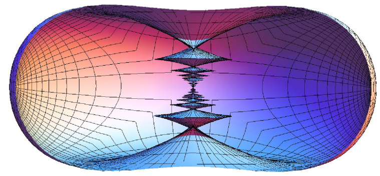
Российская академия наук

Институт программных систем имени А.К.Айламазяна РАН



Молодежный симпозиум с международным участием

«Теория управления: новые методы и приложения»

Тезисы докладов

22–26 сентября 2009 г.

Переславль-Залесский 2009

Российская академия наук

Институт программных систем имени А.К.Айламазяна РАН

Молодежный симпозиум с международным участием

«Теория управления: новые методы и приложения»

Тезисы докладов

22–26 сентября 2009 г.

Издательство Университет города Переславля

Переславль-Залесский 2009

УДК 517.97

Издание осуществлено при поддержке РФФИ (проект No. 09-01-06814-моб_г)

Молодежный симпозиум с международным участием «Теория управления: новые методы и приложения», ИПС РАН, Переславль-Залесский, 22–26 сентября 2009 г, Изд-во «Университет города Переславля», 2009, ISBN 978-5-901795-22-4.

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Молодежном симпозиуме с международным участием «Теория управления: новые методы и приложения».

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

ISBN 978-5-901795-22-4.

Программный комитет

В.И. Гурман, председатель (Россия)

С.М. Абрамов (Россия)

А. В. Аргучинцев (Россия)

А.С. Булдаев (Россия)

И.В. Бычков (Россия)

С.Н. Васильев (Россия)

Р. Винтер (Англия)

Х. Дайссенберг (Франция)

В.А. Дыхта (Россия)

Ю.Г. Евтушенко (Россия)

В.А. Ильин (Россия)

А.И. Иоффе (Израиль)

Г.Н. Константинов (Россия)

С.К. Коровин (Россия)

В.Ф. Кротов (Россия)

А.Б. Куржанский (Россия)

А.В. Лотов (Россия)

В.М. Матросов (Россия)

Б. Мордухович (США)

Ни Минь Кань (Китай)

Д.А. Новиков (Россия)

Г.С. Осипов (Россия)

Б. Очирбат (Монголия)

Ф.Л. Перейра (Португалия)

А.А. Петров (Россия)

Ю.Л.Сачков (Россия)

Ф.Л. Черноусько (Россия)

Организационный комитет

Ю.Л.Сачков, председатель

А.А.Ардентов

А.О. Блинов

А.П. Маштаков

В.М. Касимов

Е.Ф. Сачкова

Е.А. Трушкова

О.В. Фесько

СОДЕРЖАНИЕ

Оптимальное управление открытой микроэкономической системой при нестационарных параметрах рынка[1]

Амелькина М. А.

Институт Программных Систем имени А. К. Айламазяна РАН,

Переславль-Залесский, Россия

maria@sam.botik.ru

При анализе экономических систем предполагается, что параметры экономических агентов, входящих в систему, так же, как и параметры окружения системы — величины, не изменяющиеся во времени. однако, при исследовании экономических процессов требуется учитывать, что эти величины не являются константами, а зависят либо непосредственно от времени, либо от других, меняющихся во времени параметров. Такие системы называются системами с нестационарными параметрами [1]. Задачи определения предельных возможностей систем с нестационарными параметрами возникают при изучении процессов ресурсообмена при сезонном спросе, изменениях, связанных с жизненным циклом товаров, их качественными характеристиками и пр.

Рассматривается экономическая система, состоящая из активной подсистемы (фирмы с монопольной властью на рынках), обменивающаяся ресурсом с окружением — экономическими резервуарами или пассивными агентами [2]. Параметры экономической системы и ее окружения могут изменяться во времени. Различные случаи нестационарности параметров и экономические задачи, им соответствующие, представлены в Табл. 1.

Критерием оптимальности для задач управления производственной деятельностью фирмы является усредненная по времени прибыль фирмы [6]:

$$\overline{\pi} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \pi(t)dt = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \left[p(t)q(p,a,b) - c(q,a,b)\right]dt \to \max_{p(t),\, a(t)}, \tag{1}$$

где $p(t)$ — цена продукции фирмы, $a(t)$ — неценовые параметры, влияющие на спрос, например, характеристики качества продукции, интенсивность рекламных акций, b

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08-06-00141).

Табл. 1.

Нестационарность параметров экономических систем

Параметры, значения которых нестационарны	Экономические задачи
Нестационарность параметров фирмы	
Параметры производственной функции, издержки производства — функции времени	Управление обновлением производственного оборудования [3]
Нестационарность параметров окружения системы	
Оценки ресурсов экономическим резервуаром — функции времени	Реализация товара в условиях меняющегося спроса, например, сезонного спроса, спроса, подверженного влиянию моды и т. д.
Оценки ресурсов экономическим резервуаром — функция качественных характеристик товара	Управление качеством продукции на предприятии [4]
Темп прироста запаса ресурса у пассивного агента — функция времени	Ресурсообмен портящимся или самовоспроизводящимся ресурсом [5]
Нестационарность параметров кинетики ресурсообмена	
Параметры функции спроса (предложения) — функция времени	Управление продвижением товара на рынке

— вектор параметров, характеризующих законы спроса и производственных издержек, τ — горизонт планирования, $q(p,a,b)$ — интенсивность спроса на продукцию предприятия, $c(q,a,b)$ — производственные издержки фирмы. Управлениями являются цена и неценовые характеристики продукции $p(t)$, $a(t)$.

В стационарном случае задача (1) является безусловной задачей оптимизации и ее решение сводится к решению системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\pi}{\partial p} = q(p,a,b) + p\frac{\partial q}{\partial p} - \frac{\partial c}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial\pi}{\partial a} = p\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial c}{\partial a} - \frac{\partial c}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial a} = 0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

которые приводят к равенству

$$-q(p,a,b)\frac{\partial q/\partial a}{\partial q/\partial p} = \frac{\partial c}{\partial a}. \tag{3}$$

Решение задачи максимизации прибыли, если параметры b функций $q(p,a,b)$ и $c(q,a,b)$ изменяются во времени, а управлениями являются только $p(t)$, $a(t)$, приводит к решению той же системы уравнений (2). При этом неважно, являются ли параметры $b(t)$ детерминированными или случайными функциями времени.

В задачах определения срока службы оборудования [3] и продолжительности выпуска товара с учетом его жизненного цикла дополнительным управлением является значение τ. В этих задачах от τ может зависеть также и величина издержек c. Условиями оптимальности решения задачи (1) в этом случае являются уравнения (2) и

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi}{\partial\tau} &= p(\tau)q(p(\tau),a(\tau),b(\tau)) - c(q(\tau),a(\tau),b(\tau)) - \\ &- \frac{1}{\tau^2}\left[\int\limits_0^\tau \left(p(t)q(p,a,b) - c(q,a,b) + \tau\frac{\partial c}{\partial\tau}\right)dt\right] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Возможным дополнением в условия задачи максимизации прибыли фирмы является наличие склада готовой продукции [7]. Наличие склада позволяет разделить потоки произведенной q_1 и проданной q_2 продукции так, что

$$\int\limits_0^\tau q_1(t)dt = \int\limits_0^\tau q_2(t)dt = Q. \tag{5}$$

Задача максимизации прибыли в случае наличия склада может быть разделена на три подзадачи.

Первая подзадача: Определить зависимость интенсивности производства от времени $q_1(t)$ такую, что производственные издержки фирмы являются минимальными при известном общем за время τ выпуске продукции Q.

Вторая подзадача: Определить зависимость интенсивности продаж продукции $q_2(t)$ такую, что доход предприятия является наибольшим при известном общем за время τ выпуске продукции Q.

Третья подзадача: Определить такой выпуск продукции Q за время τ, чтобы разность между максимальным, определенным в ходе решения второй подзадачи, доходом и минимальными, определенными в ходе решения первой подзадачи, издержками была наибольшей.

В докладе показаны примеры решения этих задач для детерминированных и случайных функций $b(t)$.

Литература

[1] Цирлин А. М. *Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах.* М.: Наука, 2006. — 500 с.

[2] Миронова В. А., Амелькин С. А., Цирлин А. М. *Математические методы термодинамики при конечном времени.* — М.: Химия, 2000. — 384 с.

[3] Амелькин С. А., Логунова Н. Ю., Прокофьев Е. А. *Определение оптимального срока использования оборудования* // Автоматизация и современные технологии, 10, 2006. с. 13–18.

[4] Амелькина М. А. *Математическая модель предприятия работающего на конкурентном рынке: управление качеством продукции.*// Стратегическое планирование и развитие предприятий, 10-й Всероссийский симпозиум. Москва, ЦЭМИ, 2009.

[5] Амелькин С. А., Казаков В. А. *Предельные возможности процесса обмена самовоспроизводящимся ресурсом.* // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-20), Секция 8. Математические методы и задачи в экономических и гуманитарных науках. Ярославль, 2007.

[6] Pindyck R.,Rubinfeld D., *Microeconomics*, Prentice Hall, 2000. — 768 pp.

[7] Щепкин А. В. *Внутрифирменное управление (модели и методы).* М.: ИПУ РАН, 2001. — 80 с.

Множество достижимости процесса обмена ресурсами с нестационарными свойствами в замкнутой экономической системе[1]

Амелькина М.А.

Институт Программных Систем имени А. К. Айламазяна РАН,

Переславль-Залесский, Россия

maria@sam.botik.ru

Вахрина А.Ю.

Институт Программных Систем имени А. К. Айламазяна РАН,

Переславль-Залесский, Россия

anya@dispells.pereslavl.ru

Описание замкнутой экономической системы

В одной из основных теорий классической микроэкономики — теории общего равновесия, — рассматривается задача достижения равновесия экономической системы в ходе ресурсообмена, при условии максимизации благосостояния каждого из экономических агентов, входящих в эту систему [1].

Рассмотрим процесс ресурсообмена в системе, состоящей из двух экономических агентов, у каждого из которых имеется некоторый начальный запас из двух ресурсов: $\vec{N} = (N_0, N_1)$, где N_0 — запас базисного ресурса (денег). При наличии меньшего числа агентов или ресурсов обмен невозможен.

Экономическая система является замкнутой, т. е. обмен ресурсами происходит только между экономическими агентами, составляющими систему. Обмен между системой и ее окружением не происходит, в противном случае система является открытой [2]. В ходе ресурсообмена общее количество каждого из ресурсов остается постоянным, т. е. они не производятся, не потребляются, не уничтожаются.

Каждый экономический агент характеризуется:

- функцией благосостояния (богатства) — $S(\vec{N})$, которая является оценкой стоимости собственных ресурсов самим агентом. Функция благосостояния — це-

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант №08-06-00141)

левая функция экономического агента, значение которой он стремится максимизировать в ходе ресурсообмена [4]. Такой обмен является добровольным.

- оценкой стоимости каждого из имеющихся у него ресурсов ресурса v_i, выраженной через базисный ресурс:

$$v_i = \frac{\partial S/\partial N_i}{\partial S/\partial N_0}, \quad i = 1, ..., n. \tag{1}$$

  Оценка ресурса — это минимальная цена ресурса, по которой экономический агент готов продать его и максимальная цена — по которой купить.

- кинетикой ресурсообмена, которая определяется интенсивностью купли и продажи ресурсов и соответственно функциями спроса и предложения [4]. Кинетика ресурсообмена зависит от цены ресурса p_i, а также от оценки v_i данного ресурса экономическим агентом:

$$g_i = f_i(v_i, p_i), \quad i = 1, ..., n. \tag{2}$$

  В случае если $p_i > v_i$ экономический агент продает ресурс, если $p_i < v_i$ — покупает. При $p_i = v_i$ интенсивность ресурсообмена равна нулю, т. е. обмен не происходит.

Для нахождения точки равновесия экономической системы необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} N_{0A}^0 + Q_{0B}^0 = N_{0A} + N_{0B} \\ N_{1A}^0 + N_{1B}^0 = N_{1A} + N_{1B} \\ p_0 N_{0A}^0 + p_1 N_{1A}^0 = p_0 N_{0A} + p_1 N_{1A} \\ p_0 N_{0B}^0 + p_1 N_{1B}^0 = p_0 N_{0B} + p_1 N_{12B} \\ \frac{1}{p_1}(\frac{\partial S_A}{\partial N_{1A}}) = \frac{1}{p_0}(\frac{\partial S_A}{\partial N_{0A}}) \\ \frac{1}{p_1}(\frac{\partial S_B}{\partial N_{1B}}) = \frac{1}{p_0}(\frac{\partial S_B}{\partial N_{0B}}) \end{cases} \tag{3}$$

Неизвестными в системе являются: конечное распределение ресурсов между экономическим агентами, цены на ресурсы, которые в ходе обмена остаются постоянными. С учетом того, что одно из первых четырех уравнений системы линейно зависит от остальных — решением системы будет являться конечное распределение ресурсов и структура цен p_1/p_0. Отметим, что состояние равновесия экономической системы может быть достигнуто только при бесконечной продолжительности обмена.

Описание ресурсообмена при конечном времени

Если продолжительность ресурсообмена ограничена, то состояние равновесия в экономической системе не достижимо. Рассмотрим этот случай также на примере системы, состоящей из двух экономических агентов, каждый из которых имеет запас из двух ресурсов, один из которых является базисным. Таким образом, интенсивность ресурсообмена определяется только оценками второго товара. Оценки экономических агентов не совпадают, в противно же случае обмен был бы невозможен. Общее количество ресурсов в ходе обмена также остается постоянным.

Пусть один из агентов покупает ресурс, следовательно, его оценка превышает цену продажи ($v_A > p$), а второй продает ресурс, его оценка ниже цены ресурса ($v_B < p$). Запишем функции спроса и предложения в линейной форме:

$$q_A = \alpha(v_A - p), \tag{4}$$

$$q_B = \beta(p - v_B), \tag{5}$$

где α, $\beta > 0$ — коэффициенты, характеризующие угол наклона кривых спроса и предложения, т. е. на сколько единиц изменится интенсивность потока ресурса при изменении его цены на единицу.

Цена ресурса в каждый момент времени определяется из условия равенства спроса и предложения:

$$p = \frac{\alpha v_A + \beta v_B}{\alpha + \beta}. \tag{6}$$

Динамика ресурсообмена в системе для первого потребителя описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial N_{1A}}{\partial t} = \alpha(v_A - p), \quad N_{1A}(0) = N_{1A}^0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial N_{0A}}{\partial t} = -p\alpha(p - v_A), \quad N_{0A}(0) = N_{0A}^0. \tag{8}$$

Данные уравнения справедливы и для второго экономического агента, также запас его ресурсов в каждый момент времени можно найти из следующего соотношения:

$$N_{0B}(t) = \bar{N}_0 - N_{0A}(t), \qquad N_{1B}(t) = \bar{N}_1 - N_{1A}(t). \tag{9}$$

При ограничении на продолжительность обмена равновесное состояние системы недостижимо. Чем ближе располагаются уровни достижимости к контрактной кривой, тем меньше разница между оценками ресурсов v_A , v_B и, следовательно, меньше интенсивность потоков ресурсов между экономическими агентами. Поэтому состояние системы, соответствующее точке на контрактной кривой, — это асимптота, к которой стремится система при бесконечной продолжительности процесса ресурсообмена.

Учет нестационарности параметров экономической системы

При расчете предельных возможностей ресурсообмена при ограничении на продолжительность процесса предполагалось, что все параметры функций благосостояния экономических агентов неизменны во времени.

Представляет интерес и нестационарный случай, когда параметры функций благосостояния, а значит, и оценки ресурсов меняются во времени. В этом случае кривая равновесных состояний — контрактная кривая — изменяет свое положение во времени. Постоянными остаются только две точки, соответствующие концентрации всех ресурсов у одного из экономических агентов. Эти два состояния не зависят от оценок ресурсов.

При неизменности общего запаса ресурсов в системе, интенсивность ресурсообмена между экономическими агентами определяется уравнениями:

$$\left\{\begin{array}{c} v_{iA}(t) = \frac{\partial S_A(\vec{N}_A,t)/\partial N_{iA}}{\partial S_A(\vec{N}_A,t)/\partial N_{0A}}, \quad i = 1, ..., n \\ v_{iB}(t) = \frac{\partial S_B(\vec{N}_B,t)/\partial N_{iB}}{\partial S_B(\vec{N}_B,t)/\partial N_{0B}}, \quad i = 1, ..., n \\ g_{iA}(v_{iA}(t), p_i(t)) = -g_{iB}(v_{iB}(t), p_i(t)), \quad i = 1, ..., n \\ \frac{\partial N_{iA}}{\partial t} = -\frac{\partial N_{iB}}{\partial t} = g_{iA}(v_{iA}(t), p_i(t)), \quad i = 1, ..., n \\ \frac{\partial N_{0A}}{\partial t} = -\frac{\partial N_{0B}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} p_1 g_{iA}(v_{iA}(t), p_i(t)) \\ N_{iA} + N_{iB} = \bar{N}_i, \quad i = 0, ..., n \end{array}\right. \tag{10}$$

Вид контрактной кривой определяется, в свою очередь, равенствами:

$$v_{iA}(\vec{N}_A, t) = v_{iB}(\vec{N}_B, t), \quad i = 1, ..., n \tag{11}$$

Уравнения (11) с учетом неизменности общего количества ресурсов в системе позволяют определить $2n+1$ неизвестную из $2n+2$ значений величин запасов для каждого момента времени. Это означает, что можно построить семейство контрактных кривых, каждая из которых соответствует определенному моменту времени. Если по результатам решения уравнений (10) найти недостающее значение одной из переменных, например, N_{0A}, то мы получим кривую условного равновесия, каждая точка которой соответствует равновесному состоянию в момент времени t, при условии, что запас базисного ресурса у экономического агента А известен.

Вследствие того, что равновесное состояние в нестационарном случае меняется во времени, изменяются и оценки ресурсов v_{iA}, v_{iB}. При существенном их изменении направление ресурсообмена может изменяться. В этом случае траектория обмена ресурсами касается условной кривой равновесия.

Литература

[1] Х. Вэриан, *Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход.*, учеб. для вузов : пер. с англ. — М.: ЮНИТИ, 1997. 767 с.

[2] В.А. Миронова, С.А. Амелькин, А.М. Цирлин, *Математические методы термодинамики при конечном времени.* — М.: Химия, 2000. 384 с.

[3] R. Pindyck, D. Rubinfeld, *Microeconomics*, 5th edition — Prentice Hall; 2000. 768 pp.

[4] A.M. Tsirlin, S.A. Amelkin. *Dissipation and conditions of equilibrium for an open microeconomic system*, Open System and Inform. Dynam. No.8. 2001. P.157–168.

Параллельные и последовательные алгоритмы и программы решения систем уравнений в задачах оптимального управления[1]

Ардентов А.А.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

aaa@pereslavl.ru

Решение некоторых задач оптимального управления можно свести к решению систем алгебраических уравнений. Например, если в такой задаче экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp} : N \to M$ может быть сужено на подобласти $N' \subset N$, $M' \subset M$, преобразуемые диффеоморфно, то требуется решать системы уравнений вида

$$\mathrm{Exp}(\lambda) = q, \qquad \lambda \in N', \quad q \in M' \tag{1}$$

с данной конечной точкой q и неизвестным набором параметров λ, задающих оптимальную траекторию. Несмотря на то, что система (1) имеет единственное решение, его приближенное вычисление с помощью компьютерных программ может представлять нетривиальную задачу.

В докладе будут описаны параллельные и последовательные алгоритмы и программы (в системе Mathematica) для решения двух задач оптимального управления:

1. Задача Эйлера об эластиках [1–4],

2. Нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2,3,5) [5].

Литература

[1] Л. Эйлер, *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*, Приложение I, «Об упругих кривых», ГТТИ, Москва-Ленинград, 1934, 447–572.

[2] Ю.Л. Сачков, *Оптимальность эйлеровых эластик*, Доклады Академии Наук, ноябрь 2007. Т. 417. № 1. С. 23-25.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00246-а)

[3] А.А. Ардентов, Ю.Л. Сачков, *Решение задачи Эйлера об эластиках*, Автоматика и Телемеханика, 2009, в печати.

[4] А.А. Ардентов, *Множество разреза в задаче Эйлера об эластиках*, Материалы XII научной студенческой конференции университета города Переславля им. А.К. Айламазяна, Издательство УГП, Переславль-Залесский, 2008.

[5] Ю.Л. Сачков, *Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны*, Мат. Сборник, 197, 6, 2006, 111–160.

Влияние финансового регулятора на процессы ресурсообмена[1]

Ахременков А.А., Цирлин А.М.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

andrei@eco.botik.ru

В моделях необратимой микроэкономики (см.[1]-[4]) каждый из экономических агентов (ЭА), характеризуется функцией благосостояния S , зависящей от вектора запасов ресурсов N и капитала (базисного ресурса) M. Эта функция обычно предполагается однородной первой степени по своим аргументам, непрерывно дифференцируемой и строго выпуклой вверх. Функция благосостояния определяет оценку каждого из ресурсов j - м экономическим агентом согласно выражению

$$p_{j\nu} = \frac{\partial S_j/\partial N_{j\nu}}{\partial S_j/\partial M_j}, \quad j=1,...,m, \quad \nu=1,...,n. \tag{1}$$

При контакте двух ЭА с разными оценками происходит обмен ресурсами и капиталом. Ресурс переходит от ЭА, у которого его оценка меньше, к ЭА, у которого оценка больше. Поток ν-го ресурса $n_{ij\nu}$ между i-м и j-м ЭА сопровождается встречным потоком капитала, так что для каждого из ЭА выполнен принцип доброволь-

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08-06-00141-а)

ности, который запрещает процессы обмена, при которых функция благосостояния любого из ЭА уменьшается.

Под ЭА понимается однородная общность участников экономической деятельности (тот или иной социальный слой, множество производителей, имеющих близкие условия функционирования, и пр.). Одним из типов ЭА является экономический резервуар (ЭА), у которого запасы ресурсов столь велики, что оценки можно считать не зависящими от потоков обмена ЭР с другими ЭА.

В работе рассмотрен стационарный режим экономической системы, состоящей из m ЭА, финансового регулятора и экономического резервуара. Резервуар соответствует окружающей среде с фиксированными стоимостями ресурсов. Каждый j-ый ЭА характеризуется функцией благосостояния S_j, зависящей от вектора запасов его ресурсов $N_j = (N_{j1}, N_{j2}, ..., N_{jn},)$ и капитала M_j.

В стационарном режиме каждый ЭА обменивается с другими ЭА и резервуаром ресурсами и капиталом; он потребляет ν-ый ресурс с интенсивностью $r_{j\nu}$ и получает от своей деятельности вне системы доход d_j, не зависящий от процессов ресурсообмена.

Финансовый регулятор извлекает из системы капитал (базовый ресурс) за счет обложения налогом процессов ресурсообмена и перераспределяет его таким образом, чтобы потребление каждого из ЭА было не менее заданного гарантированного потребления

$$r_{j\nu} \geq r_{0\nu} \geq 0, \forall j = 1, ..., m; \nu = 1, ..., n. \tag{2}$$

Для некоторых ресурсов, предметов роскоши, гарантированное потребление равно нулю.

Ясно, что не для всякого значения вектора $r_{0\nu}$ система может быть реализована. Каждому значению гарантированного потребления соответствует своя ставка налога и выделение базового ресурса тем ЭА, потребление которых без этой подпитки меньше гарантированного. Требуется построить область реализуемости этой системы, зависимость потребления от ставки налога.

Мы будем предполагать, что сам ФР ничего не потребляет и перераспределяет весь обьем капитала, который он собирает в форме налога, между нуждающимися

ЭА. Если учесть расходы ФР на собственные нужды, то область реализуемости системы сузится.

Поставленная задача характерна не только для экономических, но и для термодинамических макросистем. Ее аналог рассмотрен в [5], где найдены условия реализуемости открытой термодинамической системы, содержащей тепловую машину, которая за счет перераспределения потоков энергии поддерживает заданную неравновесную конфигурацию температурного поля.

Литература

[1] Попков Ю.С. *Теория макросистем, равновесные модели.* М.: УРСС, 1999.

[2] Цирлин А.М.*Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах.* М.:Наука, 2006.

[3] Амелькин С.А., Мартинаш К., Цирлин А.М.*Задачи оптимального управления необратимыми процессами в термодинамике и микроэкономике.(обзор).* Автоматика и телемеханика, №4, 2002. С. 3-25.

[4] Цирлин А.М.*Оптимальные процессы в открытых управляемых макросистемах.* А.и Т. № 1, 2006. стр.146-157.

[5] Tsirlin A.M., Kazakov.V, Ahremenkov A.A., Alimova N.A. *Thermodynamic constraints on temperature distribution in a stationare sustem with heat engine or refrigerator*, J.Phys D: Appl.Phys. 39 (2006) pp.4269-4277.

Метод глобального улучшения для задачи оптимального управления с управляемыми коэффициентами

Батурина О.В.

Институт Проблем Управления РАН, Москва, Россия

ol.baturina@mail.ru

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$I(v) = \int\limits_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + F(x(T)) \to \min_{v \in D} \tag{1}$$

$$dx/dt = f(t, x, u); \quad x(0) = x_0; \quad x \in R^n; \quad u \in U \tag{2}$$

где вектор x_0, вектор–функция $f(t, x, u)$, функции $F(x)$, $f^0(t, x, u)$ и компактное множество U заданы, D – множество допустимых процессов $v = (x(t), u(t))$.

Будем рассматривать случай, когда функции $F(x)$, $f^0(t, x, u)$ являются вогнутыми относительно x, а правые части фазовой системы линейны: $f(t, x, u) = A + Bu$.

Выделим из данной задачи подзадачу улучшения. Пусть имеется допустимый неоптимальный процесс $v_0 = (x_0(t),\ u_0(t)) \in D$. Требуется найти процесс $v = (x(t),\ u(t)) \in D$, такой что $I(v) < I(v_0)$.

Повторяя эту операцию, получим улучшающую последовательность допустимых процессов $\{v_s\} \subset D$, для которой $I(v_{s+1}) < I(v_s)$.

Опишем глобальный метод улучшения для данной задачи.

Определим функцию улучшения в линейной форме $\phi(t, x) = y(t)x$ и составим для нее следующую конструкцию:

$$H(t, y, x, u) = y^T Ax + y^T Bxu - f^0(t, x, u) \tag{3}$$

Сопряженная система для данной задачи будет иметь вид:

$$dy/dt = -(A^T + B^T u_0)y, \quad y(T) = -F_x(x_0(T)). \tag{4}$$

Таким образом, получаем следующий алгоритм улучшения:

1. Зададим начальное управление $u_0(t)$, из уравнения процесса (1) и начальных условий (2) определим траекторию $x_0(t)$.

2. Решая задачу Коши (4), найдем сопряженную траекторию $y(t)$.

3. Новое управление находим из условия $u_1(t,x) = argmax H(t,x,u), u \in U$.

4. Подставляя полученное управление в систему (1) - (2), получим соответсвующую траекторию $x_1(t)$.

Рассмотрим случай, когда $U = [a,b]$ и $f^0(t,x,u) \equiv 0$. Обозначим $K(t,x) = y(t)^T Bx$. Имеем решение:

$$u_1(t) = \begin{cases} a, & \text{если } K > 0, \\ b, & \text{если } K < 0, \\ var, & \text{если } K = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть в момент времени $t = \tau$ $K(\tau) = 0$, т.е. значение управления оказывается нефиксированным в этой точке. Доопределим его сингулярным управлением, полученным дифференциированием равенства $K(t, x(t)) = 0$ при $t > \tau$:

$$u_{sing}(t) = u_0(t) + \frac{y^T(AB - BA)x}{y^T B^2 x}. \tag{6}$$

Теоретически сингулярная дуга улучшенной траектории $K(t) = 0$ автоматически реализуется как скользящий режим. Однако реализация такого подхода оказывается связана с существенными вычислительными трудностями. Регулярное управление $u_{sing}(t)$ снимает эти трудности.

Системы такого вида возникают в прикладных задачах физики. Следует выделить применение упомянутого итерационного метода к проблеме оптимизации управления квантовыми системами с помощью лазерного излучения.

Сравнение данного метода с градиентным показало, что на первых итерациях глобальный метод позволяет быстрее прибилизиться к оптимальному решению.

Литература

[1] V.F. Krotov *Global methods in optimal control theory.* NY.: Marcel Dekker, Inc, 1995. - 382 p.

[2] В.Ф. Кротов *Об оптимизации управления квантовыми системами.* ДАН, 2008, т. 423, № 3, стр. 316-319.

Алгоритмы управления пространственным движением двухколесной роботизированной платформы

Белотелов В.Н.

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

vbelotelov@imec.msu.ru

Рассматривается пространственное движение на горизонтальной шероховатой плоскости роботизированной платформы, представляющей собой несимметричное твердое тело, установленное на колесной паре. Центр масс тела не лежит в плоскости геометрической симметрии колесной пары. Управление системой осуществляется двумя независимыми электродвигателями постоянного тока, каждый из которых через редуктор создает момент между одним из колес и платформой.

Данная система обладает тремя степенями свободы и двумя управляющими воздействиями — напряжениями на левом и правом двигателе.

Найдены стационарные движения системы при постоянных напряжениях, приложенных к двигателям. Предложен алгоритм стабилизации вертикального положения платформы при движении центра колесной пары с постоянной скоростью по прямой.

Приведены результаты численных экспериментов с нелинейной моделью с учетом ограничений на напряжения, подаваемые на двигатели. Сравниваются результаты применения закона управления, рассчитанного для несимметричной платформы, с законом, рассчитанным без учета смещения центра масс во фронтальной плоскости. Показано, что закон управления, рассчитанный для симметричной платформы, обладает достаточной робастностью для управления несимметричной платформой при всех допустимых значениях смещения центра масс во фронтальной плоскости, при которых система не опрокидывается набок.

Литература

[1] В.Н. Белотелов, Ю.Г. Мартыненко, *Управление пространственным движением перевернутого маятника, установленного на колесной паре*//Изв. РАН: Механика твердого тела, 2006, №6, сс. 10-29

Оптимизация управления в модели «Человек-Природа» с учетом инноваций[1]

Блинов А.О.

Институт программных систем имени А.К.Айламазяна РАН,

Переславль-Залесский, Россия

sarmat@next.botik.ru

В работе рассматривается модификация модели, предназначенной для качественного анализа и демонстрации различных вариантов управления системой «Человек-Природа», которая учитывает инновации как важнейший фактор устойчивого развития. Она описана в [1] и представляет собой агрегированную версию моделей «Мир-1» и «Мир-2»[2].

Основными компонентами модели являются «Человек», «Природа» и инновации. Показатель благосостояния «Человека» зависит от состояния «Природы», темпа восстановления «Природы» и темпа инноваций. В свою очередь состояние «Природы» обуславливается отрицательным воздействием на нее «Человека» и темпом ее восстановления. В модели учтены коэффициенты устойчивости природной среды, а также коэффициенты затрат на инновации, затрат на восстановление природы, отрицательного воздействия «Человека» на «Природу», зависящие от инноваций. В роли управлений выступают темп инноваций и темп восстановления «Природы».

Решается следующая задача оптимального управления для этой модели. Требуется найти такие законы управления, которые максимизируют показатель благосостояния «Человека» в некоторый заданный момент времени при следующих условиях. Заданы начальные условия для благосостояния человека, состояния природы и инноваций. Заданы финальное состояние инноваций и состояние природы в допустимых границах. Темп инноваций неотрицателен, коэффициенты затрат на восстановление природы и инновации положительны.

Для решения поставленной задачи применяется метод кратных максимумов для

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00170-а)

определения функции Кротова в достаточных условиях оптимальности. Теоретические основы и конструкции применяемого метода описаны в [3].

Сначала рассчитывается пассивная траектория системы без управления, которая приводит к кризису в конце 21-го века (вначале благосостояние «Человека» растет и одновременно с этим ухудшается состояние «Природы» и наступает момент, когда постоянно ухудшающееся состояние «Природы» приводит к тому, что перестает расти благосостояние «Человека» и затем обе траетории приближаются к нулю). Выбирается год, который принимается за начало активного управления, и варианты начального инновационного индекса и коэффициентов инновационных затрат, что определяет начальные условия для поставленой задачи управления. Построенные в результате ее решения траектории представляют собой магистрали, так что выполнение заданных граничных условий происходит разрывным образом, практически при больших управляющих воздействиях. Это характерно для вырожденных задач с линейными управлениями[4-5].

Показано, что найденное оптимальное управление позволяет избежать, прогнозируемого при отсутствии управления, кризиса и обеспечить устойчивое развитие системы так что индекс благосостояния «Человека» растет а индекс состояния «Природы» остается в допустимых границах.

Литература

[1] *Модели управления природными ресурсами.* /Под ред. В.И.Гурмана. - М.: Наука, 1981.

[2] Медоуз Д.Х., Медоуз Д.Л. Рендерс Й., Беренс III Вильям. *Пределы роста.* М.: Изд-во МГУ, 1993.

[3] Гурман В.И. *Принцип расширения в задачах управления.* - М.: Наука. Физматлит, 1997.

[4] Гурман В.И. *Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений* //Автоматика и телемеханика, 2003, № 3.

[5] Гурман В.И., *Ухин М.Ю. Магистральные решения в задачах оптимизации стратегий развития регионов* //Автоматика и телемеханика, № 4, 2004.

Вырожденные задачи оптимального управления[1]

Гурман В.И.

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Россия

gurman@cprc.botik.ru

Рассматривается специальный класс задач оптимального управления, получивших название *вырожденных*, охватывающий многочисленные реальные задачи, которые плохо поддаются или вообще не поддаются непосредственному исследованию общими методами оптимального управления.

Эти трудности имеют глубокие причины: присутствие в системе основных связей — дифференциальных связей или дискретных цепочек — скрытых пассивных связей, т.е. таких, исключение которых не меняет искомого решения. Предложен общий подход, который по существу и состоит в поиске и исключении пассивных связей. При этом происходит не только регуляризация, что позволяет привлечь для исследования известные классические методы, но и упрощение задачи, т.е. особенность ее не только устраняется, но даже "утилизируется".

Цель этй лекции — дать обзор результатов соответствующей теории и ее приложений, нашедших отражение в монографиях [1-4] и многочисленных статьях. Ядро этой теории составляет определенное преобразование системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in \mathbf{T} = [t_I, t_F],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbf{U}(t,x) \subset \mathbb{R}^p \tag{1}$$

с неограниченным множеством скоростей $\mathbf{V}(t,x) = f(t,x,\mathbf{U}(t,x))$.

Вводится вспомогательная система, описывающая асимптотически поведение исходной при больших скоростях (называемая*предельной системой*):

$$\frac{dx}{d\tau} = l \in \mathbf{K}(t,x). \tag{2}$$

Здесь t — параметр, а $\mathbf{K}$ — объединение всех пределов $l = \lim v_q|v_q|^{-1}$ при $|v_q| \to \infty$, $\{v_q\} \subset \mathbf{V}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00170

Пусть $y = \eta(t,x)$, $\quad y \in \mathbb{R}^m$, $0 < m < n$, — наибольшее многообразие полной управляемости (3). Строится система, называемая *производной системой*:

$$\dot{y} = \eta_x f(t,x,u) + \eta_t, \quad u \in \mathbf{U}(t,x), \quad y = \eta(t,x). \tag{3}$$

Множество $\mathbf{E}$ кусочно-непрерывных функций $\hat{x}(t)$, удовлетворяющих (3), является расширением множества $\mathbf{D}$ кусочно-гладких $x(t)$ удовлетворяющих (1). Справедливо следующее утверждение (при естественных предположениях).

Теорема 1 [4]. Для любой $\hat{x}(t) \in \mathbf{E}$ существует последовательность $\{x_s(t)\} \subset \mathbf{D}$, сходящаяся к $\hat{x}(t)$ по мере на заданном ограниченном промежутке $\mathbf{T}$ при этом $x_s(t_\alpha) \to \hat{x}(t_\alpha)$ для любого заданного конечного множества точек $\{t_\alpha\} \subset \mathbf{T}$.

Любое решение производной системы $x(t)$ рассматривается как обобщенное решение исходной, называемое *импульсным режимом.* В общем случае это *импульсный скользящий режим.* Однако для систем с неограниченным линейным управлением типичные обобщенные решения $\hat{x}(t)$ кусочно-непрерывны, т.е. содержат конечное число импульсов на любом ограниченном промежутке. Каждый непрерывный участок $x(t)$, удовлетворяющий исходной дифференциальной связи, называется *магистралью.* Иными словами такое решние может рассматриваться как движение вдоль магистралей с быстрыми (в пределе – мгновенными) переходами с одной магистрали на другую.

Естественно, первыми представителями вырожденных задач являются задачи со свободным правым концом для рассмотренных выше систем с неограниченным множеством скоростей . Пассивные связи исключаются при замене исходной дифференциальной системы производной системой мньшего порядка. Таким путем получена серия важных теоретических результатов, таких как нелокальные условия оптимальности и алгоритмы улучшения, обобщенные уловия Понтрягина и Беллмана для импульсных режимов.

"Магистральный" подход применим и к вырожденным задачам с ограниченными управлениями. Он тесно связан с развитым на основе теории достаточных условий Кротова специальным способом задания разрешающей функции — *методом кратных максимумов* [2, 3].

Предложены также аналоги этих методов для дискретных задач оптимального управления.

Среди приложений отмечается в первую очередь широкий класс задач управления периодическими процессами при неограниченном времени, в частности, управления маневрами космических аппаратов. Далее рассматривается класс прикладных задач, характерных для экономических и социо-эколого-экономических приложений на типичных моделях с большим числом линейных управлений, когда предложенные методы становятся особенно эффективными, приводя к радикальному понижению порядка задачи. Дается также краткий обзор приложений в других областях.

Литература

[1] Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. *Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М: Машиностроение, 1969.*

[2] Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.*

[3] Гурман В.И. *Вырожденные задачи оптимального управления.— М.: Наука, 1977.*

[4] Гурман В. И. *Принцип расширения в задачах управления. М: Наука·Физматлит, 1985, 1997.*

[5] Gurman V.I. *The extension principle in the problems of sustainable development, Moscow: Fizmatlit, 2006.*

Оптимизация стратегии устойчивого развития региона[1]

Гусева И.С.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

ig_19@mail.ru

Для оптимизации стратегии устойчивого развития региона строится концептуальная модель [1], описываемая следующими соотношениями:

$$c = (E - A)y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^d d - B^d u^d, \tag{1}$$

$$\dot{r} = \dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) - Cy - Du - D^z u^z + C^z z + im^r - ex^r, \tag{2}$$

$$\dot{k} = u - [\delta]k, \quad \dot{k^z} = u^z - [\delta^z]k^z, \quad \dot{k^d} = u^d - [\delta^d]k^d, \tag{3}$$

$$0 \le y \le \Gamma(k), 0 \le z \le \Gamma(k^z), 0 \le d \le \Gamma(k^d), \tag{4}$$

$$\dot{\theta} = -([d] + H_{inv} + [H_{dif}])(\theta - \bar{\theta}), \quad \theta(0) = 0, \tag{5}$$

$$x^i = x_0^i(1 + \theta_j \alpha_{ij}), \; i \in I_j, \; \sum_{i \in I_j} \alpha_{ij} = 1, \tag{6}$$

где c – конечное потребление; y, z, d – векторы выпусков продукции в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах; (k, k^z, k^d), (u, u^z, u^d) — основные фонды и инвестиции; r — вектор индексов состояния природной среды и социума; θ – вектор инновационных индексов.

В качестве критерия оптимальности рассматривается максимум величины функционала благосостояния, определяющего зависимость между конечным потреблением и ценовыми поправками за вычетом штрафа за нарушение условий устойчивого развития, при экспоненциальном росте численности населения

$$\dot{\Pi} = (pc - S(r))\, e^{-\rho t}, \tag{7}$$

$$\Pi(0) = 0, \quad k(0) = k_0, \quad k^z(0) = k_0^z, \quad k^d(0) = k_0^d, \quad r(0) = r_0, \quad \theta(0) = 0,$$

$$\lambda_{min} L \le ly + l^z z + l^d d \le \lambda_{max} L,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-90203-Монг-а).

$$\sum_i u^i + \sum_k u^{zk} + \sum_j u^{dj} \le U,$$

где l, l^z, l^d – трудоемкости, L – население, U – располагаемые инвестиции.

В докладе будут рассмотрены сценарии возможного развития условного региона [2, 3]. Также будет описано решение задачи: нахождение магистрального решения путем преобразования к производной задаче [4], дальнейшая его аппроксимация решением исходной системы (1) – (6) по правилу экстремального прицеливания, решение полученной задачи рассматривается как эффективное начальное приближение, которое затем улучшается методом последовательного улучшения. По этой схеме составлен алгоритм вычислений, реализованный на MAPLE.

Литература

[1] В.И. Гурман, Н.Э. Кульбака, Е.В. Рюмина. *Моделирование социо-эколого-экономических систем.* Переславль-Залесский: Изд-во Университета города Переславля, 2004. 147 с.

[2] С.А. Ачитуев, И.С. Гусева. *Оптимизация стратегии устойчивого развития региона* // Вестник Бурятского государственного университета. Сер. 9: Математика и информатика. 2009. С. 10 – 17.

[3] С.А. Ачитуев, И.С. Гусева. *Об одной задаче оптимального управления в эколого-экономической модели* // Вестник Бурятского государственного университета. Сер. 9: Математика и информатика. 2008. С. 138 – 145.

[4] М.Ю. Ухин, С.А. Ачитуев. *Оптимизация стратегий развития региона на многокомпонентной модели* // Автоматика и телемеханика. 2008. Т. 69, № 3. С. 178-189.

Об одной модификации метода криволинейного поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления[1]

Зароднюк Т.С.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

tz@icc.ru

В большинстве известных подходов к построению методов невыпуклой оптимизации решение задачи разделяется на две стадии: „глобальную“, на которой выполняется широкое сканирование вариабельного пространства, и „локальную“, направленную на локальное уточнение полученного решения (см., например, [1]). Сочетание различных методов на каждой стадии, а также порядок чередования стадий и определяет конкретный вычислительный алгоритм. Представляется итересной идея разработать алгоритм, сочетающий элементы глобального сканирования и локального спуска на каждой итерации.

В работе рассматривается модификация метода „криволинейного поиска“ для нахождения глобального экстремума в невыпуклой задаче оптимального управления (ЗОУ) с прямыми ограничениями на управление. Предлагаемый подход представляет собой простейшую схему последовательных вариаций в пространстве управлений, использующую комбинирование рекордного и вспомогательных управлений с проецированием на допустимый параллелепипед [2]. Для комбинации управлений используются полиномы различных степеней (построение вариации управления в виде полинома первой степени требует одно вспомогательное управление, второй степени - два и т.д.). В терминальное фазовое пространство вариации управления проецируются в виде кривых линий, покрывающих множество достижимости, вдоль которых и осуществляется поиск наименьшего значения функционала на каждой итерации. После выполнения заданного числа итераций рассматриваемого метода проверка точности достижения локального экстремума выполняется стандартным алгоритмом, в качестве которого использована эталонная комбинация метода сопряженных градиентов и метода приведенного градиента. Формирование модифи-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-07-00267), РГНФ (проект № 09-02-00650), интеграционного проекта СО РАН-УрО РАН № 85.

каций предлагаемого алгоритма основано на использовании различных способов генерации вспомогательных управлений (в виде „сплайнов“, релейных и кусочно-линейных функций).

Проведено сравнение результатов расчетов, полученных с помощью программной реализации модификации метода „криволинейного поиска“ и метода „случайного мультистарта“. В использованных тестовых задачах удалось найти известное из первоисточника решение - проведенные расчеты подтверждают работоспособность предложенного алгоритма.

Литература

[1] A. Zhigliavsky, A. Zilinskas, *Stochastic global optimization*, Springer Science-Business Media, 2008. 262 p.

[2] Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., *Метод „криволинейного“ поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления*, Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - Иркутск: ИрГУПС (в печати).

Управление вращательно-поступательным движением космического аппарата при минимальном расходе топлива: математическая формулировка задачи

Карамзин Д.Ю., Перейра Ф.

В настоящем докладе мы рассмотрим задачу управления поступательным и вращательным движением космического аппарата при минимальном расходе топлива. Кроме этого, укажем на новое приложение смешанных ограничений в этой области.

Наше исследование тесно связано с понятием импульсного управления. Теория импульсных управлений изучалась в работах В.И. Гурмана, В.А. Дыхты, Н.Н. Красовского, А.Б. Куржанского [1, 2, 3, 4] и многих других авторов в нашей стране и за рубежом. Здесь мы предлагаем обобщенное понятие импульсного управления, которое позволяет нам управлять траекторией корабля на разрыве динамической системы (т.е. в момент импульса) и учитывать тем самым такие факторы как, например, изменение центра масс корабля (связанное с расходом топлива), а также необходимую коррекцию в его вращательном движении, так как вращательное движение подвергается возмущению из-за поступательного движения.

Основные результаты теоретического исследования по обобщенным задачам импульсного управления будут представлены в [5].

Список литературы

[1] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. Теоретические основы технической кибернетики. М. Наука. 1977г.

[2] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000.

[3] Красовский Н.Н. Теория управления движением, Москва, 1968.

[4] Куржанский А.Б. Оптимальные системы с импульсными управлениями. Дифференциальные игры и задачи управления. АН СССР, Свердловск, 1975, стр. 131–156

[5] A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. On Constrained Impulsive Control Problems: Controlling System Jumps. Journal of Mathematical Sciences, 2010, в печати.

Решение задачи восстановления изображения методами вариационного исчисления[1]

Касимов В.М.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

mamedich@gmail.com

Инвариантная субриманова задача на группе движений плоскости может быть сформулирована следующим образом. По заданным двум точкам на плоскости и двум векторам в этих точках требуется найти кривую, выходящую из первой точки с первым касательным вектором и приходящую во вторую точку со вторым касательным вектором. При этом кривая должна иметь минимальную длину в пространстве (x, y, θ), где x, y — координаты на плоскости, а θ — угол наклона касательного вектора кривой. Данную задачу можно рассматривать как задачу о движении робота на плоскости. Для задачи о движении робота написана программа поиска траектории движения для произвольно заданных начального состояния $q_0 = (x_0, y_0, \theta_0)$ и конечного $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$.

В работе была рассмотрена следующая задача о штрихах. На плоскости задан контур, часть которого скрыта от наблюдателя. Известны конечные точки контура и касательные к контуру в этих точках. Требуется найти кривую, выходящую из одной точки и приходящую в другую, так чтобы углы наклона кривой в начальной и конечной точках соответствовали углам наклона касательных к исходному контуру с точностью до π. При этом выбирается кривая, имеющая минимальную длину в пространстве (x, y, θ), где x, y — координаты на плоскости, а θ — угол наклона касательного вектора кривой.

Для решения задачи о штрихах была написана программа в системе Wolfram Mathematica.

В докладе будет описан алгоритм решения задачи о штрихах и применение решения к задачи о восстановлении изображения постоянной яркости.

Литература

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00246-а)

[1] I. Moiseev, Yu.L. Sachkov, Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, принята к публикации.

[2] J. Petitot, The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure, *J. Physiology - Paris* 97 (2003), 265–309.

[3] В.М. Касимов. Субриманова задача на группе движений плоскости. *Программные системы: теория и приложения* (к пятнадцатилетию УГП им. А. К. Айламазяна) // Сборник трудов научно-практической совместной конференции студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников ИПС РАН и Университета города Переславля им. А. К. Айламазяна / В двух томах. – г. Переславль-Залесский: Издательство УГП, апрель 2008, т.1, с. 133–148

О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с граничными и нелокальными условиями первого и второго родов

Кулешов А.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, Москва, Россия

losos@comtv.ru

Исследуются смешанные задачи для уравнения колебаний струны на отрезке с нулевыми начальными условиями и с граничными и нелокальными условиями первого и второго родов.

Рассмотрены смешанные задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, (x,t) \in [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T] \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и с одной из следующих совокупностей граничных и нелокальных условий:

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu(t) \\ u(l,t) - \alpha u(x_0,t) = \nu(t), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu(t) \\ u_x(l,t) - \alpha u_x(x_0,t) = \nu(t), \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu(t) \\ u(l,t) - \alpha u(x_0,t) = \nu(t), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu(t) \\ u_x(l,t) - \alpha u_x(x_0,t) = \nu(t), \end{cases} \tag{6}$$

В условиях (3)-(6) x_0 удовлетворяет неравенству $0 \leqslant x_0 < l$, α - произвольная константа.

В докладе будет представлен явный вид обобщенного решения указанных смешанных задач, а также рекуррентный алгоритм вычисления входящих в решение постоянных коэффициентов.

Список литературы

[1] В. А. Ильин, *Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36, N 11. с. 1513 - 1528.*

[2] В. А. Ильин, *Единственность обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, N 5. с. 672 - 680.*

[3] В. А. Ильин, *Аналитический вид оптимального граничного управления смещением на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // Доклады Академии наук. 2008. Т.420, N 3. с. 309 - 313.*

[4] В. А. Ильин, *Оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // Доклады Академии наук. 2008. Т.420, N 4. с. 442 - 446.*

[5] В. А. Ильин, *Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, N 11. с. 1487 - 1498.*

[6] А. А. Холомеева, *Оптимизация нелокального граничного управления колебаниями струны с закрепленным концом за произвольный кратный 2l промежуток времени // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, N 5. с. 696 - 700.*

Интеллектуальная система для решения задач оптимального управления с вычислительными особенностями[1]

Маджара Т.И.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

taras@icc.ru

Практика численного исследования задач оптимального управления с использованием современных программных комплексов [1-4] показывает, что далеко не всегда удается провести решение от начала и до конца без использования специальных подходов, подразумевающих многократный запуск комплекса в совокупности с изменением программной постановки задачи. В частности, это связано с возникновением в процессе счета разного рода нештатных ситуаций, следствием которых является аварийное завершение работы программного комплекса. Проблема построения регулярного вычислительного процесса в таких случаях является актуальной.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, (проект № 09-07-00267)

Рассматривается задача оптимального управления (ЗОУ) в классической постановке которая:

1. Имеет решение (множество допустимых не пусто);

2. Имеет хотя бы одно управление, при котором в динамической системе нарушаются "условия роста"[5], гарантирующие существование решения на всем отрезке времени или нарушаются области определения элементарных математических функций, входящих в ее правую часть.

Подходами, хорошо зарекомендовавшими себя при решении данного класса задач, можно назвать методы продолжения по параметру [6], расширяющие исходную задачу до параметрического семейства. Выбор конечной, монотонной последовательности значений параметра, при котором соответствующие задачи оптимального управления из параметрического семейства решались бы комплексом в штатном режиме, зачастую, основывается лишь на интуитивных представлениях вычислителя-эксперта о ходе процесса решения.

В докладе предлагается вычислительная технология, расширяющая традиционную архитектуру построения программных комплексов для решения ЗОУ до двухуровневой иерархии. Функциями верхнего (управляющего) уровня в контексте рассматриваемого класса задач являются:

1. Построение и численное исследование аппроксимирующего параметрического семейства;

2. Управление технологическими этапами решения ЗОУ;

3. Обеспечение интерфейса взаимодействия с пользователем.

Нижний (исполнительный) уровень реализуется вычислительным комплексом для решения ЗОУ, построенным по традиционной схеме, за тем отличием, что он управляется не непосредственно конечным пользователем, а верхним уровнем представленной архитектуры. Управляющий уровень реализован в виде экспертной системы, основанной на правилах. Помимо традиционного "консультационного"режима она имеет возможность сама управлять ходом решения, тем самым существенно повышая степень автоматизации существующих программных комплексов для решения ЗОУ.

Литература

[1] Федоренко Р.П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, М: Наука, 1978. 488 с.

[2] Евтушенко Е.Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, М.: Наука, 1982. 432 с.

[3] Тятюшкин А.И., *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем*, Новосибирск: Наука, 1992.193 с.

[4] Горнов А.Ю., Диваков А.О., *Программный комплекс OPTCON для решения задач оптимального управления. Руководство пользователя*, Иркутск, 1990. 36 с.

[5] Филлипов А.Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, М: Наука, 1985.

[6] 8. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М, *Методы анализа нелинейных динамических моделей*, М: Мир, 1991. 368 с.

Методы слабого улучшения второго порядка для задач оптимального управления логико-динамическими системами[1]

Малтугуева Н.С.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

malt-nadezhda@yandex.ru

На фиксированном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ рассматривается управляемая динамическая система вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad y(t) \in Y(t, x(t), y(t-0)), \tag{1}$$

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08-01-00156а)

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0,\ y(t_0 - 0) = y_0. \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in \Omega \subset Z^r$, Ω — конечное множество состояний дискретной компоненты, $x_0 \in R^n$, $y_0 \in \Omega$, отображение $Y : T \times R^n \times \Omega \to 2^\Omega$ описывает логику дискретных переходов. Предполагается, что множество $U \subset R^m$ компактно, функция $f : T \times R^n \times \Omega \times R^m \to R^n$ кусочно непрерывна по t и непрерывна по (x, u) для каждого $y \in \Omega$. Также предполагается, что функция $u(\cdot)$ кусочно непрерывна на T, $x(\cdot)$ непрерывна и кусочно дифференцируема, $y(\cdot)$ — целочисленная кусочно постоянная и непрерывная справа на T функция с конечным числом точек разрыва, считается, что $y(\cdot)$ имеет только один скачок в данный момент времени. Множество троек функций $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ с описанными свойствами, удовлетворяющих условиям (1)–(2) обозначается через $\mathcal{D}$, предполагается, что $\mathcal{D} \neq \emptyset$. На множестве $\mathcal{D}$ рассматривается задача оптимального управления:

$$I(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = F(x(t_1), y(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), y(t), u(t))dt +$$

$$+ \sum_{\tau} g^0(\tau, x(\tau), y(\tau), y(\tau - 0)) \longrightarrow \min .$$

Здесь функция F непрерывна по x, f^0 кусочно непрерывна по t, непрерывна по (x, u), g^0 — ограничена, τ пробегает множество моментов скачков функции y.

В докладе будет описан метод слабого улучшения второго порядка для поставленной задачи, исследовано свойство релаксационности, рассмотрены примеры.

Литература

[1] В.А. Батурин, Д.Е. Урбанович, *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения*, Новосибирск: Наука, 1997.

[2] А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев, *Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами*, Автоматика и телемеханика. 1987. № 7. С. 47–52.

Управление нелинейными пятимерными системами на основе нильпотентной аппроксимации[1]

Маштаков А.П.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

alexey.mashtakov@gmail.com

Рассмотрена задача управления:

$$\dot{x} = u_1(t)X_1(x) + u_2(t)X_2(x), \qquad x(0) = x_0,\ x(T) = x_1,$$

где $x \in \mathbb{R}^5$, $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, и X_1, X_2 — гладкие векторные поля такие, что управляемая система удовлетворяет условию полного ранга, то есть вектор роста равен $(2, 3, 5)$.

Требуется найти управление, переводящее систему из начального состояния x_0 в конечное состояние x_1 с заданной точностью ε.

Предложен итерационный алгоритм поиска управления, основанный на построении нильпотентной аппроксимации в окрестности конечного состояния и точном решении задачи управления приближенной системой. Приведен алгоритм построения нильпотентной аппроксимации в привилегированных координатах. Представлен способ выбора координат, в которых нильпотентная аппроксимация принимает канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1, \\ \dot{y} &= u_2, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_2, \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_1. \end{cases}$$

Решена задача управления канонической нильпотентной системой в классе кусочно–постоянных управлений. На основе найденного решения для нильпотентной канонической системы строится приближенное решение исходной нелинейной задачи.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00246-а)

Итерационный алгоритм поиска управления реализован в виде модуля системы „Mathematica“ и использован для решения задачи управления системой, описывающей качение шара по плоскости без прокручиваний и проскальзываний, и системой, моделирующей движение машины с двумя прицепами.

Литература

[1] Аграчёв, А.А., Сачков, Ю.Л., *Геометрическая теория управления*, Физматлит, Москва, 2005, 391,

[2] Venditelli, M., Oriolo, G., Jean, F., Laumond, J.-P., *Nonhomogeneous nilpotent approximations for nonholonomic systems with singularities*, Transactions on Automatic Control, IEEE Control Systems Society, V. 49, 2004, 261–266,

[3] Маштаков, А.П., *Управление ориентацией сферы, катящейся по плоскости*, Материалы XII научной студенческой конференции университета города Переславля им. А. К. Айламазяна, г. Переславль-Залесский, 2007,

[4] Аграчёв, А.А., Сарычев А.В., *Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем*, ДАН СССР., № 295, 1987, 777–781,

[5] Hermes H., *Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems*, V. 33, No. 2, 1991, 238–264,

[6] Bellaiche A., *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, Birkhäuser, Basel, Swizerland, 1996, 1–78.

Реализация процедур многомерной аппроксимации на примере функции двух переменных [1]

Михайлов К.В.

Университет города Переславля им А.К. Айламазяна, Переславль-Залесский, Россия

kostya.mihailov@gmail.com

В данной работе описана программная реализация процедуры аппроксимации функции двух переменных методом наименьших квадратов (МНК) [1], [2].

Обозначим приближаемую функцию $f(x)$, $x \in R^2$, аппроксимирующую конструкцию обозначим

$$\varphi(x, \psi_j), \tag{1}$$

где $\{\psi_j\}$ - набор коэффициентов, подлежащих определению, $j = 1, \dots, \alpha$. Требуется решить следующую задачу минимизации:

$$S(x, \{\psi_j\}) = \sum_{i=1}^{\beta} (\varphi(x_i, \psi_j) - f(x_i))^2 \to \min_{\{\psi_j\}}, \tag{2}$$

где β - количество узлов аппроксимации, x_i – узел аппроксимации, а $f(x_i)$ и $\varphi(x_i, \psi_j)$ – значение приближаемой функции и приближающего полинома в узлах аппроксимации, соответственно.

Программа на языке Си реализует метод наименьших квадратов для функции $f(x^1, x^2)$. Исходными данными для этой программы являются границы изменения диапазона переменных x^1, x^2 и количество узловых точек на каждом из диапазонов.

На первом шаге алгоритма выполняется построение регулярной сетки узлов аппроксимации по переменным x^1, x^2 и, затем, вычисляются значения функции $f(x^1, x^2)$ в узловых точках.

На втором шаге выполняется построение аппроксимирующего полинома по переменной x^2. Для его представления в программе используется односвязный список. Количество элементов списка определяется степенью полинома, его элементами являются структуры, описывающие мономы. Каждая такая структура состоит из следующих полей:

[1] Работа выполнена при финансовой поддржке РФФИ, (проект № 08-01-00274-а)

1. коэффициент $\{\psi_j\}$, вещественное число;
2. степень x_i, целое число;
3. x_i – значение узловой точки, вещественное число;
4. указатель на следующий моном полинома.

Далее выполняется построение аппроксимирующего полинома по переменной x^1. Он имеет похожую структуру, но вместо коэффициента ψ_j в нём хранится ссылка на соответствующий полином по переменной x^2.

Для работы с набором функций $\varphi(x_i, \psi_j)$ используется массив указателей на начала списков, описывающих эти функции, в поля структур которых записаны соответствующие значения (кроме поля ψ_j, значение которого нужно вычислить).

На третьем шаге алгоритма выполняется построение функции S, вычисляющей сумму квадратов отклонений приближающей функции от приближаемой. Она так же представлена в программе с помощью списка, элементами которого являются структуры, описывающие квадрат разности приближающей и приближаемой функции.

На четвёртом шаге алгоритма выполняется вычисление производных функции S по набору $\{\psi_j\}$ и приведение подобных слагаемых. Все эти операции реализованы как процедуры работы с односвязными списками.

На пятом шаге алгоритма работает модуль, решающий полученную систему линейных уравнений методом Гаусса. Полученные значения коэффициентов $\{\psi_j\}$ далее позволяют вычислить значения аппроксимирующей конструкции в узловых точках.

По результатам вычислительных экспериментов и построенным по ним графикам можно сказать, что композиционные полиномы хорошо подходят для аппроксимации функции двух переменных. С увеличением числа узлов, а значит, и числа коэффициентов аппроксимирующей конструкции, аппроксимирующая функция становится более близкой к аппроксимируемой на интервале $x^1, x^2 \in [0; 1]$.

Литература

[1] Хемминг Р. В., *Численные методы*, — М.: Наука, 1968.

[2] Ухин М.Ю. *Приближенный синтез дискретного оптимального управления*.-М.: Физматлит, 2006.

Построение минимизирующих последовательностей в системах с неограниченным годографом[1]

Моржин О.В.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

oleg_morzhin@yahoo.com

Изучается проблема построения обобщенного решения в классе вырожденных задач оптимального управления, линейных по неограниченным управлениям [1, 2]:

$$I(u,x) = F(x(t_F)) \to \inf, \quad T = [t_I, t_F], \tag{1}$$

$$\dot{x} = \langle h(x,t), u\rangle + g(x,t), \quad x(t_I) = x_I, \quad x(t) \in \mathbf{R}^n, \quad u(t) \in \mathbf{R}^m, \tag{2}$$

$$h^i(x(t)) \le 0, \quad i = \overline{1,q}, \quad t \in T, \quad h^j(x(t_F)) = 0, \quad j = \overline{q+1,p}. \tag{3}$$

Ранее при разработке методов [2] решения вырожденных задач вида (1) – (3) постулировалось выполнение условия Фробениуса (условие корректности, робастности):

$$\frac{\partial h_i(x,t)}{\partial x} h_j(x,t) - \frac{\partial h_j(x,t)}{\partial x} h_i(x,t) = 0 \ \ \forall\, t, x, \quad i,j = \overline{1,m}.$$

В работе [3] показано, что условие Фробениуса не является необходимым для метода преобразований [1] и позволяет преобразовать исходную систему к производной системе, менее сложной, чем его выполнение в системах того же порядка.

В статье [4] предложен подход к представлению предельной системы [1] как управляемой с неограниченными линейными управлениями и ее последовательном преобразовании к эквивалентным системам понижающегося порядка, называемым производными системами.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00945-а).

Статья [5] и настоящий доклад посвящены процедуре и вопросам ее применения для построения минимизирующих последовательностей в задачах вида (1) – (3), где не выполняется условие Фробениуса, на основе предложенного в [4] подхода. Рассмотрены соответствующие примеры, иллюстрирующие принципиальную возможность построения обобщенных решений в таких задачах.

Литература

[1] В.И. Гурман *Принцип расширения в задачах управления.* М.: Наука. Физматлит, 1997. 288 с.

[2] В.А. Батурин, Д.Е. Урбанович. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* Новосибирск: Наука, 1997. 175 с.

[3] Гурман В.И., Сачков Ю.Л. *Представление и реализация обобщенных решений управляемых систем с неограниченным годографом* // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 72-80.

[4] Гурман В.И., Ни Минь Кань. *Траектории импульсных режимов управляемых систем* // Известия Иркутского гос. ун-та. Математика. – 2009. – Т. 2. (В печати.)

[5] Моржин О.В. *Построение минимизирующих последовательностей в системах с неограниченными управлениями* // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. – 2009. (В печати.)

Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевой задачи с проекционным отображением

Моржин О.В., Ушакова Н.В.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

oleg_morzhin@yahoo.com

Рассматривается задача оптимального программного управления со свободным правым концом:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t),t), u(t)\rangle + d(x(t),t))\,dt \to \inf, \quad T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t),t)u(t) + b(x(t),t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

в которой $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ – вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$ – вектор управления, $t \in T$. В качестве допустимых управлений рассматривается класс V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в выпуклом компакте $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы. Функции $A(x,t)$, $b(x,t)$, $a(x,t)$, $d(x,t)$ и их производные по x непрерывны по совокупности аргументов (x,t) на $R^n \times T$; функции $A(x,t)$, $b(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times T$. Семейство фазовых траекторий считается ограниченным: $x(t,u) \in X$, $t \in T$, $u \in V$, где $x(t,u)$ – решение системы (2) для допустимого управления $u(t)$ при $t \in T$, $X \subset R^n$ – выпуклый компакт.

В работе [1] предложена процедура улучшения управлений в нелинейных системах, основанная на решении специальной дифференциально-алгебраической краевой задачи. В рамках задачи (1) – (2) в докладе рассматривается процедура, использующая проекционное отображение для функции Понтрягина, где сопряженная переменная удовлетворяет модифицированной сопряженной системе. Процедура обладает возможностью улучшения особых управлений [2].

От краевой задачи для дифференциально-алгебраической системы, разрешая алгебраические связи, переходим к краевой задаче для дифференциальной системы по фазовой и сопряженной переменным. Численное решение вспомогательной краевой задачи осуществляется методом пристрелки с расчетом соответствующего параметра пристрелки итерационными методами (простой итерации, дихотомии). Обсуждаются вопросы алгоритмической и программной реализации. Представлены примеры численных экспериментов по тестовым задачам, иллюстрирующие эффективность подхода.

При решении прикладных задач реализуются, как правило, многометодные схемы расчета последовательности улучшающих управлений. Возможность процедуры улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума, позволяет продолжить процесс улучшения в многометодном расчете тогда, когда стандартные методы (условного градиента, проекции градиента, игольчатой линеаризации) становятся неэффективными. Поэтому процедура необходима в многометодных схемах решения задач оптимального управления.

В рамках предложенных в статьях [3 – 6] алгоритмов по численной оптимизации позиционных управлений нелинейными системами при заданном целевом множестве в границах их трубок управляемости (разрешимости) необходимо решать задачи оптимального программного управления как «элементарные операции», причем с терминальными ограничениями. В работах [3 – 6] используется аппарат расчета оптимальных программных управлений, базирующийся на редукции к задачам конечномерной оптимизации за счет дискретизации по управлению [7]. С не меньшим успехом могут применяться алгоритмы, основанные на предложенных в работе [1] и настоящем докладе процедурах. При этом учет терминальных ограничений-равенств может осуществляться как при помощи штрафных функционалов и модифицированных функционалов Лагранжа, так и при решении краевой задачи с интерпретацией этих ограничений как краевых условий.

Описанные выше подходы дают возможность разработать вычислительную технологию по решению задач оптимального программного и позиционного управления с единых позиций: алгоритмы аппроксимации множеств достижимости, разрешимости и оптимизации позиционных управлений основаны на алгоритмах улучшения программных управлений.

Литература

[1] Булдаев А.С., Моржин О.В. *Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач* // Известия Иркутского государственного университета. Математика. 2009. Т. 2, № 1.

[2] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Качественная теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1971. 508 с.

[3] Моржин О.В., Тятюшкин А.И. *Алгоритм метода сечений и программные средства для построения множеств достижимости* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 1. С. 5-11.

[4] Моржин О.В., Тятюшкин А.И. *Вычислительная технология оптимизации позиционных управлений в дифференциальных системах* // Программные продукты и системы. 2009. № 2. С. 103-107.

[5] Тятюшкин А.И., Моржин О.В. *Алгоритм численного синтеза оптимального управления* // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 109-118.

[6] Тятюшкин А.И., Моржин О.В. *Конструктивные методы оптимизации управлений в нелинейных системах* // Автоматика и телемеханика. 2009. № 5. С. 35-50.

[7] Тятюшкин А.И., Моржин О.В. *Методы оптимизации и программная система для решения прикладных задач оптимального управления* // Современные технологии. Системный анализ и моделирование. 2009.

Третье краевое условие в задачах граничного управления[1]

Никитин А.А.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

nikitin@proc.ru

Данная работа посвящена изучению задач граничного управления, основанных на смешанных задачах для волнового уравнения с неоднородным условием второго $u_x(0,\, t) = \mu(t)$ или третьего рода $u_x(0,\, t) - h_1 u(l,t) = \mu(t)$ на левом конце струны и с упруго закрепленным правым концом $u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0$. Под такими задачами понимается вопрос нахождения функции $\mu(t) \in L_2[0,T]$, такой, чтобы для решения $u(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ $\big($определение класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ см. в **[1]**$\big)$ рассматриваемой смешанной задачи с заданными начальными условиями в момент времени $t = T$ выполнялись заданные финальные условия.

При $T > 2l$ данная задача имеет бесконечно много решений. Поэтому может быть поставлена задача об определении среди них *оптимального*. При этом среди всех

[1]Работа поддержана грантом Роснауки 02.740.11.2009

функций $\mu(t)$, являющихся граничными управлениями, отыскивается та, которая доставляет минимум классическому интегралу граничной энергии $\int\limits_0^T \mu^2(t)dt$.

Трудность решения этой задачи состоит в отсутствии условия закрепления. Поэтому, кроме условия связи, являющегося равенством функций из L_2, потребовалось выписать еще одно условие согласования начальных и финальных смещений. Для решения поставленной задачи потребовалось разработать новый метод оптимизации, основанный на продолжении финальных функций на отрезок $[-T, T]$, а также использовать технику из работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева **[2]**. Функция $\mu(t)$, минимизирующая указанный интеграл выписывается в явном виде.

При изучении задачи с условиями третьего рода на обоих концах, используется недавний результат Ю.Р. Нестеренко **[3]**.

Литература

1. Ильин В.А., Дифференциальные уравнения, 2000, Т.36, №11, с. 1513 - 1528.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И., Дифференциальные уравнения, 2007, Т.43, №12, с. 1655-1663.
3. Нестеренко Ю.Р., Доклады академии наук, 2009, Т.426, №1, с. 29-31.

Программная реализация процедур многомерной аппроксимации [1]

Пармёнова Л.В.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

luba.parmyonova@gmail.com

Процедуры многомерной аппроксимации имеют обширную область применения, в частности, требуются для представления имитационных моделей. В связи с тем, что непосредственная аналитическая реализация как правило невозможна, совре-

[1]Работа выполнена при финансовой поддржке РФФИ, (проект № 08-01-00274-а)

менные исследователи вынуждены использовать аналитическую аппроксимацию функций многих переменных для применения теоретических методов. Конструктивных методов для реализации задачи многомерной аппроксимации предложено мало, и данная работа направлена на то, чтобы восполнить этот пробел.

Целью данной работы является реализация на языке программирования Си процедуры аппроксимации функций многих переменных, заданной своими значениями на некоторой сетке узлов, методом наименьших квадратов (МНК) [1], [2].

Аппроксимацией заданной функции называется нахождение такой функции, которая была бы близка к заданной. Узел аппроксимации – точка, используемая для построения аппроксимации. В этой точке может быть вычислено значение аппроксимируемой функции – узловое значение функции. Критерий “наименьшие квадраты” означает, что должна быть минимальной сумма квадратов разностей между значениями в узловых точках x_i приближаемой функции $f(x)$, $x \in R^n$ и приближающей

$$\varphi(x, \psi_j), \tag{1}$$

где $\{\psi_j\}$ - набор коэффициентов, подлежащих определению, $j = 1, \dots, \alpha$. Иными словами, требуется решить следующую задачу минимизации:

$$S(x, \{\psi_j\}) = \sum_{i=1}^{\beta} (\varphi(x_i, \psi_j) - f(x_i))^2 \to \min_{\{\psi_j\}}, \tag{2}$$

где β - количество узлов.

Для практической реализации во многих случаях удобно использовать регулярную (прямоугольную) сетку узлов и следующую конструкцию, представляющую собой композицию одномерных полиномов [2]:

$$\begin{aligned}\varphi(t, x(t)) = \; & \sum_{j_1=1}^{m_1} (x_1(t))^{j_1} \times \\ & \times \left(\sum_{j_2=1}^{m_2} (x_2(t))^{j_2} \left(\cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \psi_{j_1, j_2 \dots j_n}(t) (x_n(t))^{j_n} \right) \right),\end{aligned} \tag{3}$$

где $m_1, m_2, \dots m_n$ — количество узловых точек по каждой из координат. Если, в частности, число $m_i - 1$ совпадает с порядком i-го одномерного полинома то значения обеих фукций в узлах совпадут и тем самым будет решена задача интерполяции.

Программа на языке Си решает задачу минимизации (2). Программа запрашивает у пользователя размерность приближаемой функции $f(x)$, границы интервала, в котором задана каждая переменная, и степень аппроксимирующего полинома по каждой переменной m_i. На первом шаге алгоритма, реализованного в программе, выполняется построение регулярной сетки узлов аппроксимации и, далее, вычисляются значения функции $f(x)$ в узлах. На втором шаге алгоритма строятся аппроксимирующие полиномы по каждой переменной, которые представлены в программе односвязными списками. Эти полиномы используются для построения аппроксимирующей конструкции (3). На третьем шаге алгоритма выполняется построение функции $S(x, \{\psi_j\})$ и нахождение её частных производных по ψ_j. Эти операции реализованы как процедуры, выполняющиеся над односвязными списками, которые представляют функции $\varphi(x_i, \psi_j)$ и $S(x, \{\psi_j\})$. Для выполнения четвёртого шага алгоритма аппроксимации работает модуль программы, реализующий метод Гаусса решения системы линейных уравнений относительно ψ_j. На пятом шаге алгоритма вычисляются значения функций $\varphi(x_i, \psi_j)$ в узловых точках.

В качестве примера в программе рассматривается аппроксимация по МНК функции

$$f(x) = \cos(\sum_{i=1}^{n} x^i) + \sin(\prod_{i=1}^{n} x^i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} ix^i)/5$$

на промежутке $0 \leq x \leq 1$.

В дальнейшем планируется параллельная реализация программы.

Литература

[1] Хемминг Р. В., *Численные методы*, — М.: Наука, 1968.

[2] Ухин М.Ю. *Приближенный синтез дискретного оптимального управления*.-М.: Физматлит, 2006.

Синтез оптимальной автоматной части логико-динамической системы

Пегачкова Е.А.

Московский авиационный институт, Россия

pegachkova@mail.ru

Рассматриваются две задачи оптимального управления детерминированными логико-динамическими системами (ЛДС), динамическая часть которых описывается дифференциальными уравнениями, а логическая (автоматная) часть – рекуррентными включениями. Постановка первой задачи – активного гашения колебаний спутника – получена из известной задачи, исследованной В.И.Гурманом [1], добавлением в критерий качества управления штрафов, учитывающих неэффективный расход топлива при включении и выключении реактивного двигателя [2]. Таким образом, получаем задачу, в которой определяется оптимальное (конечное) количество запусков двигателя, а процессы, требующие бесконечного числа включений, отбрасываются как неоптимальные. Для синтеза оптимального управления была разработана программа, позволяющая находить приближенное решение задачи для различных параметров спутника, орбиты и функционала. Процесс оптимизации заканчивается проверкой выполнения необходимых условий оптимальности.

Вторая задача – это задача управления линейной ЛДС с квадратичным критерием качества [3], аналогичная классической проблеме А.М.Летова аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), но в классе ЛДС. По сравнению с классической проблемой рассматриваемая задача отличается дополнительными рекуррентными уравнениями, описывающими логическую часть ЛДС, а также наличием в критерии качества штрафных слагаемых за переключения логической части ЛДС. На основе достаточных условий оптимальности ЛДС выведены уравнения для оптимального управления с обратной связью. Интересно, что синтезируемое управление порождает процесс с мгновенными многократными переключениями автоматной части. В частности, возможен оптимальный процесс с бесконечным количеством переключений в фиксированный момент времени. Для динамической части ЛДС получено управление, реализуемое линейным регулятором, как и в задаче АКОР [4], а для автоматной части оптимальное управление описывается рекуррентными уравнениями. Для решения задачи управления линейными ЛДС с квадратичным критерием качества была разработана программа, позволяющая выполнять численное решение одномерных и двумерных задач данного класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №08-01-00157) и аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" 2009 - 2010 (проект 2.1.1/2904).

Литература

[1] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. - М.: Наука, 1977.

[2] Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез управления активной стабилизацией спутника на основе необходимых условий оптимальности логико-динамических систем // Вестник Московского авиационного института 2008, т.15, №2.

[3] Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами // Электронный журнал "Труды МАИ 2007, №27. - http://www.mai.ru

[4] Летов А.М. Динамика полета и управление. - М.: Наука, 1973.

Задачи оптимального управления на группах Ли[1]

Сачков Ю.Л.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

sachkov@sys.botik.ru

Ряд важных задач механики и робототехники формулируется как инвариантные задачи оптимального управления на группах Ли. В докладе будут рассмотрены родственные задачи такого рода, исследованные за последние годы:

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00246-а)

- Задача Эйлера об эластиках (стационарных конфигурациях упругого стержня),
- Задача об оптимальном движении мобильного робота на плоскости,
- Задача об оптимальном качении сферы по плоскости,
- Обобщенная задача Дидоны.

Будут описаны результаты, полученные в этих задачах на основе геометрических методов теории управления: экстремальные кривые, их локальная и глобальная оптимальность, оптимальный синтез, множества Максвелла, множества разреза, каустики, субримановы сферы.

Литература

[1] А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, М.: Физматлит, 2005.

[2] Сачков Ю.Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Мат. Сборник, 2006, Т. 197, № 4, С. 123-150.

[3] Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик // Доклады Академии Наук, том 417, № 1, ноябрь 2007, С. 23–25.

[4] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, *Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane*, ESAIM: COCV, accepted, available at arXiv:0807.4731v1, 29 July 2008.

[5] Yu. L. Sachkov, *Conjugate and cut time in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane*, submitted, available at arXiv:0903.0727v1 [math.OC], 4 March 2009.

Оптимизация граничного управления колебаниями струны упругой силой на одном конце и смещением на другом за достаточно большой промежуток времени [1]

Смирнов И.Н.

Московский Государственный университет им М.В. Ломоносова, Москва, Россия

reference20031@rambler.ru

В терминах обобщенного решения волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$$

с конечной энергией изучается вопрос о граничном управлении упругой силой $u_x(0,t) = \mu(t)$ на конце $x = 0$ и смещением $u(l,t) = \nu(t)$ на другом конце струны за промежуток времени $T = 4ln + \Delta$, $n = 0, 1, 2, ...$, $0 < \Delta \leq 4l$, обеспечивающим переход колебательного процесса из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x)\ ;\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \hat{\varphi}(x)\ ;\ u_t(x,T) = \hat{\psi}(x)\}$. Где $\varphi(x),\ \psi(x),\ \hat{\varphi}(x),\ \hat{\psi}(x)$ - произвольные функции из классов:

$$\varphi(x) \in W_2^1[0,l], \quad \psi(x) \in L_2[0,l], \quad \hat{\varphi}(x) \in W_2^1[0,l], \quad \hat{\psi}(x) \in L_2[0,l]$$

В докладе будет представлен явный аналитический вид оптимальных граничных управлений упругой силой $u_x(0,t) = \mu(t)$ из класса $L_2[0,T]$ и смещением $u(l,t) = \nu(t)$ $\hat{W}_2^1[0,T]$.

Литература

[1] Ильин В.А., Моисеев Е.И. *УМН. 2005. Т.60, номер 6. с. 89 - 114.*

[2] Ильин В.А., Моисеев Е.И. *Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, номер 11. с. 1558 - 1570.*

[3] Ильин В.А., Моисеев Е.И. *Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, номер 12. с. 1699 - 1711.*

[4] Ильин В.А., *Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36, номер 11. с. 1513 - 1528.*

[5] Ильин В.А., *УМН. 1960. Т.15, номер 2. с. 97 - 154.*

[1]Работа поддержана Грантом РФФИ №09-01-12155 и ГК №02.740.11.0199

[6] Васильев Ф.П., *Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31, номер 11. с. 1893 - 1900.*

[7] Lions J.L., *SIAM Rev. 1988. V.30, N 2. P. 1 - 68.*

[8] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.М.: Наука,(1988).

Нелокальные улучшения в квадратичных по состоянию задачах оптимального управления с терминальными ограничениями [1]

Трунин Д.О.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

hint@rambler.ru

Рассмотрим квадратичную по состоянию и линейную по управлению задачу оптимального управления

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(x,t)u + b(x,t),\ t \in T = [t_0,\ t_1],\\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U,\\ \Phi(u) = \langle c,\ x(t_1)\rangle \to \min,\\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1,m} < n.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R^r$ – управление, матричная функция $A(x,t)$ и вектор-функция $b(x,t)$ являются квадратичными по x и непрерывными по t. Начальное состояние $x^0 \in R^n$ и отрезок T фиксированы, $c_i = 0,\ i = \overline{1,m}$, множество U выпукло.

Обозначим через $x(t,u)$ решение задачи Коши (1) при $u = u(t)$.

Введем в рассмотрение множество доступных

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U,\ t \in T\},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00945-а, 09-01-90203-Монг-а), РГНФ (проект 09-02-00493-а).

и допустимых управлений в задаче (1)

$$W = \left\{ u \in V : x_i(t_1, u) = x_i^1,\ i = \overline{1, m} \right\}.$$

Функция Понтрягина в рассматриваемом классе задач имеет вид

$$H(p, x, u, t) = H_0(p, x, t) + \langle H_1(p, x, t),\ u \rangle,$$

где $H_0(p, x, t) = \langle p,\ b(x, t) \rangle,\ H_1(p, x, t) = A(x, t)^T p$.

Для управления $u^0 \in V$ и параметра $\alpha > 0$ образуем аналогично [1, 2] вектор-функцию

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u^0(t) + \alpha H_1(p, x, t)),\ p \in R^n,\ x \in R^n,\ t \in T,$$

где P_U – оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Поставим задачу улучшения управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством $\Phi(v) \le \Phi(u^0)$.

Метод улучшения

1. Для заданного $\alpha > 0$ найдем решение $(x^\alpha(t),\ p^\alpha(t)),\ t \in T$ краевой задачи

$$\begin{gathered}
\dot{x} = A(x, t) u^\alpha(p, x, t) + b(x, t),\ t \in T, \\
\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - \tfrac{1}{2} H_{xx}(p, x(t, u^0), u^0(t), t)(x - x(t, u^0)), \\
x(t_0) = x^0,\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1, m}, \\
p_j(t_1) = -c_j,\ j = \overline{m+1, n}.
\end{gathered}$$

2. Сформируем управление

$$v(t) = u^\alpha(p^\alpha(t), x^\alpha(t), t),\ t \in T.$$

Нетрудно показать, что

$$\Phi(v) \le \Phi(u^0).$$

Выделим основные особенности метода нелокального улучшения.

1. Нелокальное улучшение на множестве допустимых управлений без операции варьирования.

2. Возможность улучшения управления, удовлетворяющего принципу максимума за счет неединственности решения краевой задачи.

3. Трудоемкость методов определяется решением краевой задачи с непрерывной правой частью, которая существенно проще краевой задачи принципа максимума.

Литература

[1] В.А. Срочко. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* М.: Физматлит, 2000. 160 с.

[2] А.С. Булдаев. *Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем.* Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2008. 260 с.

Точная оценка критического параметра запаздывания

Трушков В.В.

Университет города Переславля, Переславль-Залесский, Россия

vladimir@trushkov.pereslavl.ru

В статьях [1], [2] были предложены способы оценивания параметра запаздывания h, при котором система

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \tag{1}$$

теряет устойчивость. Однако эти оценки не точны. Покажем, как получить точные оценки без анализа квазиполинома. Применим для оценки параметра h следующую теорему.

Теорема ([3]). *Если у системы* (1) *найдется пара собственных чисел* s_0 *и* $-s_0$, *то эти числа будут собственными и для системы*

$$\frac{dX_0}{d\tau} = X_0 A_0 + X_1 A_1, \qquad \frac{dX_1}{d\tau} = -A_1^T X_0 - A_0^T X_1. \tag{2}$$

Заметим, что потеря устойчивости системы (1) происходит, когда корни характеристической функции $G(s) = \det\left(sE - A_0 - A_1 e^{-sh}\right)$ попадают на мнимую ось комплексной плоскости. Но в силу вещественности коэффициентов уравнения $G(s) = 0$

наряду с корнем s_0 будем и корень $\overline{s_0}$. А в случае, когда корень s_0 лежит на мнимой оси, $\overline{s_0} = -s_0$. Поэтому для исследования вопроса о потере устойчивости надо выяснить, какие элементы спектра системы (2) лежат на мнимой оси, а потом найти такое h, при котором эти элементы спектра будут корнями уравнения $G(s) = 0$ Проиллюстрируем применимость этой процедуры на примерах, приведенных в [1].

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.9 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.9 & -0.5 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Собственные значения системы равны $s_0 = \pm i0.3067727\ldots$. Решив уравнение $G(s_0) = s_0^2 + \frac{s_0}{2} - \frac{19}{10} + 2e^{-s_0 h} = 0$ относительно h, получаем $h = 0.250246\ldots$. По методу Баркина получается оценка 0.2147, по методу Родионова — 0.207.

Пример 2. Обобщим систему из примера 1 следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix}$. О потери устойчивости имеет смысл говорить, только если она была при $h = 0$, т.е. матрица $A_0 + A_1$ — гурвицева. Это свойство имеет место тогда и только тогда, когда $b_2 < 0$, $b_1 + b_3 < 0$. Проводя аналогичные вычисления, получаем, что граница устойчивости находится по формуле

$$h^* = \frac{1}{\sqrt{-2b_1 - b_2^2 + \sqrt{4b_1b_2^2 + b_2^4 + 4b_3^2}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{b_2\sqrt{-4b_1 - 2b_2^2 + 2\sqrt{4b_1b_2^2 + b_2^4 + 4b_3^2}}}{\sqrt{4b_1b_2^2 + b_2^4 + 4b_3^2} - b_2^2} \right).$$

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.9 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.9 & -0.5 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0.7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Собственные значения системы (2) равны $s_0 = \pm i0.3214207\ldots$.

Решив уравнение $G(s_0) = s_0^2 + \frac{s_0}{2} - \frac{19}{10} + \frac{333}{100}e^{-s_0 h} - \frac{7}{5}e^{-2s_0 h} = 0$ относительно h, получаем $h = 0.809952\ldots$. По методу Баркина получается оценка 0.405, по методу Родионова — 0.390.

Автор благодарит проф. Б.Т. Поляка и проф. В.Л. Харитонова за внимание к работе.

Литература

[1] А.И. Баркин, *Устойчивость линейных систем с запаздыванием.* АиТ, 3 (2006), стр. 3–7.

[2] А.М. Родионов, *Об одном способе исследования устойчивости дифференциальных и дискретных уравнений с запаздыванием.* АиТ, 12 (1996), стр. 38–47.

[3] J. Louisell, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 228, pp. 140–157, Springer-Verlag.

Динамическое распределение ресурсов для приложений[1]

Трушкова Е.А.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

katerina@trushkova.pereslavl.ru

С помощью математической теории оптимизации динамических систем проводится исследование автоматического управления аппаратными ресурсами, которое способно учитывать ценность выделенных приложению ресурсов: количества виртуальных машин (ВМ), обеспечивающих работу приложения; оперативной памяти ВМ; доли физического процессора, предоставляемой ВМ, при текущей пользовательской нагрузке. Это позволит оптимально использовать ресурсы в процессе эксплуатации системы приложений, а именно, динамически добавлять или убирать

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08-01-00274-а)

ресурсы во время работы приложения с учетом потребностей и приоритетов других приложений системы.

Построим математическую модель задачи для системы n приложений, использующих m категорий ресурсов.

Пусть $v_i(t)$ — количество ВМ, обеспечивающих работу приложения i, в момент t. Обозначим через $r_{ij}(t)$ количество ресурса j, выделенного приложению i. Ограничения на количество ВМ и на использование ресурсов записываются в виде

$$v_i(t) \geq 1, \quad n \leq \sum_{i=1}^{n} v_i(t) \leq v^+, \quad r_j^- \leq r_{ij}(t) \leq r_j^+ v^+ - (n-1) r_j^-,$$
$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(t) \leq r_j^+ v^+, \quad r_j^- v_i(t) \leq r_{ij}(t) \leq r_j^+ v_i(t),$$

где v^+, r_j^-, r_j^+ — некоторые константы.

Предполагается, что каждое приложение имеет индивидуальный набор k_i характеристик, которые однозначно описывают его текущее состояние с точки зрения пользователя. При этом характеристики могут быть составлены либо на испытательном стенде до запуска приложения в эксплуатацию, либо непосредственно в процессе работы приложения. Обозначим через $p_{ik} = p_{ik}\left(v_i(t), r_{i1}(t), \ldots, r_{im}(t), L_i(t)\right)$ характеристику k приложения i, через $\tilde{p}_{ik}$ целевой уровень характеристики (желаемое значение характеристики, ниже которого она не должна опускаться).

С помощью функций

$$\sigma_i(t) = \sum_{k=1}^{k_i} \alpha_{ik} p_{ik}\left(v_i(t), r_{i1}(t), \ldots, r_{im}(t), L_i(t)\right), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

можно получить некоторую суммарную оценку характеристик каждого из приложений. Здесь через α_{ik} обозначены весовые коэффициенты, выбираемые согласно значимости каждой характеристики. Будем называть функции $\sigma_i(t)$ уровнями сервиса приложений.

Задача состоит в поддержании значения уровня сервиса (1) не ниже некоторого целевого уровня сервиса (поддержание каждой характеристики не ниже ее целевого уровня) на дискретном наборе моментов времени $T = \{t_0, t_0 + h, \ldots, t_0 + qh = t_1\}$. Данная задача равносильна минимизации отклонения уровня сервиса

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{k_i} \alpha_{ik} \sum_{t=0}^{q} \max\left\{0, \tilde{p}_{ik}(t_0 + th) - p_{ik}\left(v_i(t_0 + th), r_{i1}(t_0 + th), \ldots, L_i(t_0 + th)\right)\right\}$$

для системы приложений в совокупности, с учетом приоритета каждого из приложений. Обозначим через δ_i^+ максимум δ_i при всех допустимых значениях ресурсов (минимум δ_i, очевидно, равен нулю).

Тогда исходную задачу динамического распределения ресурсов можно поставить в виде дискретной задачи оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned}
&y_i(t+h) = y_i(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{k_i} \alpha_{ik} \max\left\{0, \tilde{p}_{ik}(t) - p_{ik}\left(v_i(t), r_{i1}(t), \ldots, r_{im}(t), L_i(t)\right)\right\},\\
&t \in T = [t_0, t_1], \quad y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n},\\
&v_i(t) \geq 1, \quad n \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i(t) \leq v^+, \quad r_j^- \leq r_{ij}(t) \leq r_j^+ v^+ - (n-1) r_j^-,\\
&\textstyle\sum_{i=1}^{n} r_{ij}(t) \leq r_j^+ v^+, \quad r_j^- v_i(t) \leq r_{ij}(t) \leq r_j^+ v_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}\\
&F\left(y(t_1)\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{y_i(t_1)}{\delta_i^+} \to \min,
\end{aligned}$$

где $y_i(t)$ — сумма отклонений уровня сервиса приложения i к моменту t, через β_i обозначены весовые коэффициенты, выбираемые согласно приоритету каждого приложения (большее значение весового коэффициента соответствует более высокому приоритету соответствующего приложения). Здесь роль управлений играют функции $v_i(t)$, $r_{ij}(t)$.

Оптимизация динамических систем на множестве кусочно-линейных управлений

Фесько О. В.

Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия

fov@pereslavl.ru

Рассматривается задача оптимального управления для системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ \ t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_l(t), l = \overline{1, n}$ — кусочно-дифференцируемы, управление $u(t)$ — кусочно-линейно, т. е.

$$u(t) = \frac{(w_{i+1} - w_i)\, t - (\tau_i w_{i+1} - \tau_{i+1} w_i)}{\tau_{i+1} - \tau_i}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\,, i = \overline{0, m},$$
$$w_- \leq w_i \leq w_+, w_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, m+1},$$
$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{m+1} = t_1, m \geq 0, m \in \mathbb{Z},$$

с критерием качества

$$F\,(x(t_1)) \to \min\,. \tag{2}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(t)$ — кусочно-линейное управление, определенное согласно вышеизложенной формуле, а $x(t)$ — соответствующее решение дифференциальной системы (1), функция $f(t, x, u)$ непрерывна по t и непрерывна вместе со своими частными производными по x и u в области $D \supset [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \times [w_-, w_+]$; $F(x)$ дифференцируема по x, тогда $F\,(x(t_1)) = F(x(t_1; w)) = G\,(w)$, где $w = (w_0, \ldots, w_{m+1})^T$, будет дифференцируема по w.*

В силу теоремы 1 исходную задачу (1), (2) можно свести к задаче условной минимизации дифференцируемой функции многих переменных $G\,(w)$ на множестве W, т. е.

$$G(w) \to \min_{w \in W}, W = \left\{w \in \mathbb{R}^{\mathbf{m+2}} : w_- \leq w_i \leq w_+, i = \overline{0, m+1}\right\}.$$

Литература

[1] О. В. Фесько, *Оптимизация динамических систем на множестве кусочно-постоянных управлений* // Труды молодежной научно-практической конференции «Наукоемкие информационные технологии». — Переславль-Залесский: Издательство УГП, 2009. — С. 206–217.

Квазиклассические решения уравнения Беллмана и метод динамического программирования в задачах с ограничениями на состояние[1]

Хрусталев М.М.

Московский авиационный институт, Россия, mkhrustalev@mail.ru

Известно, что функция Беллмана (цена) в задачах оптимального управления с терминальными ограничениями на состояние системы может обладать плохими аналитическими свойствами, например, быть разрывной на всюду плотном подмножестве множества управляемости. В результате классический вариант метода динамического программирования перестает быть эффективным средством решения таких задач. Предлагается новый подход к динамическому программированию, позволяющий преодолеть указанные трудности.

Рассматривается управляемая динамическая система $dx/dt = f(t, x(t), u(t))$, где $t \in [\,t_0, b\,] \subset [\,a, b\,]$, $a<b$; $t \to u(t) \colon [\,t_0, b\,] \to Q \subset R^m$ - управление; $t \to x(t) : [\,t_0, b\,] \to R^n$ - траектория; $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in B \doteq [\,a, b\,] \times R^n$; $x(b) \in \Omega \subset R^n$. Обозначим через $D(t_0, x_0)$ множество процессов управления $z \doteq (x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих перечисленным условиям.

Задача $A(t_0, x_0)$ оптимального управления состоит в том, чтобы найти нижнюю грань $d(t_0, x_0) \doteq \inf_{z \in D(t_0,x_0)} J(z)$ функционала $J(z) \doteq \int\limits_{t_0}^{b} f^0(t, x(t), u(t))\, dt$. На входящие в задачу $A(t_0, x_0)$ функции и множества накладываются следующие ограничения: функция $u(\cdot)$ - измерима и ограничена; функция $x(\cdot)$ - абсолютно непрерывна; Q - компакт; Ω - замкнутое множество; функции f, f^0 и их частные производные f_t, f_x, f_{tx}, f_{xt}, f_{xx}, f^0_t, f^0_x, f^0_{tx}, f^0_{xt}, f^0_{xx} непрерывны на $B \times Q$; функции $f(t, \cdot, u)$, $f^0(t, \cdot, u)$ удовлетворяют условию Липшица равномерно по $(t, u) \in [\,a, b\,] \times Q$; множество скоростей $(f(t, x, Q),\ f^0(t, x, Q)) \in R^{n+1}$ выпукло для всех $(t, x) \in B$.

Введем вспомогательные конструкции. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $\gamma : R^n \to R^1$ удовлетворяет условиям: $\gamma(x) = 0$ при $x \in \Omega$; $\gamma(x) > 0$ при $x \in R^n \backslash \Omega$. Функция γ задает меру нарушения ограничения $x(b) \in \Omega$. Множество

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08-01-00274-а)

$M(\Omega) \doteq \{(t_0, x_0) \in B : D(t_0, x_0) \neq \oslash\}$ есть множество управляемости системы.

Пусть Lip_L класс локально липшицевых функций $(t,x,y) \to \chi(t,x,y) : B \times R^1 \to R^1$, удовлетворяющих условию: для любого компактного подмножества $V \in B \times R^1$ существует число $L \in R^1$, такое что функция $(t,x,y) \to \zeta(t,x,y) \doteq \chi(t,x,y) + L \cdot (t^2 + \| x \|^2 + y^2) : V \to R^1$ выпукла на V . Через P_χ обозначим множество нулевой меры недифференцируемости функции χ.

Функцию Беллмана $W(t,x)$ семейства задач $\{A(t_0, x_0)\}$ определим равенством $(t,x) \to W(t,x) \doteq -d(t,x) : B \to [-\infty, \infty]$.

Определение . Функцию $\chi(t,x,y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $\chi \in Lip_L$; 2) $\chi_t(t,x,y) + \max_{u \in Q} [\chi_x(t,x,y) f(t,x,u) + \chi_y(t,x,y) f^0(t,x,u)] = 0$, $(t,x,y) \in (B \times R^1) \backslash P_\chi$; 3) $\chi(b,x,y) = -\gamma(x) - y^2$, $x \in R^n$, $y \in R^1$ назовем **порождающей функцией**.

Теорема 1. Порождающая функция всегда существует.

Теорема 2. Пусть χ порождающая функция. Тогда справедливы следующие утверждения: 1). Множество управляемости системы компактно и может быть представлено в виде $M(\Omega) = \Pi_{tx}(\chi)$, $\Pi_{tx}(\chi) \doteq \{(t,x) \in B : \chi(t,x,y) \geq 0, \ y \in R^1\}$. 2). Для каждой точки $(t,x) \in \Pi_{tx}(\chi)$ значение функции Беллмана W есть максимальный корень уравнения $\chi(t, x.W) = 0$, а для точек $(t,x) \in B \setminus \Pi_{tx}(\chi)$ значение $W(t,x) = -\infty$.

Результат теоремы 2 позволяет глубже понять, почему функция Беллмана в задачах с терминальными ограничениями обладает плохими аналитическими свойствами. Несмотря на то, что порождающая функция непрерывна, функция W, как корень уравнения $\chi(t, x.W) = 0$, может содержать особенности, которые изучаются в теории катастроф и быть разрывной.

Доказано, что при известной порождающей функции эффективно строится оптимальное управление с обратной связью в форме K- стратегии. Получено обобщение теории на системы с текущими ограничениями на состояние вида $g(t,x) \leq 0$.

Литература

Хрусталев М.М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем // А и Т. 1988. N 5. С. 62 - 70. N 7. С. 70 - 80.

Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой[1]

Хрусталёв М.М.

Центр исследований устойчивости

и нелинейной динамики при ИМАШ РАН, Москва, Россия

mmkhrustalev@mail.ru

Румянцев Д.С.

Центр исследований устойчивости

и нелинейной динамики при ИМАШ РАН, Москва, Россия

dima_rum@mail.ru

Исследуется задача оптимального управления стохастической линейной по состоянию системы управления с коэффициентами диффузии, зависящими как от вектора состояния, так и от управления. Динамический процесс описывается системой уравнений Ито:

$$\begin{gathered} dx_i(t) = [A_{is}(t)x_s + B_{i\alpha}(t)u_\alpha]\,dt + [G_{ils}(t)x_s + F_{il\alpha}(t)u_\alpha + C_{il}(t)]\,dw_l(t), \\ i,s = \overline{1,n}, \quad \alpha = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,\nu}. \end{gathered} \tag{1}$$

Для процессса (1) установлен квадратичный критерий качества управления

$$\begin{gathered} J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2}D_{ij}(t)x_i x_j + S_{\alpha i}(t)x_i u_\alpha + \tfrac{1}{2}E_{\alpha\beta}(t)u_\alpha u_\beta\right] p(t,x)dxdt + \\ + \int\limits_{R^n} \left[\tfrac{1}{2}Q_{ij}x_i x_j\right] p(t_1,x)dx \to min, \end{gathered}$$

где $p(t,x)$ – плотность распределения состояния в момент t, $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$.

Предполагается, что измеряется лишь часть компонент вектора состояния системы. С использованием метода Ляпунова–Лагранжа и результатов работы [1] предложены условия оптимальности для отыскания стратегии управления, зависящей от известных компонент вектора состояния. Проблема синтеза управления сводится

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00246-а)

к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати.

Полученные условия оптимальности позволяют решать задачи оптимального управления сложноструктурированными иерархическими системами, в том числе системами, состоящими из нескольких идентичных структурированных подсистем.

Литература

[1]. Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М. Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 2006. - N 5.

Принцип максимума для вариационной задачи общего вида со скалярным аргументом

Цирлин А.М.

Институт Программных Систем РАН им.А.К. Айламазяна

Переславль-Залесский, Россия

tsirlin@sarc.botik.ru

В задачах вариационного исчисления возможный набор типов связей между переменными, ограничений, наложенных на них и типов критериев оптимальности может быть очень разнообразным. Для того, чтобы сформулировать необходимые условия оптимальности в каждом конкретном случае проводят процедуру выявления допустимых вариаций и записи условий неулучшаемости критеория на множестве этих вариаций. Альтернативный путь, использованный в докладе, состоит в том, чтобы рассмотреть задачу в канонической форме, получить условия оптимальности в форме принципа максимума для этой задачи и привести к такой форме конкретные типы связей и ограниченний. Получим алгоритмическую формулировку принципа максимума для любого заранее не оговоренного сочетания связей с тем или иным видом критерия оптимальности.

Каноническая форма вариационной задачи имеет вид

$$I = \int_0^T \Big[f_{01}(t, x(t), u(t), a) + \sum_l f_{02}(t, x(t), a)\delta(t - t_l) \Big] dt \to \max \tag{1}$$

при условиях

$$J_j(\tau) = \int_0^T \Big[f_{j1}(t, x(t), u(t), a, \tau) + f_{j2}(t, x(t), a, \tau)\delta(t - \tau) \Big] dt = 0, \tag{2}$$

$$\forall \tau \in [0, T], \quad j = \overline{1, m}, \quad u \in V_u, \quad a \in V_a,$$

где a — вектор параметров, постоянных на $[0, T]$; $u(t)$ и $x(t)$ кусочно-непрерывная и кусочно-линейная вектор – функции; значения $u(t)$ принадлежат замкнутой ограниченной области V пространства R^n; f_{j1} и f_{j2} ($j = \overline{0, m}$) определены на прямом произведении множеств допустимых значений своих аргументов, непрерывно дифференцируемы по x, a и t, а f_{j1} непрерывны по u. Функционал I ограничен на множестве допустимых решений.

Отметим, что через $u(t)$ обозначены те переменные, которые входят только в функции f_{j1} для $j = 0, 1, ..., m$. Для краткости их можно назвать переменными первой группы.

В докладе показано, как различные типы условий (дифференциальные и интегральные уравнения, конечные соотношения, ограничения в форме неравенств и пр.) могут быть приведены к канонической форме, получены условия оптимальности скользящих режимов для канонической задачи и как следствие условие оптимальности этой задачи в классе кусочно-непрерывных функций u и кусочно-гладких функций x, если последнее существует. Показано, что условия, полученные Понтрягиным, Бутковским и другими авторами для конкретных типрв задач, вытекают без специального доказательства из приведенных.

Литература

[1] Цирлин А.М., *Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задаче оптимального управления*, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.1974, № 2, С.27–33.

[2] Цирлин А.М., *Условия оптимальности усредненных задач математического программирования* ДАН СССР 1992, **323**1, С.43 – 47.

[3] Цирлин А.М., *Условия оптимальности скользящих режимов и принцип максимума для задач управления со скалярным аргументом* Автоматика и Телемеханика 2009, № 5, С.43 – 57.

Научное издание

Труды конференции

Сборник тезисов докладов Молодежного симпозиума с международным участием:

«Теория управления: новые методы и приложения», ИПС РАН,

Переславль-Залесский, 22-26 сентября 2009 г.

Для научных работников, аспирантов и студентов

Редакционная коллегия сборника: В.И. Гурман, Ю.Л. Сачков

Подписано к печати 14.09.2009

Издательство «Университет города Переславля», 2009

Тираж 30 экз.