

Восстановление изображений, нейрогеометрия зрения и субриманова геометрия

Ю.Л. Сачков

Исследовательский Центр Процессов Управления

Объединенный семинар ИЦСА и ИЦПУ по оптимизации и
управлению

ИПС РАН, 5 марта 2012 г.

План доклада

- Восстановление изображений
- Модель зрительной коры головного мозга (Ж.Петито, Дж.Читти, А.Сарти).
- Задачи субримановой геометрии (А.А.Аграчев, У.Боскаин, Ф.Росси) и их решение (Ю.С.)
- Восстановление изображений с помощью субримановых геодезических (Ю.С., А.Ардентов, А.Маштаков).
- Восстановление кривых без точек возврата (У.Боскаин, Р.Дуитс, Ф.Росси, Ю.С.)
- Восстановление изображений с помощью анизотропной диффузии (Ж.-П.Готье, У.Боскаин, Ф.Росси).

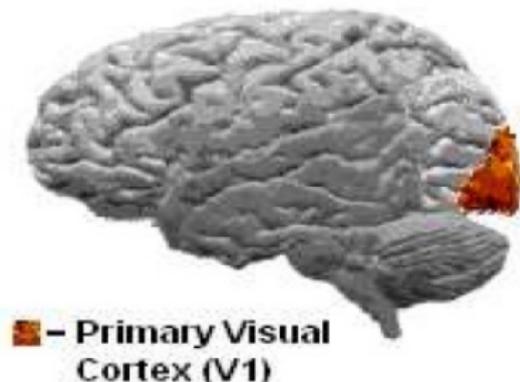
Восстановление изображений



Восстановление изображений

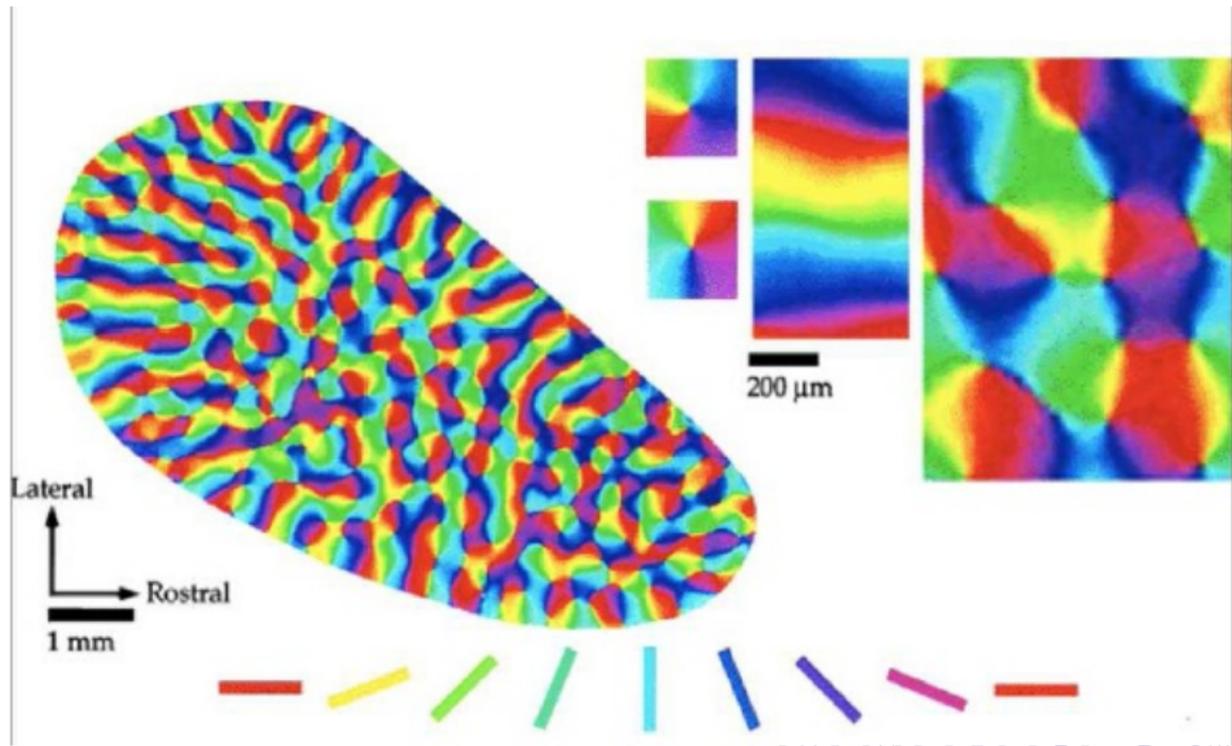


Нейрофизиология зрения



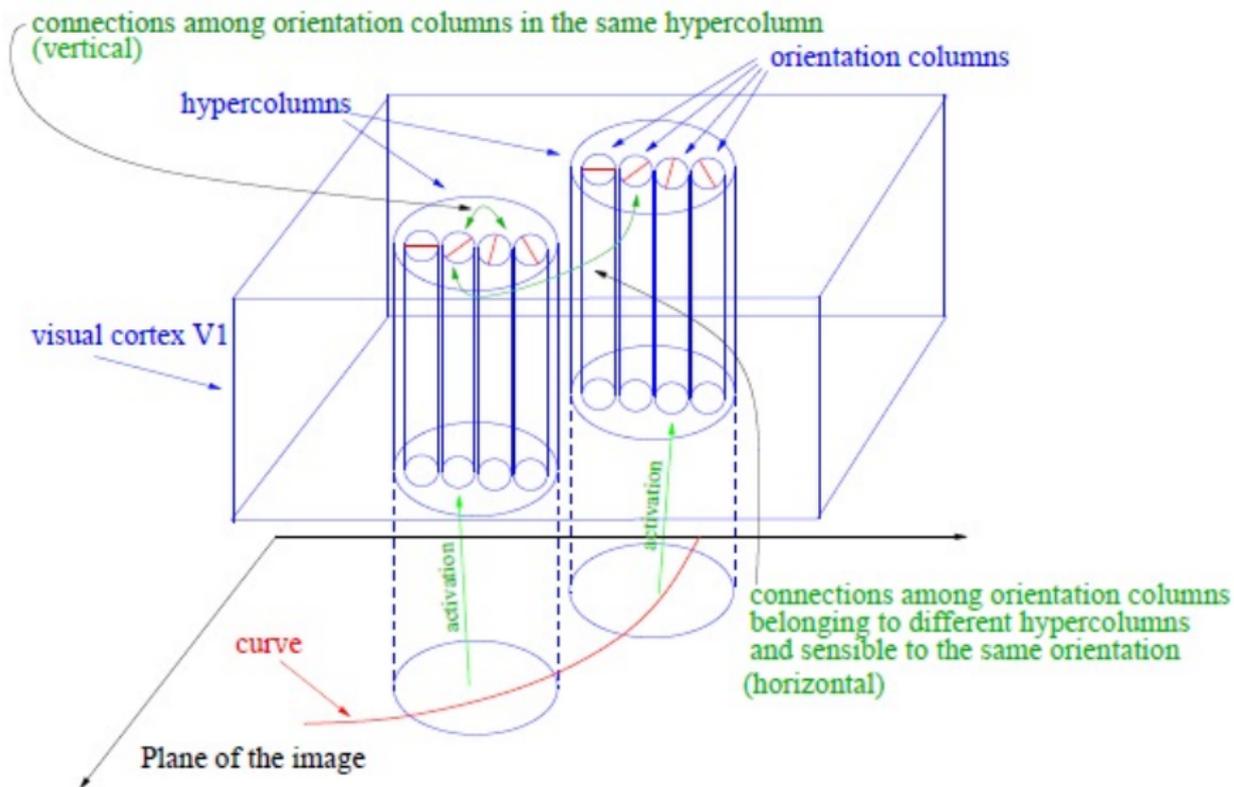
- A** Группы нейронов первичной зрительной коры головного мозга V1 чувствительны как к положению, так и направлению. Поэтому V1 поднимает изображение с плоскости \mathbb{R}^2 на проективное касательное расслоение $PTR^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1$.
- B** При восстановлении изображения минимизируется энергия, необходимая для активации нейронов, не активированных изображением на PTR^2 .

A1. Хубел и Визел (Нобелевская премия 1981 г.):
Группы нейронов, чувствительные к направлению



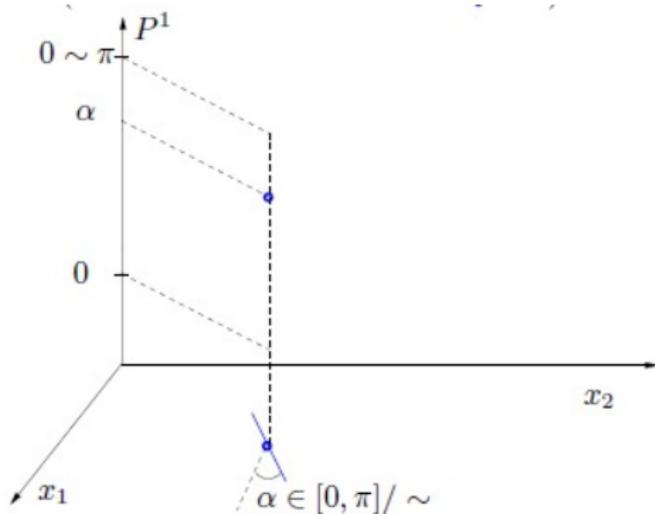
Модель зрительной коры V1

«Колесная» модель (pinwheel model):



A2. Подъем на $P\mathbb{R}^2$

- Мозг хранит изображение как набор положений и направлений, т.е. он выполняет подъем на $P\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1$.

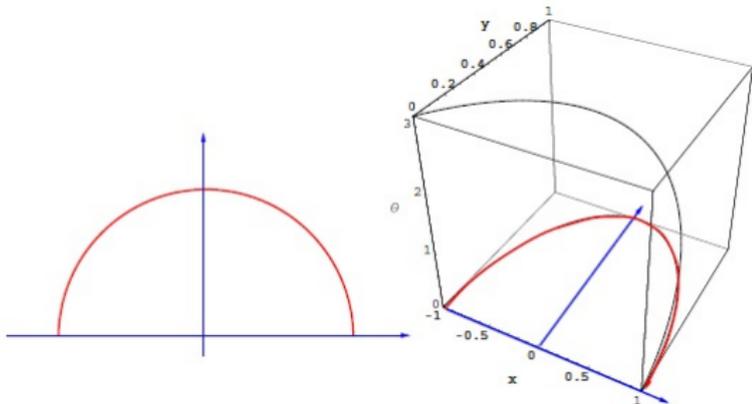


- $P\mathbb{R}^2$ — расслоение с базой \mathbb{R}^2 и слоем $P^1 \cong S^1$.

А3. Подъем (лифт) кривой

- $\mathbb{R}^2 \ni (x(t), y(t)) \mapsto (x(t), y(t), \theta(t)) \in P\mathbb{T}\mathbb{R}^2$,
 $\theta(t) = \text{arctg}(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \in P^1 = [0, \pi] / \sim$.

Пример: $(\cos t, \sin t)$:



- любая кривая в \mathbb{R}^2 без особых точек имеет лифт на $P\mathbb{T}\mathbb{R}^2$,
- не любая кривая в $P\mathbb{T}\mathbb{R}^2$ является лифтом некоторой кривой в \mathbb{R}^2 .

A4. Какие кривые в $PT\mathbb{R}^2$ являются лифтами плоских кривых?

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \iff$$

$$\dot{x} = u_1 \cos \theta, \quad \dot{y} = u_1 \sin \theta, \quad \dot{\theta} =: u_2,$$

$$q = (x, y, \theta) \in PT\mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q),$$

$$X_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V1. Какой функционал минимизировать?

- мозг минимизирует функционал (внешний или внутренний для мозга),
- при движении предмета в руке мозг минимизирует компромисс между энергией и усилием мышц (внешний функционал),
- при восстановлении контура мозг минимизирует энергию, затрачиваемую на активацию нейронов (внутренний функционал),
- легко активируются нейроны, близкие как по положению, так и ориентации (т.е. близкие в $PT\mathbb{R}^2$).

Задача субримановой геометрии на $PT\mathbb{R}^2$

$$\int (u_1^2 + \alpha^2 u_2^2) dt \rightarrow \min \iff \int \sqrt{u_1^2 + \alpha^2 u_2^2} dt \rightarrow \min$$

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in PT\mathbb{R}^2, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + \alpha^2 u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

$$\theta \in P^1 = \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z}) = [0, \pi]/\sim.$$

Задача субримановой геометрии на $SE(2)$

$$SE(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), x, y \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2 \times S^1.$$

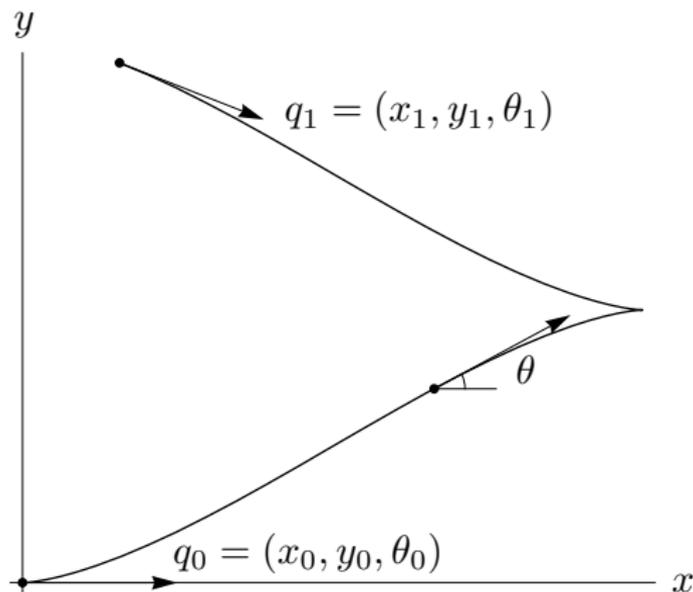
$$\theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = [0, 2\pi]/\sim.$$

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \quad q = (x, y, \theta) \in SE(2), \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \\ q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$X_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + \alpha^2 u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Задача об оптимальном движении машины на плоскости

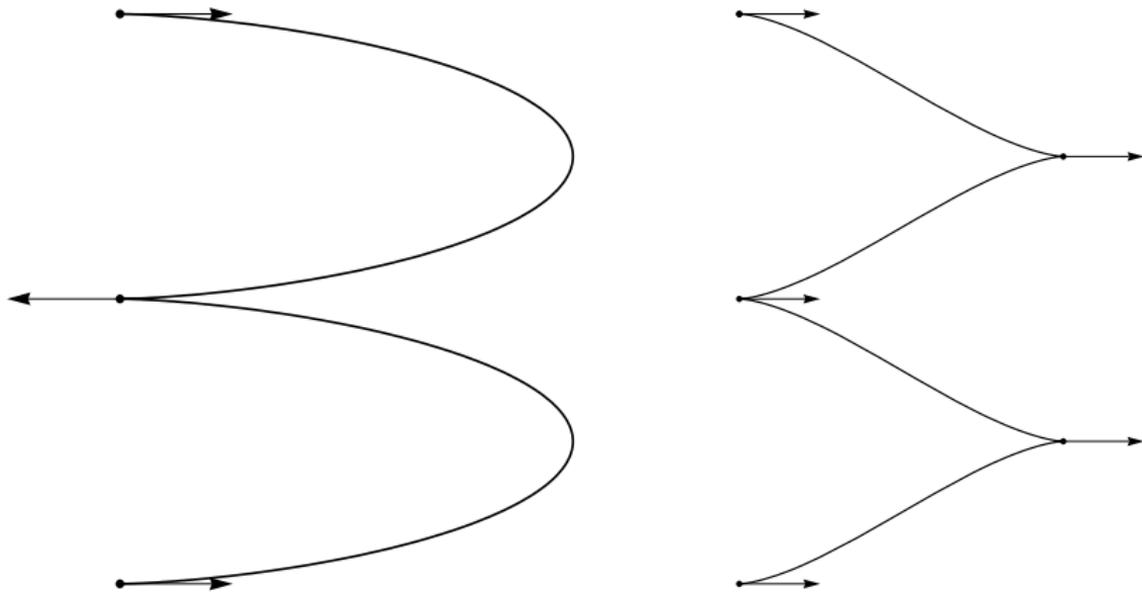


$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2 \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

Результаты по субримановым задачам на $SE(2)$ и $PT\mathbb{R}^2$

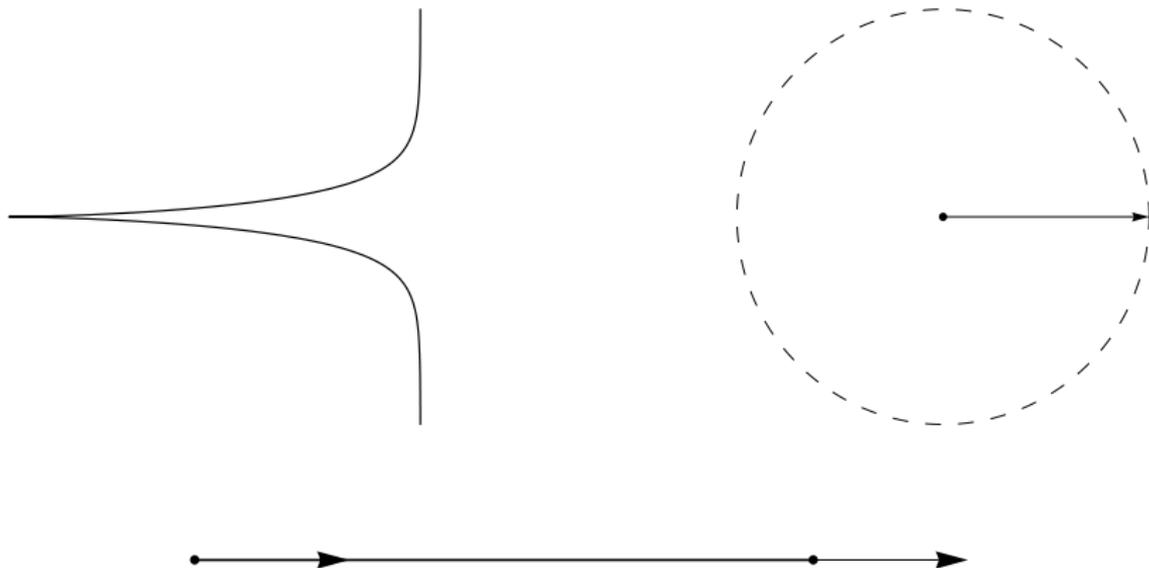
- Существование оптимальных траекторий,
- Параметризация экстремальных траекторий (ПМП),
- Описание оптимальных траекторий:
 - Общие граничные условия \Rightarrow сведение к системам алгебраических уравнений,
 - Специальные граничные условия \Rightarrow явные решения,
- Структура оптимального синтеза и множества Максвелла,
- Субримановы сферы,
- Приложения: восстановление поврежденных изображений, Параллельный программный комплекс для восстановления изображений.

Субриманова задача на $SE(2)$: экстремальные траектории общего положения



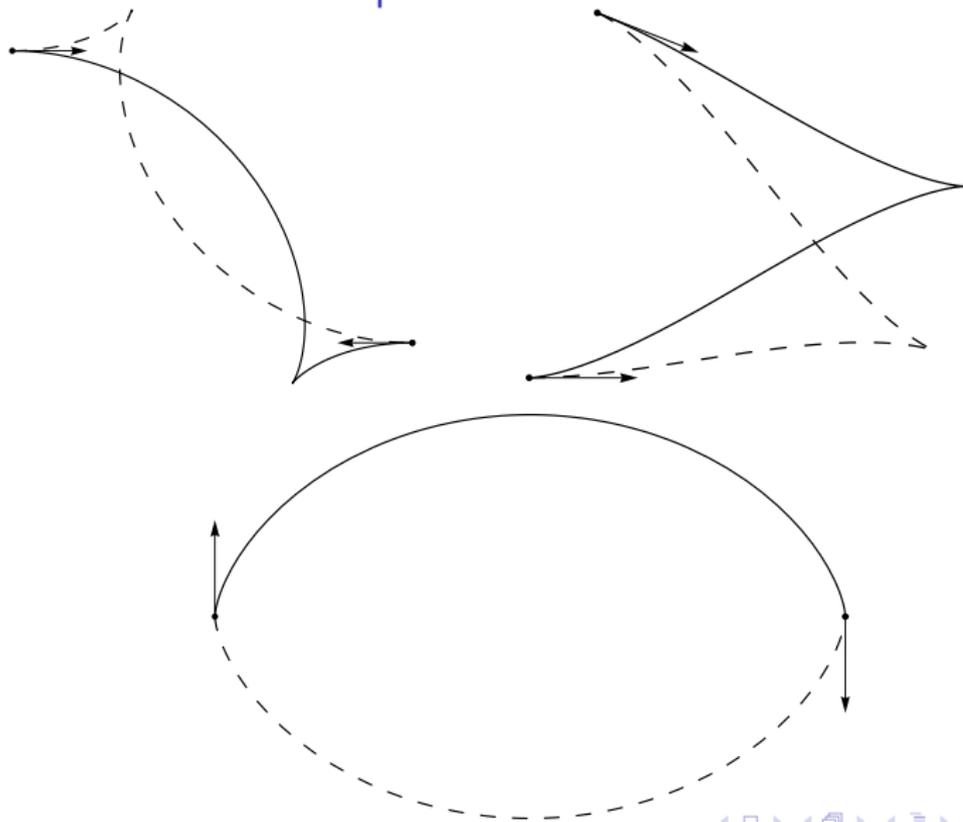
Параметризация функциями Якоби sn , sn , dn , E .

Субриманова задача на $SE(2)$: экстремальные траектории специального вида



Параметризация элементарными функциями.

Точки Максвелла на экстремальных траекториях: потеря оптимальности

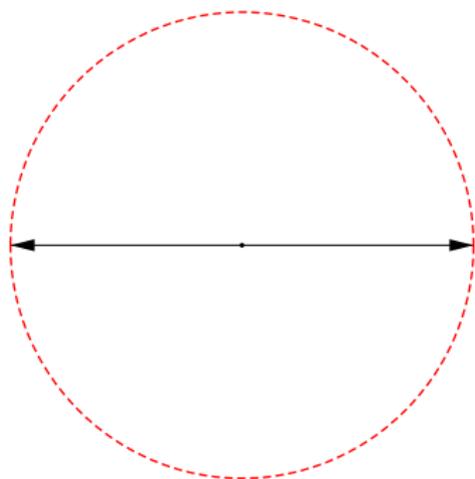


Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = 0$$

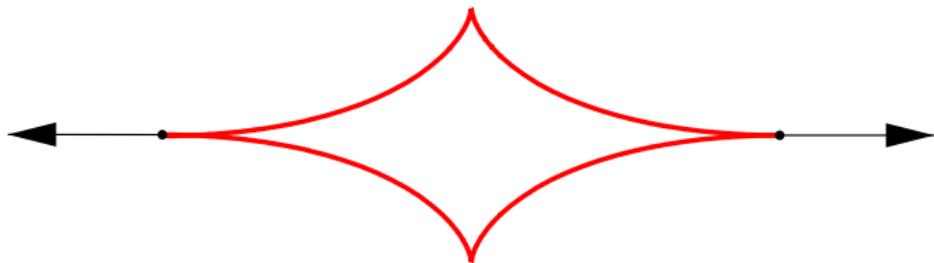


$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 \neq 0$$



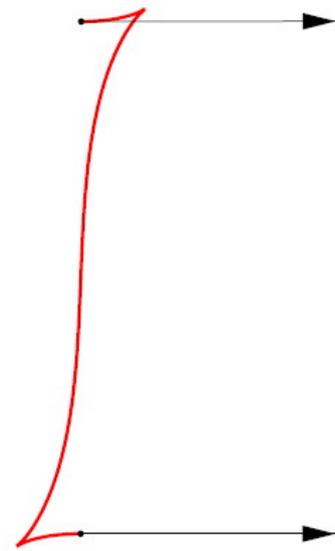
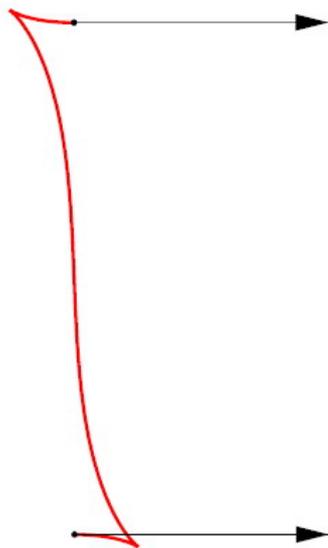
Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = \pi$$



Оптимальные траектории

$$x_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \theta_1 = 0$$



Множество Максвелла

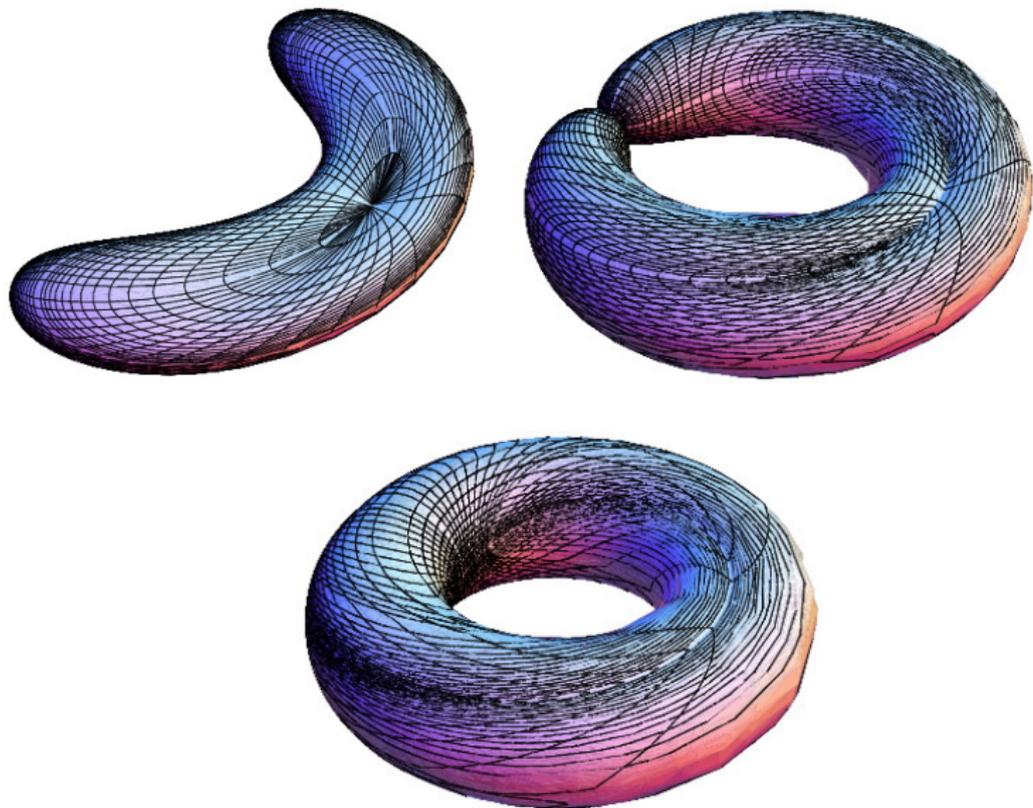
$\text{Max} = \{q_1 \in G \mid \exists > 1 \text{ оптимальной траектории } q(\cdot) : q(t_1) = q_1\}$



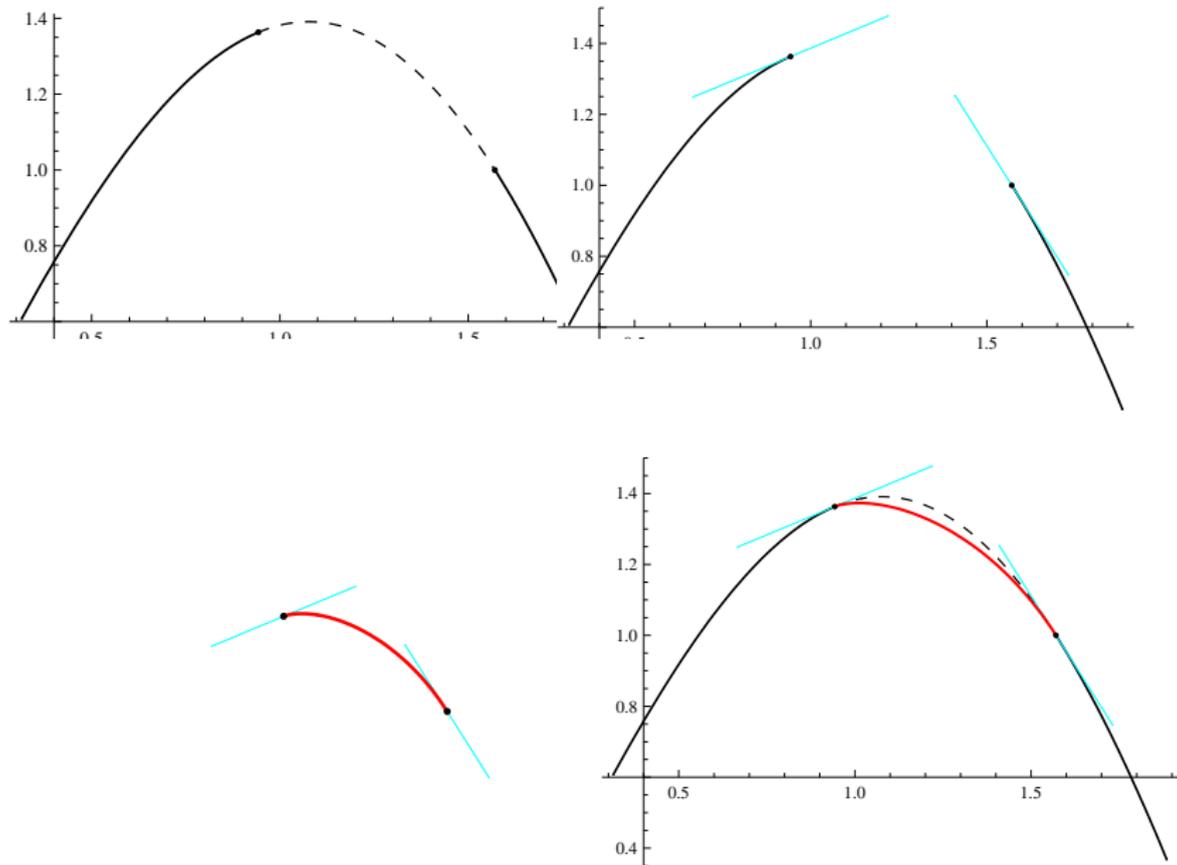
Субриманова метрика и сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$
- $S_R = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}$
- $R = 0 \Rightarrow S_R = \{q_0\}$
- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\}$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong \mathbb{T}^2$

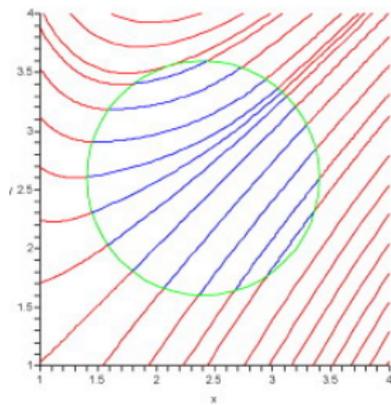
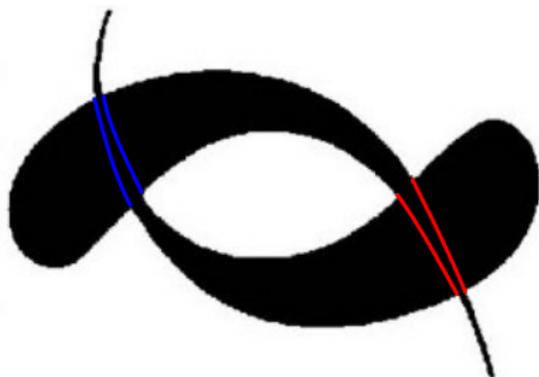
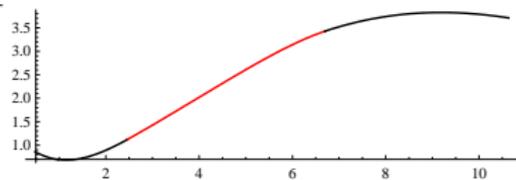
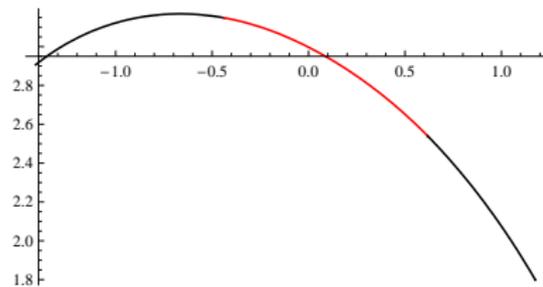
Глобальная структура субримановых сфер в $SE(2)$



Восстановление скрытого контура



Восстановление скрытого контура



Параллельный ПК OptimalInpainting для восстановления поврежденных изображений

The screenshot displays the OptimalInpainting software interface, which is used for image restoration. The main window is titled "OptimalInpainting" and contains the following settings:

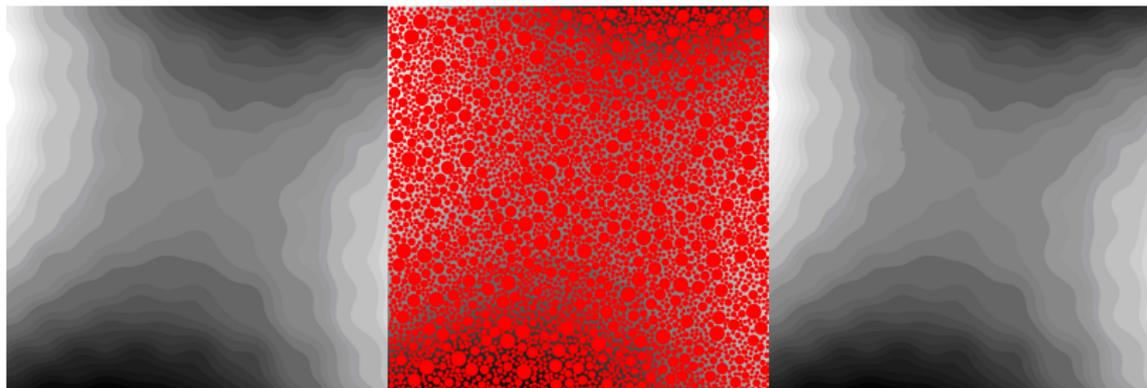
- Equation:
$$f(x,y) = (6x - 17y^2 - 1) - y^2 - 127^2 \cos(x - 57^2 \cos(x - 5)/3 - 3^2 \cos(y - 1)^2 \cos(y - 1) + 6^2 y + \sqrt{3} (3^2 x - 57^2 x - 5) + 30)$$
- Coordinates: $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $y_{min} = -5$, $y_{max} = 5$
- Resolution: $x_pixels = 1600$, $y_pixels = 1600$
- Isophotes: 150, Mode: W, Nodes: 4, Threads: 8
- Parameters: $R_{min} = 0.001$, $R_{max} = 0.6$, DomainGoal = 1000
- Attempts: 100000, RminMeasure = 0.2
- Extended Settings: Time quantization = 20000, Recovered isophote Color Coefficient = 1.5, Alpha = 1, Epoxy = 0.009, Epstheta = 0.028
- Options: Use Automatic Alpha Regulation, Display Images
- Image recovered:
- Buttons: Create Image, Recover Image, Testing Generation, Testing Solving, Testing Recovery, Exit

The "Statistics" window shows the following performance metrics:

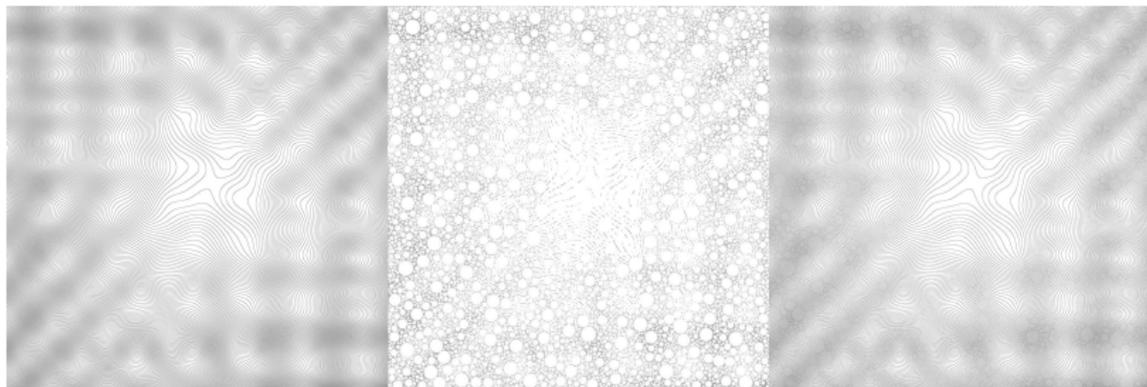
- Domain Constructed = 1000
- Original Creating Time = 55 sec
- Task Creating Time = 7 sec
- Solve Time = 5.15 sec
- Recovery Time = 351.57 sec
- Tasks = 2305
- Light Tasks = 323
- Heavy Tasks = 1982

The "Restored Boundary" window displays the restored boundary of the image, showing a complex pattern of lines and circles. The "Original" window shows the original image, the "Corrupted" window shows the image with missing data, and the "Restored" window shows the final restored image.

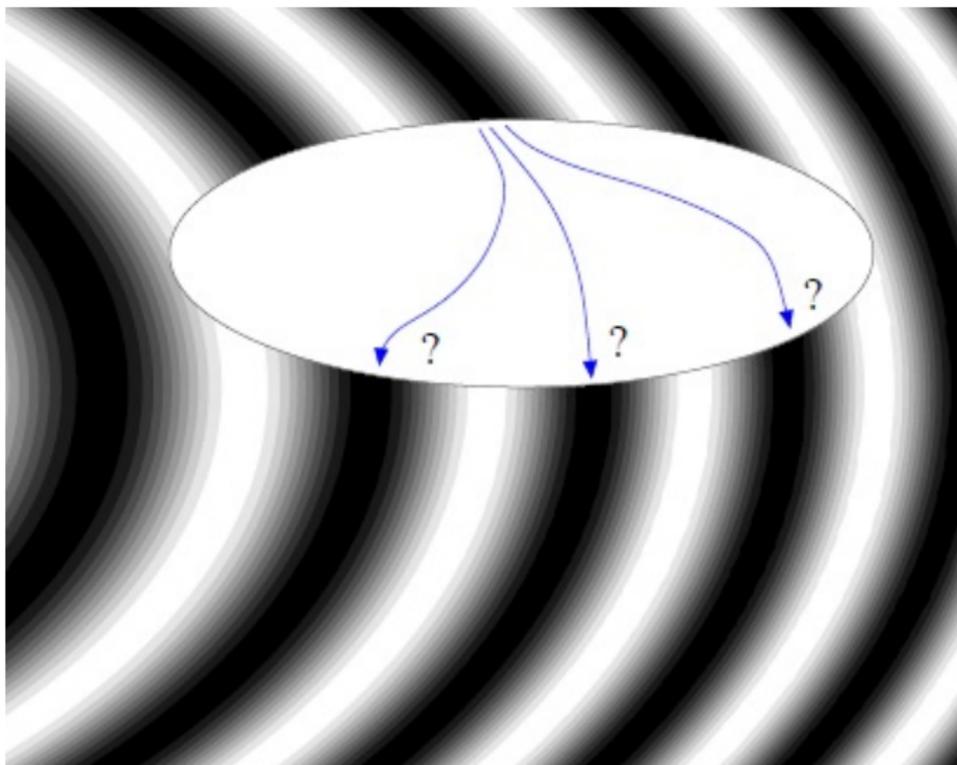
Исходное, поврежденное и восстановленное полутонное изображение



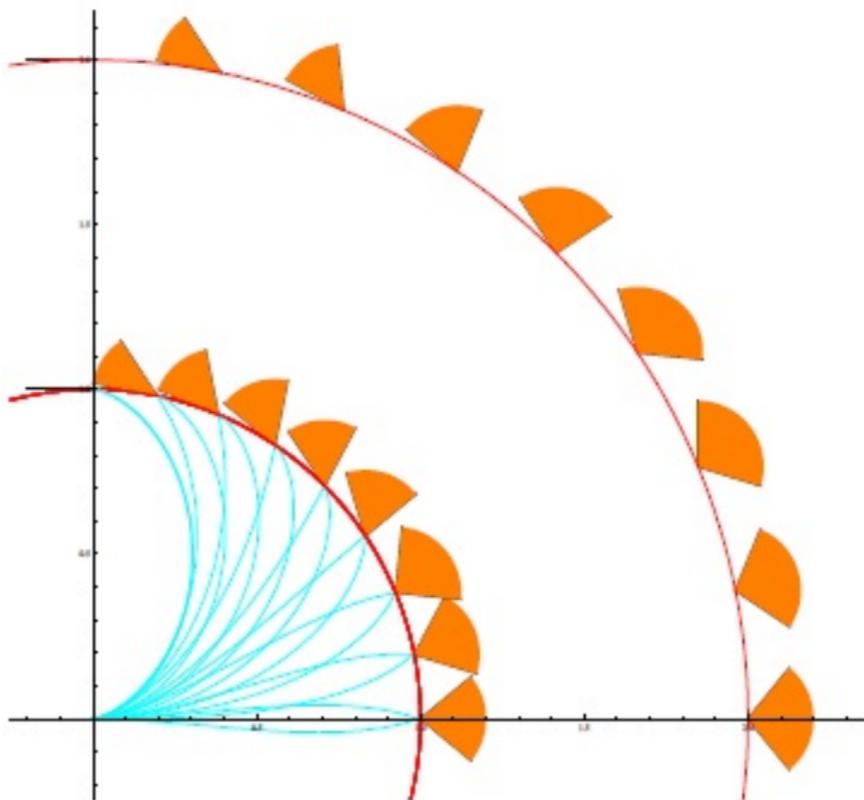
Исходное, поврежденное и восстановленное бинарное изображение



Проблема 1: неединственность линий уровня



Проблема 2: точки возврата



Восстановление изображений с помощью анизотропной диффузии на $PT\mathbb{R}^2$

Поврежденное изображение $I : D \setminus \Omega \rightarrow [0, +\infty)$

1. Сглаживание $f = I * G_\sigma$:

$$f(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} I(\tilde{x}, \tilde{y}) G_\sigma(x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right).$$

2. Подъем $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ до $\bar{f} : PT\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\bar{f}(x, y, \theta) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } \theta \text{ — угол наклона } \{f = \text{const}\}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Анизотропная диффузия

$$\partial_t \Phi(q, t) = (X_1^2 + X_2^2) \Phi(q, t),$$

$$\Phi(q, 0) = \bar{f}(q)$$

4. Проекция на \mathbb{R}^2 :

$$\tilde{f}(x, y) = \max_{\theta \in P^1} \Phi(x, y, \theta, T).$$

Изотропная диффузия в \mathbb{R}^3

- Уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi(x, y, z, t) &= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \Phi(x, y, z, t), \\ \Phi(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z).\end{aligned}$$

- Фундаментальное решение (ядро теплопроводности)

$$\partial_t \mathcal{E}(x, y, z, t) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \mathcal{E}(x, y, z, t) = \delta(x, y, z, t),$$

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \frac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right),$$

$$\Phi = \varphi * \mathcal{E}.$$

- Распространение диффузии по римановым геодезическим

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \partial_x + u_2 \partial_y + u_3 \partial_z,$$

$$\int \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt \rightarrow \min.$$

Анизотропная диффузия в $PT\mathbb{R}^2$

- Уравнение анизотропной диффузии

$$\partial_t \Phi(q, t) = (X_1^2 + X_2^2) \Phi(q, t),$$

$$\Phi(q, 0) = \varphi(q), \quad q = (x, y, \theta) \in PT\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1.$$

- Фундаментальное решение (ядро анизотропной диффузии)

$$\partial_t \mathcal{E}(q, t) - (X_1^2 + X_2^2) \mathcal{E}(q, t) = \delta(q, t),$$

$$\mathcal{E}(q, t) = \dots,$$

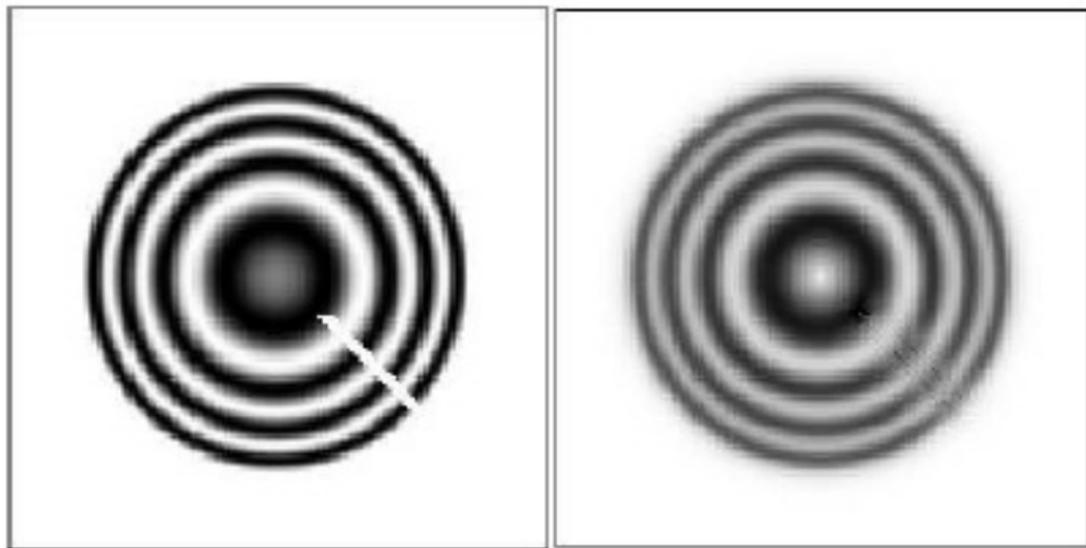
$$\Phi = \varphi * \mathcal{E}.$$

- Распространение диффузии по субримановым геодезическим

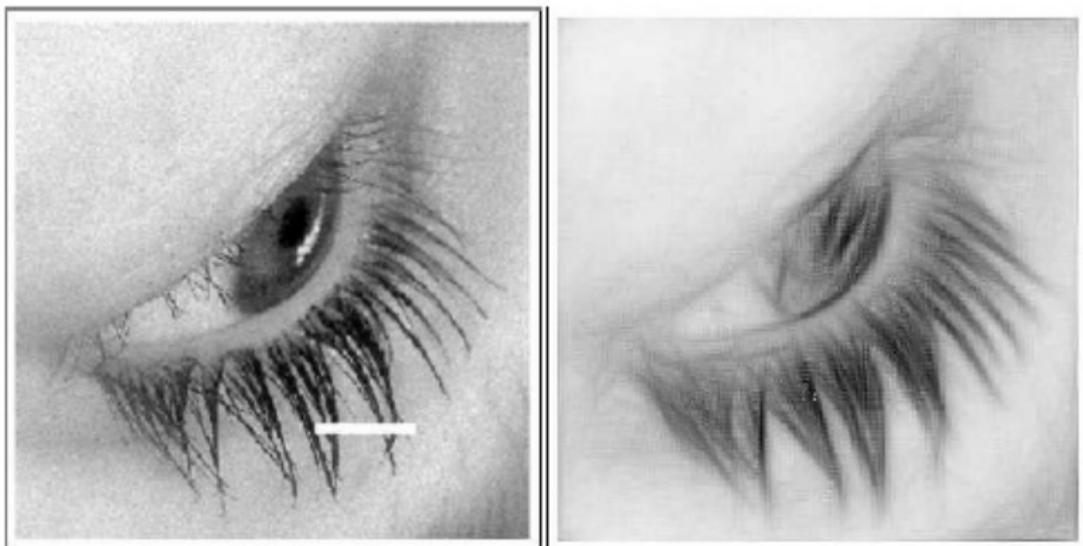
$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q),$$

$$\int \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Анизотропная диффузия: результаты



Анизотропная диффузия: результаты



Анизотропная диффузия: результаты

