Глобальные асимптотики для уравнений математической физики

Б.Ю. Стернин и А.Ю. Савин

Российский университет дружбы народов
РУДН

6 декабря 2010г.

Индуктивная часть

Квантованный дифференциальный оператор

$$\widehat{H} = H\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

h — малый параметр

Регулярная и сингулярная (ВКБ) асимптотика

$$\left.\begin{aligned} u(x,h) &= e^{\frac{i}{h}S(x)}\varphi(x,h) \\ \varphi(x,h) &\simeq \sum_{j=0}^{\infty} h^j \varphi_j(x) \end{aligned}\right. \quad \text{— ВКБ асимптотика.}$$

$$\widehat{H}u(x,h) = O(h^N).$$

Рассмотрим первый член асимптотики: $\varphi_0(x) = \varphi(x), N = 2$.

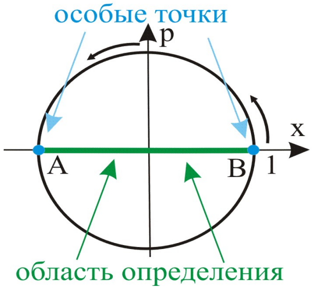
Первый член асимптотики

$$h^0: \quad H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x) \neq 0 \qquad\qquad H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (*)$$

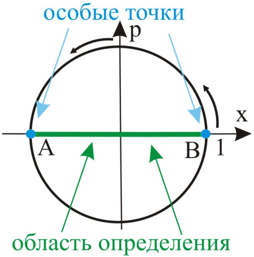
$$h^1: \quad \left[H_{p_i}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} H_{p_i p_j}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\right]\varphi(x) = 0 \qquad\qquad \widehat{\mathcal{P}}\varphi = 0$$

Решение уравнения Гамильтона–Якоби (*) не существует всюду!

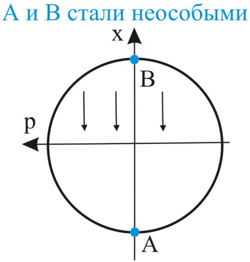
$$\begin{cases} H(x,p) = x^2 + p^2 - 1 \\ p = \frac{\partial S}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2 = 1 \end{cases}$$



Вопрос: каков вид решения вблизи особых точек?



каноническое преобразование $\longrightarrow$



Соответствующее квантованное преобразование

$$f(x) \longmapsto F^{1/h}_{x\to p}\{f(x)\} = (-i/2\pi h)^{1/2}\int e^{-\frac{i}{h}px} f(x)\,dx$$

$$\boxed{u_1(x,h) = \left(F^{1/h}_{x\to p}\right)^{-1}\left\{e^{\frac{i}{h}\widetilde{S}(p)}\widetilde{\varphi}(p)\right\}}$$

— представление решений в окрестности особых точек.

Глобализация:

Потребуем чтобы

$$u(x,h) - u_1(x,h) = O(h)$$

на пересечении их областей определения.

$$e^{\frac{i}{h}S(x)}\varphi(x) \stackrel{?}{=} \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int e^{\frac{i}{h}[px+\widetilde{S}(p)]}\widetilde{\varphi}(p)dp \pmod{h} \qquad (1)$$

Формула стационарной фазы

$\xi(x) : \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}(x,\xi) = 0, \quad \det \mathrm{Hess}_\xi \Phi \neq 0$

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{m/2} \int e^{\frac{i}{h}\Phi(x,\xi)} a(x,\xi) d\xi \equiv$$

$$\left.\frac{e^{\frac{i}{h}\Phi(x,\xi)} a(x,\xi)}{\sqrt{\det \mathrm{Hess}_\xi(-\Phi(x,\xi))}}\right|_{\xi=\xi(x)} \qquad (mod \quad h)$$

где λ_j — собственные значения для $\mathrm{Hess}_\xi(-\Phi)$;
$\mathrm{arg}\lambda_j(x,\xi) \in (-3\pi/2, \pi/2)$.

Применение формулы стационарной фазы

$$(1) \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{a) } S(x) \text{ и } \widetilde{S}(p) \text{ определяют одну и ту же кривую } L \\ \text{в фазовом пространстве с координатами } (x, p); \\ \text{b) } \varphi \text{ и } \widetilde{\varphi} \text{ определяют полуплотности.} \end{array}$$

a) $$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = -\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial p}(p)}^{L} \Rightarrow p = p(x) \\ S(x) = xp(x) + \widetilde{S}(p(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial S(x)}{\partial x} = p(x)}^{L} \Rightarrow$$

(преобразование Лежандра)

$$dS = pdx$$

$$dp \wedge dx|_L = 0$$

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial p^2}\{-xp - \widetilde{S}(p)\} = -\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial p^2} = \dfrac{\partial x}{\partial p} \\ \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(p)\sqrt{\dfrac{\partial p}{\partial x}} \quad \text{(при некотором выборе знака)} \end{cases}$

Для удобства будем считать, что:

μ является мерой на L

$$\begin{cases} \varphi(x) \mapsto \varphi(x)\sqrt{\frac{\partial \mu}{\partial x}}, \quad \widetilde{\varphi}(p) \mapsto \widetilde{\varphi}(p)\sqrt{\frac{\partial \mu}{\partial p}} \\ \varphi(x)\sqrt{\frac{\partial \mu}{\partial x}} = \widetilde{\varphi}(p)\sqrt{\frac{\partial \mu}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}} \end{cases}$$

Тогда $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ задают функцию на L.

Дедуктивная часть

- ☞ $L \subset T^*\mathbb{R}^n$ —лагранжево многообразие
- ☞ (x, p) — координаты на $T^*\mathbb{R}^n$
- ☞ $dp \wedge dx|_L = dp_1 \wedge dx^1 + ... + dp_n \wedge dx^n|_L = 0$
- ☞ μ — мера на L.
- ☞ $I \subset \{1, 2, ..., n\}$;
- ☞ $\bar{I}$ — дополнение I;
- ☞ $\{U_I, (x^I, p_{\bar{I}})\}$ — канонический атлас на L.

$$S_I: \qquad dS_I = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}; \quad \mu_I = \frac{\partial \mu}{\partial (x^I, p_{\bar{I}})}$$

$$K_I : C_0^\infty(U_I) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n_x);$$

$$K_I(\varphi) = \overline{F}_{p_{\bar{I}} \to x^{\bar{I}}} \{e^{\frac{i}{h} S_I} \sqrt{\mu_I} \varphi\}$$

$\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J)$: $\boxed{K_I(\varphi) = e^{\frac{i}{h}c_{IJ}^{(1)} + i\pi c_{IJ}^{(2)}} K_J(\varphi) \mod h}$

- $c_{IJ}^{(1)}$ возникает из-за неоднозначности выбора S_I — $\{c_{IJ}^{(1)}\} \in H^1(L, \mathbb{R})$
- $c_{IJ}^{(2)}$ возникает из-за неоднозначности выбора $\sqrt{\mu_I}$ — $\{c_{IJ}^{(2)}\} \in H^1(L, \mathbb{Z})$

Условия квантования $\boxed{\begin{array}{l} \{c_{IJ}^{(1)}\} \sim 0 \\ \{c_{IJ}^{(2)}\} \sim 0 \end{array}} \Longleftrightarrow \exists d_I^{(j)} \boxed{\begin{array}{l} c_{IJ}^{(1)} = d_I^{(1)} - d_J^{(1)} \\ c_{IJ}^{(2)} = d_I^{(2)} - d_J^{(2)} \end{array}} \Rightarrow$

Глобальный канонический оператор

$\exists K_{(L,\mu)} : C_0^\infty(L) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$:

$$K_{(L,\mu)} \equiv K_I \quad (\mathrm{mod}\, h) \quad \text{на } U_I,$$

если модифицировать S_I, $\sqrt{\mu_I}$ надлежащим образом.

Theorem (Первая теорема о коммутации)

$$H\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) K_{(L,\mu)}(\varphi) \equiv K_{(L,\mu)}(H(x,p)|_L \varphi) \pmod{h}.$$

Если $H(x,p)|_L = 0$, то можно вычислить следующий член.

Lemma

$H(x,p)\|_L = const$ L – лагранжево многообразие	$\Leftrightarrow$	L инвариантно относительно векторного поля $V(H) = H_p \frac{\partial}{\partial x} - H_x \frac{\partial}{\partial p}$

Definition

(L,μ) ассоциирована с функцией Гамильтона $H(x,p)$	$\Leftrightarrow$	a) $H(x,p)\vert_L = 0$ b) $\mathcal{L}_{V(H)}\mu = 0$ (произв.Ли)

Замечание. Условие b) несущественно.

Theorem (Вторая теорема о коммутации)

Если (L,μ) ассоциирован с $H(x,p)$, то

$$H\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) K_{(L,\mu)}(\varphi) \equiv -ihK_{(L,\mu)}\left(\widehat{\mathcal{P}}\varphi\right) \pmod{h^2},$$

где $\widehat{\mathcal{P}} = V(H) - \frac{1}{2}H_{xp}|_L$ — оператор переноса

Другими словами, есть:

(асимптотически) коммутативная диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
C_0^\infty(L) & \xrightarrow{-ih\widehat{\mathcal{P}}} & C_0^\infty(L) \\
\downarrow K_{(L,\mu)} & & \downarrow K_{(L,\mu)} \\
C^\infty(\mathbb{R}^n_x) & \xrightarrow{\widehat{H}} & C^\infty(\mathbb{R}^n_x)
\end{array}
$$

т.е. уравнение $\widehat{H}u = 0$ сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению $\widehat{\mathcal{P}}u = 0$.

Неоднородные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$H(x,\widehat{p})u = f, \qquad \widehat{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2}$$

Строится правый почти-обратный оператор $\widehat{R}$, такой что

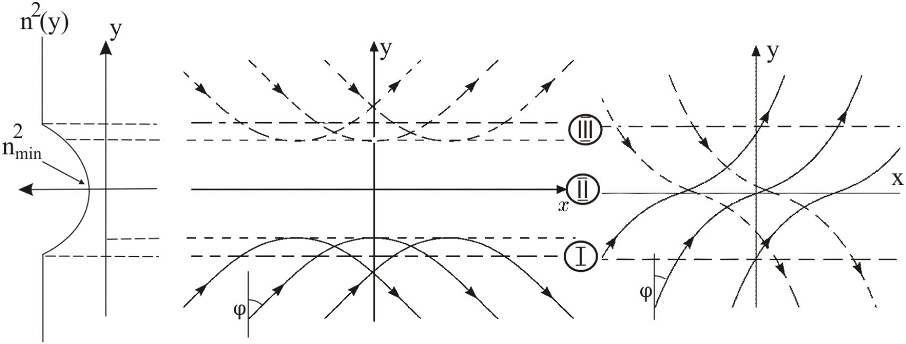
$$\widehat{H}\widehat{R} = \widehat{1} + \widehat{Q}, \quad \text{где } \|\widehat{Q}\| < ch.$$

Обращая при малых h оператор $\widehat{1} + \widehat{Q}$, получаем точное решение уравнения (2).
Практически асимптотику решения находят методом итераций. Следующий ниже пример иллюстрирует этот метод для задач квантовой механики и дифракции. При этом, считается, что $k = h^{-1}$.

Пример 1. Одногорбая ионосфера

$$\Delta u + k^2 n^2(y) u = 0, \quad u = u_0 + v, \quad k\text{— большой параметр}$$

u_0 — плоская волна, v подчинено условию Зоммерфельда.



φ велико $\qquad\qquad\qquad\qquad$ φ мало

$$u_0 = e^{ik(p_1 x + p_2 y)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = p_1/p_2 \qquad p_1^2 + p_2^2 = 1$$

$\boxed{n^2(y) \text{ не зависит от } x} \mapsto \boxed{\begin{array}{l} u = e^{ikp_1 x} U \\ u_0 = e^{ikp_1 x} U_0 \\ v = e^{ikp_1 x} V \end{array}} \mapsto$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} + k^2(n^2(y) - p_1^2)U = 0$$

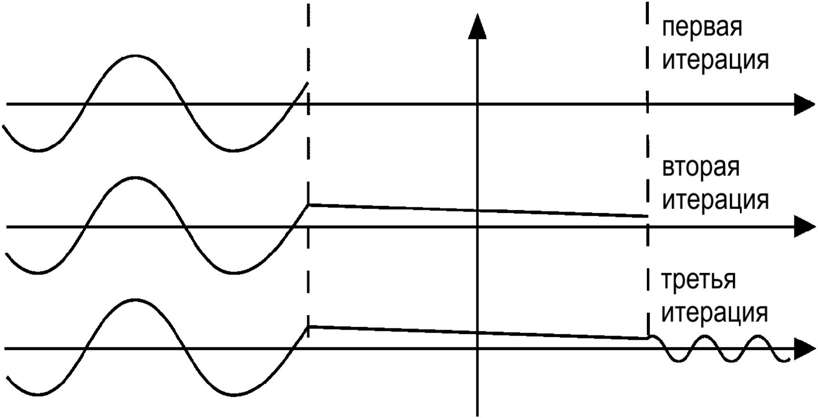
$$U = U_0 + V$$

$n^2(y) - p_1^2$ — приведенный коэффициент диффракции

$p_1^2 < n_{min}^2 \Rightarrow \varphi$ мало; $p_1^2 > n_{min}^2 \Rightarrow \varphi$ велико

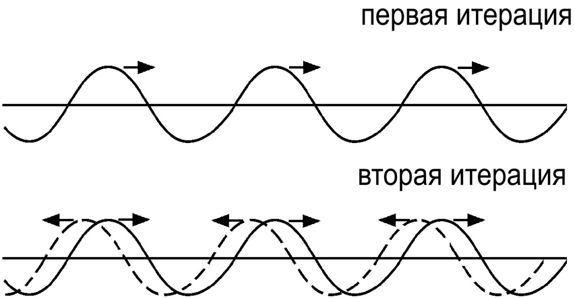
u_0 — нулевая итерация

Большие значения φ



туннельный эффект

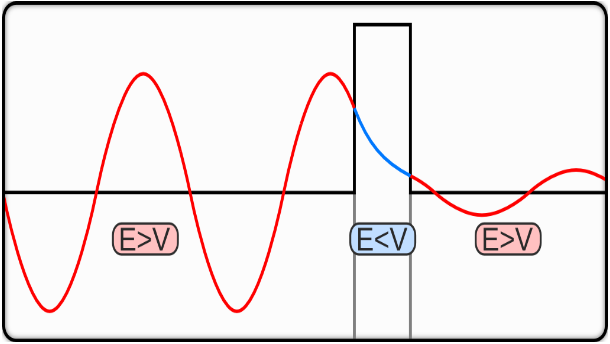
Малые значения φ



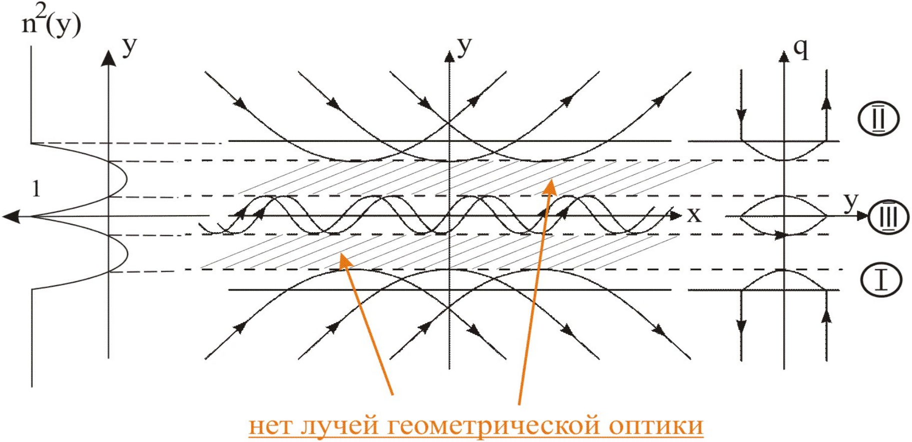
Надбарьерное отражение

Квантовая механика

Туннельный эффект



Пример 2. Двугорбая ионосфера



Части (I) и (II) для решения строятся как и выше

Часть (III): траектория должна быть отрезана не только в начальной точке (на диагонали), но и в <u>конечной точке</u>.

Канонический оператор определяется однозначно с точностью до множителей вида $e^{ikc_1+i\pi c_2}$.

Для компоненты (III) имеем:

$$(1 - e^{ikc_1+i\pi c_2})S(x,p) = 1$$
$$c_1 = \int_{(III)} p dx; \quad c_2 = index(III)$$

(индексы Маслова)
Нам надо сократить множитель $(1 - e^{ikc_1+i\pi c_2}) \Rightarrow$

$\boxed{\text{резонансы по переменной } k}$

(в физической ситуации необходимо принимать во внимание поглощение)

Литература

1. Mishchenko, A.S.; Shatalov, V.E.; Sternin, B.Yu. Lagrangian manifolds and the Maslov operator. Berlin etc.: Springer-Verlag. 395 p. (1990)

2. Nazaikinskii, V. E.; Schulze, B. W.; Sternin, B. Y. Quantization methods in differential equations. London: Taylor & Francis. 356 p. (2002)