ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА РАСШИРЕНИЯ

Обзор диссертации на соискание ученой степени д.т.н. на стыке специальностей:
05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации,
05.13.11 — Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей.

ТРУШКОВА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
Научный консультант: проф., д.т.н. В. И. Гурман

31 октября 2011 г.

1. **Разработать теоретические основы приближенного подхода к решению задач управления с использованием принципа расширения**, которые могли бы составить общую схему исследования задач управления с целью поиска приближенных решений.
2. **Разработать теоретические основы и конструктивные методы упрощающих преобразований модели объекта**, которые позволяют заменить исходную задачу семейством более простых задач (в смысле дальнейшего поиска приближенного решения) и тем самым составляют основу общей схемы исследования.

3. **Разработать конструктивные методы и алгоритмы локального улучшения управления на основе достаточных условий оптимальности**, которые можно использовать в качестве инструментария решения подзадач на различных этапах общей схемы исследования.
4. **Разработать конструктивные методы и алгоритмы глобального улучшения управления на основе глобальных методов улучшения Кротова**, которые можно использовать в качестве инструментария решения подзадач на различных этапах общей схемы исследования.
5. **Реализовать и внедрить полученные теоретические результаты в виде методик, алгоритмов и прикладного программного обеспечения** для решения прикладных задач и в учебном процессе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_I) = x_I, \quad t \in [t_I, t_F], \quad u \in \mathbf{U}(t,x), \quad x \in \mathbf{X}(t), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_I) = x_I, \quad t \in \{t_I, t_I + 1, \ldots, t_F\}, \\ u \in \mathbf{U}(t,x), \quad x \in \mathbf{X}(t), \end{gathered} \tag{2}$$

$$I(x,u) = F(x(t_F)) \to \inf,$$

или в более компактном виде $(\mathbf{D}, I)$, где множество $\mathbf{D}$ допустимых процессов (x,u) для непрерывных и дискретных задач определяется условиями (1), (2) соответственно.

Лемма (Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления, 1973). Пусть имеется последовательность расширений $\left\{(\mathbf{E}, L)_\beta\right\}$, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{E}_\beta \supset \mathbf{D}, \quad L_\beta(m) \leq I(m), \quad m \in \mathbf{D},$$

последовательность нижних границ $\{l_\beta\}$, $l_\beta \leq L_\beta(m)$ на $\mathbf{E}_\beta$, и последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$, такие что

$$\lim_{s\to\infty} I(m_s) = \lim_{\beta\to\infty} l_\beta. \tag{3}$$

Тогда последовательность $\{m_s\}$ — минимизирующая в задаче $(\mathbf{D}, I)$, и любая $(\mathbf{D}, I)$–минимизирующая последовательность удовлетворяет условию (3). Очевидно, для любого $m \in \mathbf{D}$ справедлива оценка

$$\Delta(m) = I(m) - L(m) \geq 0.$$

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

$$R(t,x,u) = \varphi_x^{\mathrm{T}} f(t,x,u) + \varphi_t, \quad \mu(t) = \sup_{u \in \mathbf{U}(t,x), x \in \mathbf{X}(t)} R(t,x,u),$$

$$G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I), \quad l = \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} G(x).$$

Положим $L = G\left(x(t_F)\right) - \int_{t_I}^{t_F} R\left(t, x(t), u(t)\right) dt$, **E** получим из **D**, исключив связь $\dot{x} = f(t,x,u)$, Заметим, что $L = I$ на множестве **D**.

Теорема (В.Ф.Кротов)

Пусть последовательности $\{x_s, u_s\} = \{m_s\} \subset \mathbf{D}$ *и* $\varphi_q(t,x)$, *такие, что*
1) $R_q\left(t, x_s(t), u_s(t)\right) - \mu_q(t) \to 0, \quad \text{при п.в. } t \in [t_I, t_F]$;
2) $G_q\left(x_s(t_F)\right) - l_q \to 0$;
3) функции $\mu_q(t)$ *кусочно-непрерывны, а числа* l_q *конечны;*
4) последовательность $R_q\left(t, x_s(t), u_s(t)\right)$ *ограничена.*
Тогда последовательность $\{m_s\}$ *— минимизирующая. При этом справедлива оценка*

$$I(m_s) - I_* \le \Delta_{qs} = L_q(m_s) - l_q + \int_{t_I}^{t_F} \mu_q(t) dt.$$

Этап 1.

Упрощающие преобразования модели объекта на основе принципа расширения (введение новых множеств $\mathbf{E}^i \supset \mathbf{D}$, $i = \overline{1, n}$) или преобразования типа аппроксимации (введение новых множеств $\mathbf{E}^i$, $i = \overline{n+1, m}$ таких, что расстояние между множествами $\mathbf{E}^i$, $\mathbf{D}$ мало), позволяющие заменить исходную задачу $(\mathbf{D}, I)$ семейством задач $(\mathbf{E}^i, I)$, $i = \overline{1, m}$ для которых возможно эффективно проводить последующие этапы исследования;

Этап 2.

Поиск решений $m^{k_i} = \left(x^{k_i}, u^{k_i}\right) \in \mathbf{E}^i$, $i = \overline{1, m}$, $k_i = \overline{1, l_i}$ (точных или приближенных) семейства задач $(\mathbf{E}^i, I)$ и тем самым поиск оценки снизу функционала I в виде

$$\inf_{m \in \mathbf{D}} I(m) \geq \max_{i=\overline{1,n}, k_i=\overline{1,l_i}} I(m^{k_i});$$

Этап 3.

Построение приближенных решений $\widetilde{m}^{k_i} = \left(\widetilde{x}^{k_i}, \widetilde{u}^{k_i}\right) \in \mathbf{D}$ исходной задачи с использованием решений m^{k_i}, полученных на предыдущем этапе исследования, подсчет верхних оценок приближенных решений $\Delta(\tilde{m}_i^k)$;

Этап 4.

Выбор лучшего приближенного решения $\widetilde{m} = (\widetilde{x}, \widetilde{u}) \in \mathbf{D}$ из решений, полученных на предыдущем этапе исследования.

Семейство задач $(\mathbf{E}^i, I)$, $i = \overline{1, n}$, может быть получено с помощью расширений двух типов:

1) расширения с помощью замены правой части динамической системы при условии выполнения включения $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}^i$;

2) расширения с помощью замены переменных $y = \eta(t, x)$ и перехода к производной системе.

* Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления, 1985, 1997.

В компактной области **B** зададим аппроксимацию $\widetilde{f}(t,x,u)$ в желаемом классе правой части исходной системы $f(t,x,u)$.

$$\dot{x} = \widetilde{f}(t,x,u) + \theta(t,z,w), \tag{4}$$

$$x(t+1) = \widetilde{f}\,(t, x(t), u(t)) + \theta\,(t, z(t), w(t))\,, \tag{5}$$

где $\theta(t,z,w) = f(t,z,w) - \widetilde{f}(t,z,w)$, z, w — новые управления, $z \in \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ — сечение **B**, $u, w \in \mathbf{U}\,(t,x)$.
Системы (4), (5) назовем *оценочными* для управляемых систем (1), (2).

Теорема

Множество скоростей $\widetilde{V}(t,x)$ оценочной системы (4), (5) *является расширением множества скоростей $V(t,x) = f\,(t,x,\mathbf{U}(t,x))$ соответствующей исходной системы* (1), (2), *и, следовательно,* $\mathbf{D} \subset \tilde{\mathbf{D}}$, *где* $\tilde{\mathbf{D}}$ *– множество допустимых оценочной системы.*

Преобразование к линейным системам

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t,z,w) - A(t)z - B(t)w,$$

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t,z(t),w(t)) - A(t)z(t) - B(t)w(t),$$

- построение множества достижимости в пространстве (t,x);
- минимизация функции $F(x)$ на нем при ограничениях $x(t_F) \in \mathbf{X}(t_F)$.

Преобразование к системами с линейным управлением

$$\dot{x} = g(t,x) + B(t)u + \theta(t,z,w),$$
$$x(t+1) = g(t,x(t)) + B(t)u + \theta(t,z,w),$$

где, z, w — новые управления, $z \in \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ — сечение $\mathbf{B}$, $u, w \in \mathbf{U}(t,w)$.

- переход к соответствующим производным системам;
- поиск магистральных решений и их аппроксимация в исходном классе.

ЭТАП 1

Семейство задач $(\mathbf{E}^i, l)$, $i = \overline{n+1, m}$, может быть получено с помощью аппроксимации множества $\mathbf{D}$ множествами $\mathbf{E}^i$ более простой структуры, что наиболее актуально в случае, когда исходная задача не имеет полного или достаточно простого аналитического описания.

Теорема

Пусть $(\widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t))$ – оптимальное решение задачи (4), (5) с разрешающей функцией $\widetilde{\varphi}(t, x)$, $(\bar{x}(t), \widetilde{u}(t))$ — допустимая пара задачи (1), (2), тогда для оценки этого решения справедливо неравенство

$$\Delta(\bar{x}, \widetilde{u}, \widetilde{\varphi}) \leq F(\bar{x}(t_F)) - F(\widetilde{x}(t_F)) + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{x \in X(t), u \in U(t)} \Big(\widetilde{\varphi}_x f(t, x, u) - \widetilde{\varphi}_x \widetilde{f}(t, x, u) \Big) dt,$$

$$\Delta(\bar{x}, \widetilde{u}, \widetilde{\varphi}) \leq F(\bar{x}(t_F)) - F(\widetilde{x}(t_F)) +$$
$$+ \sum_{t=t_I}^{t_F - 1} \sup_{x \in X(t), u \in U(t)} \Big(\widetilde{\varphi}(t+1, f(t, x, u)) - \widetilde{\varphi}\Big(t+1, \widetilde{f}(t, x, u)\Big) \Big).$$

ЭТАП 2

1) Поиск точного решения семейства задач, полученных на этапе 1, если точное решение можно найти.
2) Поиск приближенного решения в противном случае:
   - на основе качественного анализа задачи с использованием, если это необходимо, различных упрощающих допущений;
   - с помощью различных итерационных методов глобального или локального улучшения управления, которые разрабатываются и совершенствуются на основе предложенного подхода в дополнение к существующим методам.

(!)

Полученные на первом этапе с помощью принципа расширения задачи $(\mathbf{E}^i, I)$, $i = \overline{1, n}$, обладают несомненным преимуществом перед задачами, полученными с помощью аппроксимации, т. к. позволяют дополнительно с помощью своих решений, найденных на втором этапе, найти нижнюю оценку функционала исходной задачи.

1) Аппроксимация приближенных решений, полученных на втором этапе, допустимыми решениями исходной задачи.

2) Уточнение решений с помощью итерационных методов улучшения.

(!)

Одни и те же итерационные методы глобального или локального улучшения могут быть использованы и на втором, и на третьем этапах исследования.

ЭТАП 4

Выбор решения $\widetilde{m} \in \mathbf{D}$ может осуществляться из условия

$$\widetilde{m} = \arg \min_{i=\overline{1,m}, k_i=\overline{1,l_i}} I(\widetilde{m}^{k_i}),$$

или условия

$$\widetilde{m} = \arg \min_{i=\overline{1,m}, k_i=\overline{1,l_i}} \Delta(\widetilde{m}^{k_i}),$$

или из особенностей рассматриваемой практической прикладной задачи.

(!)

Предлагаемый подход обладает большим преимуществом, т. к. позволяет получать множество решений прикладной задачи, что позволяет в случае необходимости выбирать лучшее приемлемое решение с учетом возможных неучтенных в модели ограничений, неопределенностями в описании модели и критерия качества управления и т. п.

Задача улучшения

Пусть известен элемент $m^{\mathrm{I}} = \left(x^{\mathrm{I}}(t), u^{\mathrm{I}}(t)\right) \in \mathbf{D}$, требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} = \left(x^{\mathrm{II}}(t), u^{\mathrm{II}}(t)\right) \in \mathbf{D}$, такой что $F\left(x^{\mathrm{II}}(t_F)\right) < F\left(x^{\mathrm{I}}(t_F)\right)$.

Общие конструкции метода улучшения управления основаны на принципе оптимальности Кротова и принципе локализации Гурмана:

$$y(t+1) = g\left(t, y(t), v(t)\right), \quad t \in \{t_I, \dots, t_F\},$$

$$y^0(t+1) = y^0(t) + \frac{1}{2} v^{\mathrm{T}}(t) v(t), \quad y(t_I) = 0, \quad y^0(t_I) = 0,$$

$$G_\alpha\left(y^0(t_F), y(t_F)\right) = \alpha y^0(t_F) + (1-\alpha) F\left(y(t_F) + x^{\mathrm{I}}(t_F)\right) \to \min,$$

где $y = x - x^{\mathrm{I}}$, $v = u - u^{\mathrm{I}}$, α — некоторое действительное число из отрезка $[0,1]$ (регулятор метода), $g(t, y, v) = f\left(t, y + x^{\mathrm{I}}, v + u^{\mathrm{I}}\right) - f\left(t, x^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{I}}\right)$.

Представлены алгоритмы улучшения второго-первого порядка:

- алгоритмы первого типа: используется грубое приближение производных их разностными аналогами;
- алгоритмы второго типа: используется метод наименьших квадратов;
- алгоритм синтеза траектории в окрестности текущего решения;
- модификация алгоритмов локального улучшения на случай задач с фазовыми ограничениями с помощью метода штрафов.

* Кротов В. Ф., Фельдман И. Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.

Алгоритм состоит из следующих шагов:
0) Имеем начальный допустимый процесс $\left(x^{\mathrm{I}}(t), u^{\mathrm{I}}(t)\right)$.
1) Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений

$$\varphi(t,x) = \varphi\left(t+1, f(t,x,u^{\mathrm{I}}(t))\right), \quad t \in \{t_I, \ldots, t_F - 1\}, \quad \varphi(t_F, x) = -F(x).$$

2) Решая систему

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), \arg\max_{u \in U(t, x^{\mathrm{I}}(t))} \varphi^0\left(t+1, f\left(t, x(t), u\right)\right)\right), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс $\left(x^{\mathrm{II}}(t), u^{\mathrm{II}}(t)\right)$.

Существенно снизить время работы программы можно при решении задач управления некоторыми классами непрерывных систем за счет поиска разрешающей функции $\varphi^0(t,x)$ из задачи Коши для уравнения в частных производных.

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in [t_I, t_F],$$
$$x(t_I) = x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t,x) \subset R^p,$$
$$\int\limits_{t_I}^{t_F} f^0(t,x,u)dt + F\left(x(t_F)\right) \to \min,$$

функция $\varphi^0(t,x)$ может быть найдена из соотношений

$$\varphi_x^T(t,x) f(t,x,u^I(t)) + \varphi_t(t,x) - f^0(t,x,u^I(t)) = 0, \quad F(x) + \varphi(t_F, x) = 0.$$

Случай 1. Если в постановке непрерывной задачи

$$f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u),$$

$$f^0(t,x,u) = a^T(t,u)x + b(t,u), \quad F(x) = \eta^T x,$$

то искомое решение задачи Коши для уравнения в частных производных можно найти в виде $\varphi^0(t,x) = \nu(t) + \psi^T(t)x$, где $\nu(t)$, $\psi(t)$ являются решением задачи Коши для системы $n+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot\psi(t) &= -A^T(t,u^I(t))\psi(t) + a(t,u^I(t)), \quad \psi(t_F) = -\eta, \\ \dot\nu(t) &= -B^T(t,u^I(t))\psi(t) + b(t,u^I(t)), \quad \nu(t_F) = 0. \end{aligned}$$

Случай 2. Если в постановке непрерывной задачи

$$f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u),$$

$$f^0(t,x,u) = x^T c(t,u)x + a^T(t,u)x + b(t,u), \quad F(x) = \eta^T x + x^T \rho x,$$

то искомое решение задачи Коши для уравнения в частных производных можно найти в виде $\varphi^0(t,x) = \nu(t) + \psi^T(t)x + x^T\sigma(t)x$, где $\nu(t)$, $\psi(t)$, $\sigma(t)$ являются решением задачи Коши для системы $n + n^2 + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{l} \dot{\psi}(t) = -A^T(t,u^I(t))\psi(t) - 2\sigma(t)B(t,u^I(t)) + a(t,u^I(t)), \quad \psi(t_F) = -\eta, \\ \dot{\sigma}(t) = -2\sigma(t)A(t,u^I(t)) + c(t,u^I(t)), \quad \sigma(t) = -\rho, \\ \dot{\nu}(t) = -B^T(t,u^I(t))\psi(t) + b(t,u^I(t)), \quad \nu(t_F) = 0. \end{array}$$

Модель движения вертолета в продольной вертикальной плоскости в земной системе координат, учитывающая динамику изменения мощности несущего винта и не имеющая полного аналитического описания:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= m^{-1}\left(-X\cos\theta - T\sin u^1\right),\\
\dot{x}^2 &= m^{-1}\left(-X\sin\theta - T\cos u^1 - G\right),\\
\dot{x}^3 &= f^3\left(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, \widetilde{N}\right) + \tfrac{P}{x^3}(N - \widetilde{N}),\\
\dot{x}^4 &= x^2, \quad F\left(x(t_F)\right) = x^4(t_F) \to \min .
\end{aligned}$$

где x^1, x^2 — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости, x^3 — угловая скорость вращения несущего винта, x^4 — высота, u^1 — угол отклонения вектора тяги от вертикали, u^2 — общий шаг несущего винта, N — располагаемая мощность двигателей (рассматривается как внешнее воздействие в нештатной ситуации), P, Q, R, $\widetilde{N}$ — константы, m, G — масса и вес вертолета соответственно, $X = Q\left((x^1)^2 + (x^2)^2\right)$, $T = F_T(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2)$, $\theta = \arctan\frac{x^2}{x^1}$.

* Гурман В. И., Квоков В. Н., Ухин М. Ю. Приближенные методы оптимизации управления летательным аппаратом // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 191–201.

Этап 1.

Построено семейство полиномиальных аппроксимаций правой части динамической системы и, тем самым, получено семейство задач $(\mathbf{E}^i, I)$.

* Блинов А. О., Гурман В. И., Фраленко В. П. Аналитическая аппроксимация модели динамики летательного аппарата в задачах приближенно-оптимального синтеза управления // Вестник СГАУ, 2009. № 4(20). С. 16–25.

Этап 2.

Для линейной конструкции и соответствующей задачи $(\mathbf{E}^1, I)$ проведен с помощью метода кратных максимумов качественный анализ, в результате которого сформировался начальный приближенный элемент $m^{\mathrm{I}} = \left(x^{\mathrm{I}}(t), u^{\mathrm{I}}(t)\right) \in \mathbf{E}^1$.

Проведены компьютерные расчеты по его улучшению на одной из более точных нелинейных аппроксимаций, т. е. улучшение в задаче $(\mathbf{E}^2, I)$, на суперкомпьютере семейства "СКИФ"с помощью компьютерной программы, реализующей в параллельном режиме алгоритм локального улучшения управления при наличии фазовых ограничений.

Этап 3.

Взаимодействие между программой улучшения управления и исходной компьютерной программой по расчету правых частей позволило провести серию расчетов по улучшению программы управления на исходной модели. Достигнуто попадание в допустимое множество и при этом не ухудшилось значение целевого функционала, достигнутое на втором этапе исследования.

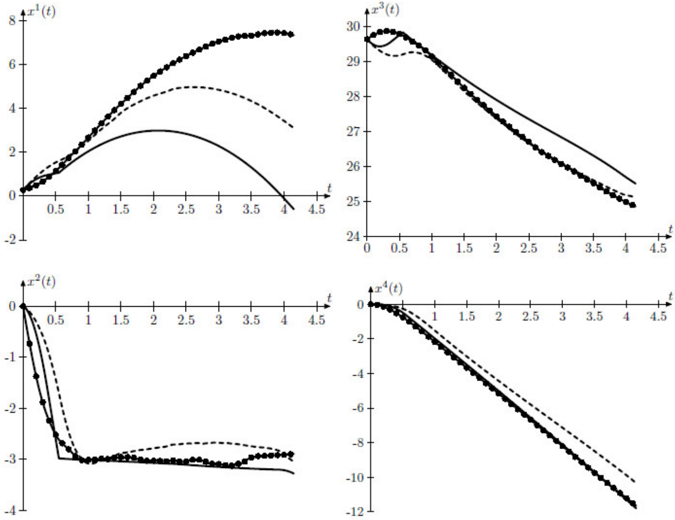
Этап 4.

Выбор окончательного решения осуществлялся из полученных допустимых решений согласно наименьшему значению целевого функционала.

(!)

Получены результаты для наиболее жесткого из рассмотренных сценариев нештатной ситуации, которые позволили сделать вывод о повышении границы опасной зоны на 15% против начального приближения при сохранении качественного характера динамики управлений и состояния.

Начальная итерация — сплошная линия, итерация 19 — пунктирная линия, итерация 105 — линия с точками.



Вычисления проводились на 256 различных наборах параметров метода, при этом был проведен запуск на различном числе узлов и замер времени работы в каждом случае для оценки эффективности распараллеливания программ.

Число ядер: n	1	3	5	7	9	11	13	15
Время работы: t_n, с	1029.85	351.99	218.83	159.60	130.71	110.29	93.69	90.10
Ускорение: t_1/t_n	1	2.93	4.71	6.45	7.88	9.34	10.99	11.43

Класс квантовых систем с управлением

$$\dot{\omega} = iH\omega,$$

где i — мнимая единица, $H = H_1 + iH_2$ — комплексный линейный самосопряженный оператор, $\omega = \alpha + i\beta$ — комплексный вектор фазовых переменных, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$.
При $H_1 = -P_A - uP_B$, где P_A, P_B — произвольные симметричные матрицы, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $H_2 = 0$, выделяя в этом уравнении вещественную и мнимую часть и обозначив $x = (x^1, \dots, x^{2n}) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n, \beta^1, \dots, \beta^n)$,
поставим задачу улучшения управления для гамильтоновой системы:

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} 0 & P_A \\ -P_A & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & P_B \\ -P_B & 0 \end{pmatrix} \right) x,$$

$$x(t_I) = x_I, \quad t \in [t_I, t_F], \quad I = F(x(t_F)) \to \min .$$

Затруднения: отсутствие ограничений на управление и проблема выбора начального управления $u(t)$.

* Кротов В. Ф. Об оптимизации управления квантовыми системами // Доклады РАН, 2008. № 3. С. 316–319.

Этап 1.

Был использован метод преобразования исходной системы к производной, который позволил свести проблему улучшения начального управления для системы $(\mathbf{D}, I)$ к расширенной производной задаче меньшего порядка с ограниченным управлением $(\mathbf{E}, I)$. Для задач управления периодическими процессами это преобразование может быть сделано явно.

Этап 2.

Был применен метод глобального улучшения. В качестве начального приближения для задачи улучшения $(\mathbf{D}, I)$ была выбрана аппроксимация полученного процесса $m \in \mathbf{E}$ с помощью допустимых процессов исходной задачи $(\mathbf{D}, I)$.

Этап 3.

Дальнейшее улучшение найденного начального управления в исходной задаче с помощью метода глобального улучшения.

Условная квантовая система при $n = 2$, $t_I = 0$, $x(0) = (-1, 1, -1, 1)^T$,

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(x(t_F)) = x^T(t_F)Qx(t_F) \to \min,$$

где $Q = diag(-1, -2, -3, -1)$.
Инвариант рассматриваемой системы $\|x(t)\| = x^T(t)x(t) = x^T(0)x(0) = 4$, т. е. исходная задача равносильна задаче на минимум функционала

$$F_1(x(t_F)) = \left(x^3(t_F) \pm 2\right)^2 = 4 \pm 4x^3(t_F) + (x^3(t_F))^2 = 8 \pm 4x^3(t_F).$$

Способ 1. Применим алгоритм глобального улучшения к исходной задаче при ограничении на управлени $|u| \leq 3$, выбрав начальное управление $u^I(t) = 0.3$.
Способ 2. Применим общую схему исследования задач управления.

Расчет 1– при квадратичной аппроксимации функции $\varphi(t, x)$;
Расчет 2– при поиске линейной функции $\varphi(t, x)$ как решения уравнений в частных производных, соответствующих функционалу F_1.

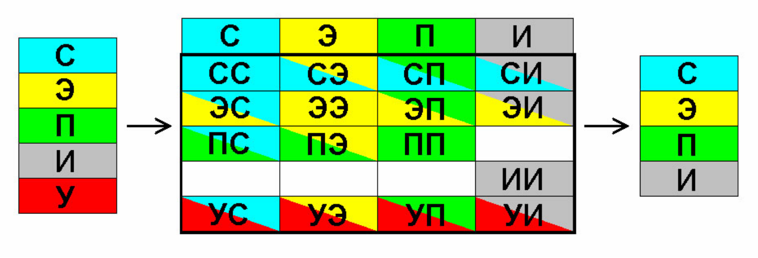
	Способ 1		**Способ 2**	
Итерация	F, расчет 1	F, расчет 2	F, расчет 1	F, расчет 2
0	-5.7363	-5.7363	-6.6623	-6.6623
1	-10.0555	-9.6634	-11.6184	-11.4022
2	-10.1575	-10.0026	-11.6799	-11.5715
3	-10.1594	-9.8456	-11.6950	-11.3952
4	-10.1594	-9.9975	-11.7124	-11.5665
5	-10.1594	-9.8501	-11.7281	-11.3948
Время, с	86	46	85	45

СОЦИО-ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕГИОНА

* Модели управления природными ресурсами // Под ред. В. И. Гурмана. — М.: Наука, 1981.

* Эколого-экономическая стратегия развития региона: Математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона. — Новосибирск: Наука, 1990.

* Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В. И. Гурмана, Е. В. Рюминой. — М.: Наука, 2001.



Модель описывается следующими соотношениями:

$$c = (E - A(\theta))\,y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^d d - B^d u^d,$$

$$\dot{r} = N\,(r - \bar{r}) - C(\theta)y - Du - D^z u^z + C^z z + im^r - ex^r,$$
$$r_{\min} \le r \le r_{\max},$$

$$\dot{k} = u - [\delta]k, \quad \dot{k}^z = u^z - [\delta^z]k^z, \quad \dot{k}^d = u^d - [\delta^d]k^d,$$

$$y_{\min} \le y \le [\beta]k, \quad 0 \le z \le [\beta^z]k^z, \quad 0 \le d \le [\beta^d]k^d,$$
$$u \le 0, \quad u^z \le 0, \quad u^d \le 0,$$

$$\dot{\theta} = -\left([d] + H_{inv} + [H_{dif}]\right)(\theta - \bar{\theta}),$$

$$\dot{\Pi} = \left((1 - l)p^{\mathrm{T}}c - l\,(r - \bar{r})^2\right)e^{-\rho t}, \quad 0 \le l \le 1.$$

Переменные состояния

$k \in \mathbb{R}^{n_1}$, $k^z \in \mathbb{R}^{n_2}$, $k^d \in \mathbb{R}^{n_3}$ — основные фонды в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах $(n_3 = n_1(n_1 + n_2))$,
$r \in \mathbb{R}^{n_1}$ — индексы состояния природной среды и социума,
$\theta \in \mathbb{R}^{n_3}$ — инновационные индексы (агрегированное описание изменения за счет инноваций элементов матрицы прямых затрат в экономическом секторе $A(\theta)$ и матрицы коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем $C(\theta)$),
$\Pi \in \mathbb{R}$ — функционал благосостояния.

Переменные управления

y, z, d — выпуски продукции по отраслям, активное природо-социо-восстановление, активные инновации,
u, u^z, u^d — инвестиции в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах.

Критерий оптимальности

На заданном отрезке времени $[t_I, t_F]$ (период, горизонт планирования) максимизировать величину $\Pi(t_F)$ (функционал благосостояния) при заданных ограничениях и заданном состоянии в начале периода: $\Pi(t_I) = 0$, $k(t_I) = k_I$, $k^z(t_I) = k_I^z$, $k^d(t_I) = k_I^d$, $r(t_I) = r_I$, $\theta(t_I) = \theta_I$.

Остальные величины, входящие в модель

c — конечное потребление; $\Gamma(k) = [\beta]k$, $\Gamma^z(k^z) = [\beta^z]k^z$, $\Gamma^d(k^d) = [\beta^d]k^d$, δ, δ^z, δ^d — мощности и темпы амортизации в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах; p — цены; $\bar{r}$ — заданная функция (опорная), например получаемая из статистического прогноза; im^r, ex^r — миграционные потоки загрязнений и ресурсов; A^z, A^d — прямые затраты в природо-социо-восстановительном и инновационном секторах; B, B^z, B^d — фондообразующие затраты в указанных секторах; N — коэффициенты взаимовлияния компонентов природной и социальной подсистем; D, D^z — коэффициенты воздействия на компоненты природной и социальной подсистем при инвестициях в отрасли экономики и в природо-социо-восстановительный сектор; H_{inv}, $[H_{dif}]$ — матрицы, отражающие влияние инвестиций и диффузии инноваций, $r_{\min}$, $r_{\max}$ — минимально и максимально допустимые индексы состояния природной среды и социума, $y_{\min}$ — минимально допустимые выпуски продукции по отраслям.

Комплекс DSEEmodel 1.0 для суперЭВМ серии «СКИФ» предназначен для компьютерной поддержки следующих типов расчетов:

1. Сценарный анализ — программа поиска решения (прямого расчета системы) при задании всех входных величин;
2. Моделирование неопределенностей — программы случайных изменений коэффициентов и входов моделей с целью исследования их на устойчивость и чувствительность;
3. Грубая глобальная оптимизация — программа поиска магистральных решений, характерных для данной модели, как приближенных глобально оптимальных, которые можно выбирать в качестве начальных приближений для последующего итерационного уточнения (**этап 1** и **этап 2** общей схемы исследования);
4. Последовательное улучшение и приближенно-оптимальный синтез управления — программа, реализующая итерационное улучшение приближенных решений (**этап 3** общей схемы исследования).

Расчеты на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв» для двух условных регионов: Переславского региона (общая размерность вектора состояния составила 54, вектора управлений — 56) и Байкальского региона (общая размерность вектора состояния составила 3551, вектора управлений — 3588).

Эффективность программы анализа чувствительности

Число процессоров (ядер): n	8	19	38	64
Время работы, с (мин.)	3466 (58)	1483 (25)	785 (13)	520 (9)
Ускорение	6.232	14.565	27.516	41.538

Эффективность программы улучшения управления

Число процессоров (ядер): n	1	2	4	9
Время работы, с (мин.)	703 (12)	394 (7)	230 (4)	202 (3)
Ускорение	1	1.78	3.06	3.48

Аналогичные эксперименты проводились с параллельными версиями программ оптимизации на суперкомпьютере СКИФ «Первенец-М», расположенном в ИПС имени А.К. Айламазяна РАН.

Эффективности программ оптимизации

Поиск магистрального решения				
Число процессоров (ядер): n	1	4	8	16
Время работы, с (мин.)	603 (10)	173 (3)	105 (2)	89 (1)
Ускорение	1	3.49	5.74	6.78
Поиск магистрального решения с последующим расчетом динамики				
Число процессоров (ядер): n	1	4	8	16
Время работы, с (мин.)	2275 (38)	622 (10)	351 (6)	288 (5)
Ускорение	1	3.66	6.48	7.90

* Московский А. А., Первин А. Ю., Walker B. Оптимальное управление ресурсами виртуальных инструментов на вычислительном кластере // Тр. IV межд. конф. "Параллельные вычисления и задачи управления 2008. ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН.

Построена математическая модель $(\mathbf{D}, I)$ для системы из $i = \overline{1, n}$ компьютерных приложений, использующих один первичный ресурс и $j = \overline{1, m}$ различных категорий вторичных (зависимых от первичного) ресурсов:

$$y^i(t+h) = y^i(t) + \sum_{k=1}^{k^i} \alpha_{ik} max\left\{0, \widetilde{p^{ik}}(t) - p^{ik}(v^i(t), r^{i1}(t), \ldots, r^{im}(t), L^i(t))\right\},$$

$$t \in \mathbf{T} = [t_0, t_1], \quad y^i(t_0) = 0, \quad v(t) \in \mathbf{V}(t), \quad r^i(t) \in \mathbf{R^i}(t, v^i(t)),\ i = \overline{1, n},$$

$$I = F\left(y(t_1)\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{y^i(t_1)}{\delta^{i+}} \to min,$$

$v^i(t)$– первичный ресурс, $r^{ij}(t)$– вторичные ресурсы, p^{ik}– характеристика k приложения i, $\widetilde{p^{ik}}(t)$ — целевой уровень характеристики, $L^i(t)$– пользовательская нагрузка, $y^i(t)$ — сумма отклонений уровня сервиса приложения i к моменту времени t, β_i– весовые коэффициенты, выбираемые согласно приоритету каждого приложения. Здесь роль управлений играют функции $v^i(t)$, $r^{ij}(t)$.

Этап 1.

Характеристики были расчитаны в табличном виде и аппроксимированы полиномиальными функциями по МНК. Специфика задачи: динамическая система зависит от неизвестных функций $L^i(t)$, $i = \overline{1, n}$. По значениям этих функций в предшествующие рассматриваемому отрезку времени моменты, строится прогноз изменения функций $L^i(t)$ и тем самым периодически выполняются преобразования модели к семейству задач $(\mathbf{E}^j, I)$.

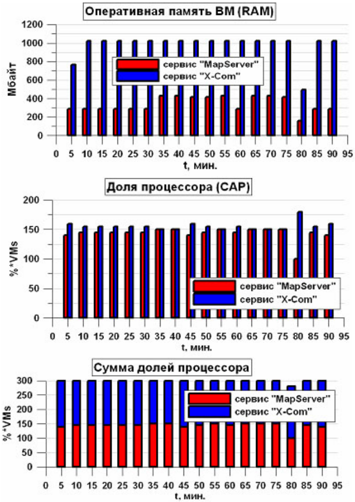
Этап 2, 3.

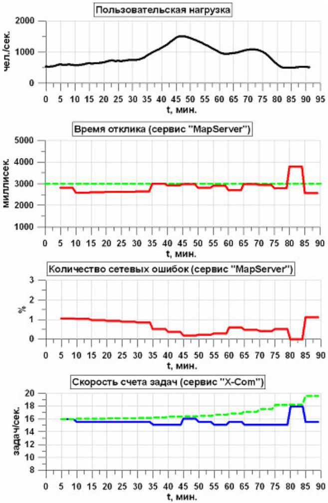
Приближенное решение задач $(\mathbf{E}^j, I)$ при практически значимой переформулировке исходных задач в виде последовательного поиска минимума функции $n(m+1)$ переменных с помощью известных численных методов.

Написана программа, моделирующая работу системы двух приложений (картографический сервис «MapServer» и вычислительный сервис «X-Com»).

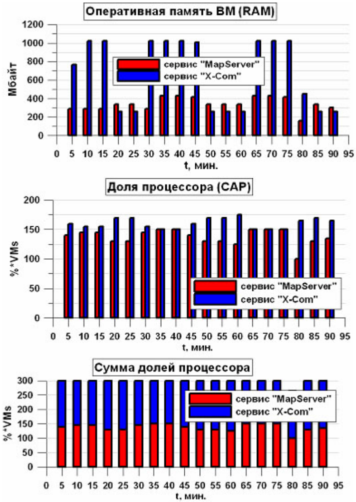
ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ

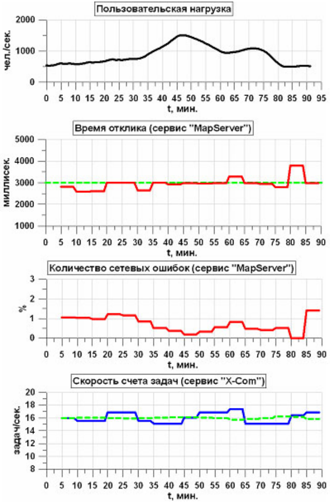
Устойчиво хорошее динамическое перераспределение ресурсов с учетом поддержания характеристик на целевом уровне.





Усложнение задачи за счет изменяющегося во времени целевого уровня второго приложения, что имеет смысл ограниченного конечного времени расчета.





ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ I

1. **Поставлена и решена проблема разработки методологической основы нового направления поиска приближенных решений задач управления в рамках единого подхода на основе принципа расширения**, что позволяет обойти естественные трудности, которые не могут быть учтены должным образом при формировании модели управляемого объекта (отсутствие полного аналитического описания, неопределенности в описании модели и критерия качества управления и т. п.).
2. **Разработаны конструктивные методы расширяющих преобразований модели объекта, направленные на замену исходной задачи семейством более простых задач** (в смысле дальнейшего поиска приближенного решения), которые составляют основу общей схемы исследования. Разработанные алгоритмы на основе этого метода позволяют получать множество решений прикладной задачи, что позволяет выбирать лучшее приемлемое решение с учетом возможных неучтенных в модели ограничений и различных неопределенностей. Показана эффективность применения методов для решения практических прикладных технико-эколого-экономических задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ II

3. **Разработаны эффективные методы и алгоритмы локального улучшения управления на основе достаточных условий оптимальности.** Данные методы ориентированы на параллельные вычисления, и, что немаловажно, снабжены автоматическим поиском штрафных коэффициентов при решении задач с фазовыми ограничениями. Как показывают вычислительные эксперименты, эти методы обладают высокой эффективностью и временной производительностью при запуске на суперкомпьютерах семейства «СКИФ».
4. **Для решения задач без фазовых ограничений разработаны конструктивные методы и алгоритмы глобального улучшения управления на основе глобальных методов улучшения Кротова.** Эти методы, в отличие от локальных методов, позволяют снизить зависимость процесса улучшения от выбора начального управления и существенно ускорить процесс на начальных итерациях, что подтверждается численными экспериментами.

5. **Предложенные в работе теоретические положения для приближенного решения задач управления реализованы в виде методик, алгоритмов и прикладного программного обеспечения.** Частично алгоритмы распараллелены и реализованы в рамках Т-системы с открытой архитектурой (OpenTS). Разработанное программное обеспечение может использоваться как автономно, так и в составе комплексов программ ПК ISCON и DSEEmodel 1.0 Исследовательского центра системного анализа ИПС имени А.К. Айламазяна РАН. Полученные в работе результаты используются в НОУ ВПО "Университет города Переславля"в учебном процессе при выполнении курсовых и дипломных работ, в ИПС имени А.К. Айламазяна РАН в исследованиях аспирантов, а также отражены в учебном пособии.

Исследования проводились в рамках:

- научных грантов №06-01-00330-а (Реализация обобщенных решений задач управления), 08-01-00274-а (Приближенные методы оптимизации управления на основе аппроксимаций модели объекта), 09-01-170-а (Вырожденные задачи оптимального управления) Российского фонда фундаментальных исследований;
- научно–технической программы «ТРИАДА» (подпроект: Разработка программного комплекса улучшения и оптимизации законов управления для приложений в различных областях);
- научно–технической программы Союзного государства «СКИФ-ГРИД» (пилотный проект: Многовариантные расчеты стратегии устойчивого развития Байкальского региона с применением ПК ISCON на суперЭВМ «СКИФ»).

Основные научные и практические результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- XV Международная конференция по механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2007), 25–31 мая 2007 г., Алушта;
- IV Международный симпозиум "Обобщенные решения в задачах управления"(GSCP-08), Бурятия, г. Улан–Удэ, 23–28 июня 2008 г.;
- Третья всероссийская научно-практическая конференция "Имитационное моделирование. Теория и практика 17-19.10.2007, Санкт-Петербург;
- IV международная конференция "Параллельные вычисления и задачи управления"(PACO-2008), Москва, октябрь 2008 г.;
- Международная конференция "Программные системы: теория и приложения". ИПС РАН, Переславль–Залесский, 2009;
- XVI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009), 25-31 мая 2009 г., Алушта;
- Первая традиционная всероссийская молодежная летняя школа "Управление, информация и оптимизация Переславль, 2009;

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ II

- Молодежный симпозиум с международным участием: "Теория управления: новые методы и приложения ИПС РАН, Переславль–Залесский, 22-26 сентября 2009 г.;
- Международная научная конференция "Параллельные вычислительные технологии'2010 г. Уфа, 2010 г.;
- Третья Международная научная конференция "Суперкомпьютерные системы и их применение"(SSA'2010), 25-27 мая 2010 года, Минск;
- Третьей международной конференции "Математическое моделирование социальной и экономической динамики"(MMSED-2010), 23-25 июня 2010 г., Москва;
- III международная конференция Инфокоммуникационные и вычислительные технологии (ИКВТС-2010), Улан–Удэ, 2010;
- V International Symposium "Generalized statements and solutions of control problems — 2010 Ulaanbaatar, Mongolia, 2010;
- Школа-семинар "Приближенные методы оптимального управления в параллельных вычислениях Переславль-Залесский, декабрь 2010.

ОПУБЛИКОВАННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

Результаты диссертационной работы отражены в 35 публикациях:

- 2 учебных пособиях (одно из них в соавторстве),
- 17 статей, в том числе 12 статей в изданиях из списка ВАК,
- 15 материалов международных и российских конференций,
- 1 свидетельство государственной регистрации программ для ЭВМ.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ