд математиков, в том числе и Гаусс, начали представлять комплексные числа геометрически, как точки плоскости. При этом комплексному числу $a + bi$ ставится в соответствие точка с координатами (a, b).

Комплексные числа применяются во многих разделах математики, физики, механики и т. д. В начале XX века российский учёный Жуковский[15], которого называют отцом авиации, нашёл некоторые виды сложных траекторий полёта самолёта, которые впоследствии были названы фигурами высшего пилотажа. Одну из таких фигур выполнил известный лётчик Пётр Николаевич Нестеров. Другой российский учёный Келдыш[16] (впоследствии президент Академии наук СССР) решил проблему *флаттера* (внезапная вибрация самолёта, приводящая к его разрушению во время полета) и проблему *шимми* (разрушение колес при посадке самолёта). Оба учёных пользовались в своих расчётах методами комплексного анализа.

Системы компьютерной алгебры позволяют производить вычисления и с комплексными числами. Мнимая единица i при этом записывается как `%I` и возводится в квадрат обычным способом: `%I^2`$= -1$. Например, для нахождения степени $(1+i)^{20}$ достаточно набрать команду `expand((1+%I)^20)`, в результате появится число -1024. При решении алгебраических уравнений с помощью уже известной нам функции `solve` (см. §9 первой главы) находятся *все* корни, включая комплексные. Например, набрав команду `solve(x^3-1=0,x)`, мы получим три корня:

$$\left[x = \frac{\sqrt{3}i - 1}{2}, x = -\frac{\sqrt{3}i + 1}{2}, x = 1\right].$$

Упражнения

1. Найдите частное z/w комплексных чисел $z = 1 + i$ и $w = 2 - i$.

2. Возведением в куб проверьте, что числа $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются корнями кубического уравнения $x^3 = 1$.

3. С помощью компьютера найдите все корни уравнений $x^4 + x^2 - 1 = 0$ и $x^5 + x^2 + x + 1 = 0$.

[14] Поэтому поле комплексных чисел называют *алгебраически замкнутым*.

[15] Николай Егорович Жуковский (1847–1921) — российский математик, основатель аэродинамики.

[16] Мстислав Всеволодович Келдыш (1911–1978) — российский механик и математик.

§ 6. Алгебры Буля

Алгебры Буля названы так по имени открывшего их математика Джорджа Буля[17] в середине XIX века. Их эффективно применяют в математической логике, теории вероятностей и других разделах математики. С их помощью описывают работу различных управляющих систем — релейно-контактных и электронных схем, логических сетей, схем функциональных элементов и т. п. Их используют в математической кибернетике — науке об управлении, созданной в середине XX века Винером[18]. Рассмотрим некоторые простые задачи, приводящие к алгебрам Буля.

Пример 6.1. На автомобильной дороге есть 3 опасных участка, A, B и C, которые после дождя могут стать непроходимыми (рис. 126). Кроме того, в тех местах часто бывают густые туманы и другие неприятности. Эти участки можно обойти по другой дороге, но и там есть столь же опасные участки D и E. Сведения о состоянии указанных участков систематически поступают к дежурному ГАИ, который в любой момент должен быть готов ответить на вопрос: можно проехать по трассе или нет? Задача состоит в том, чтобы сконструировать логическое устройство, которое поможет быстро дать правильный ответ.

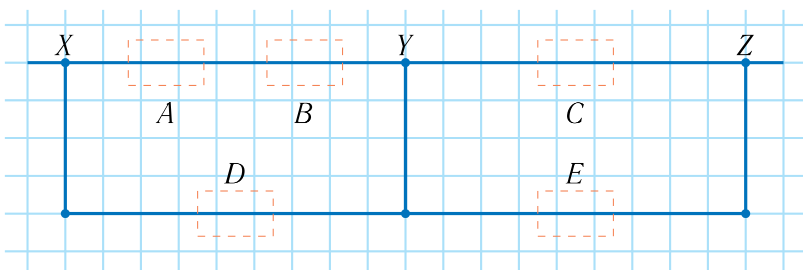


Рис. 126

Решение. Обозначим через A сообщение о состоянии участка A, через B — сообщение о состоянии участка B и т. д. Сообщения могут быть двух типов (принимать два значения): И — дорога в нормальном состоянии и Л — дорога непроходима. Пусть произведение AB обозначает сообщение, которое характеризует состояние дороги на обоих участках A и B. Если участки A и B проходимы, то проходим и суммарный участок XY. Поэтому AB принимает значение И только в том случае, когда оба сообщения, A и B, принимают значение И. Во всех остальных случаях сообщение AB принимает значение Л. Короче говоря, мы можем определить произведение AB с помощью таблицы 46.

Таблица 46

A	B	AB
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

[17] Джордж Буль (1815–1864) — английский математик и логик.
[18] Норберт Винер (1894–1964) — американский математик.

Далее, от Y до Z можно добраться двумя путями, через участок C или участок E. Поэтому вопрос, который нас интересует, можно сформулировать так: можно ли проехать хотя бы по одному из этих участков? Пусть сумма $C+E$ обозначает некоторое сообщение, которое характеризует возможность проезда от Y до Z. Именно, $C+E$ принимает значение И (путь открыт!) в том случае, когда пригоден для проезда хотя бы один из участков C или E, то есть одно из сообщений C или E принимает значение И. Итак, мы определяем сумму $C+E$ таблицей 47.

Таблица 47

C	E	$C+E$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Используя эти понятия, мы можем теперь записать сообщение S, которое принимает значение И, если проезд от X до Z возможен, и значение Л в противном случае. Оно имеет вид:

$$S = (AB + D)(C + E). \tag{8}$$

Допустим, дежурный получил сообщения, указанные в таблице 48. Тогда, подставив их в формулу (8), он с помощью таблиц 46 и 47 может вычислить значение S: (ИЛ + И)(Л + И) = (Л + И)И = = ИИ = И. Путь открыт. На самом деле, дежурному вовсе не обязательно всё время пользоваться формулой (8). Легко реализовать простейшее техническое приспособление, которое будет работать автоматически. Представьте себе, что на рис. 126 изображена электрическая цепь, которая может быть разомкнута на участках A, B, C, D, E. В обычном режиме цепь замкнута, по ней идет ток и в конечной точке Z горит лампочка. Это означает, что проезд возможен. В случае, если, например, с участка A приходит сигнал Л (участок непроходим), то автоматически размыкается цепь на участке A. Но лампочка продолжает гореть, так как в цепи есть ток (проезд ещё возможен). Как только лампа погасла — проезда нет.

Таблица 48

Сообщение	A	B	C	D	E
Значение	И	Л	Л	И	И

Мы рассмотрели очень простой пример. В рассматриваемой ситуации дежурный вполне мог обойтись и без столь глубокого логического анализа. Однако подобный анализ совершенно необходим, если мы намереваемся управлять сложными системами, например дорожной сетью большого города. Математическую основу наших рассуждений составляют таблицы 46 и 47, которые определяют операции умножения и сложения на множестве объектов A, B, C, ..., каждый из которых может принимать два значения — И или Л. Таблица 49 определяет ещё одну допустимую операцию над этими объектами — отрицание.

Таблица 49

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Множество $\mathcal{B}$ элементов A, B, C, ..., называется *алгеброй Буля*, если каждый из элементов может принимать два значения И или Л, и на $\mathcal{B}$ заданы операции сложения, умножения и отрицания, действие которых определяется таблицами 46, 47 и 49.

С алгебрами Буля мы уже сталкивались. Случайные события, рассмотренные в шестой главе, образуют алгебру Буля относительно введённых для них операций сложения и умножения. В математической логике изучаются алгебры Буля, элементами которых являются *высказывания*. Каждое высказывание может быть либо истинным (то есть принимать значение И), либо ложным (то есть принимать значение Л). Высказывание, противоположное высказыванию A, обозначается через $\overline{A}$. Ещё одним важным примером является совокупность всех подмножеств данного множества, образующих алгебру Буля относительно операций объединения и пересечения множеств.

Пример 6.2. Во время допроса каждый из четырёх подозреваемых сделал следователю три заявления.

Валет: «Я не виновен»; «Туза я не знаю»; «Серый знает, кто это сделал».
Хват: «Это сделал не я»; «С Серым я не знаком»; «Это сделал Туз».
Туз: «Я не виновен»; «Это сделал Серый»; «Хват лжёт, это сделал не я».
Серый: «Я не виновен»; «Это сделал Валет»; «Хват может за меня поручиться».

При перекрёстном допросе каждый из подозреваемых признал, что из трёх сделанных им заявлений два верных и одно неверное. Может ли следователь определить преступника на основании полученной информации?

Решение. Проанализируем высказывания, сделанные в ходе допроса. Для этого формализуем наши рассуждения. Обозначим высказывания подозреваемых B_1, B_2, B_3, X_1, X_2, X_3 и т. д. Наша цель — установить, какие из них являются истинными, а какие — ложными. Запись $X_1 =$ И, например, будет далее обозначать, что первое высказывание Хвата истинно.

Прежде всего заметим, что первое и третье высказывания Туза логически связаны между собой и, по существу, представляют собой одно и то же утверждение «я не виноват». Поэтому они либо оба истинны, либо оба ложны. Но так как из трёх высказываний Туза ложное только одно, то остаётся единственный вариант: оба высказывания, первое и третье, являются истинными. Следовательно, можно записать $T_1 =$ И, $T_2 =$ Л, $T_3 =$ И.

Теперь ясно, что третье высказывание Хвата («преступник — Туз») является ложным. Поэтому остальные два истинны. Итак, $X_1 =$ И, $X_2 =$ И, $X_3 =$ Л. Поскольку высказывание T_2 ложно, то Серый не виновен. Значит, $C_1 =$ И. Кроме того, высказывание C_3 ложно, так как истинно X_2. Следовательно, $C_2 =$ И. Но это означает, что преступник — Валет, то есть $B_1 =$ Л, $B_2 =$ И, $B_3 =$ И.

По существу, подобный логический анализ проводит всякий опытный следователь. Однако в реальных делах часто бывает весьма большое число участников (свидетелей, подозреваемых и т. д.) и приходится анализировать большое число высказываний. В таких случаях результаты представляют в виде таблиц, диаграмм, схем и т. п. Так, результаты наших рассуждений можно оформить в виде таблицы 50, в которой мы последовательно заполнили третью, вторую, четвёртую и, наконец, первую строки.

Таблица 50

	1	2	3
B	Л	И	И
X	И	И	Л
T	И	Л	И
C	И	И	Л

Для анализа большого числа данных обычно используют компьютеры, которые способны перебрать практически любое число вариантов. Процедура перебора осуществляется с помощью формул алгебры Буля. Для каждого из вариантов машина проверяет, выполняются ли заданные связи между высказываниями, которые записываются на языке алгебры Буля. В рассмотренной нами задаче число различных вариантов заполнения таблицы равно 81, а связи между высказываниями таковы:

$$T_1 = T_3, \qquad X_3 = \overline{T}_1, \qquad \overline{T}_2 = C_1, \qquad C_2 = \overline{B}_1.$$

В заключение отметим, что, с одной стороны, алгебры Буля представляют собой теоретическую (логическую) основу для расчёта различных электронно-вычислительных схем, так как любая электрическая цепь может находиться в одном из двух состояний: либо она пропускает ток, либо нет. Это и позволяет считать цепи элементами алгебры Буля со значениями И или Л. С другой стороны, с помощью ЭВМ можно эффективно анализировать различные ситуации, подобные описанным выше.

Упражнения

1. Докажите, используя правила умножения из пятой главы (стр. 130), что количество различных вариантов заполнения таблицы 50 равно 81.

2. Рассматривая дело об угоне автомобиля, следователь допрашивал четырёх подозреваемых. Андрей сказал: «Если Сергей не угонял автомобиля, то его угнал Борис». Сергей добавил: «Если Борис не угонял, то его угнал Андрей». Дмитрий возразил: «Если Борис не угонял, то его угнал Сергей». Борис заявил: «Если Андрей не угонял, то его угнал я». Удалось выяснить, что Андрей солгал, а Борис сказал правду. Правдивы ли показания Сергея и Дмитрия? Кто угнал машину?

3. В нарушении правил обмена валюты подозреваются четыре работника банка — A, B, C и D. Известно следующее:

а) если A нарушил, то и B нарушил правила обмена валюты;
б) если B нарушил, то либо и C нарушил, либо A не нарушал;
в) если D не нарушил, то A нарушил, а C не нарушал;
г) если D нарушил, то и A нарушил.

Кто из подозреваемых нарушил правила обмена валюты?

4. Кто из людей A, B, C и D играет, а кто не играет в шахматы, если известно следующее: а) если A или B играет, то C не играет; б) если B не играет, то играют C и D; в) C играет.

Глава X

О теории принятия решений

Всякое целенаправленное действие человека предваряется некоторым умственным усилием, размышлением, результатом которого является принятие решения. Принятие решений — одно из важнейших занятий человека на протяжении всей его жизни[1]. Каждый день мы принимаем множество различных решений, от самых простых до весьма сложных. Какую надеть рубашку? Что купить на обед? В какой вуз поступить? Какому сотруднику поручить работу? Такие решения мы принимаем на основании личного опыта и здравого смысла. Однако в сложных ситуациях этого недостаточно, и для принятия ответственных решений приходится использовать специальные методы и расчёты.

Математические методы позволяют во многих ситуациях найти оптимальное решение. Число таких математических методов довольно велико, и многие из них весьма сложны. В этой книге мы продемонстрируем лишь некоторые из них, причём в самых простых ситуациях. Тем не менее, внимательный читатель, не имеющий предубеждения к математике, сможет почерпнуть много полезного и применить эти методы в своей работе.

§ 1. Математика и современный мир

Культурой (в широком смысле) называют совокупность всех материальных и духовных ценностей, накопленных человечеством за определённую историческую эпоху. Говорят также о культуре данной цивилизации: шумерской, египетской, китайской, греко-римской, европейской. И какой бы исторический отрезок мы ни взяли, какими бы географическими рамками ни ограничились, там всегда присутствует математика. Это и понятно: людям всегда надо было считать, измерять, производить всевозможные вычисления, чтобы строить, торговать, делать календарные расчёты, делить урожай, собирать налоги и т. д. Поэтому математика зародилась значительно раньше других наук.

Высокоразвитую математику учёные обнаруживают в египетских папирусах и вавилонских клинописных текстах пятитысячелетней давности. За 500 лет до Новой Эры начался расцвет математики в древней Греции, давшей миру Пифагора, Евклида, Архимеда и многих других замечательных учёных и философов. Китайские математики уже за 2000 лет до Новой Эры достигли удивительных успехов, а в их математических книгах XIII века обнаружены некоторые методы решения уравнений, переоткрытые затем в XIX веке. В средние века бурно развилась индийская и арабская математика. Напри-

[1] Нас не интересуют рефлекторные, спонтанные действия, которые человек производит не размышляя, например при внезапном падении, под влиянием сильных чувств, сильного голода, во время длительной работы на конвейере и т. п.

мер, десятичная позиционная система, которой мы сейчас пользуемся для записи чисел, — изобретение индийских математиков VI века.

Развитие математики стимулировали прежде всего экономические факторы. Чем активнее человек вторгался в природу и развивал производство, тем больше он нуждался в математике. За несколько тысяч лет математика сделала колоссальный шаг вперед: от счёта в пределах десятка до её современного состояния — фантастической сложности и невообразимой разветвлённости. Благодаря усилиям математиков прежде всего двух последних столетий только в современной «чистой» математике различают около ста крупнейших областей, каждая из которых подразделяется на несколько десятков направлений. Кроме того, возникли новые направления: кибернетика, вычислительная математика, информатика ...

За последние 50 лет стремительно развилась вычислительная техника, появились электронно-вычислительные машины, с помощью которых успешно решают как прикладные, так и чисто математические задачи. А персональные ЭВМ начинают занимать в жизни современного человека более важное место, чем автомобиль. Благодаря науке, производство (и прежде всего — развитие технологий) за последние два века достигло небывалых успехов. Сейчас население большинства стран живёт в таком комфорте, которого не могли себе даже вообразить современники Бетховена и Гете. Поэтому постепенно наука — а под этим термином стали понимать прежде всего точные науки — заняла в умах людей и общественном мнении важное место. В итоге в XX веке произошло то, чего раньше не было и в помине — государства, корпорации и даже частные лица стали финансировать научные исследования. Это, в общем-то, положительное явление, дало косвенный отрицательный эффект — преувеличение роли точных наук и, в первую очередь, конечно, математики, на которой все эти науки основаны. Возникло (даже в среде специалистов!) представление о всемогуществе математических методов; а поскольку, вдобавок, математический язык весьма сложен и специфичен, то в умах обывателей математика стала ассоциироваться с чем-то вроде магии.

Хотя авторы этой книги по профессии математики, они не разделяют точку зрения, согласно которой «в каждой науке столько истины, сколько в ней математики». Существуют науки, уровень развития которых ещё не позволяет эффективно применять математику. Но это не умаляет роли других, нематематических методов, которые есть в каждой науке, и с помощью которых достигаются прекрасные результаты. Дело не в том, какими методами пользуется учёный, математическими или другими; ценность полученных им результатов зависит в первую очередь от его профессионализма и честности.

Достаточно прочитать сочинения великих русских историков С. В. Соловьева и В. О. Ключевского, чтобы понять, что история — это настоящая наука, хотя в ней математические методы почти не применяются. А плачевное состояние советской историографии вовсе не результат отсутствия в ней математических методов, а результат семидесятилетнего давления идеологии.

И если современное российское право имеет существенные пробелы, то виноваты в этом не настоящие учёные-правоведы, а та же идеология, долгое засилие таких псевдоучёных, как Вышинский с его принципом презумпции виновности и другими «находками»; к этому можно добавить ещё и «телефонное право», долго заменявшее все законы, и, наконец, исторические традиции: ведь на Руси испокон веку мнение начальника значило больше, чем закон.

Однако, вне всякого сомнения, грамотное и аккуратное применение математических методов способно принести пользу любой науке. Сложность состоит прежде всего в том, чтобы сформулировать на математическом языке, то есть описать в математических терминах ту задачу, которая интересует биолога, психолога, экономиста, юриста, филолога. К сожалению, среди гуманитариев ещё очень мало специалистов, хорошо владеющих современными математическими методами. Поэтому постановка математической задачи в нематематической области — это, как правило, продукт совместной деятельности двух специалистов, один из которых — математик. При этом эффективность их совместной работы существенно повышается, если и другой хотя бы немного знаком с математикой.

Интерес к числам, к счёту, к сложным играм, требующим напряжения ума, проявляется уже с детства. Многим детям интеллектуальные забавы доставляют столько же радости, сколько другому ребенку — игра в мяч или мороженое. При надлежащем воспитании этот интерес развивается и возникает потребность в умственной деятельности, требующей логического мышления, применения точных расчётов, поиска закономерностей. Реализовать такую потребность ума человек может в разных сферах деятельности, но в наиболее чистом виде — в математике.

Ещё в школе ученик постепенно развивает свою способность к абстрактному мышлению, причём не только на уроках математики, но и на уроках физики, химии, биологии. Ведь формулируя очередной закон природы, учитель как бы переводит ученика на новый уровень абстрактного мышления. Если ученик всерьез начинает интересоваться качественным содержанием того или иного закона — вполне вероятно, что он посвятит себя естественным наукам или их приложениям. Но иногда ученика завораживает магия чисел и формул, красота геометрических построений, мощь и универсальность математических методов, сочетание в них идеальной чистоты с идеальной строгостью — тогда он становится математиком. Невозможно коротко ответить на вопрос, что отличает математическое мышление или математический склад ума. Для этого нужно глубоко проанализировать процесс математического познания, понять, как математик приходит к открытию. Желающих получить исчерпывающий ответ мы отсылаем к замечательным книгам А. Пункаре «О науке» и Д. Пойа «Математическое открытие».

Стиль мышления прежде всего характеризуется языком, которым пользуется наука. Математик пользуется специальным языком — языком абстрактных символов. Очищенные от конкретного содержания, символы становятся универсальными и в этом их сила. Но в этом и их слабость! Нематематика, склонного к конкретному мышлению, математические абстракции и специальные знаки повергают в ужас. В своём страхе он фетишизирует символику и полагает, что, выучив значки, он постигнет и математику. В этом корни обывательского страха перед математикой и известного в педагогике явления, называемого «зубрёжкой».

Математический стиль мышления формируется у того, кто использует математические методы. Этот стиль отличает логическая строгость, универсальность, сочетание индуктивного и дедуктивного подхода, нацеленность на поиск закономерностей, четкость формулировок и определений, использование точных количественных оценок. Наш век знаменателен тем, что математические методы начинают использовать в экономике, экологии, медицине, управленческой деятельности и гуманитарных науках — лингвистике, социологии, психологии ... Математику начали преподавать на гуманитарных факультетах не случайно — общество осознало, что она не только важная составляющая общечеловеческой культуры, но и необходимый инструмент познания в любой области деятельности. Ещё одно существенное отличие математического стиля мышления состоит в том, что математик мыслит логическими категориями, а нематематик — образами. Попросите, например, филолога определить, что такое поэтический образ, а математика — что такое функция, и вы поймете разницу в стиле мышления. Наконец, математики, как никто другой умеют обобщать свои наблюдения — это тоже отличительная черта математического мышления. По этой причине многие математики становятся хорошими философами, ибо обобщения и составляют предмет изучения философии.

Обычно отмечают, что математика развивает логическое мышление, что *математика — это гимнастика ума*, что она дисциплинирует мышление и т. п. Однако математика совершенствует не только ум. Способ мышления формирует и характер, поэтому справедливо спросить: какие черты характера воспитывает в человеке занятие математикой? Замечательный математик и педагог А. Я. Хинчин называет прежде всего честность, правдивость, настойчивость и мужество. Наверное, наш читатель, ещё учась в школе, заметил, что невыученный урок по истории, например, отвечать намного легче, чем невыученный урок по математике. С учителем истории можно завязать дискуссию, попытаться уйти от прямого ответа, сослаться на чей-то авторитет, найти оправдание любой точке зрения, потянуть время ... Но все это не пройдет на уроке математики. Учитель и все присутствующие быстро поймут, знаешь ты доказательство или нет, правильно решён пример или нет. А если нет — то никакие разговоры не исправят положения. Потому что в математике теорема либо верна, либо нет, середины не бывает, а правильность доказательства обеспечивается не красноречием или громким голосом выступающего, а строгим непротиворечивым рассуждением. В математических доказательствах возможны ошибки, но невозможны спекулятивные рассуждения и жульничество. Математик, пытающийся жульничать, уличается сразу, поэтому среди математиков практически нет шарлатанов от науки. Напротив, в тех науках, где применение точных математических методов пока не является нормой, псевдоучёных и псевдоучений бывает более чем достаточно.

Да, непросто стать математиком. Но не потому, что трудно освоить её язык, и не потому, что она — для избранных. Практически любой нормальный студент в состоянии освоить математические премудрости и программу по математике, умственных способностей ему хватит. Но хватит ли воли, мужества и настойчивости? Эти человеческие качества очень хорошо отражает известный афоризм: *если двум людям, один их которых — математик, поручить незнакомую им работу, то математик сделает лучше.* В то же время не следует, как мы уже отмечали, полагать, что математика — панацея от всех бед, и что её применение в данной науке способно решить все проблемы. Это, конечно, не так. Возьмем, например, такую животрепещущую социальную проблему, как рост преступности. Её решение нужно искать прежде всего на пути совершенствования общественного устройства и улучшения нравственного состояния общества. Роль математики сводится к тому, чтобы дать, по возможности, более точную статистическую оценку уровня криминогенности, количественно оценить различные тенденции в этом социальном явлении, сделать достоверные прогнозы, а на основе последних — составить программу действий, спланировать соответствующие превентивные и профилактические меры.

§ 2. Математика помогает принять решение

Допустим, что вы отвечаете за организацию работы большого отдела, или за проведение операции по поимке группы особо опасных преступников. Чтобы спланировать такую операцию, нужно принять много ответственных решений, учесть множество факторов: определить число сотрудников и групп, участвующих в операции, спланировать их действия, обеспечить связь, учесть географические условия, погоду и многое другое. От правильности ваших решений будет зависеть жизнь многих людей, поэтому, помимо интуиции и опыта, вы должны использовать и тщательный расчёт. Во многих случаях здесь помогают специальные математические методы, моделирующие ту или иную ситуацию.

Любая целенаправленная человеческая деятельность сопровождается принятием решений, число которых может быть очень большим. Решения приходится принимать в неопределённых или конфликтных ситуациях, в условиях риска и т. д. Прежде всего это относится к планированию работы сложных систем, которые возникают в экономике, экологии, социальной сфере. Примерами сложных систем являются крупные индустриальные производства, системы национальной безопасности, транспортные системы, космические программы, страховые компании, государственные социальные программы и т. д. Практически во всех задачах, связанных с планированием, мы не можем заранее точно предсказать результат и не в состоянии учесть все последствия. Более того, часто практически невозможно собрать и переработать всю необходимую информацию, основываясь только на личном опыте и интуиции. Поэтому при планировании неизбежно применение математических методов и ЭВМ. В каждой области человеческой деятельности выработаны свои методы, помогающие принять правильное решение. Но, хотя экономисты, юристы, управленцы, военные и т. д. принимают решения каждый в своей сфере деятельности, методы и критерии, которыми они руководствуются при принятии и обосновании решений, по существу, одни и те же. Эти методы и составляют предмет *теории принятия решений*.

Процесс принятия решения можно условно разбить на части: определение цели и критериев, выбор принципа оптимальности, построение моделей, разработка методов поиска оптимального решения, экспертиза моделей, планирование, выбор приемлемых альтернативных вариантов и их сравнение, нахождение линии оптимального поведения в рамках выбранного варианта, определение потребностей, распределение интеллектуальных и материальных ресурсов и т. д. При анализе той или иной ситуации выбирают соответствующий критерий оценки, который называют *показателем эффективности* или *целевой функцией*. Это может быть, например, средняя прибыль предприятия, количество сбитых самолётов, время безотказной работы двигателя, но также и вероятность получения заданной средней прибыли, вероятность обнаружения самолёта, вероятность выхода из строя двигателя в течение определённого промежутка времени. Принимаемое решение должно быть таковым, чтобы показатель эффективности был как можно лучше.

При принятии решения самое главное — выбор наилучшего или оптимального варианта. Здесь весьма эффективны математические методы. Один из подходов состоит в том, что строится математическая модель рассматриваемой ситуации или рассматриваемого объекта. Математическая модель может представлять собой алгебраическое или дифференциальное уравнение, систему уравнений или неравенств, числовую таблицу, график, набор вероятностей каких-либо событий и т. д. Построение модели, адекватно отражающей объект, — дело непростое и требует специальных знаний и хорошей математической подготовки.

Нормальная ситуация состоит в том, что *лицо, принимающее решение* (сокращенно ЛПР; это может быть руководитель предприятия, командир подразделения, бизнесмен, начальник УВД, простой гражданин), верит в науку и понимает, что нужно использовать научные методы. ЛПР делает заказ на исследование ситуации группе учёных (аналитиков). Он же определяет критерии оценки, которых может быть несколько. Таким образом, выбор критериев может априорно оказаться субъективным. Более того, критерии могут оказаться противоречивыми. Например, руководитель предприятия может ориентироваться не только на получение максимальной прибыли, но и на социальный аспект, рассматривая в качестве одного из критериев число рабочих на предприятии, число молодых рабочих и т. п. В группе аналитиков, исследующих ситуацию, вместе с математиками должны работать психологи и юристы. Если ЛПР не ориентируется во всех тонкостях процесса, то у него должно быть некое правило, помогающее ему принять решение. Такое правило помогает выработать теория принятия решений. Эксперименты показали, что в задачах принятия решений возможности человека ограничены из-за ограниченной ёмкости его кратковременной памяти. Поэтому часто решение принимается после продолжительного диалога между ЭВМ и человеком.

Создание человеко-машинных или диалоговых процедур — самостоятельная сложная задача, которая является составной частью теории принятия решений. Новые возможности ЭВМ позволили создать так называемые системы поддержки принятия решений, то есть человеко-машинные системы, помогающие принять решение. Отметим, что качество принятого решения зависит от качества образования ЛПР, его склонности к риску, от качеств экспертов и аналитиков, от организации и условий их работы, и т. п. Кроме того, ничто не может гарантировать успех навечно. Через определенный период времени каждое решение надо пересматривать.

§ 3. Извлечение из теории игр

Часто решения приходится принимать в конфликтной ситуации, когда сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих разные цели. Такие ситуации возникают очень часто: военная сфера, конкуренция в экономике, спортивные состязания, судебная процедура и т. д. Математическая теория, анализирующая конфликтные ситуации, называется *теорией игр*. *Игрой* называется модель конфликтной ситуации. Покажем на простых примерах, как строится и работает такая модель.

Военная игра. Пусть у нас имеется два вида вооружения: A_1 (зенитки) и A_2 (ракеты типа «земля-воздух»); у противника — два типа самолётов, B_1 и B_2. Ход противника состоит в том, что он выбирает один из своих самолётов и посылает его бомбить нашу базу. Следовательно, у него 2 хода — B_1 и B_2. Наш ответный ход состоит в том, что мы выбираем один из видов вооружения и пытаемся сбить самолёт. Следовательно, у нас тоже 2 хода — A_1 и A_2. Эту ситуацию можно смоделировать игрой 2×2, в которой 2 игрока — мы (игрок A) и противник (игрок B). Прежде всего установим правила игры. Это означает, что нужно назначить *платежи*, то есть указать, сколько каждый игрок выигрывает или проигрывает, сделав тот или иной ход[2]. Обычно указывают выигрыши игрока A. Выигрышем может быть какая-то сумма денег, число баллов, вероятность попадания в цель и т. д.

[2] Мы рассматриваем так называемую *антагонистическую игру*, в которой проигрыш одного игрока равен выигрышу другого.

В нашем случае возьмём в качестве платежей вероятности поражения самолётов. Пусть оружие A_1 поражает самолёты B_1 и B_2 с вероятностями 0,5 и 0,6, а оружие A_2 — с вероятностями 0,6 и 0,7 соответственно. Составим *платёжную матрицу* (таблица 51), в которой укажем выигрыши первого игрока. Главная идея теории игр состоит в том, что игрок A считает своего противника не глупее себя и поэтому при каждом своём ходе рассчитывает получить хотя бы наименьший выигрыш. Наименьший выигрыш при первом ходе игрока A — это наименьшее число в первой строке матрицы, $\alpha_1 = 0{,}5$. Наименьший выигрыш игрока A при втором ходе будет $\alpha_2 = 0{,}6$, то есть наименьшее число во второй строке платёжной матрицы. Но из двух ходов игрок A должен сделать тот, при котором его наименьший выигрыш будет больше, то есть 0,6. Обозначим это число через α.

Таблица 51

	B_1	B_2
A_1	0,5	0,6
A_2	0,6	0,7

В то же время второй игрок должен действовать так, чтобы его наибольший проигрыш был как можно меньше. Наибольший проигрыш игрока B при первом ходе будет $\beta_1 = 0{,}6$ (наибольшее число в первом столбце таблицы 52); при втором ходе — $\beta_2 = 0{,}7$ (наибольшее число во втором столбце). Следовательно, игрок B должен сделать первый ход, тогда его проигрыш будет не более $\beta = 0{,}6$.

Таблица 52

	B_1	B_2		
A_1	0,5	0,6	$\alpha_1 = 0{,}5$	
A_2	0,6	0,7	$\alpha_2 = 0{,}6$	$\alpha = 0{,}6$
	$\beta_1 = 0{,}6$	$\beta_2 = 0{,}7$		
	$\beta = 0{,}6$			

Величина α называется *нижней ценой игры*, или *максимином*, величина β — *верхней ценой игры*, или *минимаксом*. Итак, *оптимальная стратегия* игрока A — сделать ход A_2, а *оптимальная стратегия* игрока B — сделать ход B_1. В этом случае наименьший выигрыш игрока A будет максимальным — 0,6, а наибольший проигрыш игрока B — минимальным, то есть тоже 0,6. Легко проверить, что если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то и другому тоже невыгодно отклоняться от нее. В рассмотренной игре получилось так, что $\alpha = \beta$. В этом случае говорят, что игра имеет *седловую точку в чистых стратегиях* (у нас она 0,6). В игре с седловой точкой оптимальные стратегии игроков описываются весьма просто. При этом существенно то, что при повторении игры при тех же условиях игроки должны делать те же самые ходы.

Игра «Поиск». Дети играют в «преступника» и «милиционера». Игрок A прячется, B ищет. Игрок A имеет два места, Π_1 и Π_2, где он может спрятаться. Игрок B знает, где они находятся. Каждый из них может по своему усмотрению выбрать то или иное место (один — чтобы спрятаться, другой — чтобы найти). Таким образом, каждый игрок имеет по два хода. Для игрока A: первый ход (A_1) — спрятаться в Π_1, второй ход (A_2) — спрятаться в Π_2. Для игрока B: первый ход (B_1) — искать в Π_1, второй ход

Таблица 53

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-1

(B_2) — искать в Π_2. Теперь назначим платежи. Если B нашел A в первом или втором убежище, то A платит ему 1 рубль, то есть выигрыш игрока A равен -1. Если B не находит A, то он платит ему 1 рубль. Платёжная матрица, состоящая из выигрышей игрока A, приведена в таблице 53.

Найдём, как и выше, числа α и β. Получается таблица 54. Возможны два принципиально разных случая. Если игра проводится один раз, то игроку A совершенно безразлично, какой шаг делать, A_1 или A_2. В любом случае его выигрыш не меньше -1. Для игрока B ситуация аналогична, а его максимальный проигрыш не больше 1. Если же игра повторяется многократно, то игрок A не может делать всё время один и тот же ход, иначе его противник разгадает стратегию и начнёт выигрывать. Следовательно, игрок A должен чередовать свои ходы. Но если он будет чередовать их в каком-то определённом порядке, то противник через некоторое время разгадает его тактику и опять начнёт выигрывать. Поэтому игрок A должен вести себя как можно более непредсказуемо, то есть выбирать каждый последующий ход каким-то случайным образом. Это можно делать, например, с помощью монеты (орёл—решка) или игральной кости (чёт—нечет).

Таблица 54

	B_1	B_2		
A_1	-1	1	$\alpha_1 = -1$	
A_2	1	-1	$\alpha_2 = -1$	$\alpha = -1$
	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$		
	$\beta = 1$			

В этом примере ходы каждого игрока имеют одинаковую цену, то есть равноправны. Следовательно, нет никаких оснований предпочесть один ход другому. Именно поэтому игрок определяет свою стратегию с помощью монеты или игральной кости. Следующая игра показывает, как выбрать стратегию в ещё более сложной ситуации.

Игра «Коммерсант». Коммерсант торгует темными очками и зонтиками, поэтому его успех зависит от погоды. В хорошую погоду он продаёт в день 1000 очков и 100 зонтиков, в пасмурную — 500 зонтиков. Зонтики он покупает по 50 центов, продаёт по одному доллару; очки покупает по 20 центов, продаёт по 50 центов. Коммерсант каждый день закупает товар на 250 долларов, а на другой день старается продать его полностью (оставшийся товар пропадает). Он не доверяет метеосводкам и считает, что господь бог назначает хорошую или плохую погоду с помощью монеты (орёл—решка). Проблема состоит в том, чтобы сделать закупку оптимальным образом.

Описанную ситуацию можно рассматривать как игру с двумя игроками, причём вторым игроком является природа (или погода). Это игра 2×2, так как у каждого из игроков есть два возможных хода. У игрока A (коммерсанта): первый ход (A_1) — закупка в расчёте на дождь, второй ход (A_2) — закупка в расчёте на ясную погоду. У игрока B (природа): первый ход (B_1) — дождь, второй ход (B_2) — ясная погода. В качестве платежей естественно взять выигрыш игрока A, то есть прибыль коммерсанта. В расчёте на дождь он на все 250 долларов закупает только зонтики (500 штук). Если будет дождь, то он продаст все зонтики и получит прибыль 250 долларов. Если же будет ясная погода, то ему удастся продать только 100 зонтиков на 100 долларов, то есть он понесёт убыток в 150 долларов. Можно считать, что в этом случае его прибыль отрицательна, -150 долларов.

Таблица 55

		Дождь	Ясно		
		B_1	B_2		
Закупка в расчёте на дождь	A_1	250	-150	$\alpha_1 = -150$	
Закупка в расчёте на «ясно»	A_2	-150	350	$\alpha_2 = -150$	$\alpha = -150$
		$\beta_1 = 250$	$\beta_2 = 350$		
		$\beta = 250$			

В расчёте на ясную погоду коммерсант закупает на 250 долларов 1000 пар очков и 100 зонтов. В ясную погоду он все это продаст за 600 долларов, то есть получит 350 долларов прибыли. Но в дождь он сумеет продать из всего этого товара только 100 зонтов на 100 долларов, то есть понесёт убыток в 150 долларов (или получит -150 долларов прибыли). Матрица игры задана таблицей 55. Мы видим, что $\alpha \neq \beta$, то есть седловой точки нет. Следовательно, игрок A не может выбрать определённую стратегию и должен ходы чередовать. Далее заметим, что так как все числа α_1, α_2, β_1, β_2 различны, то ходы неравноправны. Поэтому возникает вопрос: в какой пропорции их сочетать, чтобы получить оптимальную стратегию? Теория игр даёт следующее правило для определения искомой пропорции. Разность платежей, записанных в первой строке, равна 400; разность платежей, записанных во второй строке, равна 500; отношение этих чисел равно 4:5, поэтому первый и второй ходы следует применять в пропорции 5:4, то есть из каждых девяти ходов должно быть 5 первых и 4 вторых. Используя понятие частоты, введенное в третьей главе, мы можем сказать, что относительная частота первого хода 5/9, а второго 4/9. Это означает, что коммерсант должен вложить 5/9 своего капитала (138,88 доллара) в товары для дождливого дня (только зонтики) и 4/9 капитала (111,12 доллара) в товары для ясного дня. Среди последних, согласно условию задачи, пятую часть — 22,22 доллара — занимают зонтики. Итак, зонтиков следует закупить на 161,1 доллара, очков — на 88,9 доллара.

Что же получит коммерсант в результате применения этой оптимальной стратегии? Теория игр даёт ответ и на этот вопрос. Найдём так называемую цену игры:

$$250 \cdot 5/9 + (-150) \cdot 4/9 = 72{,}22,$$

которая представляет собой среднее арифметическое платежей, стоящих в первом столбце. Применяя найденную оптимальную стратегию, коммерсант будет получать устойчивую среднюю прибыль в 72,22 доллара.

Сделаем несколько дополнительных замечаний.

1. В теории игр рассматриваются игры с любым числом ходов, с несколькими игроками, с несколькими платежными матрицами, с коалициями игроков, с различными правилами игры; существуют многошаговые, динамические, иерархические игры и т. д.

2. Для некоторых игр существуют формулы, по которым, зная возможные стратегии игроков и матрицы платежей, можно найти цену игры и оптимальные стратегии для каждого игрока. В играх с большим объёмом вычислений используют ЭВМ.

3. Считается, что каждый игрок не знает о планах другого. В случае, если игроки заранее договариваются между собой о выигрыше (как некоторые футбольные клубы), то применять математические методы для выбора оптимальной стратегии в такой игре бессмысленно.

Упражнения

1. Как изменится оптимальная стратегия в игре «Коммерсант», если коммерсант будет торговать другими очками, покупать которые он будет по 10 центов, а продавать — по 25 центов?

2. Полк должен атаковать и захватить одно из двух оборонительных сооружений противника. Противник может успешно оборонять лишь одно из этих сооружений, но не оба сразу. Известно, что одно из сооружений в 3 раза важнее второго. Каковы оптимальные стратегии противников?

3. Скупой пассажир размышляет, купить ему билет или нет. Если он покупает билет, но контролёра нет, то он «теряет» 10 рублей. В случае, если он покупает билет и контролер его проверяет, то получается игра «вничью». За безбилетный проезд пассажир платит 100 рублей плюс стоимость проезда. В случае удачного проезда без билета пассажир считает, что получил 10 рублей прибыли. Найдите оптимальные стратегии для пассажира и контролёра и цену игры.

§ 4. Метод собственного вектора

Математические методы позволяют эффективно анализировать весьма сложные и большие системы, модели которых состоят из нескольких уровней. Например, известная модель мировой динамики Форрестера и Медоуза рассматривает ресурсы, население, уровень жизни, капиталовложения, загрязнение среды. Анализ состояния окружающей среды приводит к модели, уровнями которой могут быть: 1) типы загрязнителей (SO_2, NO_4, CO_2, CO, стоки вод, твёрдые отходы, земля); 2) способы очистки; 3) очистительные устройства.

Изучение вопроса об общем благосостоянии страны целесообразно проводить по таким уровням: 1) экономика, оборона, здравоохранение; 2) отрасли промышленности; 3) ресурсы; 4) демография. Уровни располагаются по их значимости, то есть образуют *иерархию*. Анализ таких *иерархических систем* сводится, прежде всего, к тому, чтобы для каждого уровня выбрать приоритеты и в соответствии с ними расположить объекты этого уровня. Основная цель анализа: выяснить, насколько влияют факторы самого низкого уровня на общую цель. Покажем на конкретном примере, как это делают *методом собственного вектора*. Этот метод позволяет расположить рассматриваемые объекты по степени их значимости путём попарного сравнения по различным независимым признакам.

«Конкурс». На должность юриста крупного предприятия претендуют трое (обозначим их A, B, C). Директор предприятия в большом затруднении, так как среди претендентов нет такого, кто превосходил бы остальных по всем параметрам. Один имеет бóльший опыт, зато другой имеет лучшее образование и опубликовал несколько научных работ; третий известен своей исключительной ответственностью и добросовестностью и т. д. Как выбрать *наилучшего по совокупности качеств*?

Тут директор вспомнил, что в институте экологии и права, где он учился, им преподавали математику, и, в частности, рассказывали о применении математических методов в теории принятия решений. Покопавшись в своих архивах, директор нашёл лекции по математике и решил воспользоваться методом собственных векторов, применяемом при изучении иерархических систем. Прежде всего он выбрал три основных критерия для сравнения кандидатов: профессионализм и опыт (критерий K_1), ответственность и добросовестность (K_2), организаторские способности (K_3). По такому важному критерию как честность и порядочность претендентов сравнить было невозможно — у всех троих в характеристиках было написано по этому поводу практически одно и то же. Первая задача состояла в том, чтобы расположить эти критерии в порядке важности, а вторая — в том, чтобы сравнить кандидатов между собой по каждому из этих критериев, приписав каждому из них определенный балл. Решение проводилось в несколько этапов.

Этап I: сравнение критериев. Исходя из своего жизненного и профессионального опыта, директор полагал, что критерий K_1 важнее, чем критерии K_2 и K_3, причём, если сравнивать их количественно, в баллах, то $K_1 : K_2 \sim 5 : 4$, $K_1 : K_3 \sim 5 : 3$. Если же сравнивать последние два качества между собой, то они примерно равноценны, то есть можно считать, что $K_2 : K_3 \sim 1 : 1$. Далее директор составил матрицу K размером 3×3, то есть таблицу с тремя строками и тремя столбцами, куда занес отношения указанных баллов (таблица 56).

Таблица 56

	K_1	K_2	K_3
K_1	1	5/4	5/3
K_2	4/5	1	1
K_3	3/5	1	1

Число, стоящее на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, обычно обозначают a_{ij}. Поэтому в нашей матрице $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 1$, $a_{12} = 5/4$, $a_{13} = 5/3$, $a_{23} = 1$, и т. д. Заметьте, что числа a_{ij} и a_{ji} являются взаимно обратными. Дальнейшие вычисления будем проводить вместе с директором приближённо, округляя до сотых долей, причём нам понадобятся только числа $a_{12} = 1{,}25$, $a_{13} = 1{,}67$ и $a_{23} = 1$. Прежде всего находим так называемое *главное собственное число* λ матрицы K по формуле

$$\lambda = \left(\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}}\right)^{1/3} + \left(\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)^{1/3} + 1. \tag{1}$$

Воспользовавшись калькулятором, получаем:

$$\lambda = \left(\frac{1{,}67}{1{,}25\cdot 1}\right)^{1/3} + \left(\frac{1{,}25\cdot 1}{1{,}67}\right)^{1/3} + 1 = 1{,}10 + 0{,}91 + 1 = 3{,}01.$$

Далее определяем координаты ω_1, ω_2 и ω_3 так называемого *главного собственного вектора матрицы* K по формулам:

$$\omega_1 = \frac{\Delta}{D}; \quad \omega_2 = \frac{(\lambda-1)a_{23} + a_{13}/a_{12}}{D}; \quad \omega_3 = \frac{(\lambda-1)^2 - 1}{D}; \tag{2}$$

где

$$\Delta = a_{12}a_{23} + a_{13}(\lambda - 1), \tag{3}$$

и

$$D = a_{12}a_{23} + a_{13}a_{23}(\lambda-1) + a_{13}/a_{12}(\lambda-1)^2 - 1. \tag{4}$$

Подставляя сюда наши значения $a_{12} = 1{,}25$, $a_{13} = 1{,}67$, $a_{23} = 1$, последовательно получаем:

$$\Delta = 1{,}25\cdot 1 + 1{,}67\cdot 2{,}01 = 1{,}25 + 3{,}35 = 4{,}60;$$
$$D = 1{,}25 + 1{,}67\cdot 2{,}01 + 1{,}56\cdot 0{,}8\cdot (2{,}01)^2 - 1 = 8{,}99;$$
$$\omega_1 = \frac{4{,}60}{8{,}99}; \quad \omega_2 = \frac{2{,}01 + 1{,}33}{8{,}99} = 0{,}37; \quad \omega_3 = \frac{2{,}01^2 - 1}{8{,}99} = 0{,}34.$$

Теперь собственный вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ нужно *нормировать*, то есть каждую координату разделить на сумму всех координат. Имеем:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0{,}51 + 0{,}37 + 0{,}34 = 1{,}22;$$
$$\frac{\omega_1}{1{,}22} = \frac{0{,}51}{1{,}22} = 0{,}42; \quad \frac{\omega_2}{1{,}22} = \frac{0{,}37}{1{,}22} = 0{,}30; \quad \frac{\omega_3}{1{,}22} = \frac{0{,}34}{1{,}22} = 0{,}28.$$

Обозначим вектор, координатами которого являются эти числа, опять через $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = (0{,}42;\ 0{,}30;\ 0{,}28).$$

Этот вектор называется *вектором приоритетов*. Согласно теории, качества K_1, K_2 и K_3 можно расположить по приоритету с баллами 0,42, 0,30 и 0,28 соответственно.

Этап II: *сравнение претендентов по качеству* K_1. Из имеющихся документов (характеристик, рекомендаций, отзывов, научных публикаций) директор сумел сравнить между собой каждую пару претендентов по качеству K_1. У него получилось $A : B \sim 1 : 2$ (то есть у B балл в 2 раза выше, чем у A), $A : C \sim 1 : 3$, $B : C \sim 2 : 1$. Матрица K_1 попарных сравнений приведена в таблице 57. Подставляя числа $a_{12} = 0{,}5$, $a_{13} = 0{,}33$ и $a_{23} = 2$ в формулы (1)–(4), как и в предыдущем случае, находим:

$$\lambda = \left(\frac{0{,}33}{0{,}5\cdot 2}\right)^{1/3} + \left(\frac{0{,}5\cdot 2}{0{,}33}\right)^{1/3} + 1 = 0{,}69 + 1{,}44 + 1 = 3{,}13;$$
$$\Delta = 0{,}5\cdot 2 + 0{,}33\cdot 2{,}13 = 1{,}71;$$
$$D = 1 + 0{,}33\cdot 2\cdot 2{,}13 + 0{,}33\cdot 2\cdot 2{,}13^2 - 1 = 4{,}44;$$
$$\omega_1 = \frac{1{,}71}{4{,}44} = 0{,}39; \quad \omega_2 = \frac{2{,}13\cdot 2 + 0{,}33\cdot 2}{4{,}44} = \frac{4{,}93}{4{,}44} = 1{,}11;$$
$$\omega_3 = \frac{2{,}13^2 - 1}{4{,}44} = \frac{3{,}54}{4{,}44} = 0{,}8; \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2{,}30;$$
$$\frac{\omega_1}{2{,}30} = 0{,}17; \quad \frac{\omega_2}{2{,}30} = 0{,}48; \quad \frac{\omega_3}{2{,}30} = 0{,}35.$$

Итак, в этом случае вектор приоритетов будет $\vec{\omega}_1 = (0{,}17;\ 0{,}48;\ 0{,}35)$, то есть, если сравнивать претендентов по качеству K_1, то они получают баллы 0,17, 0,48 и 0,35 соответственно.

Таблица 57

	A	B	C
A	1	1/2	1/3
B	2	1	2
C	3	1/2	1

Таблица 58

	A	B	C
A	1	3/2	1
B	2/3	1	3/4
C	1	4/3	1

Этап III: сравнение претендентов по качеству K_2. Как было видно из документов, каждые двое из претендентов работали некоторое время в одной и той же фирме и вели примерно одинаковые дела. Просмотрев последние и оценив качество исполнения, директор получил следующие отношения по критерию K_2: $A : B \sim 3 : 2$, $A : C \sim 1 : 1$, $B : C \sim 3 : 4$ (таблица 58). Имеем: $a_{12} = 1{,}5$; $a_{13} = 1$; $a_{23} = 0{,}75$;

$$\lambda = \left(\frac{1}{1{,}5\cdot 0{,}75}\right)^{1/3} + \left(\frac{1{,}5\cdot 0{,}75}{1}\right)^{1/3} + 1 = 3{,}00;$$
$$\Delta = 1{,}5\cdot 0{,}75 + 1\cdot 2 = 3{,}125;$$
$$D = 1{,}125 + 0{,}75\cdot 2 + 0{,}67\cdot 2^2 - 1 = 4{,}295;$$
$$\omega_1 = \frac{3{,}125}{4{,}295} = 0{,}73; \quad \omega_2 = \frac{2\cdot 0{,}75 + 0{,}67}{4{,}295} = 0{,}51;$$
$$\omega_3 = \frac{4 - 1}{4{,}295} = 0{,}70; \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1{,}94;$$
$$\frac{\omega_1}{1{,}94} = 0{,}38; \quad \frac{\omega_2}{1{,}94} = 0{,}26; \quad \frac{\omega_3}{1{,}94} = 0{,}36.$$

Вектор приоритетов будет $\vec{\omega}_2 = (0{,}38;\ 0{,}26;\ 0{,}36)$, так что по качеству K_2 претенденты получают баллы 0,38, 0,26 и 0,36 соответственно.

Этап IV: *сравнение претендентов по качеству* K_3. Поскольку никто из претендентов прежде не находился на руководящей работе, то директор, исходя из весьма туманных соображений и своей интуиции, смог только оценить вероятность того, что тот или иной претендент станет хорошим руководителем. Получились вероятности 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Разделив каждое из указанных чисел на их сумму $0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}6 = 2{,}1$, находим вектор приоритетов: $\vec{\omega}_3 = (0{,}38;\ 0{,}33;\ 0{,}29)$.

Этап V: *получение окончательного результата*. Согласно теории, окончательное распределение мест получается следующим образом. Составим из векторов $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ матрицу 3×3, записав их координаты в столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}38 & 0{,}38 \\ 0{,}48 & 0{,}26 & 0{,}33 \\ 0{,}35 & 0{,}36 & 0{,}29 \end{pmatrix}.$$

Затем умножим эту матрицу на матрицу-столбец

$$\begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}30 \\ 0{,}28 \end{pmatrix},$$

составленную из координат вектора $\vec{\omega}$. По правилу умножения матриц имеем:

$$\begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}38 & 0{,}38 \\ 0{,}48 & 0{,}26 & 0{,}33 \\ 0{,}35 & 0{,}36 & 0{,}29 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}30 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}17\cdot 0{,}42 + 0{,}38\cdot 0{,}30 + 0{,}38\cdot 0{,}28 \\ 0{,}48\cdot 0{,}42 + 0{,}26\cdot 0{,}30 + 0{,}33\cdot 0{,}28 \\ 0{,}35\cdot 0{,}42 + 0{,}36\cdot 0{,}30 + 0{,}29\cdot 0{,}28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}071 + 0{,}114 + 0{,}106 \\ 0{,}202 + 0{,}078 + 0{,}092 \\ 0{,}147 + 0{,}108 + 0{,}081 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}291 \\ 0{,}372 \\ 0{,}336 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}29 \\ 0{,}37 \\ 0{,}34 \end{pmatrix}.$$

Итак, окончательное распределение мест следующее: претендент A набрал 0,29 балла, претендент B — 0,37 балла, претендент C — 0,34 балла. Метод собственного вектора отдал предпочтение претенденту B.

Предупреждение: не попадайте под гипнотическое воздействие чисел! Несмотря на объективность математических методов, полученный результат нельзя рассматривать как истину в последней инстанции. Хотя бы потому, что выбор исходного материала (то есть чисел a_{12}, a_{13}, и a_{23}, входящих в матрицы K_1, K_2, K_3), был в значительной степени субъективным. Поэтому и претендент C, имеющий примерно такой же балл, как и B, также имеет шанс на успех, в особенности, если он не курит или согласен на меньшую зарплату. Вот ещё несколько важных замечаний.

1. Описанным методом можно сравнивать произвольное число кандидатов и по любому количеству критериев, однако при увеличении их числа придётся пользоваться несколько изменёнными формулами.

2. С вычислительными трудностями при использовании математических методов принятия решений позволяет справится компьютер.

3. Ещё раз отметим, в чем сила описанного метода. Сравнить каждые два объекта между собой по одному критерию довольно просто, и это дает возможность сравнительно легко заполнить матрицу попарных сравнений. Но затем, с помощью несложных вычислений, мы находим ответ уже на довольно трудный вопрос: какой из рассматриваемых объектов превосходит остальных по совокупности всех критериев.

Упражнения

1. Предложите различные критерии оценки качества преподавания учебных дисциплин в университете. Оцените в соответствии с ними ваших преподавателей и определите лучшего из них с помощью метода собственного вектора.

2. Выберите три важнейших (с вашей точки зрения) критерия хорошего мужа (хорошей жены) и с помощью метода собственного вектора найдите среди своих знакомых наилучшую кандидатуру на эту роль.

3. Попробуйте оценить шансы возможных претендентов на должность мэра вашего города, выбрав критерии по своему усмотрению.

Глава XI

Случайные величины и юридическая статистика

Термин *статистика* употребляется чаще всего для обозначения двух понятий. Во-первых, статистикой называют набор количественных данных о некотором явлении, совокупности объектов и т. п. Эти данные называют статистическими. Например, каждую студенческую группу можно охарактеризовать так: в ней всего n студентов, из них a отличников, b хорошистов, c троечников, d неуспевающих. Или уровень благосостояния граждан можно соотнести с их доходами. Средний месячный доход жителя города Дрюково — 12000 рублей, жителя Брюково — 10000 рублей, а жителя деревни Васюки — 3000 рублей и т. д.

Во-вторых, термином *статистика* объединяют совокупность методов исследования, основанных на анализе статистических данных. Например, данные о среднем доходе граждан собирают ежемесячно в течение года, затем делают вывод о том, как изменялся уровень жизни различных социальных, возрастных, профессиональных и других групп населения в разных городах, регионах и во всей стране в целом. Простейшие методы статистической обработки данных мы обсуждали в третьей главе.

В каждой области деятельности разработаны свои специфические статистические методы. Существует много разных статистик: социально-экономическая, демографическая, медицинская, юридическая, звёздная и ряд других. Поскольку всякая статистика оперирует с числами, то основой всех статитических методов является математика. Совокупность математических методов обработки, систематизации, анализа и использования статистических данных составляет предмет специальной науки — математической статистики. Именно математические методы в силу их объективности позволяют получать наиболее значимые результаты при обработке статистических данных. Глубина и достоверность этих результатов зависит как от мощности применяемых математических методов, так и от правильности их применения. Разумеется, достоверность результатов зависит также от доброкачественнности статистического материала, который подвергается обработке.

Вопрос о том, какие именно требования следует применять к статистическому материалу и проведению статистических наблюдений, обсуждается в специальных учебниках, например в учебниках по юридической статистике. Здесь мы его затрагивать не будем. Кроме того, мы всегда будем считать, что имеем дело с достаточным и объективным статистическим материалом.

§ 1. Дискретные случайные величины

В третьей главе мы рассматривали переменные величины, значения которых зависят от случайных причин (количество дорожных происшествий, число правонарушений, совершённых подростками, время обследования автомобиля, средняя зарплата). Такие переменные величины называются случайными. Они появляются в результате наблюдения или эксперимента. Результаты эксперимента мы оформляли в виде таблицы, в первой строке которой записывали различные наблюдаемые значения случайной величины X, во второй — соответствующие относительные частоты. Такая таблица называется *эмпирическим распределением случайной величины* X или *вариационным рядом*. Для вариационного ряда мы находили среднее значение $\overline{x}$, дисперсию D и среднее квадратическое отклонение S.

Помимо эмпирических распределений в теории вероятностей и математической статистике рассматривают теоретические распределения случайных величин.

Пример 1.1. Мысленно подбросим монету 1 раз и фиксируем переменную величину X — число выпадений орла. Согласно определению (см. шестую главу), вероятность P выпадения орла ($X = 1$) равна 0,5; вероятность выпадения решки ($X = 0$) также равна 0,5. В результате получается таблица 59, которая называется теоретическим распределением или таблицей распределения случайной величины X.

Таблица 59

X	1	0	Σ (сумма всех вероятностей)
P	0,5	0,5	1

Пример 1.2. Игральная кость (мысленно) брошена один раз. Обозначим через X возможное число выпавших очков. Переменная X принимает целые значения от единицы до шести. Поскольку игральная кость сделана из однородного материала и представляет собой геометрически правильное тело (куб), то вероятность выпадения каждой грани одна и та же, а именно, $1/6$. Это записывают так:

Таблица 60

X	1	2	3	4	5	6	Σ
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

$$P(X = 1) = 1/6; \quad P(X = 2) = 1/6; \quad \ldots; \quad P(X = 6) = 1/6.$$

Закон распределения случайной величины X представлен таблицей 60.

Далее мы будем рассматривать только теоретические распределения случайных величин. Говорят, что задано распределение случайной величины, если известна вероятность попадания этой величины в любой промежуток, или задано правило, по которому можно вычислить вероятность попадания этой величины в него. Случайная величина называется *непрерывной*, если её значения целиком заполняют некоторый числовой промежуток. Непрерывные случайные величины мы рассмотрим несколько позже.

Случайная величина называется *дискретной*, если все её значения можно занумеровать (в частности, если она принимает конечное число значений). Дискретные величины задают с помощью таблицы распределения, в первой строке которой перечисляются значения случайной величины X, а во второй — вероятности P этих значений (примеры 1 и 2). Отметим два *характерных свойства* таблицы распределения дискретной случайной величины: 1) все числа второй строки таблицы положительны; 2) их сумма равна единице.

С помощью таблицы распределения можно вычислить вероятность попадания случайной величины в любой числовой промежуток по следующему правилу (мы формулируем его для открытого промежутка — интервала): *вероятность попадания случайной величины в интервал* (a, b) *равна сумме вероятностей всех её значений, принадлежащих этому интервалу*. Например, пусть нужно найти вероятность того, что число выпавших очков больше 1, но меньше 5 (пример 2), то есть найти вероятность события $1 < X < 5$. В интервал $(1, 5)$ попадают три значения величины X: 2, 3 и 4. Вероятность каждого из них равна $1/6$. Используя правило, получим: $P(1 < X < 5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$.

Таблица 61

X	-2	0	1,5	4	10	Σ
P	0,3	0,1	0,2	0,15	0,25	1

Пример 1.3. Дискретная случайная величина X задана таблицей 61. Найдём вероятность P попадания значений величины X в полуинтервал $[-2; 4{,}5)$. Имеем: $P(-2 \leqslant X < 4{,}5) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}75$.

Пример 1.4. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5; для второго — 0,4. Случайная величина X — число попаданий в мишень. Составьте таблицу распределения величины X.

Решение. По смыслу задачи ясно, что возможными значениями величины X будут числа 0, 1 и 2. Найдём вероятности этих значений. Для этого введём события A и B: A — попадание первого стрелка и B — попадание второго. По условию $P(A) = 0{,}5$ и $P(B) = 0{,}4$. Эти события естественно считать независимыми. Противоположные им события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ (промахи первого и второго стрелка) тоже будут независимыми. По свойству вероятностей находим вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Если оба стрелка промахнулись, то число попаданий равно нулю, следовательно, $P(X = 0) = P(\overline{A}\,\overline{B})$. По теореме умножения вероятностей для независимых событий $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$. Таким образом, $P(X = 0) = 0{,}3$. Для нахождения вероятности $P(X = 1)$ одного попадания в мишень применим формулы примера 7.3 шестой главы: $P(\overline{A}B + A\overline{B}) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}5$. Итак, $P(X = 1) = 0{,}5$. Наконец, заметим, что попадание обоих стрелков означает, что $X = 2$, поэтому $P(X = 2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$. Итоговое распределение содержит таблица 62.

Таблица 62

x	0	1	2	Σ
P	0,3	0,5	0,2	1

Обратим внимание читателя ещё раз на то, что и эмпирическое, и теоретическое распределения задаются одинаковыми по форме таблицами, но они различаются по существу: в случае эмпирического распеределения во второй строке таблицы стоят частоты наблюдаемых значений случайной величины, в случае теоретического — их вероятности. Частоты и вероятности, вообще говоря, не совпадают. Например, мы мысленно подбрасываем монету 1 раз и находим вероятность того, что выпадет орёл. Она получается равной 0,5, как частное от деления числа благоприятных исходов (орёл) на число всевозможных исходов (орёл, решка). Эксперимент же состоит в реализации *одного* из этих исходов. Каждый исход даёт своё значение частоты появления орла: 1 или 0 соответственно.

Таблица 63

Номер серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число появлений орла	502	511	497	529	504	476	507	528	504	528

Проделаем опыт снова, подбросив монету 10, 20, 30, 40, ... раз и подсчитаем частоту выпадения орла. В каждой серии опытов частоты будут, вообще говоря, разными. Дж. Е. Керрих провёл 10 серий по 1000 бросаний монеты и подсчитал число выпадений орла в каждой серии. Результаты записаны в таблице 63. Например, в первой серии орёл появился 502 раза и, так как число всех бросаний равно 1000, то 498 раз в этой серии орёл не появился. По результатам этой серии эмпирическое распределение случайной величины X — числа выпадений орла при одном бросании монеты представлено таблицей 64.

Таблица 64

X	1	0	Σ
P	0,502	0,498	1

Таблица 65

X	1	0	Σ
P	0,4914	0,5086	1

Для каждой из десяти серий получается своё эмпирическое распределение и все они, кроме распределений, соответствующих пятой и девятой сериям, различны. Отличия, однако, являются весьма незначительными. Более того, если мы объединим все 10000 проведённых экспериментов в одну серию, то число появлений орла будёт равно

$$502 + 511 + 497 + 529 + 504 + 476 + 507 + 528 + 504 + 528 = 5086,$$

а число непоявлений орла $10000 - 5086 = 4914$. В результате получается распределение, задаваемое таблицей 65. Для него разница частот выпадения орла и решки на 0,041 меньше, чем самая большая разница в отдельных сериях по 1000 бросаний. Таким образом, можно предположить, что *при увеличении числа наблюдений эмпирическое распределение приближается к теоретическому, заданному таблицей* 59. Этот факт действительно имеет место и отражает содержание одной из важнейших теорем теории вероятностей, которая называется по имени её автора теоремой Бернулли.

То же самое можно сказать об опытах с игральной костью: при увеличении числа опытов (бросаний кости) частоты будут приближаться к вероятностям, то есть к $1/6$. Поэтому говорят, что эмпирическое распределение приближает теоретическое, а теоретическое является предельным для эмпирического. В большинстве практических (прикладных) задач требуется найти теоретическое распределение случайной величины, которое априори является неизвестным. Как правило, его заменяют эмпирическим распределением. Чем больше опытов проведено для отыскания последнего, тем точнее оно отражает теоретическое распределение.

Важной характеристикой дискретной случайной величины является её математическое ожидание.

Определение 1.1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей значения x_1, x_2, x_3, $\ldots$ с вероятностями p_1, p_2, p_3, $\ldots$ называется число

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots \tag{1}$$

Так, в примере 2 имеем $M(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = 3{,}5$, в примере 3 $M(X) = 2{,}8$. В первом случае оказалось, что математическое ожидание равно среднему арифметическому значений случайной величин. Это получилось потому, что все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность. В примере 3 $M(X) \neq 2{,}7 = \overline{x}$.

Математическое ожидание называют также *средним значением*. Роль средних величин мы уже обсуждали в третьей главе. К другим важным числовым характеристикам случайной величины относятся *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*.

Определение 1.2. *Дисперсией* дискретной случайной величины X называется число

$$D(X) = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \ldots, \tag{2}$$

где m — математическое ожидание величины X.

Определение 1.3. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X (от её математического ожидания m) называется число

$$S(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{3}$$

В примере 2 $m = 3{,}5$. По формулам (2) и (3) получаем:

$$\begin{gathered} D(X) = (1-3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (2-3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (3-3{,}5)^2 \cdot 1/6 + \\ +(4-3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (5-3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (6-3{,}5)^2 \cdot 1/6 = \\ = (2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2)/6 = 17{,}5/6 \approx 3{,}08; \\ S(X) = \sqrt{3{,}0833} \approx 1{,}76. \end{gathered}$$

Для примера 3 находим:

$$M(X) = -2\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}1+1{,}5\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}15+10\cdot 0{,}25 = -0{,}6+0{,}3+0{,}6+2{,}5 = 2{,}8;$$
$$D(X) = (-2-2{,}8)^2\cdot 0{,}3+(0-2{,}8)^2\cdot 0{,}1+(1{,}5-2{,}8)^2\cdot 0{,}2+(4-2{,}8)^2\cdot 0{,}15+$$
$$+(10-2{,}8)^2\cdot 0{,}25 = 21{,}16\cdot 0{,}3+7{,}84\cdot 0{,}1+1{,}69\cdot 0{,}2+1{,}44\cdot 0{,}15+51{,}84\cdot 0{,}25 =$$
$$= 6{,}5348+0{,}784+0{,}338+0{,}216+12{,}96 \approx 20{,}84;$$
$$S(X) = \sqrt{20{,}84} \approx 4{,}56.$$

Формулы (1)—(3) имеют такой же вид, как и аналогичные формулы третьей главы. Но там мы вычисляли среднее арифметическое $\overline{x}$, дисперсию D и среднее квадратическое отклонение S для эмпирического распределения. Можно считать, что величины $\overline{x}$, D и S являются приближёнными значениями для соответствующих величин $M(X)$, $D(X)$ и $S(X)$.

Помимо таблицы, распределение случайной величины изображают также с помощью *многоугольника распределения*. Для этого на координатной плоскости строят точки с координатами $(x_1, p_1), (x_2, p_2), (x_3, p_3), \ldots$ и соединяют их прямолинейными отрезками. Полученную ломаную и называют многоугольником распределения. На рис. 127 такой многоугольник построен для величины, рассмотренной в примере 3.

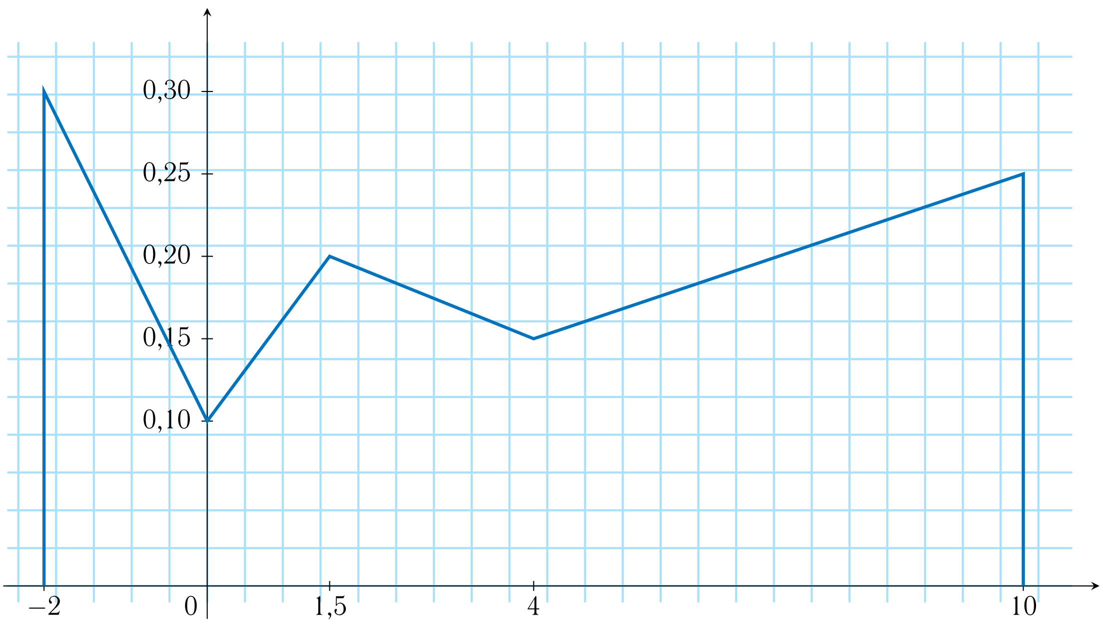


Рис. 127

Упражнения

1. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа попаданий в мишень по данным примера 4.

2. Постройте многоугольник распределения случайной величины, рассмотренной в примере 2.

Таблица 66

X	-2	1	0	3	5	Σ
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2	1

3. Постройте многоугольник распределения для случайной величины, заданной таблицей 66. Найдите вероятность попадания этой случайной величины в отрезок $[-1, 4]$.

4. Из десяти патронов девять боевых и один холостой. Стрелок наугад выбирает три патрона. Дискретная случайная величина X — число боевых патронов, взятых стрелком. Составьте таблицу распределения величины X.

§ 2. Биномиальное распределение

Пример 2.1. Известно, что после операции выздоравливают только 50% больных. Прооперировано 6 человек. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа выздоровевших после операции.

Решение. Пусть X — число выздоровевших пациентов. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поскольку состояние каждого больного не зависит от состояния других, то вероятности этих значений найдём по формулам Бернулли из шестой главы[1]:

$$P(X = m) = P_6(m) = C_6^m p^m q^{6-m}; \quad m = 1, 2, \ldots, 6.$$

Здесь p — вероятность выздоровления больного, q — вероятность противоположного события. По условию задачи $p = 0{,}5$, $q = 1 - p = 0{,}5$, поэтому $p^m q^{6-m} = 0{,}5^6 = (1/2)^6 = 1/64$. Значения биномиальных коэффициентов C_6^m можно взять из шестой строки треугольника Паскаля (см. стр. 172): $C_6^0 = 1$, $C_6^1 = 6$, $C_6^2 = 15$, $C_6^3 = 20$, $C_6^4 = 15$, $C_6^5 = 6$, $C_6^6 = 1$. Подставляя их в формулу, мы найдём вероятности возможных значений величины X. В результате получится таблица 67.

Таблица 67

x	0	1	2	3	4	5	6	Σ
p	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64	1

Математическое ожидание вычислим по формуле (1) предыдущего параграфа: $M(X) = 0 \cdot 1/64 + 1 \cdot 6/64 + 2 \cdot 15/64 + 3 \cdot 20/64 + 4 \cdot 15/64 + 5 \cdot 6/64 + 6 \cdot 1/64 = 192/64 = 3$. Для упрощения дальнейших вычислений воспользуемся свойствами биномиального распределения, которое мы сейчас определим.

[1] В §8 шестой главы мы обозначаем вероятности $P(X = m)$ и $P(m_1 \leqslant X \leqslant m_2)$ соответственно через $P_n(m)$ и $P_n(m_1, m_2)$.

Пусть событие A появляется в одном испытании с вероятностью p. Проведём n испытаний. Событие A может появиться в одном, двух, $\ldots$, n испытаниях. Таким образом, число X испытаний, в которых появляется событие A, является случайной величиной. Вероятность того, что $X = m$, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Распределение величины X называется *биномиальным распределением с параметрами n и p*. Известно, что если случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, то её математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение вычисляются по следующим формулам:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad S(X) = \sqrt{npq}. \tag{5}$$

В рассматриваемом примере событие A означает выздоровление одного больного, величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 6$ и $p = 0{,}5$. Полагая в формулах (5) $n = 6$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, находим: $M(X) = 3$, $D(X) = 1{,}5$ и $S(X) \approx 1{,}2247$. Соответствующий многоугольник распределения показан на рис. 128.

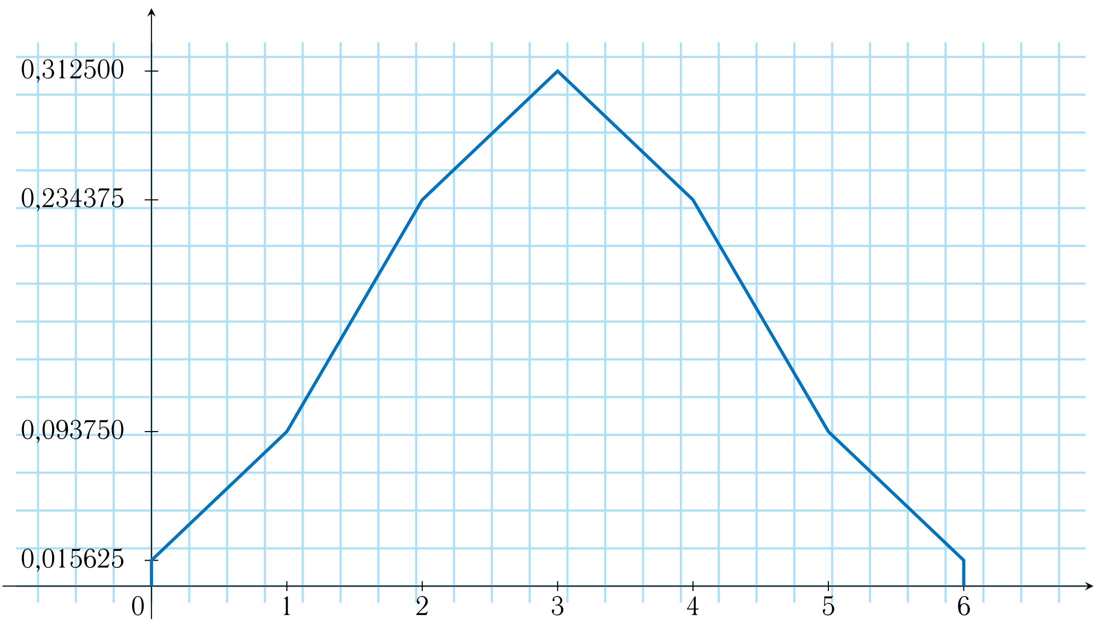


Рис. 128

Вернёмся ещё раз к задаче о присяжных из пятой главы.

Пример 2.2. Суд присяжных в составе пяти человек должен вынести решение большинством голосов. Вероятность того, что каждый отдельный заседатель выскажется за оправдание подсудимого, равна 2/3. Найдите распределение числа голосов, поданных за оправдание подсудимого.

Решение. Пусть X — число голосов, поданных за оправдание. Случайная величина X может принимать значения от нуля до пяти. Пусть событие A состоит в том, что присяжный проголосовал за оправдание. Мы получаем пять испытаний (голосование присяжных), в каждом из которых может появиться событие A. По условию задачи вероятность появления события A в одном испытании равна 2/3. Предположим, что все присяжные действуют независимо. Тогда вероятности значений случайной величины X находим по формуле Бернулли (4):

$$P(X = m) = C_5^m (2/3)^m (1/3)^{5-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, 5.$$

Из сказанного выше следует, что величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 2/3$ (таблица 68).

Таблица 68

X	0	1	2	3	4	5	Σ
p	1/243	10/243	40/243	80/243	80/243	32/243	1

Используя формулы (5), вычислим величины $M(X)$, $D(X)$ и $S(X)$:

$$M(X) = np = 5 \cdot 2/3 = 10/3 = 3\frac{1}{3};$$

$$D(X) = npq = 5 \cdot 2/3 \cdot 1/3 = 10/9 = 1\frac{1}{9};$$

$$S(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{3{,}16227\ldots}{3} \approx 1{,}0541.$$

Пример 2.3. Вероятность того, что вратарь возьмёт пенальти, равна 0,3. Пробивают серию из четырёх пенальти. Требуется найти математическое ожидание числа взятых пенальти.

Решение. Назовём испытанием пробитие одного пенальти. В результате испытания может появиться событие A — гол не забит. Вероятность p этого события равна 0,3. Случайная величина X — число всех взятых вратарём пенальти. Эта величина имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0{,}3$. По формуле (5) находим:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2.$$

Пример 2.4. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 0,9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при четырёх выстрелах.

Решение. Случайная величина X (X — число попаданий в цель при четырёх выстрелах) имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0{,}9$. Используя формулы (5), получаем:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}9 = 3{,}6; \quad D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}36.$$

Пример 2.5. Согласно учётным данным, рецидивисты составляют 20% от общего числа установленных правонарушителей. Органы правопорядка задержали 10 нарушителей. Найдите распределение случайной величины X — числа рецидивистов среди задержанных и рассчитайте величины $M(X)$, $D(X)$ и $S(X)$.

Решение. Назовём испытанием проверку одного задержанного. В каждом из $n = 10$ испытаний может появиться событие A, состоящее в том, что задержан рецидивист. По условию вероятность p этого события равна 0,2. Поэтому число всех рецидивистов среди десяти задержанных имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}2$. По формуле (4) для m от 0 до 10 $P(X = m) = C_{10}^{m}(0{,}2)^{m}(0{,}8)^{10-m}$. Используя формулы (5), получаем: $M(X) = np = 10 \cdot 0{,}2 = 2$; $D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ и $S(X) = \sqrt{1{,}6} \approx 1{,}2649$.

Упражнения

1. Контрольный тест состоит из пяти вопросов, на каждый из которых нужно выбрать один из трёх указанных ответов. Студент отвечает на вопросы, выбирая ответ наудачу. Пусть X — число правильных ответов (из пяти). Составьте таблицу распределения случайной величины X и начертите многоугольник распределения. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

2. Монета брошена 6 раз. Найдите математическое ожидание случайной величины X — числа появлений орла.

3. Известно, что среди установленных правонарушителей 40% составляют лица, не имеющие постоянного дохода. Наугад взяли дела восьми правонарушителей. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, где X — число лиц из этих восьми, не имеющих постоянного дохода.

§ 3. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона, как и биномиальное распределение, возникает в задачах, связанных с повторением опытов. Мы показали в §9 седьмой главы, что биномиальные вероятности (4) можно приближённо вычислять с помощью дифференциальной функции Лапласа (формулы (36) из седьмой главы), если число $np(1-p) > 10$. Но если вероятность p появления события в серии из n испытаний мала, то формула (36) даёт большую погрешность. Когда p мало, а n велико (более ста), для приближённого вычисления биномиальных коэффициентов используют формулу Пуассона с $\lambda = np$:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Пример 3.1. Из лиц, привлечённых к ответственности за коррупцию, случайным образом выбирают 100 человек. Найдите распределение числа таможенников среди них, если таможенники составляют 3% от привлечённых к ответственности коррупционеров.

Решение. В этой задаче опытом является проверка профессии каждого из ста выбранных лиц. С вероятностью 0,003 в каждом опыте может появиться событие A — проверяемый является таможенником. Случайная величина X — число появлений события A, то есть число таможенников в выбранной сотне лиц. Поскольку число опытов достаточно велико ($n = 100$), а вероятность появления события A мала ($p = 0{,}03$), то применим формулу Пуассона (6). Найдём $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}03 = 3$, и, подставляя в формулу (6) $\lambda = 3$ и различные значения k, получим таблицу распределения случайной величины X (таблица 69) и многоугольник её распределения (рис. 129).

Таблица 69

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000

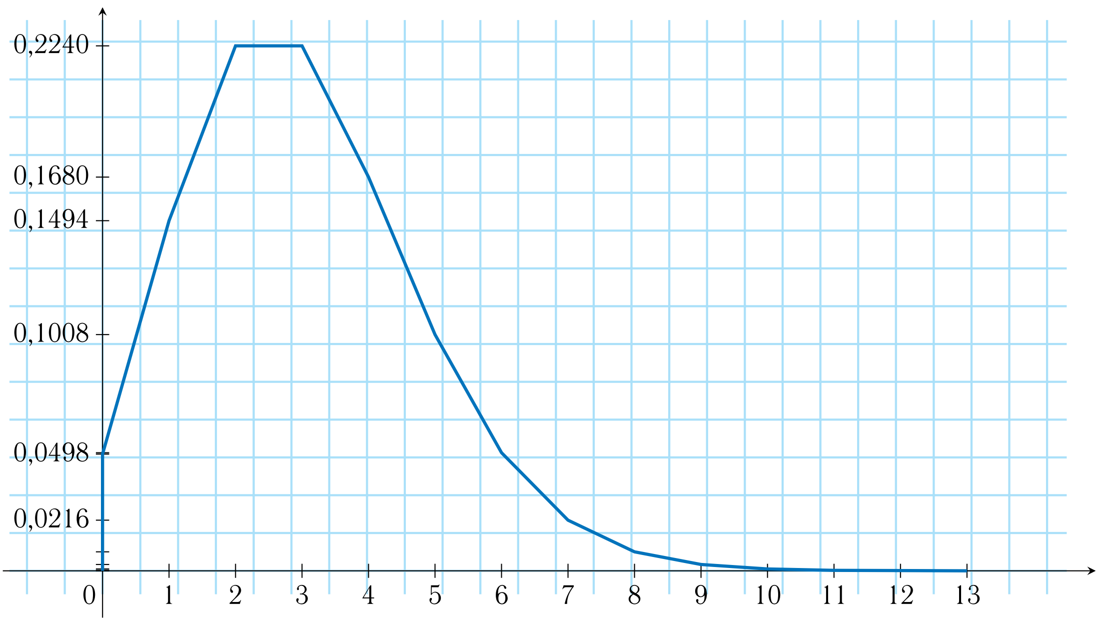


Рис. 129

Мы использовали формулу (6) для приближённого вычисления вероятностей биномиального распределения. Но оказывается, что эта формула имеет весьма важное самостоятельное значение. Теоретическое распределение, которое задаётся формулой (6), называется *распределением Пуассона с параметром* λ. Можно считать, что таблица 69 задает распределение Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Отметим некоторые его свойства.

1. При увеличении числа k вероятность $P(X = k)$ сначала растёт, а затем уменьшается.

2. Случайная величина X имеет два наивероятнейших значения: 2 и 3 (вероятность каждого из них самая большая — 0,2240).

3. Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределённой по закону Пуассона (6), находят по формулам:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad S(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{7}$$

В примере 3.1 $M(X) = 3$, $D(X) = 3$ и $S(X) = \sqrt{3} \approx 1{,}7$.

4. Сумма первых четырёх вероятностей $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ и $P(X = 3)$ равна 0,6472. Этот результат означает, что с вероятностью 0,6472 число коррумпированных таможенников не превосходит трёх.

5. Сумма вероятностей первых тринадцати значений, округлённых до четырёх десятичных знаков после запятой, даёт единицу. Следовательно, практически достоверно событие, состоящее в том, что среди 100 случайно отобранных коррупционеров не более 12 таможенников.

6. Начиная с $k = 13$, округлённые значения вероятностей $P(X = k)$ равны нулю. Поэтому на выбранном уровне точности (четыре десятичных знака после запятой) можно считать значения случайной величины X большие двенадцати практически невозможными и не рассматривать их.

К распределению Пуассона приводят многие задачи, напрямую не связанные с повторением опытов. Оно используется для вычисления вероятности появления данного числа относительно редких (характеризуемых малой вероятностью) событий в данном участке времени или пространства. Например, поступление вызовов на телефонную станцию или заявок в мастерскую, прибытие на разгрузку вагонов и судов, наличие дефектов на заданном участке проводной связи, аварии автомашин в данном районе города, появление бракованных изделий в партии товара, задержки в пути и т. д.

Пример 3.2. В известном опыте физика Смолуховского подсчитывается число частиц золота, взвешенных в воде. Число частиц в заданном объёме — случайная величина X, распределение которой, как установлено наблюдениями, удовлетворяет следующим условиям:

1) вероятность попадания того или иного числа частиц в выделенную область зависит только от её объёма;

2) вероятность попадания данного числа частиц в данную область не зависит от числа частиц, попавших в другую область;

3) попадание более одной частицы на участок малого объёма практически невозможно.

При этих условиях случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром λ, причём число λ равно среднему числу частиц, находящихся в выделенном объёме.

Пример 3.3. В тесто положили 10000 изюмин и полученную массу хорошо перемешали. Из этого теста выпекли 1000 сладких булочек. Дискретная случайная величина X — число изюмин в купленной булочке. Требуется найти распределение величины X.

Решение. Событие A в этой задаче — появление изюминки в выбранной булочке. Среднее число изюмин, приходящихся на одну булочку, равно $10000 : 1000 = 10$, но количество изюмин X в каждой из них может принимать значения от 0 до 10000. Тесто хорошо перемешано, поэтому можно считать, что распределение изюмин удовлетворяет условиям 1)—3), а величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 10$ (таблица 70).

Таблица 70

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0,0948	0,0729	0,0521	0,0347	0,0217	0,0128	0,0071	0,0037	0,0019	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001

В таблице 70 значения вероятностей округлены до четырёх знаков после запятой. Значения величины X, большие, чем 24, в таблицу не включены, так как вероятность каждого из них меньше 0,0001. (Проверьте, что сумма чисел во второй строке равна единице). Из таблицы видно, что наиболее вероятное число изюмин в случайно выбранной булочке равно 9 или 10 (вероятности этих значений самые большие).

На практике чаще всего имеют дело с дискретными величинами, наблюдаемыми в каком-либо эксперименте. Их теоретическое распределение нам неизвестно. В таком случае для описания результатов эксперимента приспосабливают какое-либо известное распределение. Его называют моделью экспериментально наблюдаемой случайной величины и подбирают так, чтобы оно достаточно точно отражало результаты эксперимента.

Пример 3.4. В дежурную часть МЧС поступают сообщения о чрезвычайных происшествиях. Получив сообщение — а это, как правило, просьба о немедленной помощи — дежурный вызывает оперативную бригаду, которая отправляется на место происшествия. Работа спасателей зависит от многих обстоятельств, в частности, и от числа поступивших вызовов. Если бы можно было прогнозировать число вызовов, то работа спасателей стала бы более эффективной.

Решение. Число вызовов, поступивших в течение одного дня, есть дискретная случайная величина X. Теоретическое распределение этой величины нам неизвестно, то есть мы не знаем вероятности поступления того или иного числа вызовов в день. Но у нас есть результаты наблюдений, то есть некоторое эмпирическое распределение. Например, сводка за 58 выходных дней (таблица 71). Числа в первой строке таблицы — количество $\tilde{x}_i$ вызовов в день, во второй — соответствующие абсолютные частоты, то есть количество дней, в каждый из которых было $\tilde{x}_i$ вызовов.

Таблица 71

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{m}_i$	1	2	2	5	5	10	10	8	7	4	3	1

Вызов спасательной команды всегда связан с сообщением о некотором экстраординарном событии, поэтому мы можем считать одновременное поступление нескольких вызовов практически невозможным. Кроме того, вызовы поступают независимо друг от друга. Эти соображения позволяют предположить, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Параметр λ этого распределения можно оценить, используя экспериментальные данные. Найдём частоты $\tilde{p}_i = \dfrac{\tilde{m}_i}{n}$ значений $\tilde{x}_i$ и составим расчётную таблицу 72 для определения величин $\overline{x}$, D и S, аналогичную таблице из §4 третьей главы. Сумма чисел четвёртого столбца таблицы даёт среднее арифметическое $\overline{x} \approx 6$, что и будем считать приближённым значением λ.

Таблица 72

I	$\tilde{x}_i$	$\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\,\tilde{p}_i$
0	0	0,0172	0	−5,9625	35,5574	0,6116
1	1	0,0345	0,0345	−4,9625	24,6264	0,8496
2	2	0,0345	0,0690	−3,9625	15,7014	0,5417
3	3	0,0862	0,2586	−2,9625	8,7764	0,7565
4	4	0,0862	0,3448	−1,9625	3,8514	0,3320
5	5	0,1724	0,8620	−0,9625	0,9264	0,1597
6	6	0,1724	1,0344	0,0375	0,0014	0,0002
7	7	0,1379	0,9653	1,0375	1,0764	0,1484
8	8	0,1207	0,9656	2,0375	4,1514	0,5011
9	9	0,0690	0,6210	3,0375	9,2264	0,6366
10	10	0,0517	0,5170	4,0375	16,3014	0,8428
11	11	0,0173	0,1903	5,0375	25,3764	0,4390
Σ	—	1	$\overline{x} = 5{,}9625$	—	—	$D = 5{,}8192$

Итак, у нас есть два распределения: эмпирическое, заданное таблицей 71, и теоретическое — распределение Пуассона с параметром $\lambda = 6$. Чтобы проверить, насколько хорошо теоретическое распределение согласуется с эмпирическим, найдём, пользуясь формулой (6), при $\lambda = 6$ вероятности $P(X = i)$ поступления того или иного числа вызовов в день. Результаты вычислений (с помощью калькулятора или компьютера) записаны в третьей строке таблицы 73 (для краткости вероятности $P(X = i)$ обозначены p_i). Во второй строке этой таблицы записаны соответствующие значения частот $\tilde{p}_i$.

Таблица 73

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{p}_i$	0,0172	0,0345	0,0345	0,0862	0,0862	0,1724	0,1724	0,1379	0,1207	0,0690	0,0517	0,0173
p_i	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606	0,1606	0,1377	0,1033	0,0688	0,0413	0,0225

Математики разработали так называемые критерии согласия, на основании которых можно судить о том, насколько велико расхождение между экспериментальным распределением и приближающим его теоретическим распределением. При наличии определённого опыта выносить суждения подобного рода можно и «на глаз». Исследуя таблицу 73, мы заключаем, что теоретические вероятности p_i не слишком сильно отличаются от частот $\tilde{p}_i$. Эту мысль подтверждает и графическое изображение полученных результатов. На рис. 130 красным цветом изображён соответствующий теоретической модели многоугольник распределения (вершины в точках $(\tilde{x}_i, p_i)$), а синим — многоугольник эмпирического распределения (вершины в точках $(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i)$).

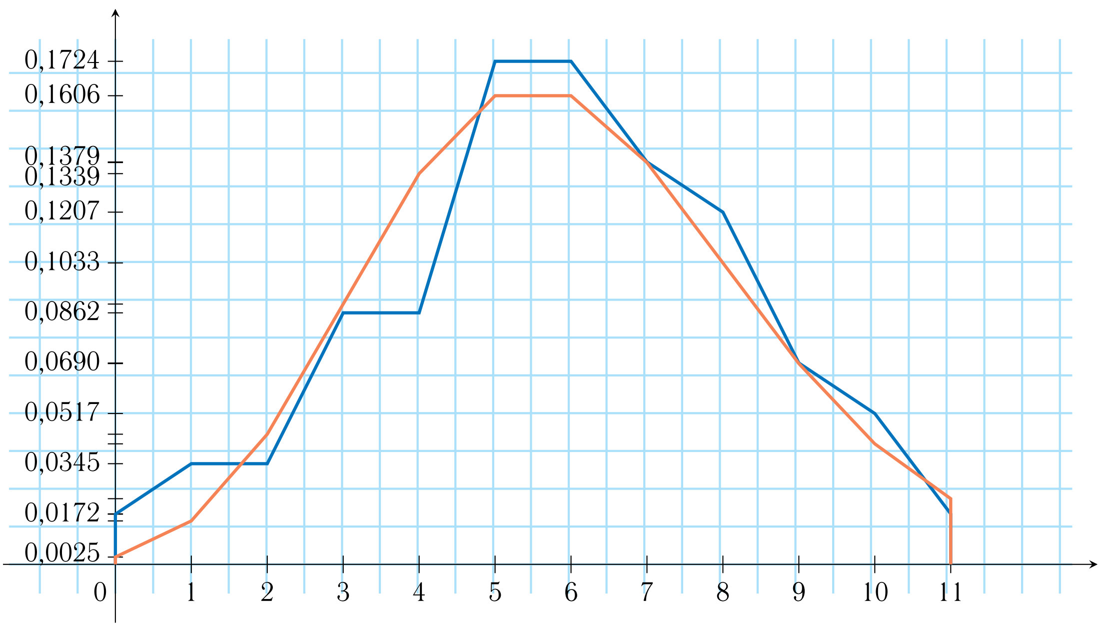


Рис. 130

Наконец, можно сравнить величины $\tilde{m}_i$ с соответствующими теоретическими числами дней m_i, в каждый из которых появляется i вызовов. Значения m_i найдём по формуле $m_i = np_i$, например, $m_1 = 58 \cdot 0{,}0025 \approx 0$. Таблица 74 показывает, что числа $\tilde{m}_i$ и m_i различаются незначительно. Поэтому теоретическую модель распределения Пуассона с параметром $\lambda = 6$ можно использовать при планировании работы отряда спасателей.

Таблица 74

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{m}_i$	1	2	2	5	5	10	10	8	7	4	3	1
m_i	0	1	3	5	8	9	9	8	6	4	2	1

Упражнения

1. Приведите соображения в пользу того, что перечисленные ниже случайные величины распределены по закону Пуассона, и найдите для каждой из них приближённое значение параметра λ: а) проведено 2608 опытов по регистрации α-частиц, вылетевших из данной радиоактивной массы в течение одного и того же промежутка времени; общее число зарегистрированных частиц равно 10086, X — число частиц, зарегистрированных в одном опыте; б) вредная плотность болезнетворных микробов в одном кубометре воздуха равна ста, X — число микробов в пробе воздуха объёмом 1 *дм*^{3}; в) в течение получаса на телефонную станцию поступило 137 вызовов, X — число вызовов, поступающих за одну минуту; г) среднее число опечаток на одной странице текста равно 2, X — число опечаток на случайно открытой странице текста.

2. В 2003 году в 40 районах Тверской области зафиксированы 24 попытки ограбления касс. Вот данные по районам: 1, 4, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0. Используя распределение Пуассона, постройте математическую модель для изучения величины X, равной числу ограблений в случайно выбранном районе. Составьте необходимые таблицы и проведите расчёты подобно тому, как это сделано в примере 3.

§ 4. Непрерывные случайные величины

Напомним, что случайная величина называется *непрерывной*, если её значения целиком заполняют некоторый числовой промежуток.

Пример 4.1. Известно, что где-то на шоссейной дороге протяжённостью 70 *км* произошла автокатастрофа. Какова вероятность того, что катастрофа произошла на расстоянии не более 14 *км* от начала дороги? Технические характеристики дороги на всём её протяжении одинаковы.

Решение. Расстояние X до места катастрофы — случайная величина, которая может принимать любое значение от 0 до 70 *км*. Следовательно, X — *непрерывная случайная величина*, удовлетворяющая условию $0 \leqslant X \leqslant 70$. Нам нужно найти вероятность события A, состоящего в том, что $0 \leqslant X \leqslant 14$. По условию задачи все участки дороги одинаково опасны (или безопасны) для автотранспорта. Это означает, что дорожные происшествия на участках одинаковой протяжённости являются равновозможными, а раз так, то вероятность катастрофы на каком-нибудь участке прямо пропорциональна длине этого участка. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = 14/70 = 1/5 = 0{,}2$. Найдём теперь вероятность автокатастрофы на участке дороги, начало которого отмечено километровым столбом с отметкой x_1, а конец — километровым столбом с отметкой x_2. Поскольку длина этого участка равна $x_2 - x_1$ километров, то

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \frac{x_2 - x_1}{70}. \tag{8}$$

Формула (8) задаёт распределение величины X. Эта случайная величина называется *равномерно распределённой на отрезке* $[0, 70]$.

Если случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, то она может принимать любое значение из этого отрезка, и все значения, попадающие в промежутки одинаковой длины, являются равновозможными. Формулу (8) в общем случае записывают так:

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}. \tag{9}$$

Число $k = \dfrac{1}{b-a}$ называется *плотностью вероятности*. В рассмотренном выше примере 1 плотность вероятности равна $1/70$. Формула (9) имеет простой геометрический смысл: *если величина X равномерно распределёна в промежутке $[a, b]$, то вероятность её попадания на отрезок $[x_1, x_2]$ равна площади S прямоугольника с высотой $\dfrac{1}{b-a} = k$, построенного на отрезке $[x_1, x_2]$ как на основании* (рис. 131).

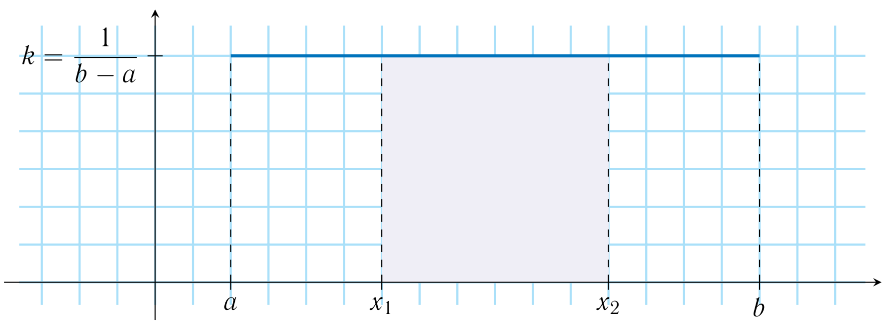


Рис. 131

Пример 4.2. Расстояние между двумя остановками автобус проходит за две минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов — 25 минут. Вы подходите к остановке в случайный момент времени. Найдите: а) вероятность того, что автобус придётся ожидать не более пяти минут; б) вероятность того, что автобус вас обгонит, если вы решите идти до следующей остановки пешком.

Решение. Поскольку автобус может появиться в любой момент времени от 0 до 25 минут с начала вашего прихода на остановку, то время ожидания автобуса — случайная величина X, принимающая все значения от 0 до 25. По смыслу задачи все значения величины X равновозможны, следовательно, X имеет равномерное распределение на отрезке [0, 25]. Для ответа на первый вопрос нужно найти вероятность события $0 \leqslant X \leqslant 5$. По формуле (9) $P(0 \leqslant X \leqslant 5) = (5 - 0)/25 = 0{,}2$.

Теперь представьте себе, что вы подошли к остановке и, не увидев автобуса, пошли пешком. По условию задачи вы дойдёте до следующей остановки за 15 минут. После вашего ухода с остановки автобус там появится через X минут, а до следующей остановки он доедет через $X + 2$ минуты. Автобус обгонит пешехода при условии $X + 2 < 15$, откуда получим $X < 13$. Вероятность этого события также можно найти с помощью формулы (9): $P(X < 13) = P(0 \leqslant X \leqslant 13) = 13/25 = 0{,}52$.

В случае, если непрерывное распределение не является равномерным, оно также характеризуется некоторой плотностью вероятности. Дадим общее определение. *Плотностью вероятности непрерывной случайной величины* X называется такая неотрицательная функция $f(x)$, интеграл от которой даёт вероятность попадания этой величины в заданный отрезок:

$$P\,(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx. \tag{10}$$

В примере 1 $f(x) = k = 1/70$:

$$P\,(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{70}\,dx = \frac{1}{70}x\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{70},$$

то есть формула (8) следует из формулы (10). В примере 2 $f(x) = k = 1/25$ и по этой формуле:

$$P\,(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{25}\,dx = \frac{1}{25}x\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{25}.$$

Формула (10) описывает и распределение времени ожидания автобуса: при $x_1 = 0$ и $x_2 = 13$ получим $P(0 \leqslant X \leqslant 13) = 0{,}52$.

В общем случае для величины X, равномерно распределённой на отрезке $[a, b]$, плотность вероятности согласно формуле (9) равна

$$f(x) = \frac{1}{b - a}. \tag{11}$$

Поскольку все значения случайной величины с плотностью вероятности $f(x)$ находятся на отрезке $[a, b]$, то событие $a \leqslant X \leqslant b$ является достоверным, а вероятность достоверного события равна единице:

$$P\,(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = 1. \tag{12}$$

Это равенство имеет следующий геометрический смысл: *площадь под графиком функции $y = f(x)$ равна единице.*

Теперь мы приведём формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии случайной величины X, имеющей плотность вероятности $f(x)$. Если все значения случайной величины заключены в пределах от a до b, то математическое ожидание и дисперсию случайной величины X вычисляют по формулам

$$M(X) = \int\limits_a^b x f(x)\,dx; \tag{13}$$

$$D(X) = \int\limits_a^b (x-m)^2 f(x)\,dx, \quad \text{где} \quad m = M(X). \tag{14}$$

Применим эти формулы в примере 1. Поскольку $f(x) = 1/70$, то по формуле (13) получаем:

$$M(X) = \int\limits_0^{70} x\frac{1}{70}\,dx = \frac{1}{70}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{70} = \frac{1}{70}\left(\frac{70^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{70}\frac{70^2}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$

Полагая в формуле (14) $m = 35$, найдём дисперсию:

$$D(X) = \int\limits_0^{70} (x-35)^2\frac{1}{70}\,dx = \frac{1}{70}\frac{(x-35)^3}{3}\bigg|_0^{70} = \frac{1}{70}\left(\frac{35^3}{3} + \frac{35^3}{3}\right) \approx 408.$$

$$S(X) = \sqrt{D(X)} \approx \sqrt{408} \approx 20{,}1.$$

Для случайной величины, равномерно распределённой на отрезке $[a, b]$, формулы (13) и (14) принимают следующий вид:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \tag{15}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{16}$$

Извлекая квадратный корень из дисперсии, мы получим формулу для нахождения среднего квадратического отклонения равномерно распределённой случайной величины:

$$S(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{17}$$

Первая из этих формул запоминается особенно просто: *математическое ожидание случайной величины, равномерно распределённой в некотором интервале, есть середина этого интервала.* Аналогичные формулы получатся, если вместо отрезка взять интервал или полуинтервал.

При экспериментальном изучении случайных величин перед исследователем встаёт вопрос: является ли исследуемое распределение равномерным? Иногда мы об этом знаем заранее, из теоретических соображений, а иногда гипотезу о равномерности распределения исследователь выдвигает сам, анализируя статистические данные.

Пример 4.3. В сводке приведены данные о приросте процента раскрываемости преступлений по линии криминальной милиции в 2003 г. (по сравнению с 2002 г.) в 30 районах Тверской области: 6,5; 4,9; 3,8; 6,3; 7,4; 0; 3; −3,5; −1,7; 6,3; 6,6; −4,6; −3; 11,2; −1,7; −0,9; 4,5; −5; 2,3; 4; 7,5; 4,3; 0; −4,5; −3,9; 10,9; 7,9; 1,6; 5,3; 6,8. Можно ли считать распределение этой величины равномерным?

Решение. Изучаемой случайной величиной X является прирост процента раскрываемости преступлений в одном районе. Приведённые числа — наблюдаемые значения случайной величины X. Составим по этим данным интервальный ряд (см. §5 третьей главы).

Наименьшее значение величины X равно -5, а наибольшее 11,2. Следовательно, диапазоном наблюдений является отрезок $[-5; 11{,}2]$ длиной 16,2. Разделим этот отрезок на 6 разрядов, тогда длина Δ одного разряда получится равной $\Delta = 16{,}2/6 = 2{,}7$. Интервальный ряд записан в таблице 75. Напомним, что числа m_i называются абсолютными частотами (число попаданий величины X в разряды интервального ряда), а числа $\tilde{p}_i = m_i/n$ (n — число наблюдений) — относительными частотами.

Таблица 75

Разряды	$[-5; -2{,}3]$	$[-2{,}3; 0{,}4]$	$[0{,}4; 3{,}1]$	$[3{,}1; 5{,}8]$	$[5{,}8; 8{,}5]$	$[8{,}5; 11{,}2]$	Σ
m_i	6	5	3	6	8	2	30
$\tilde{p}_i$	0,20	0,17	0,10	0,20	0,26	0,07	1

Построим графическое изображение полученного интервального ряда — гистограмму. Для этого предварительно рассчитаем высоты столбиков гистограммы по формулам: $h_i = \dfrac{\tilde{p}_i}{\Delta}$. Получим следующие значения высот:

$$h_1 = 0{,}07; \quad h_2 = 0{,}06; \quad h_3 = 0{,}04; \quad h_4 = 0{,}07; \quad h_5 = 0{,}10; \quad h_6 = 0{,}02.$$

Гистограмма изображена на рис. 132.

Рассмотрение таблицы и гистограммы приводит к мысли, что колебания частот при переходе от одного разряда к другому вряд ли отражают какую-то закономерность и, скорее всего, вызваны случайными обстоятельствами.

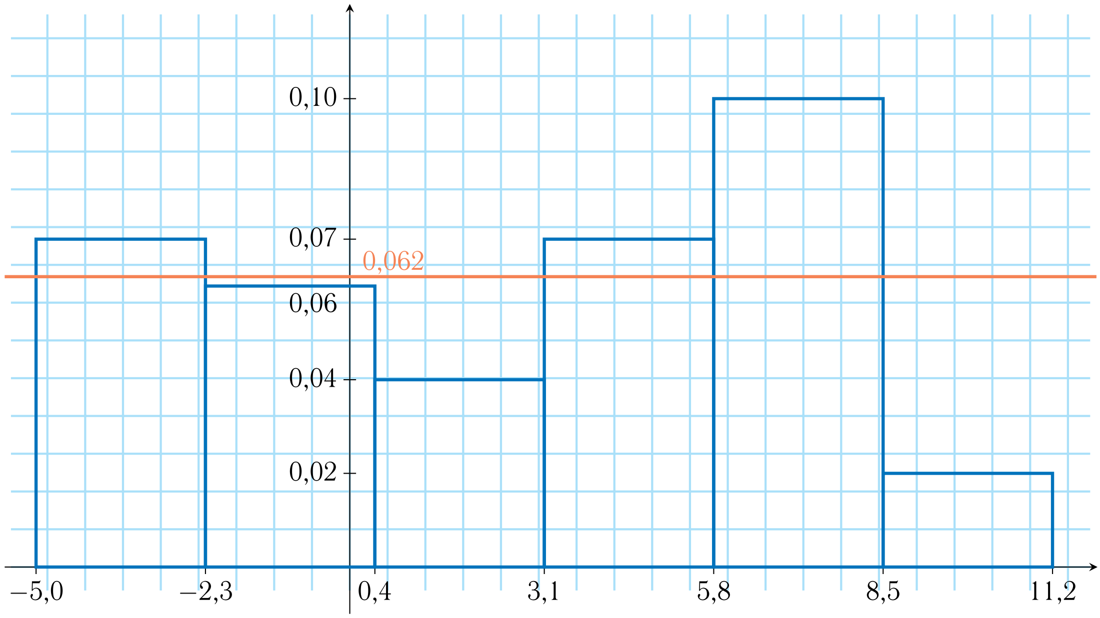


Рис. 132

Оказывается, что подобная картина наблюдается и в других городах (эта точка зрения косвенно подтверждается в учебниках по юридической статистике). Поэтому можно выдвинуть гипотезу о том, что теоретическое распределение случайной величины X является равномерным распределением на промежутке $[-5; 11{,}2]$. Найдём соответствующую плотность вероятности, используя формулу (6): $f(x) = \dfrac{1}{16{,}2} \approx 0{,}062$ при $-5 \leqslant x \leqslant 11{,}2$. График этой функции изображён на рис. 132 красной линией.

Таким образом, мы имеем теоретическое (равномерное) и эмпирическое (заданное таблицей 75) распределения случайной величины X. При этом (см. §1 текущей главы) можно считать, что эмпирическое распределение является приближением теоретического, а теоретическое — моделью эмпирического. Но насколько точно выбранная модель — равномерное распределение — отражает свойства изучаемой случайной величины X? Уже отмечалось, что ответы на подобные вопросы получают с помощью критериев согласия. Укажем ещё один, более простой способ.

Сравним числовые характеристики теоретического и эмпирического распределений. Для первого из них по формулам (13) и (14) имеем:

$$M(X) = (-5 + 11{,}2)/2 = 3{,}1;$$
$$D(X) = 16{,}2^2/12 = 262{,}44/12 = 21{,}87; \quad S(X) = \sqrt{21{,}87} \approx 4{,}68.$$

Для эмпирического распределения, заданного таблицей 18, расчёт величин $\overline{x}$, D, и S проведём как в третьей главе. Сначала найдём середины разрядов интервального ряда:

$$\tilde{x}_1 = \frac{-5-2{,}3}{2} = -3{,}65;\ \tilde{x}_2 = \frac{-2{,}3+0{,}4}{2} = -0{,}95;\ \tilde{x}_3 = \frac{0{,}4+3{,}1}{2} = 1{,}75;$$
$$\tilde{x}_4 = \frac{3{,}1+5{,}8}{2} = 4{,}45;\ \tilde{x}_5 = \frac{5{,}8+8{,}5}{2} = 7{,}15;\ \tilde{x}_6 = \frac{8{,}5+11{,}2}{2} = 9{,}85.$$

Остальные вычисления оформляем в расчётной таблице 76.

Таблица 76

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\,\tilde{p}_i$
1	−3,65	0,20	−0,7300	−6,3720	40,6023	8,1246
2	−0,95	0,17	−0,1615	−3,6720	13,4689	2,2897
3	1,75	0,10	0,1750	−0,9720	0,9445	0,0944
4	4,45	0,20	0,8900	1,7280	2,9860	0,5972
5	7,15	0,26	1,8590	4,4280	19,6072	5,0979
6	9,85	0,07	0,6895	7,1280	50,8083	3,5566
Σ	—	1	$\overline{x} = 2{,}722$	—	—	$D = 19{,}7604$

Округляя результаты, получим: $\overline{x} \approx 2{,}7$; $D \approx 19{,}76$ и $S \approx 4{,}44$. Видим, что $M(X) \approx \overline{x}$, $D(X) \approx D$ и $S(X) \approx S$. Найдём далее относительные погрешности этих приближённых равенств:

$$\frac{M(X)-\overline{x}}{M(X)} \cdot 100\% = \frac{0{,}4}{3{,}1} \cdot 100\% = 12{,}9\%;$$
$$\frac{D(X)-D}{D(X)} \cdot 100\% = \frac{2{,}11}{21{,}87} \cdot 100\% = 9{,}6\%;$$
$$\frac{S(X)-S}{S(X)} \cdot 100\% = \frac{0{,}24}{4{,}68} \cdot 100\% = 5{,}1\%.$$

Поскольку полученные погрешности не очень велики, то теоретическое распределение рассматриваемой случайной величины — прирост процента раскрываемости преступлений — можно считать равномерным.

Упражнения

1. Изобразите на рисунке прямоугольную систему координат, укажите на оси абсцисс множество значений случайной величины из примера 1 — отрезок $[0, 70]$. Отметьте математическое ожидание (точку 35) и укажите точки, удалённые от середины отрезка $[0,\ 70]$ меньше, чем на величину среднего квадратического отклонения. Найдите вероятность того, что значения величины X отклоняются от среднего значения (35) меньше, чем на 20. Постройте график плотности вероятности и проверьте следующее свойство: вероятность попадания величины X в промежуток $[x_1, x_2]$ равна площади прямоугольника, основанием которого является данный отрезок, а высота равна $1/70$.

2. Выведите формулы (15) и (16) из формул (13) и (14).

3. Попробуйте обосновать тот факт, что перечисленные ниже случайные величины имеют равномерное распределение. Для каждой величины укажите интервал значений, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию: 1) поезда в метрополитене следуют один за другим с интервалом 2 минуты, X — время ожидания прихода ближайшего поезда; 2) продавец взвешивает товар на весах, шкала которых размечена с точностью до 5 *г.*, X — ошибка, допущенная при взвешивании; 3) паром перевозит людей с одного берега реки на другой, расстояние между берегами равно 120 *м.*, X — расстояние от парома до ближайшего берега в случайный момент времени; 4) резидент ожидает агента в условленном месте в условленное время — с 11 до 12 часов, X — время встречи.

4. В училище МВД проводилось тестирование интеллектуального уровня студентов первого курса. Итоги тестирования (в баллах) 20-ти проверяемых оказались следующими: 8, 10, 13, 13, 12, 9, 7, 10, 12, 14, 13, 12, 17, 11, 8, 12, 7, 12, 11, 9. Составьте таблицу эмпирического распределения величины X (вариационный ряд), найдите диапазон значений (a, b) и постройте многоугольник распределения. Найдите величины $\overline{x}$, D, S и определите плотность вероятности теоретического распределения величины X, считая его равномерным в интервале (a, b). Найдите значения $M(X)$, $D(X)$, $S(X)$ и вычислите относительные погрешности приближённых равенств $M(X) = \overline{x}$, $D(X) = D$, $S(X) = S$.

§ 5. Показательное распределение

Пример 5.1. По улице движется поток автомобилей интенсивностью 24 машины в минуту. Движение является односторонним и в один ряд. Пешеходу, находящемуся достаточно далеко от светофора, для перехода улицы нужно 5 секунд. Какова вероятность того, что оказавшийся у перехода человек сможет сразу перейти улицу?

Решение. Очевидно, что переход улицы возможен, если в ближайшие 5 секунд после того, как пешеход окажется у перехода, мимо него не проедет ни одного автомобиля. Вероятность этого события и нужно найти для ответа на вопрос задачи. Понятно, что автомобили проезжают мимо перехода в случайные моменты времени. Однако поток автомобилей удовлетворяет определённым условиям.

1) Вероятность появления автомашины у перехода за короткий промежуток времени, измеренный в секундах, прямо пропорциональна величине этого промежутка с коэффициентом пропорциональности $k = 24/60 = 0{,}4$ (среднее число автомобилей, проезжающих за одну секунду).

2) Вероятность появления того или иного числа автомобилей в течение определённого промежутка времени не зависит от того, сколько автомобилей проехало раньше.

3) Существует такой промежуток времени, может быть достаточно короткий, в течение которого у перехода появится не более одной машины.

Рассмотрим случайную величину X — число автомобилей, проезжающих мимо пешехода за время t. Условия 1), 2) и 3) означают, что эта величина распределена по закону Пуассона (см. §3). Параметр λ этого распределения равен среднему числу автомобилей, проезжающих мимо пешехода за время t. Из условия 1) следует, что $\lambda = kt$, поэтому по формуле Пуассона (6) из §3 получаем

$$P(X = m) = e^{-kt}\frac{(kt)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Нас интересует вероятность $p_0(t) = P(X = 0)$ того, что за время от 0 до t у перехода не появится ни одного автомобиля. Подставляя в предыдущую формулу $m = 0$, получаем (напоминаем, что $0! = 1$):

$$p_0(t) = e^{-kt}. \tag{18}$$

По условию задачи $k = 0{,}4$ и для перехода улицы требуется время $t = 5$ сек. Используя калькулятор, находим вероятность того, что улицу можно перейти сразу: $p_0(5) = e^{-(0{,}4)\cdot 5} = e^{-2} \approx 0{,}1353$.

В этой задаче мы ввели новую случайную величину Y — время, в течение которого у перехода не появится ни одного автомобиля. Очевидно, вероятность того, что время Y больше t, есть в точности вероятность того, что в течение времени t не было ни одного автомобиля. Иными словами, $P(Y > t) = p_0(t)$, где $p_0(t)$ задаётся формулой (18). По свойству вероятности имеем:

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = P(Y > a) - P(Y > b) = e^{-ka} - e^{-kb}.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона-Лейбница (см. восьмую главу)

$$\int_a^b ke^{-kt}\,dt = -\,e^{-kt}\Big|_a^b = e^{-ka} - e^{-kb}.$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$P(a \leqslant Y \leqslant b) = \int_a^b ke^{-kt}\,dt = e^{-ka} - e^{-kb}. \tag{19}$$

Согласно определению плотности вероятности, данному в предыдущем параграфе, из равенства (19) следует, что рассматриваемая нами случайная величина Y имеет плотность вероятности $f(t) = ke^{-kt}$. *Непрерывное распределение с плотностью вероятности*

$$f(t) = ke^{-kt} \tag{20}$$

при $t > 0$ *называется показательным распределением, а величина* $k > 0$ *называется параметром показательного распределения.* Легко проверить, что функция $f(t)$ обладает двумя характеристическими свойствами плотности распределения, о которых упоминалось в §4:

$$1)\, f(t) \geqslant 0; \qquad 2) \int_0^\infty ke^{-kt}\,dt = 1.$$

Итак, в задаче о переходе улицы время ожидания автомобиля имеет показательное распределение с параметром $k = 0{,}4$. График плотности вероятности этого распределения, то есть график функции $f(t) = 0{,}4e^{-0{,}4t}$, представлен на рис. 133.

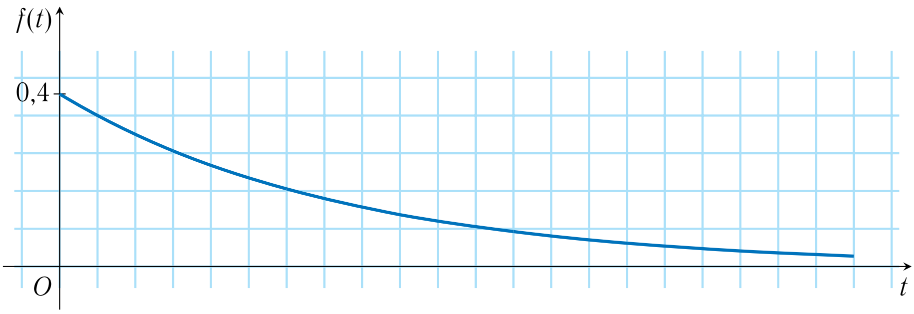


Рис. 133

Из формул (13) и (14), приведённых в §4, получаются следующие формулы для числовых характеристик показательного распределения:

$$M(Y) = \frac{1}{k}, \quad D(Y) = \frac{1}{k^2}, \quad S(Y) = \frac{1}{k}. \tag{21}$$

При $k = 0{,}4$ получаем $M(Y) = 2{,}5$ — среднее время ожидания автомобиля, $D(Y) = 6{,}25$ и $S(Y) = 2{,}5$.

Аналогичным образом решается довольно широкий круг задач, которые в общем виде можно сформулировать так. Пусть событие A появляется в случайные моменты времени; последовательное появление событий во времени называется *потоком событий*. Если этот поток удовлетворяет условиям 1)–3), то его называют *простейшим*, *или пуассоновским*, *потоком с интенсивностью* (*плотностью*) k. Для него величина Y, равная промежутку времени между появлениями двух последовательных событий (в рассмотренной задаче — время ожидания автомобиля), будет случайной величиной, распределённой по показательному закону с параметром k.

Показательное распределение часто используют для описания времени безотказной работы приборов или технических систем, если интенсивность отказов величина постоянная. С его помощью можно изучать различные виды массового обслуживания. Показательное распределение применяют также в теории надёжности, изучающей условия безотказной работы некоторой системы в случае, если отказы в работе образуют простейший поток событий. В этой теории вероятность $p_0(t)$ называют *функцией надёжности* и обозначают $H(t, k)$. В практических задачах условия 1) – 3) проверяются путём наблюдений, а значение k находят по формуле $k = N/T$, где N — общее число отказов за время T.

Пример 5.2. В результате наблюдений за работой системы в течение 100 часов зарегистрировано 5 отказов. Найдите: 1) функцию надёжности системы; 2) вероятность безотказной работы в течение 50 часов. При каком значении t вероятность того, что система не выйдет за это время из строя, равна 0,99?

Решение. Имеем: $T = 100$, $N = 5$, следовательно, $k = 0{,}05$ и функция надёжности запишется так: $H(t; 0{,}05) = e^{-0{,}05t}$. Вероятность безотказной работы в течение 50 часов будет равна $P(Y > 50) = H(50; 0{,}05) = e^{-2{,}5} \approx \approx 0{,}082$. Для ответа на последний вопрос нужно найти значение t из условия $H(t; 0{,}05) = 0{,}99$. Перепишем его в виде $e^{-0{,}05t} = 0{,}99$. Прологарифмировав по основанию e, получим $0{,}05t = -\ln 0{,}99$. Отсюда $t \approx 0{,}2$ часа.

При изучении реальных ситуаций иногда удаётся, исходя из общих теоретических соображений, подобных приведённым выше, заранее определить, что рассматриваемое распределение является показательным. Тогда по результатам наблюдений подбирают соответствующее значение параметра k и находят конкретное показательное распределение. Но иногда вид теоретического распределения неизвестен. В таких случаях тщательно анализируют экспериментальные данные. Например, можно построить гистограмму, сгладить её плавной линией и посмотреть, похожа ли эта линия на график плотности вероятности показательного распределения.

Пример 5.3. В книге Д. Гранта, составившего в 1662 году первую в истории таблицу смертности, проанализированы результаты 229250 регистраций смертей в Лондоне, произошедших за 20 лет. Найдите закон распределения величины X — продолжительности жизни случайно взятого лондонца XVII века, если из 100 новорождённых доживало до

6 лет	—	64;	16 лет	—	40;	26 лет	—	25;
36 лет	—	16;	46 лет	—	10;	56 лет	—	6;
66 лет	—	3;	76 лет	—	1;	86 лет	—	0.

Решение. Переработаем исходные данные, представив их в виде интервального ряда с разрядами 0–6, 6–16, 16–26 и т. д., и вычислим частоты смертности этих разрядов.

Таблица 77

	0–6	6–16	16–26	26–36	36–46	46–56	56–66	66–76	76–86	Σ
$\tilde{p}_i$	0,36	0,24	0,15	0,09	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	1
h_i	0,060	0,024	0,015	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	—

До возраста 6 лет доживало 64 процента новорождённых, значит умирало 36%, поэтому частота первого разряда равна 0,36. Поскольку до 16 лет доживало 40% детей, то 60% к этому моменту умирало; при этом 36% из них уже отнесено к первому разряду, следовательно, второй разряд имеет частоту 0,24 и т. д. В результате получим вторую строку таблицы 77.

В третьей строке этой таблицы записаны высоты столбцов гистограммы. Поскольку длина первого разряда равна 6, то $h_1 = 0{,}36/6 = 0{,}06$. Все остальные разряды имеют длину, равную 10, поэтому $h_2 = 0{,}24/10 = 0{,}024$ и т. д. Таблица 77 содержит результаты обработки эмпирических значений случайной величины X — продолжительности жизни (в годах) случайно взятого лондонца. Эта случайная величина, вообще говоря, является непрерывной, хотя на практике мы обычно обходимся натуральными числами (говорят, что человек прожил 60 лет, а не 59 лет, 11 месяцев, 26 дней, 17 часов и 36,(6) минут).

Для нахождения закона распределения величины X построим по данным таблицы 77 гистограмму. На рис. 134 кроме неё изображена также плавная кривая, сглаживающая верхнюю границу гистограммы. Эта линия представляет собой график плотности некоторого непрерывного распределения, причём она весьма похожа на график плотности показательного распределения. Следовательно, можно предположить, что теоретическое распределение случайной величины X будет показательным распределением.

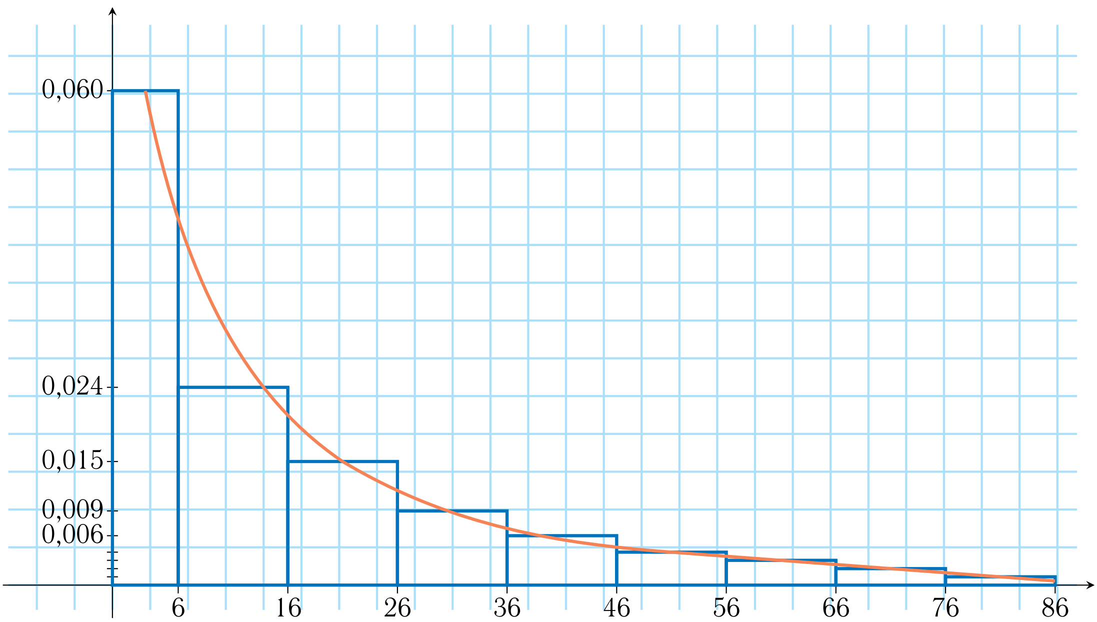


Рис. 134

Найдём плотность вероятности этого распределения. Сначала определим значение параметра k, входящего в формулу (20). По формуле (21) $k = 1/M(X)$, а математическое ожидание $M(X)$ приближённо можно заменить средним арифметическим $\overline{x}$ по данным таблицы 77. Проведём вычисления: $\overline{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_9\tilde{p}_9 = 3 \cdot 0{,}36 + 11 \cdot 0{,}24 + 21 \cdot 0{,}15 + 31 \cdot 0{,}09 + 41 \cdot 0{,}06 + 51 \cdot 0{,}04 + 61 \cdot 0{,}03 + 71 \cdot 0{,}02 + 81 \cdot 0{,}01 = 18{,}19$ ($\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_9$ —

середины разрядов интервального ряда). Итак, приближённо $k = 1/\overline{x} = 1/18{,}19 \approx 0{,}055$, и соответствующая плотность вероятности имеет вид: $f(x) = 0{,}055e^{-0{,}055x}$. График этой функции изображён на рис. 135, а таблица 78 содержит её значения на границах разрядов (четвёртая строка).

Таблица 78

x	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86
$-0{,}055x$	0	0,33	0,88	1,43	1,98	2,53	3,08	3,63	4,18	4,73
$e^{-0{,}055x}$	1	0,719	0,415	0,241	0,138	0,079	0,046	0,026	0,015	0,005
$f(x)$	0,055	0,040	0,023	0,013	0,008	0,004	0,003	0,001	0,0008	0,0005

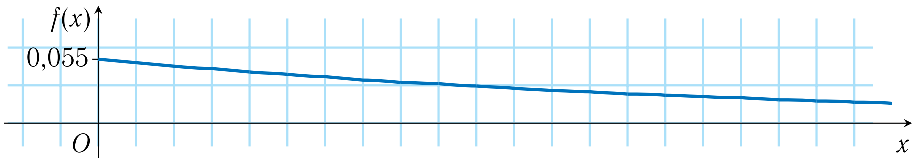


Рис. 135

Сравнивая значения функции f на границах разрядов с высотами h_i соответствующих столбцов гистограммы (третья строка таблицы 77), мы заключаем, что полученное теоретическое распределение хорошо согласуется с экспериментальными данными о продолжительности жизни лондонца XVII века. Пользуясь построенной моделью — теоретическим распределением, мы можем найти вероятность смерти в возрасте от a до b лет. По формуле (19) $P(a \leqslant X \leqslant b) = e^{-ka} - e^{-kb} = e^{-0{,}055a} - e^{-0{,}055b}$.

Функция $H(t, k) = e^{-kt}$, которую мы назвали функцией надёжности, в данном случае представляет собой вероятность того, что человек доживёт до возраста t лет. Например, вероятность дожить до 46 лет в этой модели равняется $H(46; 0{,}055) = e^{-2{,}53} \approx 0{,}079$. По свойству вероятностей противоположных событий разность $1 - H(t, k)$ является вероятностью того, что выбранный случайным образом горожанин не проживёт более t лет. Например, вероятность умереть до двадцати лет получится равной $1 - H(20; 0{,}055) = 1 - e^{-1{,}1} \approx 1 - 0{,}333 = 0{,}667$.

В заключение заметим, что, используя функцию надёжности, можно переписать формулу (19) следующим образом:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = H(a, k) - H(b, k). \tag{22}$$

Упражнения

1. В каждом из приведённых ниже примеров укажите поток событий, приведите соображения в пользу того, что его можно считать простейшим, определите его интенсивность и назовите время ожидания: а) рыбак удил рыбу на озере и выловил за 6 часов 30 рыб; б) танк обстреливает цель, из 20 выстрелов — 6 попаданий; в) в городской суд в течение года поступило 300 заявлений на рассмотрение гражданских дел различной направленности; г) детский врач за время дежурства (6 часов) получает в среднем 10 вызовов на дом; д) в течение восьмичасовой рабочей смены на ткацком станке исправляется в среднем 5 поломок.

2. Среди приговорённых к лишению свободы 35% лиц имеют срок от 1 до 3 лет, 31% — от 3 до 6, 19% — от 6 до 9, 10% — от 9 до 12 , 5% — от 12 до 15 лет. Постройте показательную модель времени отбывания наказания. Для этого найдите среднее арифметическое сроков заключения и определите параметр показательного распределения. Изобразите на одном рисунке гистограмму и график плотности распределения модели. С помощью модели найдите вероятности того, что срок лишения свободы случайно выбранного заключённого: а) меньше 10 лет; б) находится в пределах от пяти до семи лет.

§ 6. О задачах массового обслуживания

Пример 6.1. Время от времени в Дрюкове происходит обмен паспортов. Каждый гражданин, имеющий паспорт старого образца, должен обратиться в паспортный стол по месту прописки, оформить необходимые документы и через некоторое время получить новый паспорт. Таким образом, обмен паспортов связан с обслуживанием большого количества людей и представляет собой типичный пример *задачи массового обслуживания*.

Проблема состоит в следующем: сколько работников РОВД должны заниматься обменом паспортов? С одной стороны, их должно быть достаточно много, чтобы не было больших очередей. С другой стороны, их не должно быть слишком много, иначе они будут скучать без дела и зря получать зарплату.

Решение. Капитан Фомин для своего отделения решил эту проблему так. В среднем в день по поводу обмена паспортов приходит 28 человек, а на оформление одного паспорта в среднем затрачивается 30 минут. Следовательно, рассуждает капитан Фомин, за 7 часов работы (1 час — перерыв на обед) один работник обслужит 14 человек, и таким образом, двух будет достаточно.

Но оказалось, что два человека не справляются! Практически каждый день возникает очередь, и в конце рабочего дня нескольких граждан обслужить не успевают. В чем же дело, недоумевал капитан Фомин, ведь все расчёты проведены правильно! Суть дела в том, объяснил ему майор Зимин (прослушавший во время обучения на юридическом факультете курс математики), что люди приходят *неравномерно* и на каждого из них затрачивается разное время, а не «средние» полчаса. Именно эта неравномерность и является причиной очередей.

На самом деле время обслуживания одного клиента является случайной величиной. Как правило, поток клиентов является простейшим (пуассоновским) потоком, то есть для него выполняются условия, аналогичные условиям 1) — 3) из предыдущего параграфа. В этом случае, согласно §5, время между появлениями двух клиентов тоже будет случайной величиной X, распределённой по показательному закону с плотностью вероятности $f(t) = ke^{-kt}$. Напомним, что $1/k$ — математическое ожидание случайной величины X (см. §5). На практике в качестве k берут *интенсивность* или *плотность* потока клиентов, то есть среднее число клиентов, приходящих на обслуживание за единицу времени.

Теория массового обслуживания или, как её ещё называют, теория очередей, даёт ответ на вопрос, сколько операторов должны заниматься обменом паспортов. Пусть n — число операторов, l — среднее число человек, которых один оператор обслуживает в течение часа (*интенсивность обслуживания*); k — как и выше — плотность потока клиентов. Предположим также, что из очереди никто не уходит — все клиенты терпеливо ждут, пока их обслужат (система с чистым ожиданием). Обозначим $u = k/l$, тогда вероятность $P(q)$ того, что заняты только q операторов из n, вычисляется по формуле:

$$P(q) = \frac{u^q}{q!}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{u^i}{i!} + \frac{u^{n+1}}{n!(n-u)}\right)^{-1}; \qquad (23)$$

вероятность $P(n, s)$ того, что все n операторов заняты и s человек находится в очереди — по формуле

$$P(n, s) = \left(\frac{u}{n}\right)^s P(n); \qquad (24)$$

среднее число $\overline{s}$ людей, ожидающих в очереди, — по формуле

$$\overline{s} = \frac{un}{(n-u)^2}P(n). \qquad (25)$$

Здесь обязательно должно выполняться условие $u/n < 1$, иначе очередь будет расти неограниченно.

Применим эти формулы к нашей задаче с паспортами. Пусть $n = 3$, $l = 2$, $k = 4$, тогда $u = 2$. Подставляя эти значения в формулы (23) и (25), найдём, что $\overline{s} = 8/9$, то есть очередь, в среднем, состоит из одного человека. Возьмем теперь $n = 4$ при тех же остальных данных. Тогда из тех же формул получаем $\overline{s} = 4/23$, то есть очереди практически нет. Итак, для нормальной работы необходимо иметь, как минимум, трёх операторов, для идеальной — четырёх.

Подобные задачи встречаются во многих областях человеческой деятельности. Примерами *систем массового обслуживания* являются: телефонные станции, ремонтные мастерские, справочные бюро, билетные кассы, парикмахерские, различные контрольно-пропускные и приёмные пункты, аэродромы, таможни, институты и т. п. Работа системы массового обслуживания состоит в выполнении заявок, поступающих одна за другой в случайные моменты времени. Система обслуживания состоит из определённого числа обслуживающих единиц — каналов обслуживания: людей, приборов, линий связи и др. Обслуживание поступившей заявки продолжается некоторое случайное время, после чего канал освобождается и может обслуживать (возможно, после некоторой паузы) другую заявку. В теории массового обслуживания устанавливаются зависимости между характером потока заявок, производительностью каналов обслуживания и эффективностью обслуживания, которые описывают её пропускную способность.

Проблемы, связанные с задачами массового обслуживания, возникают и у юристов. Линии связи, устройства для сбора и переработки информации, судебные органы, юридические консультации, следственные изоляторы и т. п. — всё это можно рассматривать как некоторые системы массового обслуживания. Рассмотрим ещё один пример системы массового обслуживания с ожиданием.

Пример 6.2. К приёмной невропатолога подходят больные с интенсивностью 4 человека в час. Врач затрачивает на одного больного в среднем 10 минут. Требуется найти: а) вероятность того, что подошедший больной сразу будет принят врачом; б) вероятность того, что подошедший больной будет в очереди первым; в) среднее число больных, находящихся в очереди; г) среднее время, которое больной затрачивает на посещение врача, включая и время ожидания.

Решение. Мы имеем систему обслуживания с очередью и с одним каналом обслуживания ($n = 1$). Интенсивность потока заявок $k = 4$, среднее время обслуживания одной заявки 1/6 часа, следовательно, интенсивность обслуживания $l = 6$.

Для ответа на поставленные вопросы используем формулы (23)–(25), которые при $n = 1$ значительно упростятся:

$$P(0) = 1 - u, \quad P(1) = u(1 - u); \tag{26}$$

$$P(1, s) = u^{s+1}(1 - u); \tag{27}$$

$$\overline{s} = \frac{u^2}{1 - u}. \tag{28}$$

Вернёмся к нашей задаче. Так как $u = k/l = 2/3$, то вероятность того, что подошедший сразу будет принят врачом (вероятность $P(0)$) по формуле (26) равна $1 - u = 1/3$. Вероятность того, что подошедший будет в очереди первым, есть вероятность $P(1, 0) = u(1 - u) = 2/3(1 - 2/3) = 2/9$. Среднее число людей в очереди найдём по формуле (28): $\overline{s} = u^2/(1 - u) = (4/9)/(1/3) = 4/3$. Наконец, среднее время ожидания в очереди $\overline{t}_0 = \overline{s}/k = (4/3)/4 = 1/3$ часа, то есть 20 мин.

В примерах 1 и 2 мы рассмотрели так называемые системы с ожиданием, в которых заявка не покидает систему, а становится в очередь и ожидает, пока не освободится какой-нибудь канал. Кроме того, существуют системы обслуживания с отказами, в которых, если все каналы заняты, поступившая заявка получает отказ и покидает систему необслуженной. В этих случаях применяются более сложные формулы.

Пример 6.3. Телефонная станция имеет 6 линий связи. На станцию поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью $k = 4$ вызова в минуту. Средняя длительность разговора — время обслуживания — $t_{\text{об}} = 2\text{мин}$. Требуется найти: а) вероятность простоя; б) вероятность отказа; в) пропускную способность системы Q; г) среднее число занятых каналов $K_{\text{ср}}$.

Решение. В общей постановке такая задача была решена в 1917 году Эрлангом[2]. Пусть система имеет n каналов обслуживания и p_i — вероятность того, что i каналов заняты, а остальные свободны. Эти вероятности характеризуют среднюю загрузку системы. Для них Эрланг получил следующую систему уравнений:

$$lp_1 = kp_0,\ 2lp_2 = kp_1,\ \ldots,\ nlp_n = kp_{n-1},\ p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1. \quad (29)$$

Решая эту систему, найдём

$$p_i = \frac{k^i}{i!l^i}p_0,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Напомним, что здесь n — число всех каналов. В нашем случае $n = 6$, плотность потока $k = 4$, а среднее количество клиентов, обслуживаемых за минуту, будет $l = 1/t_{\text{об.}} = 1/2$. По формулам Эрланга получаем: $p_1 = 8p_0$, $p_2 = 32p_0$, $p_3 = 85{,}3p_0$, $p_4 = 170{,}7p_0$, $p_5 = 273{,}1p_0$ и $p_6 = 364{,}1p_0$.

Для вычисления величины p_0 воспользуемся последним уравнением системы (29). После сложения получим $934{,}2p_0 = 1$, откуда последовательно находим $p_0 = 1/934{,}2 \approx 0{,}0011$, $p_1 = 8/934{,}2 \approx 0{,}0086$, $p_2 = 32/934{,}2 \approx$ $\approx 0{,}0343$, $p_3 = 85{,}3/934{,}2 \approx 0{,}0913$, $p_4 = 170{,}7/934{,}2 \approx 0{,}1827$, $p_5 =$ $= 273{,}1/934{,}2 \approx 0{,}2923$ и $p_6 = 364{,}1/934{,}2 \approx 0{,}3897$. Обратите внимание на то, что округлять при расчётах нужно только окончательные результаты, так как в противном случае может накопиться значительная ошибка.

Поскольку p_0 есть вероятность того, что все каналы свободны, то p_0 и есть вероятность простоя. Величина $p_6 = 0{,}3897$ есть вероятность того, что все имеющиеся каналы заняты, следовательно, это и есть вероятность отказа. Противоположное событие состоит в том, что свободен хотя бы один канал. Его вероятность $v = 1 - p_n$ называется *относительной пропускной способностью системы*. Эта вероятность равна отношению среднего числа заявок, обслуженных за единицу времени, к среднему числу заявок, поступивших за это же время: $v = 1 - p_6 = 0{,}6103$. Абсолютная пропускная способность Q равна среднему числу заявок, обслуженных за единицу времени: $Q = kv = 4 \cdot 0{,}6103 \approx 2{,}4412$. Среднее число занятых каналов равно произведению абсолютной пропускной способности на среднее время обслуживания: $K_{\text{ср.}} = Qt_{\text{об.}} = 2{,}4412 \cdot 2 = 4{,}8824 \approx 4{,}9$.

---

[2] А. К. Эрланг (1878–1929) — датский инженер, сотрудник лаборатории Копенгагенской телефонной компании.

Упражнения

1. К автозаправочной станции подъезжают в среднем 2 машины в минуту. Найдите: а) среднее число автомашин, прибывших на заправку в течение десяти минут; б) вероятность того, что за 5 минут к станции подъедут 8 автомашин.

2. Телефонная линия представляет собой одноканальную систему обслуживания. Интенсивность потока заявок — 0,5 вызовов в минуту. Среднее время разговора — 2 минуты. Найдите: а) абсолютную пропускную способность линии; б) вероятность отказа.

3. Нотариуса посещают в среднем 3 человека в час. На одного посетителя нотариус затрачивает в среднем полчаса. Найдите: а) среднее время ожидания в очереди; б) среднее время, затраченное на посещение нотариуса; в) среднее число посетителей в очереди.

4. В ателье срочного ремонта часов работают 4 мастера. Каждый из них тратит на обслуживание одного посетителя в среднем 40 минут. Если все мастера заняты, то заказ не принимается и посетитель уходит. Интенсивность потока посетителей — 6 человек в час. Найдите: а) вероятность простоя системы обслуживания; б) вероятность отказа; в) пропускную способность мастерской; г) среднее число занятых мастеров.

§ 7. Нормальное распределение

Нормальное распределение было открыто «королём математиков» Гауссом в 1809 году в работе, посвящённой теории движения небесных тел. В этой работе Гаусс построил также теорию ошибок измерения. Суть её в следующем. Допустим, что истинное значение некоторой величины равно a, и мы хотим узнать её значение с помощью измерений. Поскольку при каждом измерении допускается некоторая погрешность, то в результате получается число x, которое, вообще говоря, отличается от a. Разность $\delta = x - a$ называется *ошибкой измерения*. Различают три вида ошибок: промахи, систематические ошибки и случайные ошибки.

Промахи являются результатом небрежного измерения или неожиданных сильных воздействий на процесс измерения.

Систематические ошибки возникают под влиянием некоторых постоянно действующих факторов. Например, если прибор плохо отлажен, то он систематически завышает или занижает результат. Другой пример: при прохождении через атмосферу Земли луч света звезды преломляется и его путь искривляется. Вследствие этого эффекта, называемого рефракцией, измеренная высота светила над горизонтом всегда будет больше истинной высоты. Поэтому, если не учитывать рефракцию, при измерении высоты светил будет присутствовать систематическая ошибка. Систематические ошибки исключают путём соответствующей коррекции измерительных приборов или учитывают при анализе результатов измерений.

Случайные ошибки являются следствием большого числа причин, влияние которых учесть невозможно. Возьмём хотя бы такие эффекты, как состояние атмосферы, температурные колебания, толчки и сотрясения земной коры, физическое состояние лица, проводящего измерения и многое другое. Каждый из перечисленных эффектов в свою очередь порождается большим количеством других причин и т. д. В итоге может оказаться, что число причин, влияющих на измерение, является весьма значительным, но влияние каждой отдельной причины настолько незначительно, что его учесть практически невозможно. Суммарным результатом действия всех этих причин является случайная ошибка Δ.

Анализируя свойства случайной ошибки, Гаусс обнаружил, что её плотность вероятности $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: *отношение* $\dfrac{f'(x)}{xf(x)}$ *не зависит от* x, *то есть является постоянным*. Обозначим это отношение через a, а функцию $f(x)$, как обычно, буквой y. Тогда получается дифференциальное уравнение $y' = -axy$. Докажем, что решением этого уравнения будет функция

$$y = Ce^{-\frac{a}{2}x^2}, \tag{30}$$

где C — произвольное действительное число. В самом деле, пользуясь правилами дифференцирования, находим: $y' = -Caxe^{-\frac{a}{2}x^2} = -axy$.

Плотность вероятности является функцией неотрицательной, поэтому $C > 0$. Кроме того, должно выполняться условие

$$P(-\infty < \Delta < \infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx = 1,$$

которое означает, что событие $-\infty < \Delta < \infty$ (величина ошибки всегда есть некоторое число) является достоверным, а вероятность достоверного события равна единице. Как отмечено в §4, последнее равенство имеет следующий геометрический смысл: площадь под графиком функции $y = Ce^{-\frac{a}{2}x^2}$ равна единице. Вычислив интеграл, придем к равенству $a = 2C^2\pi$. При $a = 1$ получаем $C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и рассматриваемая плотность вероятности представляет собой известную нам дифференциальную функцию Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{31}$$

с которой мы познакомились в §9 седьмой главы.

Распределение случайной величины с плотностью вероятности, заданной формулой (31), называется *стандартным нормальным распределением*. Вероятность попадания значений стандартной нормальной величины в интервал (δ_1, δ_2) определяют по формуле

$$P\,(\delta_1 < \Delta < \delta_2) = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \varphi(x)\,dx = \Phi(\delta_2) - \Phi(\delta_1), \tag{32}$$

где $\Phi(x)$ — интегральная функция Лапласа (см. §9 восьмой главы).

Пример 7.1. Случайная ошибка имеет стандартное нормальное распределение. Какова вероятность, что она находится в интервале $(0{,}1; 0{,}3)$?

Решение. С помощью калькулятора или с помощью таблиц из Приложения 2 по формуле (32) находим: $P(0{,}1 < \Delta < 0{,}3) = \Phi(0{,}3) - \Phi(0{,}1) \approx \approx 0{,}1779 - 0{,}0398 = 0{,}1381$.

Выше мы рассмотрели решение дифференциального уравнения (30) в частном случае, когда $a = 1$. В общем же случае полагают $a = 1/\sigma^2$, где σ — некоторое положительное число, тогда для постоянной C получается значение $C = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, а плотность вероятности задаётся функцией Гаусса[3]

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{33}$$

Число σ называется *средней квадратической ошибкой измерения*. Оно, как правило, зависит только от измерительного прибора, поэтому его можно считать известным. При $\sigma \neq 1$ формула (32) имеет более общий вид:

$$P\left(\delta_1 < \Delta < \delta_2\right) = \Phi\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right). \tag{34}$$

Мы дополним её следующими формулами, по которым находят вероятности односторонних неравенств:

$$P\left(\Delta > \delta_1\right) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right), \tag{35}$$

$$P\left(\Delta < \delta_2\right) = \Phi\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) + 0{,}5. \tag{36}$$

Пример 7.2. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднюю квадратическую ошибку взвешивания 150 *мг*. Номинальный вес порохового заряда 2,3 *г*. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 *г*.

Решение. Рассмотрим случайную ошибку взвешивания Δ. По условию задачи ружьё может быть повреждено, если эта ошибка будет больше, чем разница между допустимым весом заряда 2,5 *г* и номиналом 2,3 *г*, то есть больше, чем 0,2 *г*. Поэтому вероятность повреждения ружья есть $P(\Delta > 0{,}2)$. По формуле (35) при $\sigma = 0{,}150$ получаем: $P(\Delta > 0{,}2) = 0{,}5 - \Phi(0{,}2/0{,}15) = = 0{,}5 - \Phi(1{,}3333) \approx 0{,}5 - 0{,}4082 \approx 0,09$.

При обсуждении этой задачи мы подразумевали, что грубые промахи и систематические ошибки исключены, то есть ошибка взвешивания — это

[3]График функции (33) (колокол Гаусса) мы строили в §9 седьмой главы. На рис. 136 колокол Гаусса изображён при различных значениях σ.

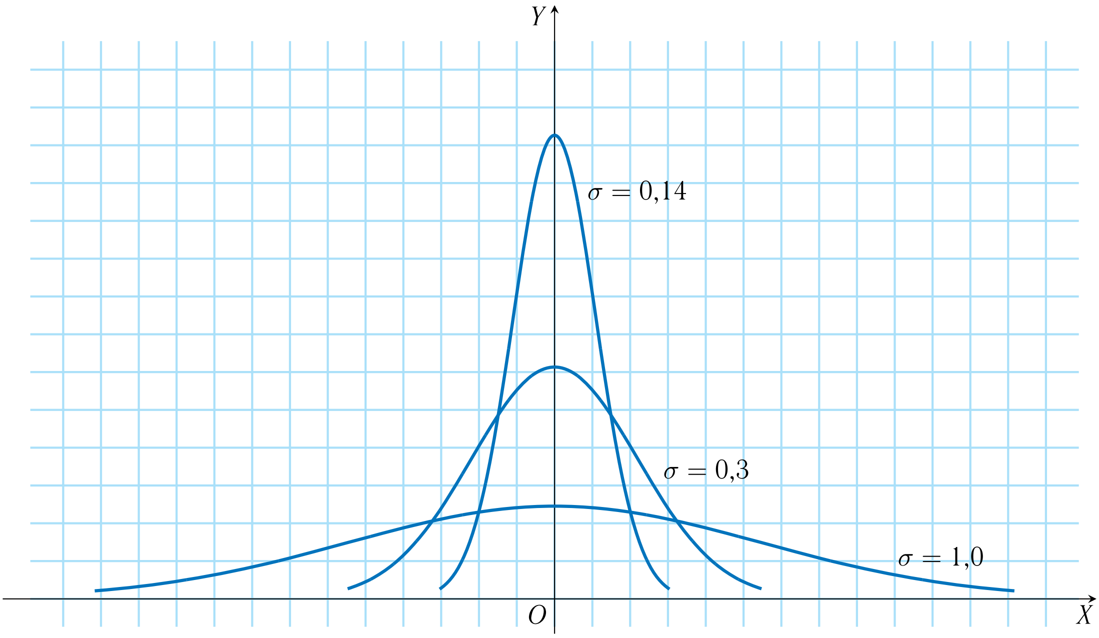


Рис. 136

только случайная ошибка. Предположим теперь, что при измерении учитывается также и систематическая ошибка. Тогда общая ошибка измерения складывается из систематической ошибки и случайной ошибки. Естественно предположить, что величина систематической ошибки является постоянной величиной. Обозначим её через m, а общую ошибку измерения через δ. Тогда $\delta = m+\Delta$. Плотность вероятности распределения случайной величины δ в этом случае задаётся функцией Гаусса общего вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{37}$$

Распределение случайной величины с плотностью вероятности, задаваемой формулой (37), называется *нормальным распределением с параметрами m и σ*. График функции (37) при различных значениях m и одном и том же значении σ изображён на рис. 137. При $m = 0$ этот график совпадает с графиком функции (33).

Формула (37) задаёт нормальное распределение наиболее общего вида. Числовые характеристики этого распределения — математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение вычисляют по формулам

$$M(\delta) = m, \quad D(\delta) = \sigma^2, \quad S(\delta) = \sigma. \tag{38}$$

Отсюда вытекает *вероятностный смысл параметров нормального распределения*: *величина m есть математическое ожидание случайной ошибки δ, а σ есть её среднее квадратическое отклонение*. Для

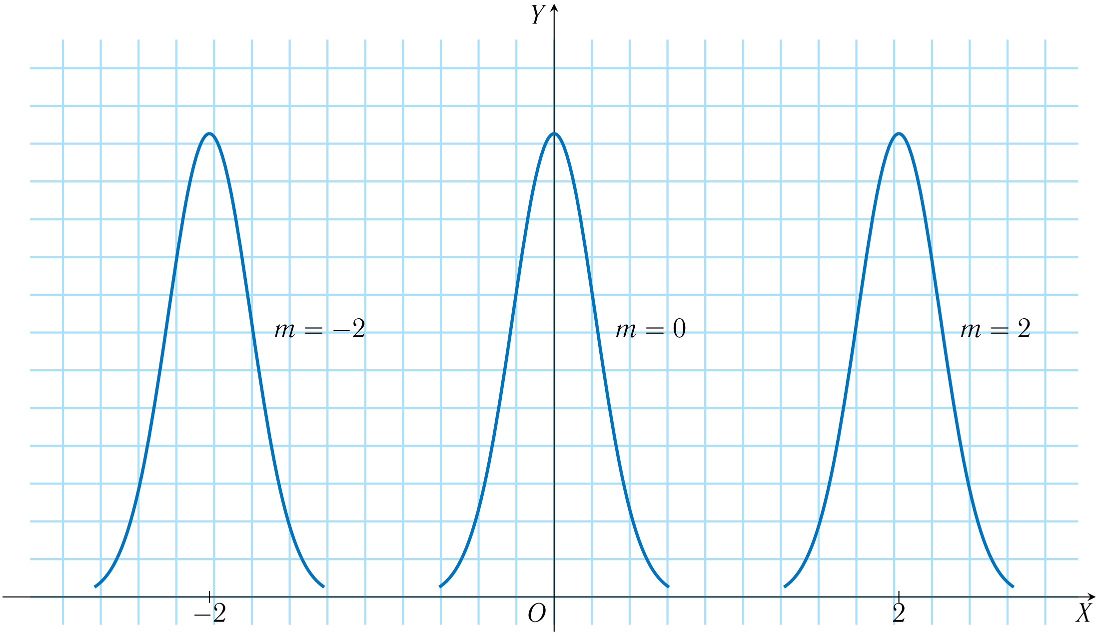


Рис. 137

стандартного нормального распределения, задаваемого формулой (31), математическое ожидание равно нулю, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение равны единице.

Вероятность попадания значений нормально распределённой случайной величины в заданный интервал находят по формулам, которые являются обобщением формул (34)–(36):

$$P\left(\delta_1 < \delta < \delta_2\right) = \Phi\left(\frac{\delta_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_1 - m}{\sigma}\right), \tag{39}$$

$$P\left(\delta > \delta_1\right) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{\delta_1 - m}{\sigma}\right), \tag{40}$$

$$P\left(\delta < \delta_2\right) = \Phi\left(\frac{\delta_2 - m}{\sigma}\right) + 0{,}5. \tag{41}$$

Пример 7.3. Прибор для определения скорости движущегося по шоссе автомобиля имеет среднюю квадратическую ошибку 1,5 *км/час*. При измерении скорости допускается систематическая ошибка — завышение показаний на 5 *км/час*. Автомобиль движется со скоростью 58 *км/час*. Какова вероятность того, что водитель автомобиля будет оштрафован, если допустимая максимальная скорость на контролируемом участке дороги равна 60 *км/час*?

Решение. Пусть δ — ошибка измерения скорости. Она имеет нормальное распределение с параметрами $m = 5$ и $\sigma = 1{,}5$. По условию скорость автомобиля равна 58, но её значение, показанное прибором, будет $58 + \delta$. Если

$58 + \delta > 60$, то прибор зафиксирует превышение скорости. Вероятность этого события и нужно найти. Из последнего неравенства получается $\delta > 2$. По формуле (40) находим: $P(\delta > 2) = 0{,}5 - \Phi((2 - m)/\sigma) = 0{,}5 - \Phi(-2) \approx \approx 0{,}5 + 0{,}4772 = 0{,}9772$.

Важное характерное свойство нормального распределения можно обнаружить, если в формуле (39) положить $\delta_1 = m - 3\sigma$ и $\delta_2 = m + 3\sigma$. Тогда $(\delta_1 - m)/\sigma = -3$, $(\delta_2 - m)/\sigma = 3$ и мы получим:

$$P(m - 3\sigma < \delta < m + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Полученная вероятность близка к единице, следовательно, событие с такой вероятностью можно считать практически достоверным. Таким образом, *практически достоверно, что значения нормально распределённой случайной величины отклоняются от её математического ожидания m не более чем на величину 3σ.* Это свойство называют *правилом трёх сигм.*

Пример 7.4. Диаметр втулок, изготовленных заводом, можно считать нормально распределённой случайной величиной с параметрами $m = 2{,}5$ и $\sigma = = 0{,}01$. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки?

Решение. В задачах, где это не оговорено специально, можно считать практически достоверным событие, имеющее вероятность 0,9973, которую даёт правило трёх сигм. Тогда искомые границы будут: $m - 3\sigma = 2{,}5 - 3 \cdot 0{,}01 = = 2{,}47$ и $m + 3\sigma = 2{,}5 + 3 \cdot 0{,}01 = 2{,}53$. Таким образом, размер диаметра гарантируется в пределах от 2,47 до 2,53.

Упражнения

1. При измерении уровня загрязнённости атмосферы получено значение индекса загрязнённости 25. Какова вероятность того, что истинное значение индекса заключено в пределах от 23 до 26, если систематическая ошибка измерения равна нулю, а случайная ошибка имеет стандартное нормальное распределение?

2. Произведено измерение уровня радиации без систематических ошибок. Средняя квадратическая ошибка измерения равна 0,5. Найдите вероятность того, что измерение проведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,75.

3. Ошибка при измерении температуры тела имеет нормальное распределение с параметрами $m = -0{,}7$ и $\sigma = 0{,}5$. Термометр показал 33°. Какова вероятность того, что истинное значение температуры меньше 34°?

4. Прибор показал значение силы звука пролетающего над школой самолёта 55 дб (децибел). Систематическая ошибка измерения равна -5 дб, а средняя квадратическая ошибка составляет 1,2 дб. Найдите вероятность того, что сила звука не превысила установленной нормы в 60 дб.

§ 8. Вероятностно-статистические нормальные модели

Нормальное распределение обладает двумя важными для практического применения свойствами. Во-первых, многие часто встречающиеся распределения с высокой степенью точности можно приближённо заменять нормальным. Во-вторых, интегральная функция Лапласа Φ табулировна, поэтому выполнение расчётов можно осуществлять достаточно просто даже без компьютера.

1. Нормальная модель биномиального распределения. Рассмотрим величину X, которая имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Эта величина (см. §2) принимает все целые неотрицательные значения от 0 до n с вероятностями

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n, \quad q = 1 - p. \tag{42}$$

Как мы знаем (см. §9 восьмой главы), выполняются приближённые равенства

$$P(m_1 \leqslant X \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{43}$$

причём точность приближения тем выше, чем больше величина npq. Введём обозначения: $a = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$. Тогда формула (43) перепишется в виде

$$P(m_1 \leqslant X \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right). \tag{44}$$

С другой стороны, по такой же формуле вычисляется вероятность и для нормального распределения с параметрами a и σ (формула (39) из §7)). Следовательно, *при больших значениях n биномиальное распределение с параметрами n и p можно приближённо описывать с помощью нормального распределения с параметрами $a = np$ и $\sigma = \sqrt{npq}$.*

2. Модель распределения частоты. Напомним понятие частоты события. Если в серии из n испытаний событие A появляется m раз, то частотой события A называется число $\tilde{p} = m/n$. Формула (42) даёт вероятность того, что событие A появится в серии из n испытаний m раз, то есть, что частота появления события A равна m/n. Поэтому формулу (43) можно переписать в эквивалентной форме:

$$P(\frac{m_1}{n} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{m_2}{n}) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{45}$$

Здесь p — вероятность появления события A в одном испытании, $q = 1 - p$. Обозначим $p_1 = \dfrac{m_1}{n}$, $p_2 = \dfrac{m_2}{n}$, тогда $\dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{m/n - p}{\sqrt{pq/n}}$ и формулу (45) можно переписать так:

$$P\left(p_1 \leqslant \tilde{p} \leqslant p_2\right) \approx \Phi\left(\frac{p_2 - p}{\sqrt{pq/n}}\right) - \Phi\left(\frac{p_1 - p}{\sqrt{pq/n}}\right). \tag{46}$$

Сравнение с формулой (39) показывает, что *распределение частоты $\tilde{p}$ является нормальным распределением с параметрами $a = p$ и $\sigma = \sqrt{pq/n}$.*

Частоту события используют в качестве приближённого значения вероятности p этого события, если последняя неизвестна. Законность таких действий нам подсказывает практический опыт. С другой стороны, эти выводы можно обосновать и теоретически. Согласно правилу трёх сигм (см. §7), практически достоверно (то есть с вероятностью 0,9973) имеет место неравенство $|\tilde{p} - p| < 3\sqrt{pq/n}$. Используя соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим (см. первую главу), получаем $\sqrt{pq} \leqslant \dfrac{p+q}{2} = \dfrac{1}{2}$, вследствие чего предыдущее неравенство принимает вид

$$|\tilde{p} - p| \leqslant \frac{3}{2\sqrt{n}}. \tag{47}$$

Правая часть неравенства уменьшается с увеличением n. Таким образом, *практически достоверно*, *что при увеличении n значения частоты $\tilde{p}$ будут приближаться к вероятности p*. Впервые это было доказано (причём весьма оригинальным способом) Якобом Бернулли в начале XVIII века. Поэтому говорят также, что *вероятность является предельным* (*в смысле Бернулли*) *значением частоты*[4].

Пример 8.1. Проведено 500 опытов, в 327 из них появилось событие A. В каких границах можно практически гарантировать значение вероятности события A?

Решение. Значение частоты события A в данной серии опытов равно $\tilde{p} = 327/500 = 0{,}654$. Поскольку $n = 500$, то $\dfrac{3}{2\sqrt{n}} = \dfrac{3}{2\sqrt{500}} \approx 0{,}067$. Следовательно, значение вероятности отличается от частоты меньше, чем на 0,067. Поэтому искомые границы будут равны $0{,}654 - 0{,}067 = 0{,}587$ и $0{,}654 + 0{,}067 = 0{,}721$. Таким образом, практически достоверно, что вероятность P появления события A в одном опыте удовлетворяет неравенствам $0{,}654 < p < 0{,}721$.

3. Модели распределения ошибок измерения. Пусть проведено n измерений величины a (например, диаметра луны по фотографиям) и получены значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эти числа могут отличаться между собой, так как каждое измерение содержит некоторую ошибку. Спрашивается: какое

[4] Более точно: теорема Бернулли утверждает,что для любого положительного числа ε вероятность неравенства $|p - \tilde{p}| < \varepsilon$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

число следует взять в качестве приближённого значения a и как оценить допущенную при этом ошибку? Предположим, что систематическая ошибка измерения равна нулю и все измерения равноточны, то есть имеют одну и ту же среднюю квадратическую ошибку σ. При этих условиях, как известно (см. §7), ошибка измерения равна случайной ошибке Δ. Положим $\Delta_1 = a_1 - a$, $\Delta_2 = a_2 - a$, …, $\Delta_n = a_n - a$.

Каждая из величин $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и σ (см. §7). Рассмотрим их среднее арифметическое $\overline{\Delta} = \dfrac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n}$ и воспользуемся известным в теории вероятностей *свойством устойчивости*: *сумма нескольких нормально распределённых величин также имеет нормальное распределение*. По этому свойству величина $\overline{\Delta}$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Используя правило трёх сигм, мы получим практически достоверное неравенство

$$|\overline{\Delta}| < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{48}$$

Выполним преобразования: $\overline{\Delta} = (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n)/n = (a_1 - a + a_2 - a + \ldots + a_n - a)/n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n - a = \overline{a} - a$, где через $\overline{a}$ обозначено среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Заменив в неравенстве (48) $\overline{\Delta}$ на $\overline{a} - a$, получаем

$$|\overline{a} - a| < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{49}$$

При увеличении n правая часть неравенства (49) стремится к нулю, и поэтому значения $\overline{a}$ приближаются к a, то есть *истинное значение измеряемой величины a является предельным значением в смысле Бернулли среднего арифметического $\overline{a}$*. Следовательно, в качестве приближённого значения измеряемой величины следует брать среднее арифметическое результатов измерений; практически достоверно, что погрешность такой оценки меньше, чем $\dfrac{3\sigma}{\sqrt{n}}$, где σ — средняя квадратическая ошибка измерения, а n — число измерений.

Пример 8.2. По фотографиям Луны проведено 100 измерений диаметра лунного диска и получены значения $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Какое число следует взять в качестве значения диаметра, если средняя квадратическая ошибка измерения в некотором масштабе равна единице?

Решение. Используя предыдущие рассуждения, мы можем дать следующий ответ: приближённое значение диаметра следует положить равным среднему арифметическому чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, при этом погрешность измерения не превосходит на уровне практической достоверности (то есть с вероятностью 0,9973) величины $\dfrac{3}{\sqrt{100}} = 0{,}3$.

4. Модели распределения выборочных средних. Исследования Бернулли, Лапласа и Гаусса по теории вероятностей получили дальнейшее развитие в работах российского математика Чебышева и его учеников. В конце XIX века Чебышев открыл *закон больших чисел*, устанавливающий условия, при которых среднее арифметическое большого числа случайных величин теряет свой случайный характер и приближается к некоторой постоянной величине. В частности, этим условиям удовлетворяют частоты и средние арифметические результатов измерений.

При экспериментальном изучении случайной величины X мы получаем набор некоторых её значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, который называют *выборкой из распределения X или эмпирическим распределением случайной величины X*. По выборке мы находим выборочную среднюю $\overline{x}$, выборочную дисперсию D и выборочное среднее квадратическое отклонение S (см. §3 третьей главы). Их приближённо можно считать значениями числовых характеристик $M(X)$, $D(X)$ и $S(X)$ теоретического распределения X. Например, в §3 текущей главы рассматривалась случайная величина X — число обращений за помощью в отделение МЧС в выходной день. По статистическим данным за 58 выходных дней рассчитаны значения $\overline{x} = 5{,}96$; $D = 5{,}82$ и $S = 2{,}41$. Эти числа были использованы как приближённые величины числовых характеристик $M(X)$, $D(X)$ и $S(X)$.

Более точно, закон больших чисел утверждает, *что математическое ожидание $M(X)$ является предельным значением (в смысле Бернулли) среднего арифметического $\overline{x}$*. При увеличении числа наблюдений n точность приближённого равенства $M(X) = \overline{x}$ возрастает. Такие же выводы справедливы и для равенств $D(X) = D$ и $S(X) = S$. Более того, оказывается, что распределение средних арифметических при больших значениях n приближается к нормальному распределению с параметрами $m = M(X)$ и $\sigma = \dfrac{\sqrt{D(X)}}{n}$. На практике точные значения m и σ, как правило, неизвестны, поэтому их заменяют приближёнными значениями $m = \overline{x}$, $\sigma = \dfrac{\sqrt{D}}{n}$. В последнем примере $D = 5{,}8192$ и $n = 58$, отсюда $\sigma = \sqrt{5{,}8192}/58 \approx 0{,}3167$ и $3\sigma = 0{,}9501$. Из правила трёх сигм вытекает, что с вероятностью $0{,}9973$ (то есть практически достоверно) отклонение $M(X)$ от $\overline{x} = 5{,}9625$ меньше, чем $0{,}9501$.

Описанная нормальная модель распределения выборочной средней используется также для определения объёма выборки n, который гарантирует заданную точность расчёта математического ожидания $M(X)$. Соответствующие примеры обсуждаются в учебниках по юридической статистике.

Закономерности, при которых возникает нормальное распределение, были исследованы Чебышевым и сформулированы им в 1887 году в виде так называемой *центральной предельной теоремы*. В 1908 году выдающийся российский математик Ляпунов[5], представитель Петербургской математической школы, основанной Чебышевым, получил общие условия, при которых выполняется центральная предельная теорема. Условия Ляпунова означают, что нормальное распределение возникает всякий раз, когда случайная величина зависит от большого числа случайных факторов, влияние каждого из которых в отдельности на суммарный результат незначительно. Эти условия выполняются для всех рассмотренных в этом параграфе величин, поэтому мы и строили для них нормальные модели.

5. Общие рекомендации по использованию нормальных моделей. При обработке результатов наблюдений можно воспользоваться нормальной моделью (то есть считать, что наблюдаемая случайная величина распределена по нормальному закону), если есть основания считать, что выполняются условия Ляпунова. Математиками разработан целый ряд специальных тестов, с помощью которых решают вопрос о применимости нормальной модели для описания исследуемой случайной величины. Мы приведём только самые простые соображения в пользу такого выбора.

Прежде, чем выбирать для описания статистических данных ту или иную модель, их следует обработать по тому плану, который рассматривался в третьей главе: построить интервальный ряд, найти значения $\overline{x}$, D и S, начертить гистограмму. После этого рассматривается вопрос, какое из известных распределений следует выбрать в качестве модели. Важную роль при этом играет вид гистограммы, по которому судят о поведении плотности вероятности. Закон больших чисел обосновывает следующий вывод: *если соединить плавной линией середины верхних оснований прямоугольников, из которых составлена гистограмма, то полученная линия будет приближённо представлять график плотности распределения. Если эта линия приближённо имеет симметричную колоколообразную форму, то для описания данных можно использовать нормальное распределение*[6].

Пример 8.3. Сводные данные об удельном весе преступлений, совершённых группой лиц, по 40 районам Тверской области в 2003 году представлены таблицей 79 (в третьей главе такую таблицу мы назвали интервальным рядом). Найдём по этим данным величины $\overline{x}$, D и S.

Таблица 79

Уд. вес	[15,6; 19,1]	[19,1; 22,6]	[22,6; 26,1]	[26,1; 29,6]	[29,6; 33,1]	[33,1; 36,6]
m_i	4	6	9	12	6	3
$\tilde{p}_i$	0,100	0,150	0,225	0,300	0,150	0,075

[5] Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) — российский математик и механик.

[6] Этот вывод следует рассматривать только как первичную гипотезу о виде эмпирического распределения. Не исключено, что в силу тех или иных причин он (то есть вывод) может оказаться неверным.

Решение. Длина каждого разряда интервального ряда равна 3,5. Для построения его графического изображения — гистограммы — найдём плотности частот:

$$h_1 = \frac{0,1}{3,5} = 0,028; \quad h_2 = \frac{0,15}{3,5} = 0,043; \quad h_3 = \frac{0,225}{3,5} = 0,064;$$
$$h_4 = \frac{0,3}{3,5} = 0,086; \quad h_5 = \frac{0,15}{3,5} = 0,043; \quad h_6 = \frac{0,075}{3,5} = 0,021.$$

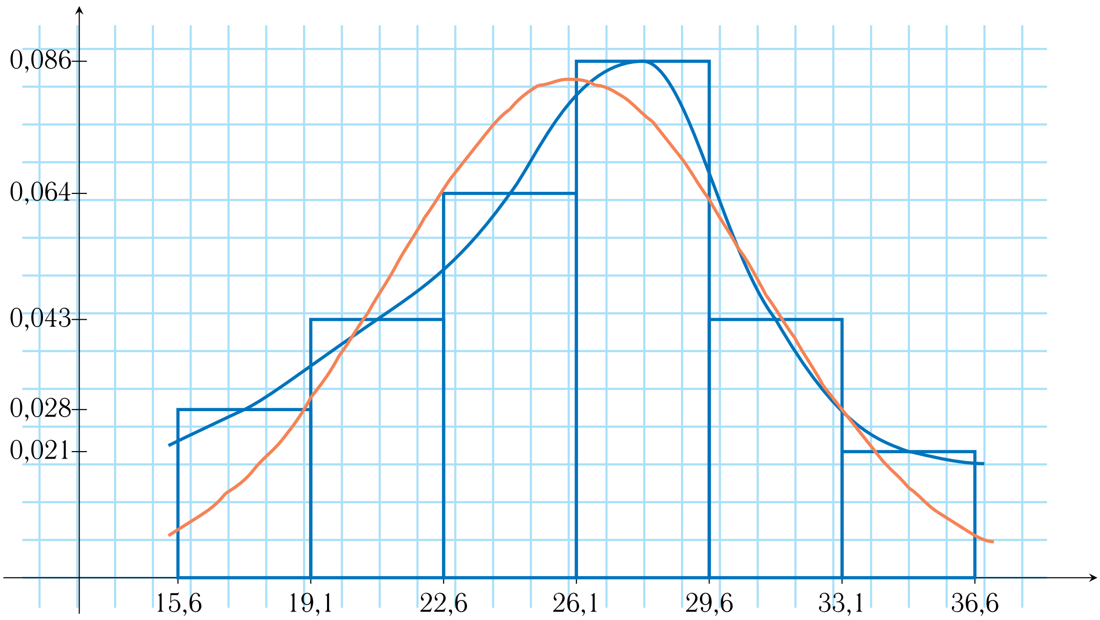


Рис. 138

Соединив плавной линией середины верхних оснований прямоугольников, из которых состоит гистограмма, мы получим кривую, похожую по форме на колокол Гаусса (синяя кривая на рис. 138). Поэтому есть основания использовать для изучения удельного веса групповых преступлений нормальную модель. Найдём по интервальному ряду величины $\overline{x}$, D и S. Для этого составим расчётную таблицу 80 (см. формулы из третьей главы). По таблице находим, что $\overline{x} = 26,0126 \approx 26$, $D = 23,2674$ и $S = \sqrt{23,2674} = 4,8236\ldots \approx 4,8$. Значения $\overline{x}$ и S будут параметрами нормального распределения, $m = 26$, $\sigma = 4,8$. Соотвествующая плотность распределения задаётся функцией Гаусса $g(x) = \dfrac{1}{4,8\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-26)^2}{2\cdot 4,8^2}}$.

Посмотрим, насколько хорошо график этой функции согласуется с гистограммой. Чтобы построить график, найдём значения функции $g(x)$ на границах разрядов, а также в точке максимума $x = 26$. При вычислениях можно пользоваться таблицами дифференциальной функции Лапласа $\varphi(x)$,

Таблица 80

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i\,\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\,\tilde{p}_i$
1	17,35	1.7350	−8,6626	75,0406	7,5041
2	20,85	3,1275	−5,1626	26,6524	3,9979
3	24,35	5,4788	−1,6626	2,7642	0,6219
4	27,85	8,3550	1,8374	3,3760	1,0128
5	31,35	4,7025	5,3374	28,4878	4,2732
6	34,85	2,6138	8,8374	78,0996	5,8575
Σ	—	$\overline{x} = 26{,}0126$	—	—	$D = 23{,}2674$

так как $g(x) = \dfrac{1}{4{,}8}\varphi\left(\dfrac{x-26}{4{,}8}\right)$. Составим расчётную таблицу 81, в которой последовательно вычисляем $t = (x-26)/4{,}8$, $\varphi(t)$ и $g(x) = \varphi(t)/4{,}8$. Соединив точки с координатами $(x, g(x))$ плавной линией, построим колокол Гаусса, изображённый на рис. 138 красным цветом. Мы видим, что он неплохо сглаживает гистограмму, поэтому применение нормальной модели не приведёт к большим погрешностям при описании статистического материала[7].

Таблица 81

x	15,6	19,1	22,6	26	26,1	29,6	33,1	36,6
$x-26$	−10,4	−6,9	−3,4	0	0,1	3,6	7,1	13,6
t	−2,17	−1,44	−0,71	0	0,02	0,75	1,48	2,83
$\varphi(t)$	0,0379	0,1415	0,3123	0,3989	0,3989	0,3011	0,1334	0,0073
$g(x)$	0,008	0,030	0,065	0,083	0,083	0,063	0,028	0,002

С помощью построенной модели можно найти вероятность того, что удельный вес X групповых преступлений заключён в пределах от 21,2% до 30,8%; определить вероятность того, что в случайно взятом районе удельный вес групповых преступлений будет больше 30%; вычислить вероятность того, что в наугад выбранном районе удельный вес групповых преступлений не превосходит 25%. Используя формулы (39)—(41) из §7 текущей главы, получаем:

$$P(21{,}2 \leqslant X \leqslant 30{,}8) = \Phi((30{,}8-26)/4{,}8) - \Phi((21{,}2-26)/4{,}8) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) \approx 2\cdot 0{,}3413 = 0{,}6828;$$
$$P(X > 30) = 0{,}5 - \Phi((30-26)/4{,}8) = 0{,}5 - \Phi(0{,}83) \approx 0{,}5 - 0{,}2967 = 0{,}2033;$$
$$P(X \leqslant 25) = \Phi((25-26)/4{,}8) + 0{,}5 = \Phi(-0{,}21) + 0{,}5 \approx 0{,}4168.$$

[7]Достоверность гипотезы о соответствии модели статистическим данным обычно проверяют с помощью критериев согласия.

Упражнения

1. По данным опроса 60% избирателей города будут голосовать за кандидата Мамичева. Какова вероятность того, что из случайно выбранных 100 избирателей больше половины проголосуют за Мамичева?

2. Обследовали 200 заключённых и обнаружили, что 65 болеют туберкулёзом. Что можно сказать о вероятности заболеть туберкулёзом в местах лишения свободы?

3. Проведено 100 измерений концентрации вредного вещества на определённом участке озера и получены значения $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Какое число следует взять в качестве значения концентрации и как оценить полученную погрешность, если средняя квадратическая ошибка измерения в некотором масштабе равна единице?

4. При изучении 1000 судебных приговоров, вынесенных за умышленное убийство, оказалось, что средний срок наказания $\overline{x}$ равен 10,5 лет и дисперсия $D = 30{,}4$. Пусть случайная величина X — срок лишения свободы за умышленное убийство. В каких пределах можно гарантировать величину математического ожидания $M(X)$?

Таблица 82

Удельный вес	[13; 16,5]	[16,5; 20]	[20; 23,5]	[23,5; 27]	[27; 30,5]	[30,5; 34]
m_i	3	7,5	8,5	12	5,5	3,5
$\bar{p}_i$	0,0750	0,1875	0,2125	0,3000	0,1375	0,0875

5. Удельный вес преступлений по предварительному сговору, совершённых в районах Тверской области и в городе Тверь в 2003 году, представлен таблицей 82. Постройте нормальную модель для изучения случайной величины X, равной удельному весу преступлений по предварительному сговору в одном районе. Для этого проведите предварительный анализ статистических данных по следующему плану: сначала найдите высоты прямоугольников, составляющих гистограмму, и изобразите её на рисунке, а затем через середины верхних оснований прямоугольников проведите сглаживающую линию и убедитесь, что её форма напоминает колокол Гаусса. Далее рассчитайте параметры нормальной модели, для чего найдите величины $\overline{x}$, D, S и определите значения m и σ, считая $m = \overline{x}$ и $\sigma = S$. Затем постройте график плотности вероятности, сравните его с гистограммой и ответьте на следующие вопросы. Какова вероятность того, что удельный вес X преступлений по предварительному сговору заключён в пределах от 15% до 25%? Какова вероятность того, что в случайно взятом районе удельный вес преступлений по предварительному сговору будет больше 40%? Какова вероятность того, что в наугад выбранном районе удельный вес рассматриваемых преступлений не превосходит 20%?

§ 9. Дисперсионный анализ

Пример 9.1. В установлении лиц, совершивших преступления, принимают участие сотрудники различных подразделений милиции общественной безопасности — патрульно-постовой службы (ППС), отдела дознания и ГАИ. В годовом отчёте указан удельный вес этих подразделений в работе по установлению преступников в десяти районах области (таблица 83). Удельный вес представляет собой процент раскрытых преступлений относительно всех зарегистрированных.

Таблица 83

ППС	6,3	5,7	5,6	6,0	3,5	3,5	1,1	2,3	0	8,4
Дозн.	2,3	3,3	1,6	2,5	3,3	1,3	2,5	1,1	3,3	2,0
ГАИ	4,8	5,0	4,8	5,9	5,9	5,3	4,5	7,4	4,7	4,1

Как видно из таблицы, в первом—четвёртом и десятом районах лучше всех работала ППС, в пятом—девятом — ГАИ. Но можно ли считать, что специализация подразделения существенно влияет на результаты работы?

Если воздействие фактора специализации является существенным, то среднее значение удельного веса для каждого из подразделений (ППС, дознания и ГАИ) должны заметно отличаться друг от друга и от среднего значения удельного веса по всей выборке. Проведём расчёты.

ППС: $\overline{x}_1 = (6{,}3+5{,}7+5{,}6+6{,}0+3{,}5+3{,}5+1{,}1+2{,}3+0+8{,}4)/10 = 4{,}24.$

Дозн.: $\overline{x}_2 = (2{,}3+3{,}3+1{,}6+2{,}5+3{,}3+1{,}3+2{,}5+1{,}1+3{,}3+2)/10 = 2{,}32.$

ГАИ: $\overline{x}_3 = (4{,}8+5+4{,}8+5{,}9+5{,}9+5{,}3+4{,}5+7{,}4+4{,}7+4{,}1)/10 = 5{,}24.$

Общее среднее: $\overline{x} = (42{,}4 + 23{,}2 + 52{,}4)/30 = 3{,}93.$

Величины $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ называются *групповыми выборочными средними*. Мы видим, что все выборочные средние различны, и должны решить, какую роль в этом сыграл фактор специализации: существенную или несущественную? Степень воздействия фактора специализации оценивают с помощью так называемой *факторной суммы квадратов* $Q_ф$, которую вычисляют следующим образом:

$$\begin{gathered}Q_ф = 10(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 + 10(\overline{x}_2 - \overline{x})^2 + 10(\overline{x}_3 - \overline{x})^2 = \\ = 10\big((4{,}24 - 3{,}93)^2 + (2{,}32 - 3{,}93)^2 + (5{,}24 - 3{,}93)^2\big) = \\ = 10(0{,}0961 + 2{,}5921 + 1{,}7161) = 44{,}043.\end{gathered}$$

Поделив эту сумму на число $k_ф$ (число групп, уменьшенное на единицу), получают так называемую *факторную дисперсию*

$$S_ф^2 = 44{,}043/(3-1) = 22{,}0215.$$

Степень воздействия остальных причин оценивают с помощью *остаточной суммы квадратов* $Q_о = Q_1 + Q_2 + Q_3$, где Q_1, Q_2 и Q_3 — суммы квадратов отклонений от групповой средней для каждой из групп. Найдём значения этих сумм:

$$\begin{gathered}Q_1 = \big((6{,}3-4{,}24)^2+(5{,}7-4{,}24)^2+(5{,}6-4{,}24)^2+(6-4{,}24)^2+(3{,}5-4{,}24)^2+ \\ +(3{,}5-4{,}24)^2+(1{,}1-4{,}24)^2+(2{,}3-4{,}24)^2+(0-4{,}24)^2+(8{,}4-4{,}24)^2\big) = \\ = (4{,}2436+2{,}1316+1{,}8496+3{,}0976+0{,}5476+0{,}5476+9{,}8596+3{,}7636+ \\ +17{,}9776+17{,}3056) = 61{,}324;\end{gathered}$$

$$Q_2 = \big((2{,}3-2{,}32)^2+(3{,}3-2{,}32)^2+(1{,}6-2{,}32)^2+(2{,}5-2{,}32)^2+(3{,}3-2{,}32)^2+$$
$$+(1{,}3-2{,}32)^2+(2{,}5-2{,}32)^2+(1{,}1-2{,}32)^2+(3{,}3-2{,}32)^2+(2-2{,}32)^2\big)=$$
$$=(0{,}0004+0{,}9604+0{,}5184+0{,}0324+0{,}9604+1{,}0404+0{,}0324+1{,}4884+$$
$$+0{,}9604+0{,}1024)=6{,}100;$$
$$Q_3 = \big((4{,}8-5{,}24)^2+(5-5{,}24)^2+(4{,}8-5{,}24)^2+(5{,}9-5{,}24)^2+(5{,}9-5{,}24)^2+$$
$$+(5{,}3-5{,}24)^2+(4{,}5-5{,}24)^2+(7{,}4-5{,}24)^2+(4{,}7-5{,}24)^2+(4{,}1-5{,}24)^2\big)=$$
$$=(0{,}1936+0{,}0576+0{,}1936+0{,}4356+0{,}4356+0{,}0036+0{,}5476+4{,}6656+$$
$$+0{,}2916+1{,}2996)=8{,}124.$$

Следовательно, $Q_\text{о} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 61{,}324 + 6{,}100 + 8{,}124 = 75{,}548$.

Остаточную дисперсию $S_\text{о}^2$ находят, поделив остаточную сумму квадратов $Q_\text{о}$ на число $k_\text{о} = 27$ (разность между числом всех наблюдений и числом групп):

$$S_\text{о}^2 = 75{,}548/(30-3) = 2{,}7981.$$

Сравнение величин факторной и остаточной дисперсии позволяет сделать вывод о существенности влияния рассматриваемого фактора. Если факторная дисперсия не превосходит остаточную, то есть $S_\text{ф}^2 \leqslant S_\text{о}^2$, то влияние фактора признаётся несущественным. В противном случае можно считать, что фактор влияет на эффективность работы подразделения. В нашем случае выполняется неравенство $S_\text{ф}^2 > S_\text{о}^2$, поэтому мы можем считать, что эффективность работы сотрудников, участвующих в установлении преступников, зависит от специализации подразделений, в которых служат эти сотрудники.

Последний вывод, между тем, требует уточнения. Действительно, мы пришли к нему после сравнения факторной и остаточной дисперсий, установив, что $S_\text{ф}^2 > S_\text{о}^2$, или, что то же самое, $S_\text{ф}^2/S_\text{о}^2 > 1$. Но эти дисперсии зависят от выборки, а так как выборка является случайной, то и величины $S_\text{ф}^2$ и $S_\text{о}^2$ являются случайными. Следовательно, их отношение тоже будет случайной величиной. Получив какой-нибудь вывод о значениях случайной величины, мы должны гарантировать его достоверность с определённой вероятностью. Чем больше будет эта вероятность, тем надёжнее полученный вывод. Чтобы оценивать вероятности тех или иных значений случайной величины, нужно знать её распределение. В рассматриваемой задаче изучается удельный вес X сотрудников, которые принимают участие в установлении преступников. Распределение удельного веса, так же, как и распределение частоты, можно приближённо считать нормальным. Оказывается, что в таком случае можно найти распределение случайной величины $F_\text{н} = S_\text{ф}^2/S_\text{о}^2$ и гарантировать надёжность полученных выводов с вероятностью, близкой к единице.

Эта задача была решена в 1925 году математиком Фишером[8]. Получен-

[8]Рональд Айлмер Фишер (1890–1962) — английский биолог, математик и статистик.

ное им распределение случайной величины F теперь называют *распределением Фишера*. В нашем примере мы рассчитали наблюдаемое значение этой величины: $F_{\text{н}} = S^2_{\text{ф}}/S^2_{\text{о}} = 22{,}0215/2{,}7981 = 7{,}8701\ldots \approx 7{,}87$.

Снедекор[9] составил таблицы критических значений величины $F_{\text{н}}$ (см. Приложение 2). Критические значения $F_{\text{кр}}$ обладают следующим свойством: *если выполнено условие* $F_{\text{н}} > F_{\text{кр}}$, то с вероятностью, равной 0,95, можно утверждать, что воздействие фактора на признак является существенным. Пользуясь таблицами Снедекора, можно по числам $k_{\text{ф}}$ и $k_{\text{о}}$ найти величину критического значения распределения Фишера для рассматриваемой ситуации: $F_{\text{кр}} = 3{,}4$. Следовательно, условие $F_{\text{н}} > F_{\text{кр}}$ выполнено. Поэтому окончательный вывод звучит так: *с вероятностью* 0,95 *влияние специализации подразделения на эффективность его работы признаётся существенным*.

Использованный нами метод решения называется *методом дисперсионного анализа*. Обсудим общую схему решения подобных задач. Пусть по выборочным данным требуется оценить степень влияния некоторого фактора (в рассмотренной задаче фактором является специализация подразделения) на интересующий нас признак X (в рассмотренной задаче – удельный вес подразделения). Для решения задачи используется выборка значений признака, состоящая из нескольких групп, соответствующих разным уровням фактора. Пусть число групп равно m и число выборочных данных в каждой группе равно соответственно n_1, n_2, n_3, …, n_m. Сумма этих чисел равна объёму всей выборки: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ (в рассмотренной задаче $m = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 10$, $n = 30$). Предполагается также, что распределение признака является нормальным или не слишком сильно отклоняется от нормального распределения.

Для проведения дисперсионного анализа нужно определить две дисперсии: факторную и остаточную. Факторная дисперсия обусловлена влиянием изучаемого фактора, а остаточная — влиянием остальных причин. Расчёт этих величин производят по следующему плану. Сначала вычисляют групповые и общую выборочные средние $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, …, $\overline{x}_m$ и $\overline{x}$. Затем находят факторную сумму квадратов $Q_{\text{ф}}$ по формуле

$$Q_{\text{ф}} = n_1(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 + n_2(\overline{x}_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_m(\overline{x}_m - \overline{x})^2. \tag{50}$$

Далее определяют так называемое *число степеней свободы*

$$k_{\text{ф}} = m - 1. \tag{51}$$

В рассматриваемой задаче $m = 3$ и $k_{\text{ф}} = 3 - 1 = 2$. Затем вычисляют факторную дисперсию $S^2_{\text{ф}}$ по формуле

$$S^2_{\text{ф}} = Q_{\text{ф}}/k_{\text{ф}}, \tag{52}$$

[9]Джордж Ваддел Снедекор (1882 – 1974) — американский математик, внёсший значительный вклад в развитие математической статистики.

и находят остаточную сумму квадратов. Этот расчёт проводится отдельно для каждой группы, после чего полученные числа складывают и получают остаточную сумму квадратов $Q_о$. После этого определяют второе число степеней свободы $k_о$ по формуле

$$k_о = n - m. \tag{53}$$

У нас $k_о = 30 - 3 = 27$.

Далее вычисляют остаточную дисперсию:

$$S_о^2 = Q_0/k_о, \tag{54}$$

и находят наблюдаемое значение распределения Фишера:

$$F_н = S_ф^2/S_о^2. \tag{55}$$

В нашем случае было получено значение $F_н = 7{,}87$.

Если оказывается, что $F_н \leqslant 1$, *то рассматриваемый фактор не оказывает существенного влияния на изучаемый признак. Если же* $F_н > 1$, *то исследование продолжается, и мы переходим к следующему пункту.* По таблице находим критическое значение распределения Фишера $F_{кр}$, находящееся на пересечении столбца с номером $k_ф$ и строки с номером $k_о$ в таблице Снедекора, данной в Приложении 2 (в рассмотренной задаче мы нашли такое значение на пересечении второго столбца и 27-й строки). Теперь с помощью *критерия Фишера* принимается решение о степени влияния рассматриваемого фактора на признак: *если* $F_н \leqslant F_{кр}$, *то влияние фактора на признак несущественно, если же* $F_н > F_{кр}$, *то оно признаётся существенным.*

Критерий Фишера даёт 95-процентную гарантию правильности полученного ответа. Это означает, что в среднем из 100 задач, решённых методом дисперсионного анализа, в 95 случаях получается правильный вывод. Критерий Фишера позволяет получать выводы и на более высоком уровне практической достоверности, например, с гарантией 99%. Для этого пользуются более подробными таблицами.

Таблица 84

Северо–Запад	5,7	3,3	5,0	3,5	1,3	5,3	—	—	—
Северо–Восток	5,6	1,6	4,8	1,1	2,5	4,5	8,4	2,0	4,1
Юго–Восток	3,5	3,3	5,9	2,3	1,1	7,4	—	—	—
Юго–Запад	6,3	2,3	4,8	6,0	2,5	5,9	0	3,3	4,7

Исследуем по тем же данным влияние географического расположения района на эффективность работы. Все 10 районов разделим на 4 группы: Северо-Запад (районы 2 и 6); Северо-Восток (районы 3, 7 и 10); Юго-Восток (районы 5 и 8); Юго-Запад (районы 1, 4 и 9). Мы указали для каждого региона номера районов в порядке их расположения в исходной таблице. Теперь составим новую таблицу 84, в которой сгруппируем данные по регионам. В этой таблице выборка состоит из четырёх групп, $m = 4$. Выборочные данные в каждой группе: $n_1 = 6$, $n_2 = 9$, $n_3 = 6$, $n_4 = 9$; число всех выборочных данных $n = 30$. Дальнейшие расчёты проводим по схеме, которая обсуждалась выше.

Определяем сначала средние величины $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, …, $\overline{x}_m$, $\overline{x}$:
$\overline{x}_1 = (5{,}7 + 3{,}3 + 5{,}0 + 3{,}5 + 1{,}3 + 5{,}3)/6 = 24{,}1/6 = 4{,}02$;
$\overline{x}_2 = (5{,}6 + 1{,}6 + 4{,}8 + 1{,}1 + 2{,}5 + 4{,}5 + 8{,}4 + 2 + 4{,}1)/9 = 34{,}6/9 = 3{,}84$;
$\overline{x}_3 = (3{,}5 + 3{,}3 + 5{,}9 + 2{,}3 + 1{,}1 + 7{,}4)/6 = 23{,}5/6 = 3{,}92$;
$\overline{x}_4 = (6{,}3 + 2{,}3 + 4{,}8 + 6 + 2{,}5 + 5{,}9 + 0 + 3{,}3 + 4{,}7)/9 = 35{,}8/9 = 3{,}98$;
$\overline{x} = (24{,}1 + 34{,}6 + 23{,}5 + 35{,}8)/30 = 118/30 = 3{,}93$.

Далее определяем факторную сумму квадратов $Q_ф$ по формуле (50): $Q_ф = 6(4{,}02 - 3{,}93)^2 + 9(3{,}84 - 3{,}93)^2 + 6(3{,}92 - 3{,}93)^2 + 9(3{,}98 - 3{,}93)^2 =$ $= 6 \cdot 0{,}0081 + 9 \cdot 0{,}0081 + 6 \cdot 0{,}0001 + 9 \cdot 0{,}0025 = 0{,}0486 + 0{,}0729 + 0{,}0006 +$ $+ 0{,}0225 = 0{,}1446$. Ищем первое число степеней свободы по формуле (51): $k_ф = m - 1 = 4 - 1 = 3$ и вычисляем факторную дисперсию $S^2_ф$ по формуле (52): $S^2_ф = Q_ф/k_ф = 0{,}1446/3 = 0{,}0482$.

Далее находим остаточную сумму квадратов Q_0. Она равна сумме квадратов отклонений от групповой средней для каждой из четырёх групп:

$Q_1 = (5{,}7-4{,}02)^2+(3{,}3-4{,}02)^2+(5-4{,}02)^2+(3{,}5-4{,}02)^2+(1{,}3-4{,}02)^2+$
$+(5{,}3-4{,}02)^2 = 2{,}8224+0{,}5184+0{,}9604+0{,}2704+7{,}3984+1{,}6384 = 13{,}6084$;
$Q_2 = (5{,}6-3{,}84)^2+(1{,}6-3{,}84)^2+(4{,}8-3{,}84)^2+(1{,}1-3{,}84)^2+(2{,}5-3{,}84)^2+$
$+(4{,}5-3{,}84)^2+(8{,}4-3{,}84)^2+(2-3{,}84)^2+(4{,}1-3{,}84)^2 = 3{,}0976+5{,}0176+$
$+0{,}9216+7{,}5076+1{,}7956+0{,}4356+20{,}7936+3{,}3856+0{,}0576 = 43{,}0124$;
$Q_3 = (3{,}5-3{,}92)^2+(3{,}3-3{,}92)^2+(5{,}9-3{,}92)^2+(2{,}3-3{,}92)^2+(1{,}1-3{,}92)^2+$
$+(7{,}4-3{,}92)^2 = 0{,}1764+0{,}3844+3{,}9204+2{,}6244+7{,}9524+12{,}1104 = 27{,}1684$;
$Q_4 = (6{,}3-3{,}98)^2+(2{,}3-3{,}98)^2+(4{,}8-3{,}98)^2+(6-3{,}98)^2+(2{,}5-3{,}98)^2+$
$+(5{,}9-3{,}98)^2+(0-3{,}98)^2+(3{,}3-3{,}98)^2+(4{,}7-3{,}98)^2 = 5{,}3824+2{,}8224+$
$+0{,}6724+4{,}0804+2{,}1904+3{,}6864+15{,}8404+0{,}4624+0{,}5184 = 35{,}6556$;
$Q_о = Q_1+Q_2+Q_3+Q_4 = 13{,}6084+43{,}0124+27{,}1684+35{,}6556 = 119{,}4448$.

Проведём контроль правильности вычислений, для чего найдём полную сумму квадратов $Q = Q_ф + Q_о$. Имеем: $Q = 0{,}1446 + 119{,}4448 = 119{,}5894$. Эта сумма должна быть такой же, как и в первой задаче, поскольку она не зависит от фактора. По данным первой задачи находим: $Q = 44{,}0430 +$ $+ 75{,}5480 = 119{,}5910$. Разность между двумя найденными значениями Q незначительна (0,0016) и возникла вследствие округления результатов вычислений. Заметим, что величину Q можно найти также по формуле

$$Q = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2. \tag{56}$$

Расчёт по этой формуле даёт значение $Q = 119{,}5867$. Оно отличается от найденных ранее значений, но в пределах погрешности вычислений. Следовательно, проведённые вычисления верны.

Определяем далее второе число степеней свободы $k_{\text{о}}$ по формуле (53): $k_{\text{о}} = 30 - 4 = 26$; вычисляем далее остаточную дисперсию по формуле (54): $S_{\text{о}}^2 = 119{,}4448/26 = 4{,}5940$; находим наблюдаемое значение распределения Фишера по формуле (55): $F_{\text{н}} = 0{,}0482/4{,}5940 = 0{,}0105$. Поскольку $F_{\text{н}} \leqslant 1$, то рассматриваемый фактор не оказывает существенного влияния на изучаемый признак. Таким образом, эффективность работы — удельный вес раскрытых преступлений — не зависит от географического региона, в котором находится районное отделение милиции.

Упражнения

1. В таблице 85 приведены выборочные данные о среднем числе дел, приходящихся на одного сотрудника в год, по 12 районам области. Методом дисперсионного анализа определите, является ли существенным для данного признака (среднее число дел) разделение ведущих расследование лиц на следователей и дознавателей?

Таблица 85

След.	46,3	49,8	41	45,5	40,5	52,8	30,3	27,9	42	55,6	46,8	32,3
Дозн.	35	42,3	40	65,7	43,5	19	22	25	47	63	43	35

2. Влияет ли на указанный в первом упражнении признак фактор расстояния от района до областного центра, если районы 1, 3 и 5 расположены ближе других к центру области, а районы 6, 7, 8 и 12 наиболее удалены от него?

Приложение I

Из истории математики

Пифагор Самосский родился в период от 530 до 510 года до новой эры. Хотя мы привыкли считать Пифагора математиком, для своих современников он был прежде всего религиозным пророком, «выдающимся софистом», как называл его историк Геродот, а некоторые почитали Пифагора святым. В эту эпоху греческая математика только зарождалась, и главным её источником учёные считают математику древнего Египта и Вавилона. Косвенно этот исторический факт подтверждается тем, что между египетской, вавилонской и греческой математикой того периода имеется много точек соприкосновения.

Пифагор был одним из первых, благодаря кому достижения математики предшествующих цивилизаций проникли в древнюю Элладу. Пифагор много путешествовал, провел 22 года в Египте и 12 лет в Вавилоне, где постигал тайны математики, музыки и астрономии. Вернувшись на родину, он основал философскую школу религиозного толка, объединившую группу философов-софистов, которые занимались геометрией, арифметикой, астрономией и музыкой (так называемый *квадривий*). Пифагорейцы, как и другие философы, хотели постигнуть гармонию мира, то есть познать законы природы. Но в отличие от философов других направлений, они полагали, что та логическая гармония, которая имеется в математике, существует неспроста, а отражает свойства мироздания. Поэтому пифагорейцы искали законы природы в свойствах чисел и геометрических фигур и для них математика имела прежде всего мистическое значение. (По-видимому, в душу Пифагора глубоко проникла таинственность, которой египетские жрецы окружали науку, ревниво оберегая её от непосвящённых.)

Пифагорейцы сделали мало математических открытий. Многое из того, что им приписывается, было известно до них. В частности, известную нам теорему о сумме квадратов катетов прямоугольного треугольника они приписывали Пифагору, хотя доказано, что её знали уже вавилонские математики. Наиболее существенным достижением пифагорейцев было открытие иррациональных чисел, которые они представляли в виде несоизмеримых отрезков. Например, диагональ квадрата со стороной единица равна корню из двух, то есть эти отрезки — сторона и диагональ — несоизмеримы. Скорее всего, пифагорейцам было известно то доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, которое приведено на стр. 13. Пифагорейцы вели активную преподавательскую деятельность (их устав запрещал брать плату за уроки!), и во многом благодаря им математика заняла впоследствии в Греции столь значительное место. Последователи пифагорейцев — неопифагорейцы — сделали уже значительные математические открытия.

Евклид жил, по-видимому, во времена царя Птолемея I. Точные даты его рождения и смерти неизвестны. Предполагают, что он родился в период с 365 по 335 год до новой эры, а умер в период с 300 по 275. Птолемей I был одним из полководцев Александра Македонского, и после смерти великого завоевателя получил в управление Египет. Предание гласит, что Евклид так ответил царю Птолемею, пожелавшему изучить геометрию: «К геометрии нет царской дороги».

Греческая цивилизация проникла в Египет, и его новая столица Александрия стала одним из научных центров мира. Известно, что Евклид был профессиональным учёным. Самое известное и выдающееся его произведение «Начала» состоит из тринадцати книг. В них Евклид мастерски изложил все имеющиеся к тому времени сведения по геометрии, добавив многие недостающие теоремы и доказательства. Анри Пуанкаре в своей книге «О науке» пишет: «Изложение Евклида построено в виде строгих логических выводов из системы определений, постулатов и аксиом. В первых четырёх книгах рассматривается геометрия на плоскости. Исходя из наиболее простых свойств линий и углов, мы приходим здесь к равенству треугольников, равенству площадей, теореме Пифагора, построению квадрата, равновеликого заданному прямоугольнику, к золотому сечению, кругу и правильным многоугольникам...»

Архимед (287–212 г. до новой эры) был самым выдающимся математиком и механиком древности. Он жил в Сиракузах и был советником царя Герона. Об Архимеде осталось много сведений, прежде всего в произведениях писателей древности — Плутарха, Полибия, Цицерона, Витрувия и других. Имея в виду необычную для того времени склонность Архимеда к практическим делам, Плутарх пишет: «Хотя эти изобретения заслужили ему репутацию сверхчеловеческой проницательности, он не снизошел до того, чтобы оставить какое-либо сочинение, написанное по таким вопросам, а, считая низким и недостойным делом механику и искусство любого рода, если оно имеет целью пользу и выгоду, все свои честолюбивые притязания он основывал на тех умозрениях, красота и тонкость которых не запятнаны какой-либо примесью обычных житейских нужд».

Интересной является и характеристика Архимеда, данная современным историком И. Н. Веселовским: «Если придерживаться фактов, то Архимед и начал свою научную деятельность как механик, и закончил её как механик, и в математических его произведениях механика является могучим средством для получения математических результатов, да и сами эти результаты не являются бесплодно висящими в воздухе, а применяются для обоснования математических теорий».

Основные математические результаты Архимеда связаны с вычислением площадей и объемов различных фигур. Он нашел с помощью правильного 96-угольника (!) очень хорошее приближение для числа π. В его трактате «О плавающих телах» находится названный его именем известный закон физики о потере веса телами, погружёнными в жидкость. Математикам хорошо известна аксиома Архимеда, гласящая, что отрезок любой длины можно измерить сколь угодно маленьким отрезком.

Одним из самых удивительных и значительных изобретений Архимеда в астрономии был построенный им планетарий. Это была полая вращающаяся сфера, внутри которой находился механизм, приводящий в движение макеты Луны, Солнца и пяти планет. Вот свидетельство Цицерона, видевшего это устройство: «Как только Галл привел сферу в движение, стало видно, как с каждым оборотом Луна поднималась над земным горизонтом вслед за Солнцем, как это бывает каждый день на небе; а тогда можно было видеть, как затмевалось Солнце, а Луна попадала в теневой конус Земли, когда Солнце как раз напротив...»

На могильной плите Архимеда изображён цилиндр со вписанным в него шаром, а эпитафия гласит об одном из самых замечательных открытий Архимеда: объёмы этих тел относятся как 3:2.

Аполлоний Пергский (приблизительно 260–170 год до новой эры) был третьим (после Евклида и Архимеда) великим математиком эпохи эллинизма. Его основной труд — «О кониках» — представляет собой трактат из восьми книг о конических сечениях. Напомним, что это эллипсы, гиперболы и параболы. Аполлоний настолько подробно исследовал их свойства, что в следующие 18 веков (до Декарта) ничего существенно нового в этом направлении получено не было.

Результаты проведённых им исследований кривых второго порядка нашли применение в законах движения планет Кеплера (XVII век). Аполлоний умел, например, при помощи только циркуля и линейки строить окружность, касающуюся трёх заданных окружностей. Эта непростая задача (она так и называется: задача Аполлония) до сих пор входит в программу подготовки студентов — будущих учителей математики. Он ввёл термины гипербола, парабола, асимптота, которыми мы пользуемся и сейчас.

Эратосфен Киренский жил приблизительно в 276–194 годах до новой эры, то есть был современником Архимеда. Он был знаменит как математик, географ, филолог, историк и поэт. Эратосфен составил карту мира и считается основателем хронологии, то есть науки о точном определении исторических дат. Он вычислил наклон эклиптики, расстояния от Земли до Солнца и Луны, длину экватора. Самым большим открытием Эратосфена в арифметике было его знаменитое «решето» (решето Эратосфена), позволяющее выделять простые числа (см. стр. 3). Он нашел также простое механическое решение знаменитой задачи древности об удвоении куба[10], то есть о построении куба с объёмом в два раза больше данного. Большую историческую ценность представляет собой дошедшая до нас стихотворная эпиграмма Эратосфена, посвящённая этой задаче. В ней он сравнивает своё решение с другими, принадлежащими знаменитым математикам древности:

Если бы, друг, ты замыслил большое из малого сделать,
Куб сотворить ли двойной, иль перестроить объём,
Это возможно — и сени расширить, и яму просторней
Выроешь и водоём влагой наполнишь двойной.
Вот мой прибор: меж линеек две средние сразу отыщешь,
Между краями других ты их отметишь концы.
Нужды тебе уж не будет в премудром цилиндре Архита,
В конусе не для тебя высек триаду Менехм.
И с богоравным Евдоксом изогнутых линий не надо,
Циркулем вооружась, тонкий изгиб находить.
Сдвинув отважно линейки, легко мириады построить
Средних желанных твоих, с меньшей из данных начав.
Счастлив ты, царь Птолемей, – ты дал вечно юному сыну
Равноблаженному дар сладкий для Муз и царей[11].
Зевс, бог Вселенной!
В грядущем пусть с милостью той же он примет
Скипетр от царской руки — и да свершится сие.
Тот же, кто жертву во храме великом увидит, да скажет:
— Дар этот Эратосфен людям, измыслив, принёс.

Математика уже давно дружит с юриспруденцией. История хранит имена юристов, которые совершили выдающиеся математические открытия, и имена математиков, начавших свою профессиональную карьеру с изучения юриспруденции. Это, прежде всего, Франсуа Виет, Пьер Ферма, Жан Лерон Д'Аламбер, Симеон Дени Пуассон и Карл Вейерштрасс.

Франсуа Виет (1540–1603) — французский математик, профессиональный юрист, «отец алгебры», родился в 1540 году на юге Франции в небольшом городке Фантене-ле-Конт, недалеко от Ла Рошели, бывшей в то время оплотом французских протестантов-гугенотов. Его отец был прокурором. По традиции, сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1571 году Виет поступил на государственную службу, став советником парламента, а затем советником короля Франции Генриха III. В 1580 году Генрих III назначил Виета на важный государственный пост рекетмейстера, который давал право контролировать от имени короля выполнение распоряжений и приостанавливать приказы крупных феодалов.

Интерес к математике возник у Виета вследствие его увлечения астрономией. Он усовершенствовал теорию алгебраических (в частности, кубических) уравнений, открыл связь между корнями уравнения и его коэффициентами. Теорема, устанавливающая эту связь, была обнародована в 1591 году. Теперь она носит имя Виета. Виет одним из первых начал использовать буквенные обозначения. Он вычислил число π с девятью точными знаками, улучшив результат Архимеда, и показал, что $\dfrac{2}{\pi} = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{32}\dots$

Про Виета известна такая история. В 1593 году один бельгийский математик предложил желающим найти корни уравнения $x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} + \dots - 3795x^3 + 45x = A$, где A — некоторое вещественное число[12]. Виет нашел 23 положительных решения этого уравнения, заметив, что его «страшная» левая часть представляет собой некоторую тригонометрическую формулу.

Находясь на государственной службе, Виет оставался учёным. Он прославился тем, что сумел расшифровать код перехваченной переписки короля Испании с его представителями в Нидерландах, благодаря чему король Франции был полностью в курсе действий своих

[10] Так называемая делийская задача.

[11] Эратосфен был воспитателем наследника престола — сына царя Птолемея и руководил всемирно знаменитой Александрийской библиотекой.

[12] Такого рода публичные вызовы были характерны для той эпохи.

противников. Код был сложным, содержал до 600 различных знаков, которые периодически менялись. Испанцы не могли поверить, что его расшифровали, и обвинили французского короля в связях с нечистой силой. К этому времени относятся свидетельства современников Виета о его огромной трудоспособности. Будучи чем-то увлечен, учёный мог работать по трое суток без сна. В 1584 году Виета по политическим мотивам отстранили от должности и выслали из Парижа. Именно на этот период приходится пик его творчества. Обретя неожиданный покой и отдых, учёный поставил своей целью создание всеобъемлющей математики, позволяющей решать любые задачи. У него сложилось убеждение в том, «что должна существовать общая, неизвестная ещё наука, обнимающая и остроумные измышления новейших алгебраистов, и глубокие геометрические изыскания древних».

Виет изложил программу своих исследований в изданном в 1591 году знаменитом «Введении в аналитическое искусство», где перечислил трактаты, объединенные общим замыслом и написанные на математическом языке новой буквенной алгебры. Перечисление шло в том порядке, в каком эти труды должны были издаваться, чтобы составить единое целое — новое направление в науке. К сожалению, единого целого не получилось. Трактаты публиковались в совершенно случайном порядке, и многие увидели свет только после смерти Виета. Один из трактатов вообще не найден. Однако главный замысел ученого замечательно удался: началось преобразование алгебры в мощное математическое исчисление. Само название «алгебра» Виет в своих трудах заменил словами «аналитическое искусство».

Математиков в течение столетий интересовала геометрия треугольников, так как она систематически применялась в астрономии, архитектуре, геодезии. У Виета эти геометрические методы приобрели более законченный вид, он первым явно сформулировал теорему косинусов. В 1589 году Виет возвратился в Париж. Подробности жизни Виета в тот период неизвестны, что само по себе говорит о его желании оставаться в стороне от бурных событий. Известно только, что он перешёл на службу к Генриху IV, находился при дворе, был ответственным правительственным чиновником и пользовался огромным уважением как математик.

В последние годы жизни Виет ушёл с государственной службы, но продолжал интересоваться наукой. Известно, например, что он вступил в полемику по поводу введения нового, григорианского календаря в Европе. И даже хотел создать свой календарь. Виет первым стал обозначать буквами не только неизвестные, но и заданные величины. Тем самым ему удалось внедрить в науку великую мысль о возможности выполнять алгебраические преобразования над символами, то есть ввести понятие математической формулы. Этим он внес решающий вклад в создание буквенной алгебры, чем завершил развитие математики эпохи Возрождения и подготовил почву для появления результатов Ферма, Декарта, Ньютона.

Шотландскому лорду **Джону Неперу** (1550–1617) мы обязаны открытием логарифмов. Число e назвали неперовым числом, в общем-то, случайно.

Иоганн Кеплер (1571–1630) — один из величайших астрономов XVII века, совершивших революцию в науке. Он впервые сформулировал законы движения планет около Солнца, которые потом обосновал Ньютон с помощью своей теории тяготения. Проблемы новой астрономии были связаны с большими вычислениями, что заставило Кеплера много заниматься математикой. Его важнейшие математические открытия содержатся в книге «Стереометрия винных бочек», в которой он вычислял объёмы тел вращения. По существу, Кеплер использовал идею предельного перехода, рассматривая, например, площадь круга как сумму площадей большого числа маленьких треугольников с вершинами в центре круга. Книга получила широкое распространение, так как была написана на доступном для широкого круга читателей языке.

Кеплер никогда не скрывал, что он приверженец идей Николая Коперника, поэтому католическая церковь его постоянно преследовала. С 1600 года Кеплер переехал в Прагу, где впоследствии император Рудольф Второй назначил его своим придворным математиком. Это дало Кеплеру возможность спокойно работать до самой смерти.

Дворянин из французского города Турени **Рене Декарт** (1596–1650) служил в армии и имел много времени для философских размышлений и занятий математикой. Семнадцатый век был веком великих открытий в естествознании, и в это время математика, служившая основой физики и механики, становится самой авторитетной и почитаемой наукой — становится царицей наук. Логическая стройность математики давала повод к поиску логики в строении Вселенной, к поиску общих рациональных методов в науке. Заслуга Декарта как математика прежде всего в том, что он применил в геометрии хорошо развитые к этому времени алгебраические методы. Свои идеи Декарт изложил в книге «Геометрия», которая была опубликована в 1637 году.

Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик, один из создателей геометрии и теории чисел, родился на юге Франции в небольшом городке Бомон-де-Ломань, где его отец — Доминик Ферма — был вторым консулом, кем-то вроде помощника мэра. Мать Пьера происходила из семьи юристов. Доминик Ферма дал своему сыну хорошее образование. Известно, что Ферма писал стихи на латинском, французском и испанском языках. Получив в Орлеане степень бакалавра, Ферма в 1630 году переселяется в Тулузу, где получает место советника в парламенте (то есть в суде). Свою работу он выполнял «с большой добросовестностью и таким умением, что славился как один из лучших юристов своего времени».

Но гениальность Ферма проявилась в его математических исследованиях, хотя математика не стала его профессией. Математические работы Ферма содержались, главным образом, в его обширной и чрезвычайно интересной переписке. В XVII веке, когда ещё не было специальных научных журналов, переписка между учёными играла особую роль. В письмах ставились задачи, сообщалось о методах их решения, обсуждались научные проблемы. Ни одно из сочинений Ферма не было опубликовано при жизни. Собрание сочинений, которое он неоднократно пытался написать, так и не было им создано. Однако нескольким трактатам он придал вполне законченный вид, и его рукописи были известны большинству современных ему учёных. Одной из первых математических работ Ферма было восстановление двух утерянных книг Аполлония «О плоских местах».

Ферма внес существенный вклад в ту науку, которая сейчас называется математическим анализом, но знаменитым он стал благодаря теореме, которая сейчас называется Великой Теоремой Ферма. Её история удивительна. После смерти Ферма были найдены его заметки на полях книги древнегреческого ученого Диофанта. Во второй книге своей «Арифметики» Диофант поставил задачу представить квадрат заданного рационального числа в виде суммы квадратов двух рациональных чисел. На полях против этой задачи. Ферма написал: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще ни в какую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

В прошлом веке поиски доказательства этой теоремы привели к построению тонких и прекрасных теорий, относящихся к арифметике алгебраических чисел. Простота формулировки и загадочные слова о «чудесном доказательстве» сделали теорему необычайно популярной. Великая Теорема Ферма стоит на первом месте по числу данных ей неверных доказательств и до сих пор побуждает исследователей. В 1993 году эта теорема была, наконец, доказана англичанином Эндрю Уайлсом.

У Ферма было много других достижений, и не только в математике. Он занимался также теорией вероятностей. Ему принадлежит открытие закона распространения света в средах. Ферма исходил из предположения, что свет пробегает путь от какой-либо точки в одной среде до некоторой точки в другой среде в наикратчайшее время. Применив свой метод максимумов и минимумов, он открыл закон преломления света. При этом Ферма высказал следующий общий принцип: «Природа всегда действует наиболее короткими путями». Одно из последних писем ученого получило название «завещание Ферма». Вот его заключительные строки: «Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что древние не всё знали, и это может проникнуть в сознание тех, которые придут после меня для передачи факела сыновьям, как говорит великий канцлер Англии, следуя чувствам которого, я добавлю: многие будут приходить и уходить, а наука обогащается».

Исаак Ньютон (1643–1727) — один из величайших учёных в истории человечества — родился в Линкольншире (Англия) в семье землевладельца. Он учился в Кембридже, где позже стал профессором. В 1696 году он занял весьма высокий и ответственный пост начальника монетного двора. Ньютон первым открыл производные, названные им флюксиями. Последние появились в его книге «Математические принципы натуральной философии», где он (также впервые) изложил открытый им Закон Всемирного Тяготения. Из него Ньютон вывел законы движения планет, открытые Кеплером, объяснил явление приливов, сделал ряд других важных открытий. Кроме того, Ньютон придумал способ приближённого решения алгебраических уравнений и классифицировал кривые третьего порядка на плоскости. Ньютон был крайне требователен к своим результатам и публиковал их через много лет после открытия.

Готтфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) был необычайно разносторонним и талантливым учёным. Лейбниц родился в Лейпциге, бóльшую часть жизни прожил в Ганновере, исполняя должность библиотекаря и историографа при дворе ганноверского герцога, и был очень верующим человеком. Юрист по образованию, он с большим успехом занимался также философией, математикой, историей, теологией, биологией, геологией, лингвистикой, состоял на дипломатической службе при дворе Майнцского курфюрста. К тому же, Лейбниц был талантливым изобретателем. Он придумал одну из первых счётных машин, сконструировал ветряной двигатель для откачивания воды из шахт. Его счётная машина выполняла все действия арифметики, извлекала квадратные и кубические корни. Лейбниц совершенствовал свою машину в течение всей жизни, так что в некотором смысле его можно считать основоположником информатики.

Но с наибольшей силой способности Лейбница проявились в математике. Чуть позже Ньютона он открыл дифференциальное исчисление, причём в более общей форме и почти в современной терминологии. Лейбниц ввёл много математических обозначений и придумал много новых терминов, которыми мы пользуемся до сих пор: dx и dy, знак интеграла, термины «функция», «координаты», «дифференциальное и интегральное исчисление», «дифференциальное уравнение», «абсцисса», «ордината», «координата», «алгоритм». Он записал в современной форме правила дифференцирования, ввёл логическую символику и т. д. Именно Лейбниц окончательно оформил ту систему координат на плоскости, которую теперь называют декартовой. Сам Декарт использовал только первый квадрант и оси координат у него не были перпендикулярны.

Леонард Эйлер (1707–1783) — величайший ученый XVIII века, оставивший яркий след почти во всех областях математики, механики, физики, астрономии, навигации и т. д. Ему принадлежит более 850 научных работ, многие из которых посвящены труднейшим проблемам математики и её приложений. В 19-летнем возрасте его пригласили работать в Петербургскую академию наук, где он проработал бóльшую часть своей жизни. Он оказал существенное влияние на формирование математической школы и развитие математического образования в России. Известно, что Эйлер поддержал молодого Ломоносова во время его конфликта с академиками.

В последние годы жизни от напряжённой работы Эйлер потерял зрение, но продолжал работать столь же целеустремленно и плодотворно. За несколько дней до смерти он занимался расчётом полета аэростата, который в то время казался чудом.

Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783) — французский математик, механик и философ родился в Париже. Уже в раннем детстве Жан поражал окружающих умом и наблюдательностью. Изучив юриспруденцию, он стал адвокатом. Много времени уделял медицине и естественным наукам. В историю науки вошел благодаря серьёзным открытиям в физике и математике. Член Парижской, Петербургской и других академий наук. Основные математические исследования Д'Аламбера относятся к теории дифференциальных уравнений. В 1743 году вышел в свет «Трактат о динамике», где были впервые сформулированы общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем и сформулирован принцип сведения задач динамики к задачам статики (принцип Даламбера). Работы Д'Аламбера, Леонарда Эйлера и Даниила Бернулли заложили основы математической физики. Д'Аламбер обосновал теорию возмущения движения планет. За работу «Рассуждения об общей причине ветров» он получил премию Берлинской академии наук и стал её членом.

Д'Аламбер дал первое доказательство основной теоремы алгебры о числе корней алгебраического уравнения, математикам хорошо известен его признак сходимости числового ряда. Он работал вместе с Дени Дидро над созданием «Энциклопедии наук искусств и ремёсел». В статье «Энциклопедии» под названием «Размерность» Д'Аламбер высказал идею о времени как о четвёртом измерении. Он также написал вступительную статью к «Энциклопедии» под названием «Очерк происхождения и развития науки», в которой дал классификацию наук. Д'Аламбер занимался и литературной деятельностью. Он был избран в члены французской академии, в состав «Сорока бессмертных». Ему принадлежат работы по вопросам музыкальной теории и музыкальной эстетики.

Пьер Симон Лаплас (1749–1825) родился в семье небогатого землевладельца. Он получил очень хорошее образование, прекрасно знал древние языки, литературу и искусство. Но мы знаем его как выдающегося математика и физика. Ему принадлежат фундаментальные результаты в математике, математической физике и небесной механике, он справедливо считается одним из основоположников теории вероятностей. Лаплас занимался теорией теплопроводности, теорией капиллярности и электродинамикой; доказал, что кольцо Сатурна не может быть сплошным; разработал теорию движения спутников Юпитера; предложил новый метод вычисления орбит небесных тел и т. д.

Любопытно, что Лаплас придавал мало значения политике и религии. Хотя он учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев, однако богословием не занимался, а увлекшись математикой, вообще стал атеистом. Он ладил как с Наполеоном, так и с Людовиком XVIII, принимая знаки уважения от обоих. Основные результаты своих исследований Лаплас опубликовал в двух книгах: «Небесная механика» и «Аналитическая теория вероятностей».

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — «король математиков» — считается величайшим математиком всех времен и народов. Он получил выдающиеся результаты в теории чисел, алгебре, дифференциальной и неевклидовой геометрии, астрономии и геодезии, электродинамике и теории магнетизма. Вот слова Феликса Клейна, одного из самых больших знатоков научного наследия Гаусса. «Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, смотрящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины поднимаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь.»

Карл Фридрих Гаусс родился в Брауншвейге. Его математические способности проявились уже в третьем классе: прямо на уроке он подсчитал сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, едва только учитель кончил диктовать эту задачу. Сам Гаусс говорил, что он научился считать раньше, чем говорить. По словам Феликса Клейна, любовь Гаусса к счёту сформировала его как математика: «Он непрерывно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами, например над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличается всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, каким навряд ли обладал кто-либо до или после него. Путем наблюдения над своими числами, стало быть, индуктивным, «экспериментальным» путём он уже рано постигает общие соотношения и законы.»

Мы не можем перечислить здесь все математические открытия Гаусса. Расскажем об одном из них. Ещё математикам древней Греции было известно, что при помощи только циркуля и линейки можно строить правильные многоугольники с тремя, пятью и пятнадцатью сторонами, а также такие, которые получаются из перечисленных выше удвоением числа сторон: правильные шестиугольники, десятиугольники, двенадцатиугольники, и т. д. И с тех пор ничего принципиально нового в этой области до Гаусса сделано не было. В 1796 году Гаусс доказал, что если n есть простое число вида $2^{2^k}+1$, то правильный n-угольник можно построить с помощью только циркуля и линейки. В частности, при $k=2$ получается $n=17$, при $k=3$ — простое число 257.

Гаусс прекрасно знал классические языки и в молодости колебался, чем ему заняться — математикой или филологией. Вместе с известным физиком Вебером они изобрели электромагнитный телеграф. Гаусс знал о существовании неевклидовой геометрии еще до того, как познакомился с работой Лобачевского. Гаусс был очень замкнутым человеком. Всю свою жизнь он проработал в Геттингенском университете (в том самом, в котором учился) в качестве профессора и директора астрономической обсерватории.

Симеон Дени Пуассон (1781–1840) — французкий математик, физик и механик, профессор, член Парижкой академии наук, почётный член Петербургской Академии, родился в Питивье. В 1798 году он поступил в Политехническую школу. Здесь на его способности обратили внимание известнейшие математики Лаплас и Лагранж. По окончании курса Пуассон остался преподавать в этом знаменитом в то время учебном заведении. В 1816 году его назначили профессором рациональной механики университета в Сорбонне. Пуассон написал свыше трёхсот работ, значительная часть которых сыграла важную роль в становлении современной науки. В области небесной механики важнейшие работы Пуассона касаются специальных задач лунной и планетной теорий, а также устойчивости солнечной системы. Он опубликовал курс механики, в котором развил идеи Лагранжа и Лапласа. Пуассон основательно разработал многие разделы математической физики. Важное место в его исследованиях занимают работы по баллистике и гидромеханике.

Существенное значение имеют работы Пуассона, посвященные определенным интегралам, теории вероятностей и другим разделам математики. Интересна судьба одной работы Пуассона, связанной с судебной статистикой. Пуассон провёл исследование приговоров в уголовных судах. Для этого он разработал специальный математический аппарат и получил формулы для приближённого расчёта биномиальных вероятностей. Прошло три четверти века, прежде чем Резерфорд и Гейгер, впервые исследовавшие альфа-радиацию, показали, что формулы Пуассона имеют применение в различных отраслях науки. В настоящее время они применяются в биологии, теории массового обслуживании, военном деле, медицине, психологии, и т. д.

Николая Ивановича Лобачевского (1793–1856) английский математик Клиффорд назвал «Коперником геометрии». Действительно, открытие Лобачевским неевклидовой геометрии совершило такую же революцию в науке и человеческом сознании, как и открытие Николаем Коперником (1473–1543) гелиоцентрической системы мира. С древних времен люди полагали, что Земля является центром мироздания, и что около Земли вращаются и Солнце и все другие планеты. Коперник был первым из ученых, кто смелостью своего гения разрушил эту привычную схему.

Лобачевский же был первым, преодолевшим стереотип «евклидова мышления», он понял, что существуют другие геометрии, и сумел доказать это. С философской точки зрения оба великих открытия — Коперника и Лобачевского — ознаменовали вступление человечества в новую эпоху, когда всеобщее признание начала получать идея единства мира.

Лобачевский родился в 1792 году в Нижнем Новгороде. Его происхождение до сих пор является загадкой для историков, но точно известно, что в 1802 году он поступил в Казанскую гимназию, а через пять лет — в только что открытый Казанский университет. В это время туда приехали профессора из-за границы, в том числе и Бартельс, с которым начинал изучать математику молодой Гаусс! Бартельс вскоре заметил необыкновенные математические способности Лобачевского и стал его научным руководителем. Благодаря своему наставнику, живой и необычайно изобретательный по части различных проказ Лобачевский успешно закончил университет и остался в нем преподавать. С 1816 года Лобачевский уже профессор, а с 1820 — декан физико-математического факультета.

Одаренность Лобачевского проявилась не только в математике. Он занимался механикой, физикой, астрономией, много времени уделял воспитанию юношества. Лобачевский был талантливым педагогом. В его речи «О важнейших предметах воспитания», произнесённой в 1828 году (через год после вступления в должность ректора Казанского университета), есть слова: «Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живём... Будем же дорожить жизнью, пока она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в истории, истинные понятия о чести, любовь к отечеству, пробуждённая в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которая дозволяет нам торжествовать над ужасом смерти.»

Сам Лобачевский твердо придерживался тех принципов, которые проповедовал. Его честность и прямота, исключительно добросовестное отношение ко всему, за что бы он ни взялся, снискали ему абсолютный авторитет среди преподавателей и студентов. За 20 лет руководства университетом, Лобачевский сделал для него необычайно много. И сейчас геометрическая школа Казанского университета является одной из самых известных у нас в стране и за рубежом.

Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862) был одним из крупнейших русских математиков XIX века. В отличие от Лобачевского, работы которого не получили признания при жизни их автора, имя Остроградского было хорошо известно не только в России. Он был избран академиком Российской, Американской, Римской и Туринской академий, членом-корреспондентом Парижской Академии наук. С десяти лет он мечтал стать военным, и лишь случайно попал в Харьковский университет. Математический талант Остроградского обнаружился уже на втором курсе, а на третьем он блестяще сдал экстерном выпускные экзамены. Однако и тогда в университетах были влиятельные люди, для которых всякий талантливый и независимый человек — бельмо в глазу. Они сумели лишить Остроградского диплома, обвинив его в вольнодумстве. С 1822 по 1828 год Остроградский учился в Париже, слушая лекции Ампера, Коши, Лапласа, Пуассона, Фурье. Вернувшись в Россию, он начал преподавать в Главном педагогическом институте (Петербург) и в 1830 году получил звание академика.

Остроградский получил выдающиеся результаты в математике и механике; занимался баллистикой, теорией вероятностей, различными задачами математической физики: распространением волн на поверхности жидкости, распространением тепла, теорией удара, уравнениями движения упругого тела. Каждому математику и физику известна полученная им важнейшая формула кратного интегрирования, с помощью которой n-кратный интеграл сводится к $(n-1)$-кратному. Выдающийся математик и блестящий лектор, Остроградский оказал огромное влияние на развитие математической школы в России, на преподавание математики в российских университетах.

Эварист Галуа (1811–1832) — самая романтическая и самая трагическая личность в истории математики. Он погиб на дуэли, когда ему был 21 год. По преданию, в последнюю ночь перед этим роковым событием он открыл то, что сейчас называют теорией групп. Из его результатов следовало, в частности, решение одной из важнейших проблем, а именно, доказательство того, что не существует общей формулы для решения уравнений выше четвертой степени. Теперь этот раздел математики так и называют: теория Галуа.

Жизнь не баловала Эвариста: он дважды не мог поступить в Политехническую школу, был уволен из Нормальной школы[13], после участия в революции 1830 года несколько месяцев просидел в тюрьме. Статьи, посланные им в журнал, пропали и не были опубликованы. Он зарабатывал преподаванием математики, и естественно, жил весьма скромно. О его замечательных открытиях математический мир узнал лишь в 1846 году, когда впервые была опубликована одна из его работ. Теперь во всех учебниках Галуа вполне заслуженно называют гением, звездой первой величины. Как жаль, что он жил так недолго!

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) родился в Остенфельде. Специального высшего образования не имел. Изучал юридические науки в Бонне, но, увлекшись математикой, оставил юридический факультет. В 1841 сдал экзамены на звание учителя. В 1842–1855 годах преподавал математику в католических средних учебных заведениях городов Дейч-Кронса и Броунберга. С 1856 — экстраординарный, а с 1865 — ординарный профессор Берлинского университета.

В 1873 году Вейерштрасса избрали ректором университета. Во вступительной речи он, в частности, сказал: «Студент не должен рассматривать как главную цель своей учебы сбор знаний, которые практически нужно применить немедленно или в будущем, а должен, прежде всего, научиться учению... Успех академических занятий основывается большей частью на том, что учителя беспрерывно направляют учащихся к изысканиям, но это надо осуществлять не педагогическими указаниями, а, в основном, тем, что при чтении лекций по какой-либо дисциплине излагать материал так, чтобы учащиеся понимали, по какому пути зрелый и уже владеющий исследованием мыслитель должен идти, чтобы достигнуть новых результатов или лучше обосновать уже существующие. Нужно указывать границы науки, которые ещё не перешли, и те пункты, из которых представляется движение вперед... Для вас, любимые коллеги, будут достаточны следующие советы... Нет ничего более бесплодного заниматься многим, но ничего не изучать основательно, характер научных исследований можно понять, если глубоко и досконально изучать один вопрос.»

Большинство работ Вейерштрасса было напечатано после его смерти, а при жизни Вейерштрасса его идеи распространяли многочисленные слушатели лекций из разных стран. Эти лекции имели огромное значение для развития математики. Примером является построенная Вейерштрассом теория действительных чисел, послужившая логическим обоснованием математического анализа. Именем Вейерштрасса назван ряд теорем, функций, формул. Он много занимался приложениями математики к механике и физике, и поощрял к таким исследованиям своих многочисленных учеников. Многие из них стали известными математиками. Особо отметим Софью Ковалевскую (1850–1891) — российского математика, писателя и публициста, получившую мировое признание.

Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) был ведущим математиком России во второй половине девятнадцатого столетия. Он родился в селе Окатове Калужской губернии. В 1841 году окончил Московский университет и затем преподавал в нём до 1849 года. С этого времени и до конца своей жизни Чебышев работал в Петербургском университете. Чебышев принадлежал к тому замечательному типу учёных, которые не отдают всю свою жизнь какой-нибудь одной проблеме, а оставляют яркий след в различных областях науки. Он получил выдающиеся результаты в теории вероятностей, создал теорию наилучшего приближения функций многочленами, а о его гениальных выводах в задаче распределения

[13]Известные высшие учебные заведения во Франции.

простых чисел один математик того времени сказал, что дальнейшее продвижение в этом вопросе сможет получить тот, кто умнее Чебышева во столько раз, во сколько сам Чебышев умнее обыкновенного человека.

Чебышев известен как непревзойдённый конструктор различных механизмов; их он сделал более сорока и около восьмидесяти усовершенствовал. Он первый изобрёл арифмометр непрерывного действия; впервые, после изобретения Уаттом кривошипно-шатунного механизма, преобразующего в паровой машине вращательное движение в поступательное, Чебышев показал, как усовершенствовать этот механизм. Работа Чебышева «О кройке платьев» до сих пор является образцом практического применения геометрии. А в работе «О построении географических карт» он решает задачу о построении карты с наименьшим искажением масштаба, и находит, что карту европейской части России можно сделать с искажением не более 2%, а не 4–5%, как делалось в то время.

Чебышев был избран членом двух самых престижных академий — Российской и Парижской. Он оставил после себя многочисленных учеников, многие из которых стали выдающимися математиками и принесли славу российской науке.

Феликс Клейн (1849–1925) известен прежде всего как автор так называемой «Эрлангенской программы» — лекции, которую он произнес при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета в 1872 году. Клейн одним из первых понял, какое важное значение для всей математики имеет теория групп, которая тогда только начала развиваться. Он понял, что группы возникают во многих областях математики, и это, с одной стороны, дает возможность сравнивать различные области математики между собой, а с другой стороны — объединяет их в одно целое, в единую математику.

Основная идея Эрлангенской программы Клейна состоит в том, что группы можно применить для классификации различных геометрий. Например, евклидова геометрия, как известно, изучает свойства фигур, сохраняющиеся при движениях. Все движения образуют группу относительно операции композиции. Поэтому евклидову геометрию (на плоскости) можно описать так: на плоскости действует группа движений, а те свойства фигур, которые сохраняются при всех этих движениях, и составляют предмет изучения евклидовой геометрии. Если в этом определении заменить группу движений на какую-либо другую группу, то получим и другую геометрию. Так получаются все классические геометрии — евклидова, аффинная, проективная, геометрия Лобачевского и другие. Таким образом, каждая геометрия порождает свою группу, а каждая группа — свою геометрию.

Клейн применил группы и в других разделах математики, в частности в теории дифференциальных уравнений. Объединяющая роль теории групп в математике сказалась и на мировом математическом сообществе. В Геттингенский университет в то время съезжались учёные всех стран, он стал ведущим центром математических исследований.

Анри Пуанкаре (1854–1912) — величайший математик второй половины XIX века. Его научное наследие составляют более пятисот книг и научных статей, посвящённых различным разделам математики, теоретической физике, небесной механике, философии науки. Он разработал новые методы практически во всех разделах математики. Никто из современников Пуанкаре не мог так глубоко проникнуть в столь большое количество областей науки. Его работоспособность была фантастической. Каждый год он читал лекции по новому предмету, писал популярные книги по математике, которые имели огромный успех и были переведены на многие языки[14].

Родился Пуанкаре в городе Нанси, его отец был профессором медицины. Ещё будучи учеником лицея, Анри занимает первое место на математических конкурсах в 1872 и 1873 годах. Окончив Политехническую школу — наиболее престижное высшее учебное заведение во Франции и горный институт, он начинает преподавать сначала в Кане, затем

[14]На русском языке см.: Пуанкаре А., О науке. — М., 1983.

в Парижском университете. Анри Пуанкаре был членом более чем 35 академий мира, о нём написано много книг. Его научное наследие, идеи и открытые им математические методы до сих пор представляют колоссальную ценность для науки.

Давид Гильберт (1862–1943) был вторым, наряду с Пуанкаре, величайшим математиком девятнадцатого — двадцатого века. Как и Пуанкаре, он оставил яркий след во многих областях математики, решил ряд сложнейших задач. В своей знаменитой книге «Основания геометрии» он проанализировал систему аксиом евклидовой геометрии и, по существу, впервые сформулировал требования, которым должна удовлетворять любая аксиоматическая система. Можно сказать, что с этой книги началась наука, которая теперь называется «основания математики». В 1900 году на Международном конгрессе математиков Гильберт сформулировал 23 задачи (так называемые Проблемы Гильберта), которые считал наиболее важными для математики будущего. Некоторые из этих проблем уже решены, в том числе — и российскими математиками.

Большую часть своей жизни Гильберт преподавал в Геттингенском университете, который благодаря его гению и педагогическому мастерству стал одним из ведущих математических центров мира. Одна из книг Гильберта «Наглядная геометрия», написанная им в соавторстве с С. Фон-Коссеном, до сих пор является одним из лучших учебников по геометрии.

Альберт Эйнштейн (1879–1955) — самый знаменитый ученый XX века, родился в г. Ульме (Германия). Окончив политехникум в Цюрихе, он сначала работал учителем, затем служащим федерального патентного бюро в Берне. Начиная с 1911 года, Эйнштейн преподаёт в Цюрихском, Пражском и Берлинском университетах, а после 1932 года, вследствие усиления фашизма в Германии, он был вынужден переехать в Принстон (США).

Главной заслугой Эйнштейна является, как известно, открытие *специальной и общей теории относительности*, которая изменила взгляды учёных на пространство, время и тяготение, помогла создать общую картину физического мира, существенно продвинула вперед науку, прежде всего — физику. Энштейн получил выдающиеся результаты в различных разделах физики. За работы в области теоретической физики и открытие фотоэффекта ему присудили в 1921 году Нобелевскую премию. Он создал квантовую теорию света, внёс существенный вклад в теорию броуновского движения и т. д.

Работы Эйнштейна имеют и глубокое философское значение. Осмысление в целом той картины мира, которую даёт нам теория относительности, продолжается до сих пор. Энштейн был выдающимся пацифистом, активным участником антифашисткого движения.

Норберт Винер (1894–1964) — американский ученый, «отец кибернетики» — один самых известных математиков нашего века. Исследуя аналогии между процессами, происходящими, с одной стороны, в электрических и электроных системах, а с другой — в живых организмах, он создал новую науку — науку об управлении, которую назвал кибернетикой (1948). Широко известны его книги «Бывший вундеркинд», «Я — математик», «Кибернетика и общество». Он знал 10 языков, но его отец (выходец из России) знал их 30!

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1990) — выдающийся российский математик, внесший весомый вклад во многие разделы математики, в особенности, в теорию функций и теорию вероятностей. Им написано 230 научных работ, значительная часть которых носит прикладной характер (теория стрельбы, статистические методы контроля массовой продукции, теория передачи информации по каналам связи и т. д.). В 32 года Колмогоров стал доктором физико-математических наук, в 36 лет — академиком. Его заслуги в математике неоднократно отмечались международными премиями, он награждён семью орденами Ленина, орденом Красного Знамени и медалями. У Колмогорова было много учеников, ставших впоследствии известными математиками. Он активно участвовал в совершенствовании школьного образования в стране, является автором замечательных учебников по математике.

Приложение II
Справочные таблицы

Значения дифференциальной функции Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,80	0,2897	1,60	0,1109	2,40	0,0224
0,10	0,3970	0,90	0,2661	1,70	0,0940	2,50	0,0175
0,20	0,3910	1,00	0,2420	1,80	0,0790	2,60	0,0136
0,30	0,3814	1,10	0,2179	1,90	0,0656	2,70	0,0104
0,40	0,3683	1,20	0,1942	2,00	0,0540	2,80	0,0079
0,50	0,3521	1,30	0,1714	2,10	0,0440	2,90	0,0060
0,60	0,3332	1,40	0,1497	2,20	0,0355	3,00	0,0044
0,70	0,3123	1,50	0,1295	2,30	0,0283	4,00	0,0001

Значения интегральной функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,80	0,2881	1,60	0,4452	2,40	0,4918
0,10	0,0398	0,90	0,3159	1,70	0,4554	2,50	0,4938
0,20	0,0793	1,00	0,3413	1,80	0,4641	2,60	0,4953
0,30	0,1179	1,10	0,3643	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,40	0,1554	1,20	0,3849	2,00	0,4772	2,80	0,4974
0,50	0,1915	1,30	0,4032	2,10	0,4821	2,90	0,4981
0,60	0,2257	1,40	0,4192	2,20	0,4861	3,00	0,49865
0,70	0,2580	1,50	0,4332	2,30	0,4893	4,00	0,499968

Таблица Снедекора для уровня значимости $P = 0{,}05$

$k_о \backslash\ k_ф$	1	2	3	4	5
1	161	200	216	225	230
2	18,1	19,0	19,2	19,3	19,3
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7
21	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7
23	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6
25	4,2	3,4	3,0	2,8	2,6
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6
27	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6

Литература и гиперссылки

1. Аносов Д.В. *Взгляд на математику и нечто из неё.* — М.: МЦНМО, 1999.

2. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Очерк основных идей топологии* // Математическое просвещение. 1957. №2; 1958. №№3, 4; 1961. №6.

3. Ван-дер-Варден Б.Л. *Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта*, *Вавилона и Греции.* — М.: Физ.-мат. ГИЗ, 1959.

4. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбург С.И. *Алгебра и математический анализ.* — М.: Просвещение, 1994.

5. Вильямс Дж.Д. *Совершенный стратег*, *или букварь по теории стратегических игр.* — М., 1960.

6. Гарднер М. *Теория относительности для миллионов.* — М.: Атомиздат, 1979.

7. Гладкий А.В. *Арифметика.* — М.: Дрофа, 2000.

8. Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика.* — М.: Высшая школа, 1972.

9. Гнеденко Б.В. *Математика и математическое образование в современном мире.* — М., 1985.

10. Гнеденко Б.В. *Очерки по истории математики в России.* — М.-Л., 1946.

11. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. *Элементарное введение в теорию вероятностей.* — М.: Наука, 1964.

12. Грешилов А.А. *Как принять наилучшее решение в реальных условиях.* — М.: Радио и связь, 1991.

13. Ефимова Е.Г. *Экономика для юристов*: *Учебник.* — М.: Флинта; Московский психолого-социальный институт, 1999.

14. Ивлев Ю.В. *Логика для юристов.* — М.: Дело, 2001.

15. Лаптев Б.Л. *Николай Иванович Лобачевский.* — Казанский ун-т, 1976.

16. Лунеев В.В. *Юридическая статистика.* — М.: Юрист, 1999.

17. *Математика в современном мире.* — М.: Мир, 1967.

18. Отставнов. М. *Свободные программы и системы в школе.* — М.: Институт логики, ALT Linux Team, 2003.

19. Пойа Д. *Математическое открытие.* — М.: Наука, 1976.

20. Роганов Е.А., Роганова Н.А. *Практическая информатика.* — М.: МГИУ, 2002.

21. Румшиский Л.З. *Математическая обработка результатов эксперимента.* — М.: Наука, 1971.

22. Саати Т. *Принятие решений. Метод анализа иерархий.* — М., 1993.

23. Стройк Д.Я. *Краткий курс истории математики.* — М.: Наука, 1978.

24. Суховольский В.Г. *Экономика живого.* — Новосибирск: Наука, 2004.

25. Тихомиров В.М. *Великие математики прошлого и их великие теоремы.* — М.: МЦНМО, 1999.

26. Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. *Лекции по математике для юристов.* — Тверь, 1997.

27. Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. *Математика. Учебный курс для юристов.* — М.: Юрайт, 1999.

28. Фаддеев Д.К., Никулин М.С., Соколовский И.Ф. *Элементы высшей математики для школьников.* — М.: Наука, 1987.

29. Фрид Э. *Элементарное введение в абстрактную алгебру.* — М.: Мир, 1979.

30. Хинчин А.Я. *Педагогические статьи.* — М.: АПН, 1963. С. 128–160.

31. Хлебопрос Р.Г., Фет А.И. *Природа и общество. Модели катастроф.* — Новосибирск: Сибирский хронограф, 1999.

32. *Хрестоматия по истории математики* / Под ред. А.П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1977.

33. Шикин Е.В. *О математических курсах для сугубых гуманитариев.* — М.: МЦНМО, 2000.

34. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. *Гуманитариям о математике.* — М.: Агар, 1999.

35. `http://www.altlinux.ru` — Веб-сайт компании ALT Linux, российского разработчика пакета OpenOffice.

36. `http://www.linux.org.ru` — Веб-сайт, посвящённый ОС Linux.

37. `http://www.main.msiu.ru` — Информационный портал МГИУ.

Указатель имён и терминов

Краткая информация об авторах

Роганов Евгений Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Московского государственного индустриального университета, автор учебников «Основы информатики и программирования» и «Практическая информатика». В МГИУ под руководством Е. А. Роганова реализуется специальная программа «Три шага к свободному ПО», предназначенная для облегчения перехода школьников, студентов, учителей школ и преподавателей университета от проприетарного программного обеспечения к свободному.

Тихомиров Николай Борисович — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета. Специалист в области интерполирования, автор более 80-ти научных публикаций и многочисленных учебных пособий, в том числе и по теории вероятностей. Вместе с А. М. Шелеховым является автором первых учебников по математике для студентов-юристов («Лекции по математике для юристов» и «Математика: учебный курс для юристов»).

Шелехов Александр Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета. Автор монографий, учебников, имеет более ста научных работ в области дифференциальной геометрии, многочисленные публицистические статьи по проблемам образования и устойчивого развития. Лауреат Национальной экологической премии за 2004 год.

Учебное издание

Евгений Александрович Роганов
Николай Борисович Тихомиров
Александр Михайлович Шелехов

Математика и информатика
для юристов

Учебник

Редактор К. В. Шмат
Корректор Н. К. Гончарук

Подписано в печать 17.05.05
Формат бумаги 70x100/16
Усл.печ.л. 22,75 Уч.-изд.л. 29,0
Тираж 5000

Сдано в производство 20.05.05
Бум. офсетная
Изд. № 1-14/05
Заказ №

РИЦ МГИУ, 115280, Москва, Автозаводская, 16
www.izdat.msiu.ru
izdat@msiu.ru
тел. 677-23-15