СИСТЕМЫ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ. *

Л.А. Бекларян

Центральный Экономико-Математический Институт РАН
E-mail beklar@cemi.rssi.ru

I. Особенности функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

Рассматривается уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t), \ldots, x(q_s(t))), \qquad t \in B_R \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^{(0)}$; $\quad q_j(.), \quad j = 1, \ldots, s$ — гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию; B_R — замкнутый интервал $[t_0, t_1]$, замкнутая числовая полупрямая $[t_0, +\infty[$, или числовая прямая $\mathbb{R}$.

Рассматриваемое функционально-дифференциальное уравнение точечного типа при $q_j(t) \equiv t, \quad j = 1, \ldots, s$ — является обыкновенным дифференциальным уравнением, при $q_j(t) \leq t, \quad j = 1, \ldots, s$ — уравнением с запаздываниями, при $q_j(t) \geq t, \quad j = 1, \ldots, s$ — уравнением с опережениями. Функции $[q_j(t) - t], \quad j = 1, \ldots, s$ называются отклонениями аргумента. Используя замену времени, мы всегда можем добиться выполнения условий

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |q_j(t) - t| < +\infty, \qquad j = 1, \ldots, s$$

для отклонений аргумента. Очевидно, что подобная замена времени может изменить характер роста правой части уравнения относительно переменной времени.

Определение 1. *Абсолютно непрерывная функция $x(.)$, определенная на $\mathbb{R}$, называется решением уравнения* (1), *если при почти всех $t \in B_R$ функция $x(.)$ удовлетворяет этому уравнению. Если при этом $x(.) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, то такое решение называется решением класса $C^{(k)}$.*

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант №09-01-90200, грант № 09-01-00324-а) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3038.2008.1)

Основная цель при изучении таких дифференциальных уравнений – это исследование краевой задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t), \dots, x(q_s(t))), \qquad t \in B_R, \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \backslash B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \qquad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

которую будем называть *основной краевой задачей.*

В случае отсутствия отклонения аргумента ($q_j(t) \equiv t, \ j = 1, \dots, s$) краевая задача переходит в задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Если $B_R = [t_0, t_1]$, или $B_R = [t_0, +\infty\,[$, то, при $\bar{t} = t_0$ для уравнения с запаздываниями ($q_j(t) \leq t, \quad j = 1, \dots, s$), или при $\bar{t} = t_1$ для уравнения с опережениями ($q_j(t) \geq t, \quad j = 1, \dots, s$), краевая задача переходит в хорошо известную постановку начальной задачи для уравнения с запаздываниями, или опережениями аргумента. Важно, что в выделенных случаях рассматриваемая краевая задача имеет *локальные краевые условия.*

В ситуации общего положения, когда $\bar{t} \neq t_0, t_1$, или отклонения аргумента произвольны, мы имеем краевую задачу с *нелокальными краевыми условиями.*

Известно, что функцинально-дифференциальные уравнения (ФДУ) точечного типа не наследуют всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Такие отличительные особенности можно продемонстрировать на ряде простых примеров. Для понимания возможных подходов для изучения таких уравнений следует рассмотреть сравнительный модельный пример.

Рассмотрим простейшие примеры ОДУ и ФДУ

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad \dot{x}(t) = x(t-1)$$

с соответствующими характеристическими уравнениями

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = e^{-\lambda}.$$

Первое характеристической уравнение имеет единственное решение, а второе-счетное число решений. Решение вопроса может быть сформулировано следующим образом: найти те решения ФДУ, которые соответствуют первому (в смысле значения нормы) простому собственному числу.

В рамках такого подхода решения ФДУ точечного типа ищутся в банаховом пространстве функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}^n_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : \, x(\cdot) \in C^{(k)}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\right), \, \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \qquad \mu \in (0, +\infty),$$

с нормой

$$\|x(\cdot)\|^{(k)}_\mu = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^{(r)}(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Подход, предлагаемый для исследования основной краевой задачи, основан на формализме, центральным элементом которого является структура конечно-порожденной группы $Q =< q_1, \ldots, q_s >$ гомеоморфизмов прямой (групповой операцией в такой группе является суперпозиция двух гомеоморфизмов). Исходному функционально-дифференциальному уравнению точечного типа ставится в соответствие индуцированное бесконечномерное обыкновенное дифференциальное уравнение со значениями в пространстве бесконечных последовательностей. Если $x(.)$ решение исходного функционально-дифференциального уравнения, то вектор-функция

$$\varkappa(.) = \{x_q(.)\}_{q\in Q}, \quad x_q(t) = x_e(q(t)), \quad x_e(q(t)) = x(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

является решением индуцированного обыкновенного дифференциального уравнения.

Свойства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа, а также вариационных задач и задачи оптимального управления с дифференциальными связями, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями точечного типа, тесно связаны со структурой указанной группы Q.

Метод исследования ФДУ точечного типа, основанный на их групповых особенностях, позволил получить не улучшаемые условия, которые определяют способы регулярного расширения класса ОДУ в классе ФДУ точечного типа в смысле сохранения таких свойств решений ОДУ, как существование и единственность в заданном классе функций, непрерывная зависимость решения от начальных условий, точечная полнота решений, n-параметричность пространства решений, "гладкость"решения, свойство "грубости"уравнения и т.д. Отмеченные неулучшаемые условия формулируются в терминах правой части ФДУ и параметра μ.

Для простоты и наглядности формулировки основных результатов будем рассматривать случай постоянных соизмеримых отклонений аргумента.

Изучается начально-краевая задача

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+n_1), \cdots, x(t+n_s)), \qquad t \in B_R, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, s \tag{5}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R}\backslash B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{6}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, . \tag{7}$$

Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0, t_1]$, $\quad t_0$, $t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0, +\infty[$, $t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$.

Приведем несколько примеров таких краевых задач и продемонстрируем основные типы вырождений пространства решений. Причина таких вырождений пространства решений -это наличие отклонения аргумента и нелокальность краевых условий.

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{\pi}{2}x(y+1), \qquad t \in [4, 6], \tag{8}$$

$$\dot{x}(t) \equiv 0, \qquad t \in \mathbb{R}\backslash[4, 6], \tag{9}$$

$$x(4) = a, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Решение такой краевой задачи имеет следующий вид

$$x(t) = \begin{cases} a + C\sin\frac{\pi}{2}t, & t \in [4,6], \\ a, & t \in R\backslash[4,6], \end{cases}$$

где C — произвольная константа. Таким образом, пространство решений краевой задачи (8)- (9) является двумерным (образует 2–параметрическое семейство, где параметрами служат (a, C)), а пространство решений краевой задачи (8)–(10) одномерное (образует 1–параметрическоесемейство, где пaтаметром служит C).

Графики решений рассматриваемой краевой задачи при заданном краевом значении a приведены на рис.1.

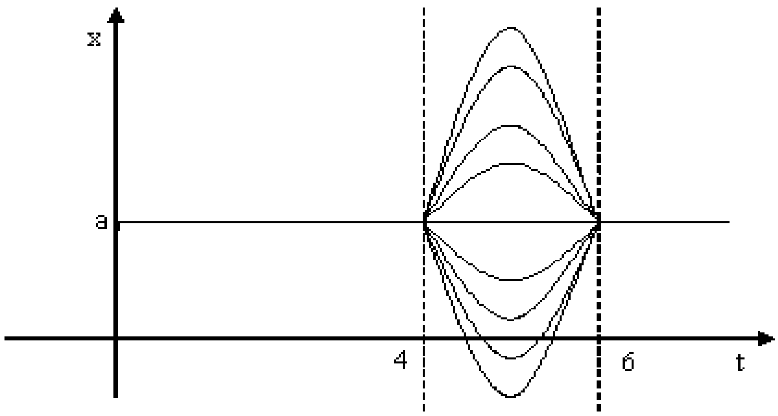

рис.1

■

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}(t) = -x(t-h), \qquad t \in [0, +\infty\,[, \tag{11}$$

$$\dot{x}(t) \equiv 0, \qquad t \in\,]-\infty, 0\,[, \tag{12}$$

$$x(0) = a, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Решение такой задачи строится методом шагов и на интервале $[2, 2+h]$ имеет вид

$$x(t) = a - a\int_0^t d\tau = a(1-t).$$

В частности, $x(h) = a(1-h)$. Если запаздывание h положить равным 1, то для любого начального значения $a \in R$ имеет место равенство $x(1) = 0$.

Графики решений рассматриваемой краевой задачи при различных краевых условиях a приведены на рис.2.

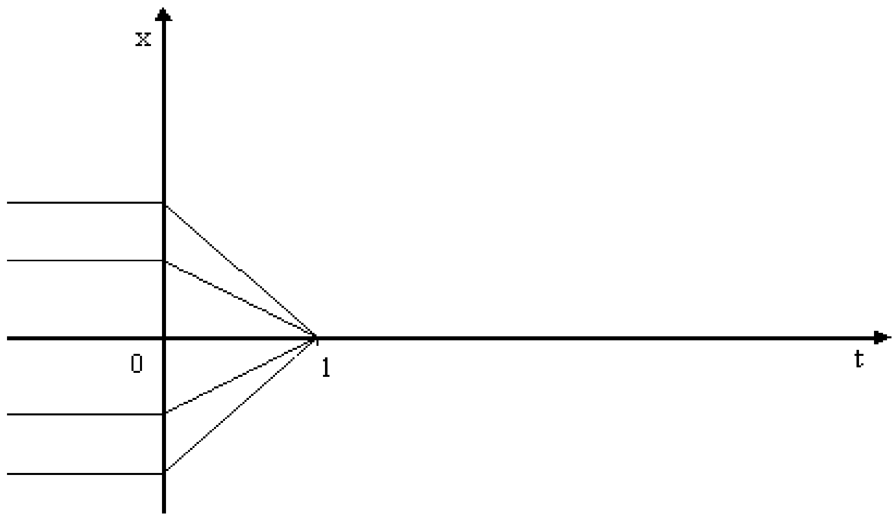

рис.2

■

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}(t) = \frac{\pi}{2}x(t-1) - \frac{\pi}{2}x(t+1), \qquad t \in [4,6], \tag{14}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} 1, & t \in]-\infty, 4\,[, \\ 0, & t \in]\,6, +\infty\,[, \end{cases} \tag{15}$$

$$x(4) = a, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad a \neq -1. \tag{16}$$

Несложно проверить, что такая краевая задача не имеет решения. ■

Пример 4. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}(t) = -x(t+1), \qquad t \in [0, +\infty[, \tag{17}$$

$$x(0) = 0. \tag{18}$$

График построенного решения приведен на рис.3.

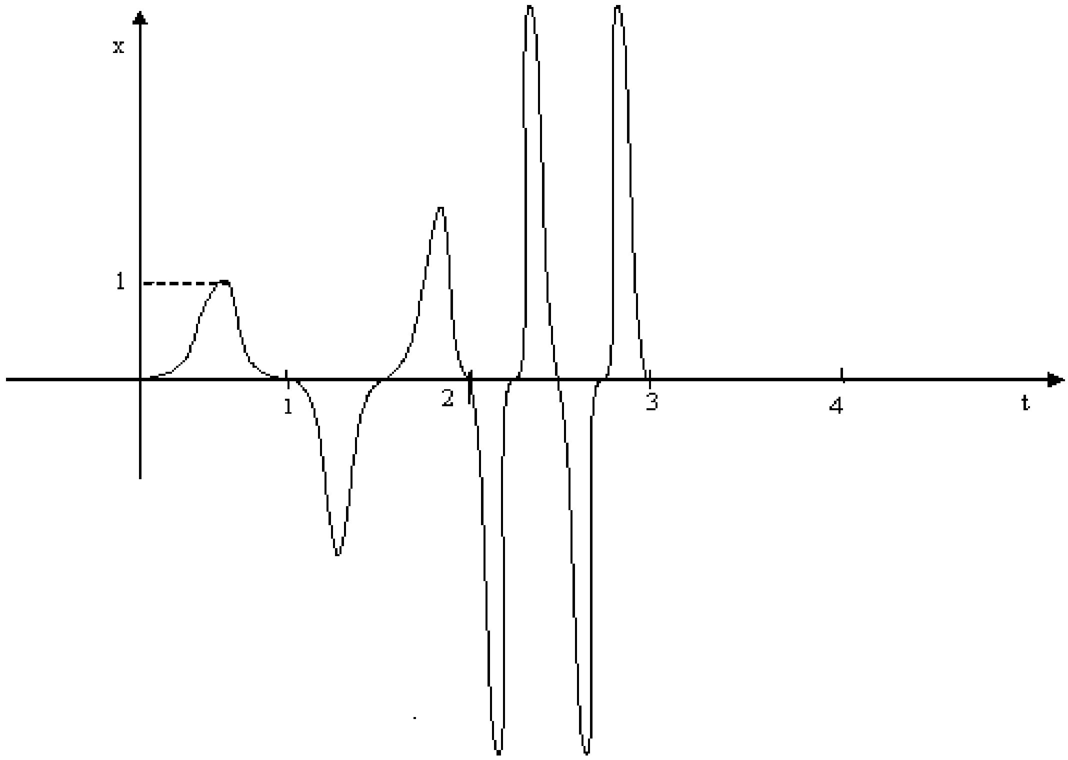

рис.3

Такое решение растет не медленнее чем $2^{C[t]^2}$, где $[t]$- целая часть числа, а C некоторая константа.

■

Примеры 1—4 показывают, что для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа привычные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений пропадают.

Пример 1 показывает, что может нарушаться единственность решения. Пример 2 показывает, что решения функционально-дифференциального уравнения точечного типа (в случае $h = 1$) при любых начальных данных (13) в момент $t = 1$ может фокусироваться в точку 0 , то есть все фазовое пространство $\mathbb{R}$ вдоль решений краевой задачи (11)–(12) фокусируется в точку 0. Для обыкновенных дифференциальных уравнений отображение фазового пространства $\mathbb{R}^n$ вдоль решений уравнения задает гомеоморфизм фазового пространства. Поэтому для функционально-дифференциального уравнения точечного типа правомерна постановка следующей задачи: когда, при заданных краевых условиях, отображение фазового пространства R^n вдоль решений уравнения задает сюръективное отображение на себя? Такая задача называется *проблемой точечной полноты пространства решений.*

Пример 3 показывает, что решение краевой задачи существует не при любых краевых и начальных условиях.

Для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которых удовлетворяет условию Липшица, справедливо неравенство Гронуолла. Поэтому, для таких уравнений решения растут не быстрее чем некоторая заданная экспоненциальная функция. Пример 4 показывает, что для автономного функционально-дифференциального уравнения точечного типа, правая часть которого удовлетворяет условию Липшица, решения могут расти сколь угодно быстро, что указывает на отсутствие условий типа неравенства Гронуолла.

Наконец, пример 2 показывает, что для функционально-дифференциального уравнения точечного типа с заданными краевыми и начальными условиями (локального типа) даже с бесконечно дифференцируемой (даже с аналитической) правой частью решение может быть всего лишь абсолютно непрерывным.

Сформулируем систему ограничений на правую часть ФДУ (20):

(I) $g(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ (в условии (I) функцию $g(.)$ по переменной t можно положить кусочно непрерывной с разрывами первого рода в точках дискретного множества);

(II) для любых $t,\ z_j,\ \bar{z}_j,\ j = 1, \ldots, s$

$$\|g\,(t, z_1, \ldots, z_s)\,\|_{R^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^{s} \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad M_0(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$\|g\,(t, z_1, \ldots, z_s) - g\,(t, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_s)\,\|_{R^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^{s} \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

(в действительности $M_1 \leq M_2$, но константы M_1 и M_2 можно взять равными);

(III) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что выражение

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t+i)\,(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна.

(IV) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что семейство функций

$$\tilde{g}_{i,z_1,\ldots,z_s}(t) = g(t+i, z_1, \ldots, z_s)(\mu^*)^{|i|}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{R}^n$$

на любом конечном интервале равностепенно непрерывно.

В случае *конечного интервала определения* $B_R=[t_0,t_1]$, будем полагать, что функция $g(.)$ удовлетворяет условиям (I)—(II). Если B_R является *полупрямой*, или *прямой*, будем полагать, что $g(.)$ удовлетворяет условиям (I)—(IV).

Опишем весьма широкий класс функций $g(.)$, удовлетворяющих ограничениям (I)–(IV).

Замечание 1. *Пусть функция g имеет представление*

$$g(t,z_1,\ldots,z_s)=g_1(z_1,\ldots,z_s)+f(t),$$

в котором непрерывная функция $f(.)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu^*}C^{(0)}(R)$, $\mu^*\in R_+$, а функция g_1 удовлетворяет условию Липшица. Тогда функция g будет удовлетворять условиям (I)–(IV). В частности, если отображение g является линейным по z_1, ..., z_s, то есть

$$g(t,z_1,\ldots,z_s)=\sum_{j=1}^{s}A_jz_j+f(t)$$

где A_j — постоянные $(n\times n)$ матрицы, а $f(.)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu^*}C^{(0)}(R)$, $\mu^*\in R_+$, то $g(.)$ будет удовлетворять условиям (I)–(IV).■

Определим пространство функций

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)=\big\{f(.):f(.)\text{ удовлетворяет условиям (I)-(III) }\big\}.$$

Для всех функций из $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$ параметр $\mu^*\in\mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (III). В пространстве $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$ можно ввести норму

$$\|f(.)\|_{L_{ip}}=\sup_{t\in R}\|f(t,0,\ldots,0)(\mu^*)^{|t|}\|_{R^n}+$$

$$+\sup_{(t,z_1,\ldots,z_s,\bar z_1,\ldots,\bar z_s)\in\,\mathbb{R}^{1+2ns}}\frac{\|f(t,z_1,\ldots,z_s)-f(t,\bar z_1,\ldots,\bar z_s)\|_{R^n}}{\sum_{j=1}^{s}\|z_j-\bar z_j\|_{R^n}}.$$

Очевидно, что для функции $f(.)\in V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы M_2 из условия Липшица (условие (II)) совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $f(.)$. В дальнейшем, говоря об условии Липшица, под константой M_2 будем понимать именно такое её наименьшее значение. Правую часть функционально-дифференциального уравнения точечного типа мы будем рассматривать как элемент банахового пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$.

Условия непрерывности, условия роста по фазовым переменным и переменной времени, а также условие Липшица (условия (I)–(II)) являются стандартными условиями в теории дифференциальных уравнений, в том числе и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В действительности, в (II) условие роста по фазовым переменным и переменной времени (первое неравенство) является следствием условия Липшица (второе неравенство). Вместе с тем мы отдельно выписали первое неравенство, чтобы для функции $M_0(.)$ сформулировать условие (III). Условие (III) для функции g связано с изучением решений на полупрямой и прямой, что требует определенных ограничений на рост правой части. Последнее условие (IV) необходимо в случае полупрямой или прямой, чтобы избежать дополнительные технические сложности.

Теорема A. *Если для некоторого $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1}, \tag{19}$$

то для любых фиксированных

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

существует решение (абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи. Такое решение является единственным и как элемент пространства $\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ непрерывно зависит от краевой функции $\varphi(.)$, начального состояния $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, а также правой части ФДУ – функции $g(.)$. ■

Непрерывная зависимость решения от правой части уравнения обычно называется свойством грубости системы. Здесь функция $g(.)$ понимается как элемент банахова пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

В случае ФДУ точечного типа с чистым запаздыванием и при специальных начальных условиях теорема A может быть уточнена.

Теорема A′. *Пусть ФДУ (20) определено на конечном интервале $[t_0,\, t_1]$ или полупрямой $[t_0,\, +\infty)$ и имеет запаздывающий тип ($n_j \leq 0, \quad j = 1, ..., s$), а начальный момент $\bar{t}$ удовлетворяет условию $\bar{t} \in (-\infty, t_0]$. Тогда найдется $\nu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ такое, что для любых фиксированных*

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in (0, \nu)$$

существует решение (абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи. Такое решение является единственным и как элемент пространства $\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ непрерывно зависит от краевой функции $\varphi(.)$, начального состояния $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, а также правой части ФДУ – функции $g(.)$. ■

Точно также могут быть изучены импульсные решения функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Рассматривается начально-краевая задача

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+n_1), \cdots, x(t+n_s)), \qquad t \in B_R, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{20}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \backslash B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{21}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

$$x(\bar{t}_i + 0) - x(\bar{t}_i - 0) = \rho_i, \quad \bar{t}_i \in \mathbb{R}, \quad \bar{t}_i < \bar{t}_{i+1}, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{23}$$

для ФДУ точечного типа с заданными: областью определения B_R; отклонениями $n_j, \quad j = 1, \ldots, s$; краевым условием с заданной краевой функцией $\varphi(.)$; начальным условием с заданным начальным значением $\bar{x}$ и начальным моментом $\bar{t}$; условиями скачков с заданными значениями скачков $\varrho_i, \quad i \in \mathbb{Z}$ и моментами скачков $\bar{t}_i, \quad i \in \mathbb{Z}$. Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0, t_1], \qquad t_0, t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0, +\infty), \qquad t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$. Множество моментов скачков $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{Z}\}$ состоит из объединения конечного числа орбит группы сдвигов $Q = < t + n_1, \ldots, t + n_s >$.

Определение 2. *Кусочно абсолютно непрерывная функция $x(.)$, определенная на всей прямой $\mathbb{R}$ и имеющая разрывы первого рода в точках $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{Z}\}$, называется решением (импульсным решением) начально-краевой задачи, если для почти всех $t \in B_\mathbb{R}$ удовлетворяет ФДУ точечного типа, краевому условию, а также начальному условию и условиям разрыва.*

Для формулировки результатов относительно импульсных решений, помимо однопараметрического семейства пространств, введенных ранее, нам понадобится однопараметрическое семейство несколько более широких банаховых пространств: для любого $\mu \in R_+$ положим

$$\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma) = \Big\{ x(.): \ x(.) - \text{кусочно непрерывная с разрывами первого рода}$$

$$\text{в точках множества } \Gamma, \qquad \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{v}rai \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \Big\},$$

с нормами

$$\|x(.)\|^{(0)}_{\mu\Gamma} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{v}rai \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Теорема А1 . *Если для некоторого $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1}, \tag{24}$$

то для любых фиксированных

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \{\rho_i : \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}\},$$

таких что

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\, \Gamma)$$

основной начально-краевой задачи. Такое решение является единственным и как элемент пространства $\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\, \Gamma)$ непрерывно зависит от краевой функции $\varphi(.)$, начального состояния $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, значения скачков $\varrho = \{\rho_i\}^{+\infty}_{-\infty}$, а также правой части ФДУ – функции $g(.)$. ■

Непрерывная зависимость решения от правой части уравнения обычно называется свойством грубости системы. Здесь функция $g(.)$ понимается как элемент банахова пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, а значения скачков $\varrho = \{\rho_i\}^{+\infty}_{-\infty}$ понимаются как элементы пространства бесконечных последовательностей с нормой

$$\|\varrho\|_{\infty\mu\Gamma} = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar{t}_i|}. \tag{25}$$

В случае ФДУ точечного типа с чистым запаздыванием и при специальных начальных условиях теорема B может быть уточнена.

Теорема A1′. *Пусть ФДУ определено на конечном интервале $[t_0,\, t_1]$ или полупрямой $[t_0,\, +\infty)$ и имеет запаздывающий тип ($n_j \le 0, \quad j = 1, ..., s$), а начальный момент $\bar{t}$ удовлетворяет условию $\bar{t} \in (-\infty, t_0]$. Тогда найдется $\nu \in (0, \mu^*) \cap (0,1)$ такое, что для любых фиксированных*

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x}\in\mathbb{R}^n, \quad \{\rho_i :\, \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i\in\mathbb{Z}\}, \quad \mu\in(0,\nu),$$

таких что

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\, \Gamma)$$

основной начально-краевой задачи. Такое решение является единственным и как элемент пространства $\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\, \Gamma)$ непрерывно зависит от краевой функции $\varphi(.)$, начального состояния $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, значения скачков $\varrho = \{\rho_i\}^{+\infty}_{-\infty}$, а также правой части ФДУ – функции $g(.)$. ■

1.Ведение в линейную теорию

Рассматривается основная линейная краевая задача

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{s} A_j x(t+n_j) + \psi(t), \qquad t \in B_R, \tag{26}$$

с краевыми условиями

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \tag{27}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

где A_j n-мерная матрица, $n_j \in \mathbb{Z}$, $\quad j = 1, \dots, s$; $\psi(.) \in \mathcal{L}^n_{\mu^*} C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\varphi(.) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n_r C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\mu^* \in (0, +\infty)$, $k = 0, 1, \dots$; B_R — либо интервал $[t_0, t_1]$, $\quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$, либо полупрямая $[t_{0,} +\infty)$, $\quad t_0 \in \mathbb{Z}$, либо прямая $\mathbb{R}$. Не нарушая общности, можно считать, что $n_1 < \dots < n_s$.

Упрощающее условие о гладкости функции $\varphi(.)$ носит чисто технический характер, хотя мы могли бы рассматривать функцию $\varphi(.)$ из класса существенно ограниченных функций. Так как нас будут интересовать вопросы гладкости решения, то такое предположение о функции $\varphi(.)$ является естественным. Принадлежность функции $\varphi(.)$ к пространству $\bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}^n_r C^{(k)}(\mathbb{R})$ также никак не ограничивает общности, так как поведение функции $\varphi(.)$, начиная с достаточно больших по модулю $t \in \mathbb{R} \setminus B_R$, никак не влияет на уравнение (26).

Теорема 1. *Пусть* $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}^n_{\mu^*} C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \mathcal{L}^n_1 C^{(k)}(\mathbb{R})$, $\quad k = 0, 1, \dots$ *и* $x(\cdot) \in \mathcal{L}^n_{\mu'} C^{(q)}(\mathbb{R})$, $\quad \mu' \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$, $\quad 0 \le q \le k+1$ *является решением краевой задачи* (26)–(27)*. Тогда для любых* $\mu \in (0, \mu')$, $\varepsilon > 0$ *существуют функции* $\psi_\varepsilon(\cdot)$, $\varphi_\varepsilon(\cdot)$,

$$\psi_\varepsilon(\cdot) = \psi(\cdot) + \bar{\psi}_\varepsilon(\cdot), \quad \bar{\psi}_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{L}^n_1 C^{(k)}(\mathbb{R}), \qquad \|\bar{\psi}_\varepsilon(.)\|^{(q)}_1 < \varepsilon,$$

$$\varphi_\varepsilon(\cdot) = \varphi(\cdot) + \bar{\varphi}_\varepsilon(\cdot), \quad \bar{\varphi}_\varepsilon(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{L}^n_r C^{(k)}(\mathbb{R}), \qquad \|\bar{\varphi}_\varepsilon(.)\|^{(q)}_1 < \varepsilon$$

такие, что краевая задача (26)–(27) *с функциями* $\psi_\varepsilon(\cdot)$, $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ *будет иметь решение* $x_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(k+1)}(\mathbb{R})$, *удовлетворяющее условию*

$$\|x(\cdot) - x_\varepsilon(\cdot)\|^{(q)}_\mu < \varepsilon.$$

Более того, функции $\bar{\psi}_\varepsilon(.)$, $\bar{\varphi}_\varepsilon(\cdot)$ *можно выбрать такими, чтобы носитель функции* $\bar{\psi}_\varepsilon(.)$ *был сосредоточен в сколь угодно малых окрестностях целочисленных точек из* B_R, *а носитель функции* $\bar{\varphi}_\varepsilon(.)$ *сосредоточен в сколь угодно малых окрестностях конечного числа фиксированных целочисленных точек из* $\bar{B}_R$.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.

[2] Беллман Р., Кук К. Дифференциально–разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[3] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, (2007), 288.

[4] Бекларян Л.А. Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения аргумента.//ДАН СССР. 1991. Т.317, N6, С.1289-1294.

[5] Бекларян Л.А. Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом.// ДАН СССР, т.291, N1, 1986. с.19–22.

[6] Бекларян Л.А. О приводимости дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом к уравнению с постоянными соизмеримыми отклонениями.// Матем. заметки. т.44, N5, 1988. с.561–566.

[7] Бекларян Л.А. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система.// Препринт. Вычислительный Центр АН СССР. Сообщения по прикладной математике. 1989. с.18.

[8] Бекларян Л.А. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.// ДАН СССР, т.317, N5, 1991. с.1033–1037.

[9] Бекларян Л.А. Структура фактор–группы группы гомеоморфизмов R, сохраняющих ориентацию, по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов.// Докл.РАН, т.331, N2, 1993. с.137–139.

[10] Бекларян Л.А. Инвариантные и проективно–инвариантные меры для групп гомеоморфизмов R, сохраняющих ориентацию.// Докл. РАН, т.332, N6, 1993. с.679–681.

[11] Бекларян Л.А. К теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.// Успехи матем. наук, т.49, N6, 1994. с.193–194.

[12] Бекларян Л.А., Шмульян М.Г. О полноте решений дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, мажорируемых экспоненциальными функциями.// Докл.РАН, т.341, N6, 1995.

[13] Бекларян Л.А. Введение в качественную теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и их приложения. М.:ЦЭМИ РАН, 1996–135с.

[14] Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры.// Математический сборник. 1996. Т.187, N3. с.23-54.

[15] Бекларян Л.А. Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек.//Математические заметки. 1996. Т.51, N3. с.179-180.

[16] Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II.Проективно-инвариантные меры.//Математический сборник. 1996. Т.187, N4. с.3-28.

[17] Бекларян Л.А. Особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Введение в линейную теорию.//Математические заметки. 1998. Т.63, N4.

[18] Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω-проективно-инвариантные меры.//Математический сборник. 1999. Т.190, N4. с.43-62.

[19] Бекларян Л.А. Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты// ВИНИТИ. ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 1999. Т.67, с.161-182.

[20] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложения.Групповой подход// Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т.8, с.3-147.

[21] Валеев К.Г. Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейно зависящим от аргумента.// Сиб. мат. журн., 1964, 5, N2, с.290–309.

[22] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

[23] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[24] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука,1974.

[25] Зверкин А.М. Преобразование запаздывания в дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом.// Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. т.IX, 1975. с.60–75.

[26] Каменский Г.А., Мышкис А.Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами.// Дифференц. уравнения, 1974, 10, N3, с.409– 418.

[27] Каменский Г.А. К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом.// ДАН СССР, т.120, N4, 1958.

[28] Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. МАИ.: Москва, 1990.

[29] Каменский Г.А., Мышкис А.Д., Скубачевский А.Л. О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа.// Укр. мат. журнал, 1985, т.37, N5, с.581-585.

[30] Каменский А.Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально–разностными операторами.// Дифференц. уравнения, т.XII, N5, с.815–824.

[31] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

[32] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[33] Карлович Ю.И. C–алгебра операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов и осциллирующими коэффициентами.// ДАН СССР, 1988, т.302, N3, с.535–540.

[34] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[35] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

[36] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.// Успехи мат.наук, 1977, т.32, N2, с.172–202.

[37] Мышкис А.Д., Цалюк З.Б. О нелокальной продолжимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.// Дифференц. уравнения, 1969, т.5, N6, с.1128–1130.

[38] Мокейчев В.С., Евлампиев Н.П. О решении на полуоси дифференциально–разностного уравнения.// Изв.Вузов. Мат., 1991, N4, р.44–47.

[39] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.

[40] Пинни Э. Обыкновенные дифференциально–разностные уравнения. М.: Изд–во иностр. лит., 1961.

[41] Песин Я.Б. О поведении решений одного сильно нелинейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.// Дифференц. уравнения, 1974, 10, N6, с.1025–1036.

[42] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.

[43] Пустыльников Л.Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // УМН (1997) т.52, вып.3 (315). с.106-158.

[44] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[45] Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

[46] Россовский Л.Е., Скубачевский А.Л. Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. // ИТОГИ НАУКИ: Соврем. Матем. и ее Приложения, 66, ВИНИТИ, Москва, 1999, р.114–192.

[47] Скубачевский А.Л. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения.// Матем. Заметки, 34, 1983, с.105–112; English transl. in Math. Notes, 34, 1984.

[48] Скубачевский А.Л. Нелокальные краевые задачи со сдвигом.// Матем. Заметки, 38, 1985, с.587–598; English transl. in Math. Notes, 38, 1986.

[49] Скубачевский А.Л. Обобщенные и классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений.// Доклады АН, 1994, т. 334, N 4, с.433-436.

[50] Хан В. Обзор теории дифференциально–разностных уравнений с постоянными и переменными отклонениями.// Математика, 1961, 5, N6, с.75–98.

[51] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[52] Хейл Дж. Теория функционально–дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984.

[53] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев.: Наукова думка, 1986.

[54] Шарковский А.Н. О проблеме единственности решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.// Мат.физика, 1970, вып.8, с.167–172.

[55] Шарковский А.Н. Дифференциально–функциональные уравнения с конечной группой преобразований аргумента.//В кн.: Асимптотическое поведение решений дифференциально–функциональных уравнений. Киев: Ин–т математики АН УССР, с.118–142.

[56] Треногин И.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[57] Френкель Я.И., Конторова Т.А. О теории пластической деформации и двойственности // ЖЭТФ. (1938) т.8. с.89-97.

[58] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

[59] Antonevich A., Lebedev V. Functional differential equations: I, II.C^*-theory, Longman Scientific & Technical, Pitman monograps and surveys in puar and applied mathematics, N70, London-New York, 1994.

[60] Beklaryan L.A. About Canonical Types of The Differential Equations With Deviating Argument.// Functional Differential Equations. 2001. Vol.1. pp. 25-33.

[61] Cartan H. Calcul differentiel. Formes differentielles. Hermann Paris 1967.

[62] Chen C.-H., Pan S.-T., Hsieh J.-G. Stability of nominally stable uncertain singularly perturbed systems with multiple time delays// Control and Cybernetics, v. 31 (2002). N 1. p.4–15.

[63] Boucherif A. First-Order Differential Inclusions with Nonlocal Initial Conditions// Applied Mathematics Letters 15 (2002). p.409–414.

[64] Colonius F., Manitius A., Salamon D. Structure theory and duality for time varying retarded functional differential equations. Jornal tf differential equations, 78, 1989. p.320–353.

[65] Ezzinbi K., Liv J. Periodec Solutions of Non-Densely Defined Delay Evolution Equations// Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 15:2 (2002). p.113–123.

[66] Hale J.,Verduyn Lunel M. Introduction to Functional Differential Equations// Applied Mathematical Sciences 99, 1993, Springer-Verlag.

[67] Kamenskii G.A., Myshkis A.D., Skubachevskii A.L. Generalized and smooth solutions of boundary value problems for functional differential equations with many senior members. Casopis pro pestovani matematiky. 111, 1986, p.254–266.

[68] Marcelle C., Salvadori A. Interaction amonng the theories of ordinary differential equations in varios hereditary settings// Nonlinear Analysis 35 (1999). p.1001–1017

[69] Sharkovsky A.N. Classification of one–dimensional dynamical system. Eur. Conf. Iterat. Theory. Singapore, 1987, p.42–55.

[70] Skudachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel - Boston - Berlin, Dirkhauser, 1997.

II. О квазибегущих волнах

Примером задачи, приводящей к рассмотрению импульсных решений ФДУ точечного типа, является описание решений типа бегущей волны в моделях математической физики, в частности, в модели из теории пластической деформации о распространении бегущих волн для бесконечного стержня. Дискретный аналог такой системы моделируется поведением счетного числа шаров расположенных в целочисленных точках числовой прямой, соединенных между собой абсолютно упругой нитью. Такая система описывается конечно-разностным аналогом волнового уравнения с нелинейным потенциалом

$$m_i\ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \qquad y_i \in \mathbb{R}, \quad m_i > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

где потенциал $\phi(.)$ задается гладкой функцией.

Определение 3. *Вектор-функция $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$ с абсолютно непрерывными координатами называется решением системы (29) типа бегущей волны, если существует $\tau >0$, не зависящее от t и i, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t). \tag{30}$$

Константа τ называется характеристикой бегущей волны.

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид потенциала. На этом пути, для системы, в случае шаров с равными массами (однородный стержень) и гладкой периодической функцией $\phi(.)$, были построены специальные классы решений типа бегущей волны. Методами теории возмущений было показано существование решения типа бегущей волны и для близких потенциалов. Обзор по работам такого направления для бесконечномерных систем с потенциалами Френкеля – Конторовой и Ферми – Паста – Улама приведен в работе [4]. Вместе с тем, такой подход не позволяет описать пространство всех решений типа бегущей волны, а также их возможный рост.

Другой подход для конструирования решений основан на использовании различных физических соображений относительно такой системы. На этом пути удается изучить некоторые системы и со специальными типами особенностей для потенциала (доклад Д.Трещева на международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. 2002, Москва).

В представленной работе предлагается подход, при котором решения типа бегущей волны для системы могут быть реализованы как решения однопараметрического семейства ФДУ точечного типа. При этом, систему с потенциалом без особенностей удается исследовать при более общих предположениях на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде условия Липщица. В рамках предложенного формализма удается описать решения типа бегущей волны, а также их возможный рост, связанный с характеристикой бегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

В случае шаров с равными массами (однородный стержень), описание бегущих волн эквивалентно описанию классических решений для индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, где параметром служит характеристика бегущей волны. Для линейного потенциала описание решений индуцированного однопараметрического семейства линейных ФДУ точечного типа может быть дано в рамках теории двойственности (аналог альтернативы Нетера), о которой говорилось выше. В случае шаров с неравными массами (неоднородный стержень), решения типа бегущей волны, кроме тривиальных, отсутствуют. Это приводит к необходимости "правильного"расширения решений типа бегущей волны до класса решений типа "квазибегущей" волны. Описание решений типа квазибегущей волны оказывается эквивалентным описанию всего пространства импульсных решений для индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, факторизованного по отношению эквивалентности, связанного с определением решения типа "квазибегущей" волны.

Исходная система дифференциальных уравнений (29) может быть реализована как бесконечномерное дифференциальное уравнение в пространстве бесконечных в обе стороны последовательностей. Принципиальное отличие случаев однородного и неоднородного стержней в том, что в первом случае правая часть такого бесконечномерного уравнения коммутирует с оператором сдвига.

На основе теоремы А (А1) для уравнения (29) удается описать пространство решений типа бегущей (квазибегущей) волны с заданной характеристикой τ, которое также описывается в терминах параметра μ.

1.Формулировка основных результатов

Для формулировки результатов определим векторное пространство

$$K^n = \overline{\prod_{i\in\mathbb{Z}}} R_i^n, \qquad R_i^n = \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

с элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ и со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство). В частности, элементами пространства K^2 будут бесконечные последовательности $\varkappa = \{(u_i,\, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ (штрих означает транспонирование). В пространстве K^n определим семейство гильбертовых подпространств $K^n_{2\mu}$, а также банаховых подпространств $K^n_{\infty\mu}$, $K^n_{\infty\mu\Gamma}$, $\quad \mu \in (0,1)$

$$K^n_{2\mu} = \{\varkappa:\ \varkappa \in K^n,\ \ \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty};\quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|^2_{R^n}\mu^{2|i|} < +\infty\},$$
$$K^n_{\infty\mu} = \{\varkappa:\ \varkappa \in K^n,\ \ \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty};\quad \sup_{i\in Z} \|x_i\|_{R^n}\mu^{|i|} < +\infty\},$$
$$K^n_{\infty\mu\Gamma} = \{\varrho:\ \varrho \in K^n,\ \ \varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty};\quad \sup_{i\in Z} \|\rho_i\|_{R^n}\mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty\}$$

с нормами

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = [\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|^2_{R^n}\mu^{2|i|}]^{\frac{1}{2}},\ \|\varkappa\|_{\infty\mu} = \sup_{i\in Z}\|x_i\|_{R^n}\mu^{|i|},\ \|\varrho\|_{\infty\mu\Gamma} = \sup_{i\in Z}\|\rho_i\|_{R^n}\mu^{|\bar{t}_i|}.$$

В пространстве K^n определим оператор сдвига T:

$$\forall\varkappa, i:\ \varkappa\in K^n,\quad i\in\mathbb{Z}\quad \text{положим}\quad (T\varkappa)_i = x_{i+1}.$$

В случае массы шаров, удовлетворяющих условию

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}\in K^1_{\infty 1},$$

и потенциала $\phi(.)$, удовлетворяющего условию Липщица с константой L, рассмотрим уравнение относительно двух переменных $\tau\in(0,+\infty)$ и $\mu\in(0,1)$

$$M_2\,\tau\left[2\mu^{-1}+1\right] = \ln\mu^{-1}, \tag{31}$$

где

$$M_2 = \max_{i\in\mathbb{Z}}\max\{2m_i^{-1}\sqrt{L^2+1};1\}. \tag{32}$$

Множество решений уравнения (31) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на рис.1.

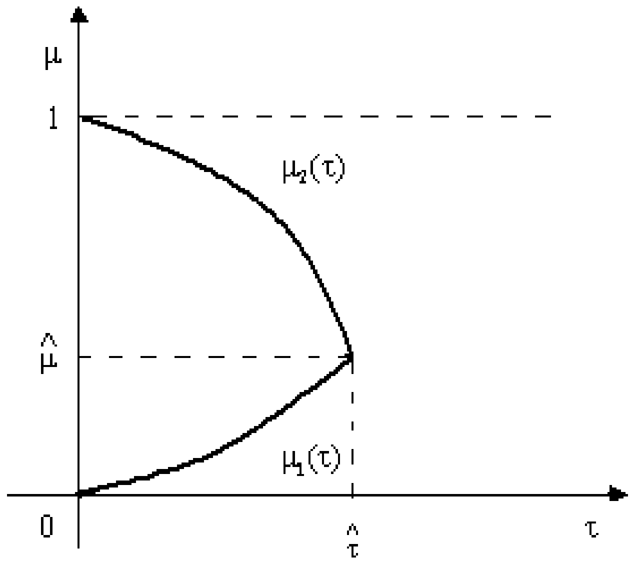

Рис.1. Графики функций $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$.

Имеет место равенство $\hat{\mu} = 2M_2\hat{\tau}$. Так как $0<\hat{\mu}<1$, $M_2\geq 1$, то для величины $\hat{\tau}$ имеется некоторая абсолютная оценка

$$\hat{\tau} < \frac{1}{2}.$$

В случае равных масс шаров были описаны решения типа бегущей волны. Приведем этот результат в виде теоремы B.

Теорема B. *Пусть* $m_i = m$ *при всех* $i \in \mathbb{Z}$*, а потенциал* $\phi(.)$ *удовлетворяет условию Липщица с константой* L*. Тогда при любых* $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ *и характеристиках* $\tau > 0$*, удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (29) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *такое, что:*

1) *оно удовлетворяет начальным условиям* $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$*;*

2) *для каждого значения параметра* $\mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$ *вектор-функция* $\omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot{y}_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K_{2\mu}^2)$.

Более того, для такого решения $\omega(.)$ *функция* $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu^2}} C^{(1)}(\mathbb{R})$ *и* $\omega(.)$ *как элемент пространства* $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K_{2\mu}^2)$ *непрерывно зависит от начальных данных* $a, b \in \mathbb{R}$ *и массы* m *шаров в топологии компактной сходимости на* $\mathbb{R}$. ■

Теорема **B** не только гарантирует существование решения типа бегущей волны, но и задает ограничение его возможного роста как по времени t, так и по координатам $i \in \mathbb{Z}$ (по пространству). Более того, существование решения типа бегущей волны гарантируется в более узких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K_{2\mu}^2)$ с $\mu \uparrow \mu_2(\tau)$, а единственность гарантируется в более широких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K_{2\mu}^2)$ с $\mu \downarrow \mu_1(\tau)$.

Утверждение 1. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

а потенциал $\phi(.)$ *тождественно равен нулю. При любых начальных данных* $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ *и характеристиках* $\tau > 0$ *существует решение типа бегущей волны* $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + bi\tau + \delta\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\delta = a - b\bar{t} - b\bar{i}\tau$*, описывающее прямолинейное равномерное движение, либо стационарное состояние. Если характеристика* $\tau > 0$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

то решение типа бегущей волны единственное.■

Следовательно, как в случае равных масс шаров, так и в случае неравных масс шаров, при нулевом потенциале решения типа бегущей волны одни и те же. Они описывают либо прямолинейные равномерные движения, либо стационарные состояния.

Утверждение 2. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

среди шаров есть хотя бы два с неравными массами, а потенциал $\phi(.)$ не есть тождественный нуль. Тогда всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\alpha_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \alpha_i = \alpha, \quad i = \mathbb{Z}$.■

Как видим, при ненулевом потенциале, в отличие от случая равных масс шаров, в случае неравных масс шаров всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением, что свидетельствует об узости класса решений типа бегущей волны. Вместе с тем, возможны решения, которые по своему профилю близки к бегущей волне, к определению которых мы и приступаем.

Определение 4. *Пусть $(\bar q, \bar p)' = \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$. Будем говорить, что решение $\{y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$ системы уравнений (29) является решением с начальной невязкой $(\bar q, \bar p)'$, если существует $\tau > 0$, не зависящее от $i \in \mathbb{Z}$, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ выполняются условия*

$$y_i(\tau) - y_{i+1}(0) = q_i, \qquad \dot y_i(\tau) - \dot y_{i+1}(0) = p_i.$$

Константу τ будем называть характеристикой решения с начальной невязкой $(\bar q, \bar p)'$. ■

Очевидно, что всякое решение типа бегущей волны является решением с начальной невязкой (0,0). В общем случае обратное утверждение неверно. Оно становится верным в случае равных масс. Сформулируем теорему существования решения с начальной невязкой $(\bar q, \bar p)'$.

Теорема C. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1},$$

а потенциал $\phi(.)$ удовлетворяет условию Липщица с константой L. Для любых $\bar i \in \mathbb{Z}$, $\bar t \in \mathbb{R}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$, параметре $\bar\mu > \mu_1(\tau)$, векторе $(\bar q, \bar p)' \in K^2_{2\bar\mu}$ и характеристике $\tau > 0$, удовлетворяющего условию

$$0 < \tau < \hat\tau,$$

для системы уравнений (29) существует единственное решение $\{(y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ с начальной невязкой $(\bar q, \bar p)'$ и характеристикой τ такое, что:

1) *оно удовлетворяет начальным условиям $y_{\bar i}(\bar t) = a, \dot y_{\bar i}(\bar t) = b$;*

2) *для каждого значения параметра $\mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,) \cap (\,\mu_1(\tau),\, \bar\mu\,)$ вектор-функция $\omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot y_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$.*

Более того, для такого решения $\omega(.)$ функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu^2}} C^{(1)}(\mathbb{R})$ и $\omega(.)$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$ непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$, вектора начальных невязок $(\bar q, \bar p)' \in K^2_{2\bar\mu}$ и вектора масс шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$ в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$.■

Теорема **C** существование решения с заданными начальными невязками гарантирует в более узких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$ с $\mu \uparrow \min\{\mu_2(\tau),\, \bar{\mu}\}$, а единственность гарантирует в более широких пространствах $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$ с $\mu \downarrow \mu_1(\tau)$.

Из графиков функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ следует, что для каждого $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо включение $\hat{\mu} \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$. В таком случае, из теоремы **C** следует, что при каждом $(\bar{q}, \bar{p})' \in K^2_{21}$ для решения $\omega(t) = \{(y_i(t),\, \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ с начальной невязкой $(\bar{q}, \bar{p})'$ и характеристикой $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо условие

$$\sup_{t \in R} \|\omega(t)\|_{2\hat{\mu}} \hat{\mu}^{|\frac{2t}{\tau}|} < +\infty.$$

В силу этого, мы можем сформулировать оптимизационную задачу. Пусть заданы $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, характеристика $\tau > 0$, массы шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$ и потенциал $\phi(.)$, удовлетворяющий условию Липщица с константой L.

Задача I. *Минимизировать функционал*

$$\inf_{(\bar{q},\bar{p}),\, \omega(.)} F(\omega(.)) = \inf_{(\bar{q},\bar{p}),\, \omega(.)} \{\sup_{t \in R} \|\omega(t+\tau) - T\omega(t)\|_{2\hat{\mu}} \hat{\mu}^{|\frac{2t}{\tau}|}\},$$

при ограничениях :

$$\begin{gathered}
m_i \ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R},\\
y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \qquad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b,\\
y_i(\tau) - y_{i+1}(0) = q_i, \qquad \dot{y}_i(\tau) - \dot{y}_{i+1}(0) = p_i, i \in \mathbb{Z},\\
(\bar{q}, \bar{p})' = \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty} \in B^2_{21} - \text{ единичный шар пространства } K^2_{21},\\
\omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot{y}_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\hat{\mu}}).\blacksquare
\end{gathered}$$

Здесь аргументы $\bar{i}, \bar{t}, a, b, \tau,\ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ являются параметрами.

Рассмотрим счетно-нормированное пространство $\hat{K}^2_{21} = \bigcap_{\mu \in (0,1)} K^2_{2\mu}$.

Определение 5. *Пусть заданы* $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *характеристика* $\tau > 0$ *и массы шаров* $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$. *Решение* $\{\hat{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *системы* (29) *с начальной невязкой* $(\hat{q}, \hat{p})' \in \hat{K}^2_{21}$ *и характеристикой* τ, *удовлетворяющее начальным условиям* $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$, *называется решением типа квазибегущей волны с характеристикой* τ , *если на нем достигается оптимальное значение функционала* F *в задаче I.* $\blacksquare$

Теперь мы можем сформулировать теорему существования решения типа квазибегущей волны, которая для случая равных масс переходит в теорему **B** о существовании и единственности решения типа бегущей волны.

Теорема D. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1},$$

а потенциал $\phi(.)$ удовлетворяет условию Липщица с константой L. При любых $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

существует решение $\{\hat{y}_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа квазибегущей волны с характеристикой τ такое, что:

1) *оно удовлетворяет начальному условию $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \quad \dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$;*

2) *для каждого значения параметра $\mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$ вектор-функция $\hat{\omega}(t) = \{(\hat{y}_i(t),\, \dot{\hat{y}}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$.*

При этом, для решения $\hat{\omega}(t)$ типа квазибегущей волны функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\hat{\omega}(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu^2}} C^{(1)}(\mathbb{R})$, а оптимальное значение функционала F непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и вектора масс шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$ как от параметров.

Более того, при любых заданных параметрах $(a, b, \quad \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty})$ с равными массами $m_i = m,\ i \in \mathbb{Z}$ решение типа квазибегущей волны в действительности является решением типа бегущей волны и единственно. ■

В отличие от теоремы **B** (случай равных масс шаров), в которой гарантируется существование и единственность решения типа бегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ, в теореме **D** (случай неравных масс шаров) отсутствует утверждение о единственности решения типа квазибегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ. Единственность решения типа квазибегущей волны гарантируется только в случае равных масс, когда решения типа квазибегущей волны становятся решениями типа бегущей волны.

Ограничения $0 < \tau < \hat{\tau}, \quad \mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$ из формулировки теоремы являются не следствием используемого метода, а по существу. Они эквивалентны условию (24) для однопараметрического функционально-дифференциального уравнения, индуцированного системой дифференциальных уравнений (29). Ранее было отмечено, что для функционально-дифференциального уравнения условие (24) является точным. В силу этого, условия $0 < \tau < \hat{\tau}, \quad \mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$ также являются точными. Всегда можно подобрать такой потенциал, что при нарушении этих условий теоремы о существовании и единственности решений типа бегущей волны, либо квазибегущей волны будут не верны.

В случае $\tau = 0$ для системы (29) решения типа бегущей волны должны удовлетворять системе уравнений

$$m_i \ddot{y}_i = \phi(y_i), \qquad y_i \in \mathbb{R}, \quad m_i > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Для системы дифференциальных уравнений (33) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ такое, что:

1) оно удовлетворяет начальным условиям $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \qquad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$;

2) для каждого значения параметра $\mu \in (0,1)$ вектор-функция $\quad \omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot{y}_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$.

Более того, для такого решения $\omega(.)$ функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\mu_*}C^{(1)}(\mathbb{R})$, $\quad \mu_* = e^{-M_2}$ и $\omega(.)$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$ непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и массы m шаров в топологии компактной сходимости на $\mathbb{R}$.

Остается заметить, что

$$\lim_{\tau \to 0} \sqrt[\tau]{\mu_2^2(\tau)} = \mu_*^2. \tag{34}$$

Поэтому, доопределив значение $\sqrt[\tau]{\mu^2}$ при $\tau = 0$ равным μ_*^2, мы можем в формулировку теорем включить значение $\tau = 0$, т.е. писать $0 \le \tau < \hat{\tau}$.

Другим важным аспектом для системы (29) является вопрос об устойчивости стационарных решений.

Определение 6. *Стационарное решение* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ *для системы* (29) *называется* μ*-устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* t_0 *найдется такое* $\delta > 0$*, что для всякого другого решения* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$*, определенного в окрестности точки* t_0 *и удовлетворяющего условию* $\omega(t) = \{(y_i(t),\, \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^2_{2\mu}$ *для любого* t *из этой окрестности, из неравенства*

$$\|\omega(0) - \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{2\mu} < \delta$$

следует, что $\varkappa(\cdot)$ *определено при всех* $t \ge t_0$ *и*

$$\|\omega(t) - \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{2\mu} < \varepsilon. \blacksquare$$

Для изучения устойчивости потребуются дополнительные условия на потенциал $\phi(.)$.

Теорема E. *Пусть потенциал* $\phi(.)$ *дважды непрерывно дифференцируем с равномерно ограниченными производными. Если массы шаров таковы, что*

$$\{m_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}, \qquad \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1},$$

то для системы (29) *стационарное решение* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ *является* μ*-неустойчивым по Ляпунову для любого* $\mu < (2+\gamma)^{-1}$, где $\gamma = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \ \dot{\phi}(a_i)$. $\blacksquare$

2. Некоторые элементы используемого подхода

В случае однородного стержня, решения типа бегущей волны с характеристикой τ удовлетворяют краевой задаче

$$m\ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, \tau] \tag{35}$$

$$y_i(\tau) = y_{i+1}(0), \qquad \dot{y}_i(\tau) = \dot{y}_{i+1}(0) \tag{36}$$

Такая краевая задача индуцирует ФДУ

$$\ddot{x}(t) = m^{-1}[\phi(x(t)) + x(t+\tau) - 2x(t) + x(t-\tau)], \qquad t \in \mathbb{R} \tag{37}$$

Связь между решениями краевой задачи и ФДУ задаются соотношениями

$$x(t) = y_{[t\tau^{-1}]}(t - [t\tau^{-1}]),$$

где [.] означает целую часть числа.

В случае неоднородного стержня, решения типа квазибегущей волны с характеристикой τ удовлетворяют краевой задаче

$$m_i\ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, \tau] \tag{38}$$

$$y_i(\tau) = y_{i+1}(0) + q_i, \qquad \dot{y}_i(\tau) = \dot{y}_{i+1}(0) + p_i \tag{39}$$

с начальной невязкой

$$(\bar{q}, \bar{p}) = (\ \{q_i\}_{-\infty}^{+\infty},\ \{p_i\}_{-\infty}^{+\infty}\ )$$

Такая краевая задача индуцирует ФДУ, для которой следует изучать импульсные решения

$$\ddot{x}(t) = [l(t)]^{-1}[\phi(x(t)) + x(t+\tau) - 2x(t) + x(t-\tau)], \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

$$l(t) \equiv m_i, \quad t \in [i\tau, (i+1)\tau], \tag{41}$$

$$x(i+0) = x(i-0) + q_i, \qquad \dot{x}(i+0) = \dot{x}(i-0) + p_i. \tag{42}$$

Связь между решениями краевой задачи с начальной невязкой и ФДУ задаются соотношениями

$$x(t) = y_{[t\tau^{-1}]}(t - [t\tau^{-1}]),$$

где [.] означает целую часть числа.

Список литературы

[1] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, (2007), 288.

[2] Бекларян Л.А., Крученов М.Б. О разрешимости линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа// Ж. Дифферен. Уравнения, (2008), 44:4, 435-445.

[3] Френкель Я.И., Конторова Т.А. О теории пластической деформации// ЖЭТФ, (1938), 8, 89-97.

[4] Пустыльников Л.Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // УМН, (1997) 52:3,(315), 106-158.

[5] Beklaryan L.A. Equations of Advanced-Retarded Type and Solutions of Traveling-Wave Type for Infinite-Dimensional Dynamic Systems//J. of Mathem. Sciences, (2004), 124:4, 5098-5109.

[6] Hale J.,Verduyn Lunel M. Introduction to Functional Differential Equations// Applied Mathematical Sciences, (1993), 99, Springer-Verlag.

[7] Латушкин Ю.Д., Степин А.М. Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем// Ж.Успехи Матем. Наук, (1991), 46:2, 85-137.

[8] Antonevich A., Lebedev A. Functional-Differential Equations. I. C^*-theory. Harlow: Longman, (1994).

[9] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.–М.: Наука, (1970).

III. Групповые особенности в проблеме принципа максимума для систем с отклоняющимся аргументом.

Изучается следующая задача оптимального управления.

Задача I. *Минимизировать функционал*

$$J = J(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \tag{43}$$

при ограничениях:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t)),\, u(q_1(t)), \dots, u(q_s(t))\,), \qquad t \in [t_0, t_1], \tag{44}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \backslash [t_0, t_1], \qquad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{45}$$

$$\mathcal{K}(x(t_0), x(t_1)) = 0, \tag{46}$$

$$u(t) \in U, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad U \subseteq \mathbb{R}^m. \tag{47}$$

Здесь $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^{(0)}$; $q_j(.)$, $j = 1, \dots, s$ — гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию. Не нарушая общности, можем полагать что

$$(t_1 - t_0) + \sup_{j \in \{1,\dots,s\}} |t_0 - q_j(t_0)| + \sup_{j \in \{1,\dots,s\}} |t_1 - q_j(t_1)| < 1. \tag{48}$$

Так как гомеоморфизмы q_j, $j = 1, ..., s$ удовлетворяют условию (48), то их можно считать накрытиями единичной окружности, т.е. для них выполняются условия

$$q_j(t+1) = q_j(t) + 1, \quad j = 1, ..., s, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Через Q будем обозначать группу, порожденную такими гомеоморфизмами, т.е.

$$Q = < q_1, ..., q_s > .$$

В дальнейшем полную группу всех накрытий единичной окружности будем обозначать через $H\widetilde{omeo}_+(S^1)$ и, соответственно, для рассматриваемой группы Q справедливо вложение $Q \subseteq H\widetilde{omeo}_+(S^1)$.

Для систем с отклоняющимся аргументом (функционально-дифференциальных уравнений точечного типа), в наиболее широком классе отклонений аргумента, на основе метода локальных вариаций в работах Арутюнова получен поточечный принцип максимума Понтрягина (слабый поточечный принцип максимума). В основе другого метода исследования необходимых условий оптимальности (сильного поточечного принципа максимума) лежит модификация метода v-вариаций. Для групп гомеоморфизмов прямой из "массивного"подмножества справедлив принцип максимума Понтрягина в сильной поточечной форме в виде два параметрического семейства конечномерных экстремальных задач (для обыкновенных систем принцип максимума представлен один параметрическим семейством конечномерных экстремальных задач). Одним параметром, как и в случае обыкновенных систем, является время t. Вторым параметром является k=0,1,2, ..., который для группы гомеоморфизмов прямой Q характеризует элементы орбиты $Q(t)$ точки t, полученные с помощью слов длины не более чем k.

В общем случае из принципа максимума в интегральной форме следует принцип максимума в сильной поточечной форме. Препятствия, связанные с эквивалентностью принципа максимума в сильной поточечной форме и принципа максимума в интегральной форме, связаны с условиями комбинаторного характера на группу Q. Наличие отмеченного комбинаторного свойства влечет за собой существование метрических инвариантов для группы гомеоморфизмов Q, что позволяет более детально описать ее структуру. Все эти вопросы будут обсуждаться ниже.

1.Формулировка основных результатов.

Для формулировки результатов определим векторное пространство

$$K^r = \overline{\prod_{q\in Q}} R_q^r, \qquad R_q^r = \mathbb{R}^r, \quad q \in Q.$$

со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство).

Пусть

$$\vec{x} = \{x_q\}_{q\in Q} \in K^n, \qquad \vec{\psi} = \{\psi_q\}_{q\in Q} \in K^n, \qquad \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q} \in K^m.$$

Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{\psi} \in K^n$, $\vec{u} \in K^m$ положим:

$$H_q(t, \vec{x}, \vec{\psi}, \vec{u}) = \psi_q[\dot{q}(t) f(q(t), x_{q_1 q}, ..., x_{q_s q}, u_{q_1 q}, ..., u_{q_s q})\chi_{[t_0,t_1]}(q(t)) + \dot{q}(t)\varphi(q(t))\chi_{\mathbb{R}\setminus[t_0,t_1]}(q(t))]. \tag{50}$$

В пространстве K^m определим множество значений управления

$$\mathbb{U} = \{\vec{u} : \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q} \in K^m; \quad \forall q \in Q, \quad u_q \in U\},$$

а также множество вектор-функций управления

$$\Omega = \{\vec{u}(.) : \vec{u}(t) = \{u_q(t)\}_{q\in Q}, \quad \vec{u}(t) \in \mathbb{U}, \quad u_q(t) = u_e(q(t)) \quad \text{для почти всех } t \in \mathbb{R}$$
$$\text{и всех} \quad q \in Q\}.$$

Пусть

$$Q^k = \{q : \ q = q_{i_1}^{\varepsilon_1} ... q_{i_l}^{\varepsilon_l}, \quad l \le k, \quad \varepsilon_p = +(-)1, \ p = 1, ..., l\}, \qquad k = 0, 1, ...$$

элементы группы Q, имеющие представление с помощью слов длины не более чем k, то есть каждый элемент Q^k получается с помощью не более чем k суперпозиций образующих $q_j,\ j=1,...,s$ и их обратных элементов. По определению полагаем $Q^0 =< e >$. По множеству $Q^k,\ \ k=0,1,...$ и заданному управлению $u(.)$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$ определим

$$\mathbb{U}^k(t,u(.))=\{\vec{u}:\ \vec{u}\in\mathbb{U},\quad \vec{u}=\{u_q\}_{q\in Q};\quad \forall q\notin Q^k,\quad u_q=u(q(t))\}.$$

Образуем k-частичную функцию Понтрягина

$$\mathbb{H}^k(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u})=\sum_{q\in Q^{(k+1)}} H_q(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u}) \tag{51}$$

и краевую функцию

$$\mathfrak{F}(x^0,x^1,l_J,l_{\mathcal{K}})=l_J J(x^0,x^1)+l_{\mathcal{K}}\mathcal{K}(x^0,x^1). \tag{52}$$

Определение 7. *Диффеоморфизмы $q_1,q_2\in Diff^1(\mathbb{R}),\quad q_1\neq q_2$ прямой называются взаимно трансверсальными, если из условия $q_1(t)=q_2(t),\quad t\in\mathbb{R}$ следует, что $\dot{q}_1(t)\neq\dot{q}_2(t)$.* ■

Важное замечание заключается в том, что для группы $Q=< q_1,...,q_s >$, с образующими $q_j\in Diff^1(\mathbb{R})\cap H\widetilde{omeo}_+(S^1),\quad j=1,...,s$ и взаимно трансверсальными элементами, для любого $t\in\mathbb{R}$, за исключением счетного множества точек, соответствие $\eta: Q\to Q(t),\quad \eta(q)=q(t),\ \ q\in Q$ является взаимно однозначным.

Сформулируем принцип максимума Понтрягина в наиболее сильной форме. Наряду с группой $Q=< q_1,...,q_s >$ будем рассматривать расширенную группу $\mathcal{J}_Q=< q_1,...,q_s,\hat{q} >$, где $\hat{q}(t)=t+1$. В силу свойста (49), элемент $\bar{q}$ принадлежит центру группы $\mathcal{J}_Q$, т.е. перестановочен с любым элементом группы.

Теорема A (Принцип максимума). *Пусть: $Q=< q_1,...,q_s >$ есть группа диффеоморфизмов с элементами из $Diff^2(\mathbb{R})\cap H\widetilde{omeo}_+(S^1)$ и элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q=< q_1,...,q_s,\hat{q} >$ взаимно трансверсальны; функция $f(.)$ непрерывна и по первым $(ns+1)$ переменным непрерывно-дифференцируема; краевая функция $\varphi(.)$ непрерывно-дифференцируема. Если $(\hat{x}(.),\hat{u}(.))$ точка сильного локального минимума задачи A, то найдется функция $\hat{\psi}(.)$ абсолютно непрерывная на $(-\infty,t_0)\cup(t_0,t_1)\cup(t_1,+\infty)$, в точках t_0,t_1 имеющая разрывы первого рода, и функционалы $l_J\in\mathbb{R},\ \ l_J\geq 0,\ \ l_K\in(\mathbb{R}^p)'$ такие, что для любых $k=0,1,...$ и почти всех $t\in\mathbb{R}$ выполняются условия:*

$$\frac{\hat{x}_e(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))}{\partial \psi_e}, \tag{53}$$

$$\frac{\hat{\psi}_e(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))}{\partial x_e}, \tag{54}$$

$$\hat{x}_q(t) = \hat{x}(q(t)), \quad \hat{\psi}_q(t) = \hat{\psi}(q(t)) \quad \textit{для любых} \quad q \in Q, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{55}$$

$$\hat{u}_q(t) = \hat{u}(q(t)) \quad \textit{для любых} \quad q \in Q \quad \textit{и почти всех} \quad t \in \mathbb{R}; \tag{56}$$

выполняются граничные условия

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(.)}{\partial l_K} = 0, \tag{57}$$

$$\hat{\psi}(t_0) = \frac{\partial \mathfrak{F}(.)}{\partial x_0}, \quad \hat{\psi}(t_1) = -\frac{\partial \mathfrak{F}(.)}{\partial x_1}; \tag{58}$$

условие нормировки

$$l_J + \|\hat{\psi}\|_{L_\infty} + \|l_{\mathcal{K}}\| > 0; \tag{59}$$

принцип максимума в сильной поточечной форме

$$\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t)) = \max_{\vec{u} \in \mathbb{U}^k(t, \hat{u}(.))} \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}). \tag{60}$$

■

Замечание 2. *В условии нормировки присутствует сопряженная переменная $\hat{\psi}$. Это свойственно исключительно для управляемых систем с дифференциальной связью, задаваемой функционально-дифференциальным уравнением. Для дифференциальных связей, задаваемых ФДУ запаздывающего типа или опережающего типа (очевидно, что ОДУ также относится к такому типу), в условии нормировки функция $\hat{\psi}$ отсутствует.* ■

Замечание 3. *Если для сопряженного уравнения* (54) *справедлива теорема о единственности решения, то в условии нормировки сопряженная переменная $\hat{\psi}$ отсутствует.* ■

В случае $k = 0$ условие (60) будем называть *принципом максимума в слабой поточечной форме*. Мы уже отмечали, что такой принцип максимума для наиболее широкого класса функций отклонения аргумента получен в работе [4]. Там предполагалось, что $q_1, ..., q_s \in Diff^1(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$, а множество $\Upsilon = \{t : \ \exists i, j, \quad i, j \in \{1, ..., s\}, \quad i \neq j, \quad q_i^{-1}(t) = q_j^{-1}(t)\}$ является дискретным множеством. Очевидно, что из условия о взаимной трансверсальности диффеоморфизмов $q_1^{-1}, ..., q_s^{-1}$ будет следовать дискретность множества Υ. Пример, приведенный в разделе 3, показывает, что принципы максимума в слабой и сильной поточечных формах не эквивалентны.

Условие о взаимной трансверсальности элементов группы $\mathcal{J}_Q$ весьма важное. Очевидно, что в этом случае элементы группы Q также взаимно трансверсальны. Как отмечалось выше, в силу этого свойства для почти каждого $t \in \mathbb{R}$ имеет место взаимнооднозначное соответствие между элементами q группы Q и элементами $q(t)$ орбиты $Q(t)$ точки t, т.е. на орбите $Q(t)$ группа Q действует свободно. Это делает корректным формулировку принципа максимума в сильной поточечной форме (63), в которой, в действительности, суммирование должно было производиться по элементам орбиты точки t.

Естественно задаться вопросом. Как много групп, для которых выполняются условия из теоремы A. Всякую группу $< q_1, ..., q_s >$ с образующими $q_j \in Diff^2(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1), \quad j = 1, ..., s$ будем рассматривать как элемент пространства

$$\otimes_s [Diff^2(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1)]. \tag{61}$$

Теорема B . *Множество свободных групп диффеоморфизмов* $\quad Q =< q_1, ..., q_s >$, $q_j \in Diff^2(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1), \quad j = 1, ..., s$ *с фиксированным числом s образующих, для которых элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >, \quad \hat{q} = t + 1$ *взаимно трансверсальны, в метрике пространства* $\otimes_s Diff^2(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1)$ *является счетным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).*

Решение проблемы эквивалентности принципов максимума в сильной поточечной и интегральной формах связано с препятствиями в виде комбинаторных условий для группы Q. Для формулировки этих условий следует определить важную топологическую характеристики группы Q.

Определение 8. *Пусть $Q \subseteq H\widetilde{omeo}_+ (S^1)$. Непустое подмножество $\mathbb{R}$ называется минимальным, если оно замкнуто, Q-инвариантно и не содержит собственных замкнутых Q-инвариантных подмножеств.* ■

Для группы $Q \subseteq H\widetilde{omeo}_+ (S^1)$ минимальное множество не пусто и имеет одно из взаимоисключающих структур: дискретное множество (возможно не единственным); единственное совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$ (канторово множество); совпадает со всем $\mathbb{R}$. Объединение минимальных множеств группы $Q \subseteq H\widetilde{omeo}_+ (S^1)$, обозначаемое через $E(Q)$, является замкнутым множеством, а каноническую нормальную подгруппу H_Q определим следующим образом

$$H_Q = \{ \, q : \; \forall t \in E(q), \quad q(t) = t \, \}.$$

Комбинаторное условие, которое будет использовано при формулировке основного результата имеет вид: факторгруппа Q/H_Q не содержит свободных подгрупп с двумя образующими. Весьма важно понять смысл комбинаторного условия об отсутствии свободной подгруппы с двумя образующими для факторгруппы Q/H_Q, какие ограничения оно накладывает на структуру самой группы Q. Для такой группы Q существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. В действительности о структуре такой группы можно сказать большее.

Теорема C. *Пусть группа* $Q =< q_1, ..., q_s >$ *является группой диффеоморфизмов с элементами из* $Diff^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ *и элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ *взаимно трансверсальны. Если факторгруппа* Q/H_Q *не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то факторгруппа* Q/H_Q *и подгруппа* H_Q*являются коммутативными, то есть группа* Q *является разрешимой группой ступени не более двух. Более того, группа* Q *является почти нильпотентной.* ■

Коммутативность факторгруппы Q/H_Q является следствием отсутствия свободной подгруппы с двумя образующими, а коммутативность самой подгруппы H_Q является следствием условия взаимной трансверсальности элементов группы $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$.

В терминах числа сдвига $\tau(q)$ (числа вращения $\rho(q) = \tau(q) \mod 1$) гомеоморфизма $q \in \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ можно уточнить структуру группы $Q =< q_1, ..., q_s >$. Структура минимального множества группы $Q =< q_1, ..., q_s >$ с инвариантной мерой зависит от значений чисел вращения $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$. Для такой группы Q отображение $\tau_Q : Q \to S^1$, где для любого $q \in Q, \quad \tau_Q(q) = \tau(q)$, является гомоморфизмом, а при рациональных числах вращения $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$ каждое из минимальных множеств группы Q является дискретным множеством.

Следствие. *Пусть группа* $Q =< q_1, ..., q_s >$ *является группой диффеоморфизмов с элементами из* $Diff^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$*, элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ *взаимно трансверсальны, а факторгруппа* Q/H_Q *не содержит свободной подгруппы с двумя образующими. Если хотя бы одно из чисел сдвига* $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$ *является иррациональным, то* $H_Q =< e >$ *и группа* Q *является коммутативной группой свободно действующих гомеоморфизмов на* $\mathbb{R}$*. В противном случае, каждый элемент коммутативной нормальной подгруппы* H_Q *на каждой связной компоненте множества* $\mathbb{R} \backslash E(Q)$ *является свободно действующим гомеоморфизмом, факторгруппа* Q/H_Q *является циклической и каждый представитель заданного смежного класса на множестве* $E(Q)$ *действует как одно и то же отображение.* ■

Теперь мы можем перейти к формулировке основного результата данной работы. Для этого дадим определение принципа максимума в интегральной форме.

Определение 9. *Условие*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt = \max_{\vec{u}(.) \in \Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt \tag{62}$$

называется принципом максимума Понтрягина в интегральной форме.

■

Из принципа максимума в интегральной форме следует принцип максимума в сильной поточечной форме. В случае постоянных отклонений аргумента принцип максимума в сильной поточечной форме и принцип максимума в интегральной форме эквивалентны. В связи с этим, актуальны следующие проблемы:

(1) для каких групп гомеоморфизмов прямой, порожденных функциями отклонения аргумента, принципы максимума Понтрягина в интегральной и сильной поточечной формах эквивалентны?;

(2) для возможно широкого класса функций отклонения аргумента получить принцип максимума в интегральной форме.

Теорема D. *Пусть группа* $Q =< q_1, ..., q_s >$ *является группой диффеоморфизмов с элементами из* $Diff^2(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+(S^1)$ *и элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ *взаимно трансверсальны. Если факторгруппа* Q/H_Q *не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то принцип максимума в сильной поточечной форме*

$$\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t)) = \max_{\vec{u} \in \mathbb{U}^k(t, \hat{u}(.))} \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}). \tag{63}$$

эквивалентен принципу максимума в интегральной форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt = \max_{\vec{u}(.) \in \Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt. \tag{64}$$

■

Список литературы

[1] Бекларян Л.А. Вариационная задача с запаздывающим аргументом и ее связь с некоторой полугруппой отображений отрезка в себя//Докл.АН СССР.(1983), Т.271, № 5. С.1036-1040.

[2] Бекларян Л.А. Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения аргумента//Доклады АН СССР (1991), Т.317, № 6, С.1289-1294.

[3] Арутюнов А.В., Марданов М.Дж. К теории принципа максимума в задачах с запаздываниями. Дифференциальные уравнения Т.25, № 12, с.2048-2058 (1989).

[4] Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности// Итоги Науки и Техники. Серия матем. анализ. (1989), Т.27. С.147-235.

[5] Бeклариан Л.А. О массивных подмножествах в пространстве конечно-порожденных групп диффеоморфизмов окружности// В печати

[6] Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты// Успехи математических наук (2004), Т.59, № 4, С.3-68.

[7] Арнольд В.И.Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[8] Бекларян Л.А.Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерное дифференциальное уравнение// Препринт. Вычислительный Центр АН СССР, Сообщения по прикладной математике. (1989), с.18.

[9] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.

[10] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.

[11] Rosenblatt J. Invariant measures and growth conditions// Trans. of the AMS (1974), vol.197, p.33-53

[12] Gromov M. Group of polinomial growth and expending maps// Publ.Math. de I'IHES (1981), vol.53, p.53-73.

IV. Об экстремальных свойствах групп гомеоморфизмов прямой и окружности.

Для систематического исследования групп гомеоморфизмов прямой (окружности) следует определить ряд понятий и характеристик:
$Homeo\,(X)$ $(Homeo_+\,(X))$ — группа гомеоморфизмов $X = \mathbb{R}$, S^1 (сохраняющих ориентацию).

Для произвольной группы $G \subseteq Homeo\,(X)$ подмножество G_+ всех гомеоморфизмов, сохраняющих ориентацию, образует нормальную подгруппу индекса не более двух. Поэтому изучение таких групп G сводится, в основном, к изучению групп гомеоморфизмов X, сохраняющих ориентацию.

Для группы $G \subseteq Homeo_+(X)$ определим каноническое подмножество (объединение стабилизаторов)

$$G^s = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} St_G(t).$$

Множество G^s может и не быть группой. Очевидны вложения

$$G^s \subseteq < G^s > \subseteq G. \tag{65}$$

Оказывается, такая цепочка вложений характеризуется экстремальным свойством, описанное в нижеследующей основной лемме.

Лемма 1 (Основная лемма **[4]**)**.** *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$. Тогда, или $G^s =< G^s >$, или $< G^s >= G$.*

Сама основная лемма является следствием естественного частичного порядка, существующего в группе гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Альтернатива, сформулированная в лемме, является не строгой, так как существуют группы, для которых

$$G^s = G.$$

Следствием экстремального свойства, сформулированного в лемме 1, и фундаментальной теоремы Гельдера [31] об архимедовых группах, является следующая теорема.

Теорема о факторгруппе ((1993)[4]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(X)$. Тогда факторгруппа $G/{<}G^s{>}$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы X.*■

Теорема о структуре факторгруппы является определяющей при исследовании групп гомеоморфизмов прямой (окружности). Частные случаи приведенной теоремы (для конечно порожденных групп, действующих свободно; для конечно порожденных групп, не содержащих свободных подполугрупп с двумя образующими; для счетных групп с общей неподвижной точкой для элементов, имеющих хотя бы одну неподвижную точку, т.е. для стабилизаторов) были получены Новиковым (1965)[35], Иманиши (1979)[30], Салхи (1982)[41]–(1985)[43].

1.Об экстремальных свойствах минимальных множеств.

Для группы $G \subseteq Homeo_{+}(X)$ важной топологической характеристикой является минимальное множество.

Определение 10. *Минимальное множество группы $G \subseteq Homeo(X)$–это замкнутое G-инвариантное подмножество X, не содержащее собственных замкнутых G-инвариантных подмножеств. Если не существует минимального множества, то по определению будем полагать, что оно пустое.*■

Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их "нетривиальности" орбиты точек обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют важнейшие характеристики метрических инвариантов.

Другой важнейшей топологической характеристикой является множество:

$$Fix\, G^s = \{t : \quad t \in X \quad \forall g \in G^s, \quad g(t) = t\}.$$

Теорема 2 ((1996)**[7]**). *Пусть $G \subseteq Homeo_{+}(\mathbb{R})$. Тогда справедливо одно из следующих взаимоисключающих утверждений:*

а) любое минимально множество дискретно и принадлежит множеству $Fix\ G^s$, а множество $Fix\ G^s$ состоит из объединения минимальных множеств;

б) минимальное множество является совершенным нигде не плотным подмножеством $\mathbb{R}$. В этом случае оно является единственным минимальным множеством и содержится в замыкании орбиты $\overline{G(t)}$ произвольной точки $t \in \mathbb{R}$;

в) минимальное множество совпадает с $\mathbb{R}$;

г) минимальное множество пустое.■

К ранним исследованиям по минимальным множествам относятся работы Данжуа о циклической группе гомеоморфизмов окружности [32]. Для произвольных подгрупп $G \subseteq Homeo_{+}(S^1)$ (компактный случай) непустое минимальное множество всегда существует, а типы структуры минимального множества совпадают с типами структуры минимального множества для циклических групп, изученных ранее. Как наиболее ранняя работа с таким результатом автору известен курс лекций Л.Альфорса [2].

Счетные группы $G \subseteq Homeo_{+}(\mathbb{R})$ гомеоморфизмов прямой исследовались в работах Салхи (1982)[41]–(1985)[43]. Были сформулированы признаки существования минимальных множеств, и при этих условиях описывалась структура орбит. Там же исследовались признаки существования минимальных множеств для специальных групп диффеоморфизмов. Минимальные множества для произвольных групп $G \subseteq Homeo_+(S^1)$ гомеоморфизмов окружности описывались различными авторами. В частности, для счетных групп в работах Салхи (1982)[41]–(1985)[43], для свободно действующих групп гомеоморфизмов в работе Карловича (1988)[33]. Мы уже отмечали в предыдущем абзаце, что одна из самых ранних работ по этой теме, известная автору, является курс лекций Л.Альфорса.

Так как, не дискретное минимальное множество для группы G, единственное, то его будем обозначать через $E(G)$.

Приведем признак непустоты минимального множества. Определим подмножество

$$G^s_\infty = \{g: \quad g \in G^s, \quad \sup\{t: g(t) = t\} = +\infty, \quad \inf\{t: g(t) = t\} = -\infty\}.$$

Предложение 1 ([7]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ и выполняется хотя бы одно из условий:*

а) G конечно порожденная группа;

б) $Fix\ G^s \neq \emptyset$,

в) $G \neq G^s_\infty$.

Тогда существует непустое минимальное множество.■

Существование минимального множества доказывается на основе аксиомы выбора и не является конструктивным. Вместе с тем, в случае непустоты топологической характеристики $Fix\ G^s$, минимальное множество может быть построено конструктивно.

Теорема 3 ([6]). *Пусть задана группа $G \subseteq Homeo_+(X)$, для которой $Fix\ G^s \neq \emptyset$. Тогда:*

1) для всякого $t \in Fix\ G^s$ множество $P(G(t))$ предельных точек орбиты $G(t)$ не зависит от точки t и обозначается $\mathbb{P}(G)$;

2) справедливо включение $\mathbb{P}(G) \subseteq Fix\ G^s$;

3) либо $\mathbb{P}(G) = X$, либо $\mathbb{P}(G)$ — совершенное нигде не плотное подмножество X, либо $\mathbb{P}(G) = \emptyset$;

4) если $\mathbb{P}(G) \neq \emptyset$, то группа G имеет единственное не дискретное минимальное множество $E(G)$ и $\mathbb{P}(G)$ совпадает с $E(G)$;

5) если $\mathbb{P}(G) = \emptyset$, то все минимальные множества дискретные, принадлежат множеству $Fix\ G^s$, а само множество $Fix\ G^s$ состоит из объединения дискретных минимальных множеств.■

При изучении ряда задач, например исследовании следов на $\mathbb{R}$ (ограничение на $\mathbb{R}$) группы квазиконформных отображений верхней полуплоскости в себя (2002)[10], оказывается важной замена исходной группы гомеоморфизмов X на более простую подгруппу с той же топологической сложностью (с тем же минимальным множеством). Поэтому, изучение подгрупп исходной группы и их минимальных множеств представляет большой интерес.

Лемма 2 ([9]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(X)$. Если для подгруппы $\Gamma \subseteq G$ минимальное множество $E(\Gamma)$ не пусто и не дискретно, то минимальное множество $E(G)$ группы G также не пусто и не дискретно и $E(\Gamma) \subseteq E(G)$.*■

Оказывается, что минимальные множества нормальных подгрупп также обладают экстремальным свойством: или они дискретны (возможно пустые), или совпадают с минимальным множеством исходной группы.

Теорема 4 ([9]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(X)$. Если для нормальной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ минимальное множество $E(\Gamma)$ не пусто и не дискретно, то оно совпадает с минимальным множеством исходной групп G, т.е. $E(\Gamma) = E(G)$.*■

В силу теоремы 4, нормальная подгруппа Γ и исходная группа G имеют одну и ту же топологическую сложность. Этот факт особенно полезен в случае, когда для исходной группы существует алгебраически более простая подгруппа, имеющая топологическую сложность самой исходной группы.

1 Экстремальное свойство ω-проективно-инвариантных мер.

Одним из первых результатов по метрическим инвариантам является теорема Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры для гомеоморфизма окружности. Мы уже отмечали, что при исследовании групп гомеоморфизмов прямой, центральным является описание различных метрических инвариантов. Такой раздел исследований известен как теория Боголюбова–Крылова, и теоремы существования метрических инвариантов естественно называть теоремами Боголюбова–Крылова. Перейдем к описанию некоторого более общего метрического инварианта, обобщающего понятие проективно–инвариантной меры.

Пусть $\mathcal{M}$ обозначает пространство борелевских мер на X , конечных на компактах ($\mathcal{M}^+$ — конус положительных мер). В случае $X = \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{M}$ рассматривается как сопряженное пространство к пространству $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и топологией индуктивного предела $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ ([52], гл. I, дополнение). В случае $X = S^1$ пространство $\mathcal{M}$ рассматривается как сопряженное пространство к пространству $C(S^1)$ непрерывных функций на S^1. Для группы $G \subseteq Homeo(X)$ через G_* будем обозначать изоморфную ей группу непрерывных линейных операторов, действующих на пространстве $\mathcal{M}$. Изоморфизм $\theta : G \longrightarrow G_*$, где $\theta(g) = g_*$, определяется следующим образом: для любой меры μ и любого борелевского множества B , $g_*\mu(B) = \mu(g^{-1}(B))$.

Заметим, что конус положительных мер $\mathcal{M}^+$ инвариантен относительно группы непрерывных линейных операторов G_*. Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}^+$ через $\mathcal{K}_\mu(G)$ обозначим замкнутый выпуклый конус, порожденный орбитой $G_*(\mu) = \{g_*\mu\}_{g\in G}$ меры μ. Очевидно, что конус $\mathcal{K}_\mu(G)$ инвариантен относительно группы непрерывных линейных операторов G_*.

Определение 11. *Пусть $G \subseteq Homeo(X)$, а $\mu \in \mathcal{M}^+$. Конус $\mathcal{K}_\mu(G)$ называется минимальным, если для любой меры $\bar{\mu} \in \mathcal{K}_\mu(G)$ справедливо условие $\mathcal{K}_\mu(G) = \mathcal{K}_{\bar{\mu}}(G)$.* ■

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}^+$ — конус и $\mu \in \mathcal{K}$. Луч $\lambda\mu$, $\lambda > 0$ называется крайним, если не существует мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{K}\backslash\mu$ и неотрицательных чисел λ_1, λ_2 таких, что $\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

Определение 12. *Борелевская мера $\mu \in \mathcal{M}^+$, конечная на компактах, называется ω–проективно-инвариантной относительно группы $G \subseteq Homeo(X)$, если выпуклый конус $\mathcal{K}_\mu(G)$ является минимальным, луч $\lambda\mu$ крайним, а ω является мощностью множества крайних лучей.* ■

В случае $\omega = 1$ инвариантный конус $\mathcal{K}_\mu(G)$ одномерный и определение 1–проективно-инвариантной меры совпадает с определением 5.3 проективно-инвариантной меры. Если инвариантный конус $\mathcal{K}_\mu(G)$ не только одномерный, но и неподвижный относительно группы линейных операторов G_*, то проективно-инвариантная мера является инвариантной. По определению, инвариантную меру будем называть 0–проективно-инвариантной. В дальнейшем, в зависимости от текста будем пользоваться эквивалентными названиями: 1–проективно-инвариантная мера — проективно-инвариантная мера; 0–проективно- инвариантная мера — инвариантная мера.

Здесь, как и в предыдущих разделах важно, чтобы без априорных предположений о характере группы, сформулировать различные критерии существования ω–проективно инвариантной меры. В предыдущих разделах мы отметили, что из существования инвариантной меры, или проективно-инвариантной меры, следует существование непустого минимального множества. Поэтому, в дальнейшем, при изучении других метрических инвариантов условие существования непустого минимального множества будет центральным.

Теорема 5. *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *минимальное множество группы G не пусто;*

2) *в группе G существует максимальная подгруппа M_0 (единственная) с инвариантной мерой;*

3) *найдется такое кардинальное число ω, что для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера.* ■

Очевидно, что имеет место оценка

$$1 \le \omega.$$

Здесь интересен следующий вопрос. В каких случаях существует ω-проективно-инвариантная мера с конечным ω? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема об экстремальном свойстве ω-проективно-инвариантной меры.

Теорема 6 ((2004)**[12]**). *Для ω-проективно-инвариантной меры μ кардинальное число ω либо равно 1, либо бесконечное.*■

Интересен вопрос, при каких условиях (каковы препятствия) из существования ω-проективно-инвариантной меры следует существование инвариантной, или проективно-инвариантной меры? В этом разделе мы опишем препятствия существованию инвариантной, или проективно-инвариантной меры в топологических терминах, либо в смешанных топологических и алгебраических терминах. В последующих разделах мы опишем эти препятствия в иных терминах. Заметим, что для групп с дискретным минимальным множеством существует инвариантная мера.

Теорема 7 ((1996)**[6]**). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует борелевская (вероятностная, в случае $X = S^1$) мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G;*

2) *множество $Fix\ G^s$ не пусто.*■

Сформулируем важный критерий существования проективно-инвариантной меры, использующий как топологические, так и алгебраические характеристики. Для любого элемента $q \in Homeo_+(\mathbb{R})$ будем пользоваться обозначениями:

$$T_q = \sup\{t : \ q(t) = t\}, \quad t_q = \inf\{t : \ q(t) = t\}, \text{ если } Fix < q > \neq \emptyset;$$
$$T_q = t_q = -\infty, \quad \text{если } Fix < q >= \emptyset.$$

Определим еще одно каноническое подмножество группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$

$$C_G = (G \setminus G^s) \bigcup G^s_\infty.$$

Теорема 8 ((1996)**[7]**). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$, для которой не существует борелевской инвариантной меры, конечной на компактах. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно–инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:*

1) *множество G^s_∞ является подгруппой и факторгруппа G/G^s_∞ не коммутативная;*

2) для всякого $g \in G^s \backslash C_G$ справедливы условия:
t_g, T_g конечны и для любых $t \in]-\infty, t_g[$, $T \in]T_g, +\infty[$, выполнено соотношение $sign[g(t) - t] = -sign[g(T) - T]$;

3) для любых g_1, $g_2 \in G^s \backslash C_G$ либо $t_{g_1} = t_{g_2}$ и $T_{g_1} = T_{g_2}$, либо $[t_{g_1}, T_{g_1}] \bigcap [t_{g_2}, T_{g_2}] = \emptyset$. ■

Для групп, не имеющих инвариантной меры, мы можем сформулировать иной критерий существования проективно-инвариантной меры, также использующий свойства канонически выделенных подмножеств G^s_∞ и C_G исходной группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$.

Теорема 9 ((1996)**[7]**). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$, для которой не существует инвариантной борелевской меры, конечной на компактах. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно–инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы подмножества G^s_∞ и C_G являлись подгруппами и выполнялось условие $C_G \neq G^s_\infty$.* ■

2 Цепочки Дейя и аналог альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности. Инвариантные меры.

С понятием аменабельности связаны важнейшие характеристики группы и, в частности, метрические инварианты. Этот факт известен начиная с ранних работ Боголюбова и Крылова по инвариантным мерам для групп, действующих на компакте.

Определение 13. *Дискретная группа G называется аменабельной, если она допускает G–инвариантную вероятностную меру, т.е. отображение*

$$\mu : P(G) \longrightarrow [0, 1]$$

($P(G)$ — множество всех подмножеств G), для которого справедливы условия:

1) конечная аддитивность;

2) $\mu(gA) = \mu(A)$ для всех $g \in G$, $A \subseteq G$

3) $\mu(G) = 1$. ■

Дадим эквивалентное определение аменабельности. Для дискретной группы G через $B(G)$ обозначим пространство ограниченных функций на G с sup-нормой.

Линейный функционал m на $B(G)$ называется левоинвариантным средним, если:

1) $m(\bar{f}) = \overline{m(f)}$;

2) $m(f) \geqslant 0$, $f \geqslant 0$, $m(1) = 1$;

3) $m(gf) = m(f)$, где для всех $g, \bar{g} \in G$, $gf(\bar{g}) = f(g^{-1}\bar{g})$.

Определение 1*. *Дискретная группа G называется аменабельной, если существует левоинвариантное среднее.* ■

Множество всех аменабельных групп, обозначаемое через AG, замкнуто относительно следующих четырех операций:

(1) взятия подгруппы групп;

(2) взятия факторгруппы групп;

(3) расширения групп с помощью элементов из AG (G является расширением группы H посредством F, если $H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong F$);

(4) направленного объединения $\bigcup_\alpha H_\alpha$ подгрупп $\{H_\alpha\} \subset AG$, в котором для любых H_{α_1}, H_{α_2} существует $H_\gamma \supset H_{\alpha_1} \bigcup H_{\alpha_2}$ (индуктивный предел).

Мы попытаемся полученные критерии существования инвариантной и проективно-инвариантной мер переформулировать в иных терминах в виде альтернатив. Для этого определим одну важную каноническую подгруппу исходной группы, связанную с минимальным множеством.

Определение 14. *Для группы $G \subseteq Homeo_+(X)$ нормальная подгруппа H_G определяется следующим образом:*

1) если минимальное множество не пусто и не дискретно, то положим

$$H_G = \{h: \quad h \in G, \ E(G) \subseteq Fix < h >\};$$

2) если минимальное множество непусто и дискретно, то положим $H_G = G^s$ (из дискретности минимального множества следует непустота множества $Fix\, G^s$, из непустоты $Fix\, G^s$ следует, что G^s является нормальной подгруппой);

3) если минимальное множество пусто,то положим $H_G =< e >$. ■

Гизом (1998) была выдвинута гипотеза, связанная с усилением теоремы Боголюбова-Крылова-Дейя для группы, действующей на окружности. Гипотеза Гиза была доказана Маргулисом в виде не строгой альтернативы.

Теорема 10 (Margulis (2000)**[34]**). *Для группы G гомеоморфизмов окружности или существует свободная подгруппа с двумя образующими, или существует вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно группы G.* ■

Существуют группы гомеоморфизмов окружности, для которых одновременно существуют и свободные подгруппы с двумя образующими и вероятностная инвариантная борелевская мера.

Результат, эквивалентный теореме Маргулиса, в иных терминах был доказан Солодовым (1984) [40]. Их эквивалентность была отмечена в работе Бекларяна (2002) [11].

Дадим эквивалентную переформулировку теоремы 7 в форме критерия существования инвариантной меры, являющаяся неулучшаемым усиление теоремы Боголюбова-Крылова-Дейя о существования инвариантной меры для аменабельной группы, действующей на окружности.

Теорема 11 (Строгая альтернатива (2002)**[11]**)**.** *Для группы гомеоморфизмов окружности $G \subseteq Homeo_+ \ (S^1)$ либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо существует вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно группы G.*■

Следующим шагом является переформулировка приведенной альтернативы об инвариантной мере в виде аналога альтернативы Титса. При изучении цепочек Дейя, связанное с аналогом альтернативы Титса, и проявляются экстремальные свойства групп гомеоморфизмов окружности.

Для этого определим классы групп:

EG– класс элементарных аменабельных групп, это наименьший класс групп, содержащий все конечные и абелевые группы и замкнутый относительно операций (1)–(4);

F_NG– класс групп не содержащих свободных подгрупп с двумя образующими;

FG– класс групп, содержащих свободную подгруппу с двумя образующими.

Очевидно, что последние два класса групп не пересекаются $F_NG \bigcap FG = \emptyset$.

Справедливы вложения

$$EG \subseteq AG \subseteq F_NG \subseteq (F_NG \cup FG). \tag{66}$$

Проблема Дейя ((1957)[18]). *Являются ли вложения в цепочке*

$$EG \subseteq AG \subseteq F_NG. \tag{67}$$

строгими?

Была выдвинута гипотеза (Гринлиф (1969) и др.): *дискретная группа G либо аменабельная, либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, т.е.*

$$AG = F_NG. \tag{68}$$

Относительно вложения (67), подобное свойство будем называть *дихотомией*, или *экстремальным свойством.*

Для линейных групп такую гипотезу (и даже большее) доказал Титц (1979)[45] (альтернатива Титса): *конечно порожденная линейная группа либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является почти разрешимой.*

Таким образом, альтернатива Титса, справедливая для линейных групп, поддерживала выдвинутую гипотезу.

Ольшанский (1980)[36], Адян (1982)[1], Громов (1988)[26] опровергли гипотезу и построили примеры конечно порожденных групп из $F_NG \backslash AG$, т.е. *построили примеры не аменабельных конечно порожденных групп (не являющиеся конечно определенными) не содержащих свободных подгрупп с двумя образующими.*

Григорчук (1984)[20] закрыл проблему Дейя, построив пример конечно порожденной группы из $AG \backslash EG$ (*группа Григорчука*). Группа Григорчука также не является конечно определенной (представимой). Позже, Григорчук (1998)[23] построил пример конечно определенной группы из $AG \backslash EG$.

Сформулируем аналог альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности.

Теорема 12 ((2002)**[11]**). *Для группы $G \subseteq Homeo\ (S^1)$ либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*$\blacksquare$

Заметим, что для группы $G \subseteq Homeo_+\ (S^1)$ действие любого элемента из факторгруппы G/H_G также можно реализовать как действие на окружности. Для элемента $g \in G$ действие, соответствующего ему элемента $\tilde{g} \in G/H_G$, на минимальном множестве совпадает с действием самого g, а вне минимального множества на максимальных интервалах действует линейными растяжениями, оставаясь при этом непрерывным.

Если обозначить через KG класс коммутативных групп, то цепочка вложений (66) может быть расширена

$$KG \subseteq EG \subseteq AG \subseteq F_NG \subseteq (F_NG \cup FG). \tag{69}$$

В терминах такой цепочки для групп гомеоморфизмов окружности теорема 12 эквивалентна условию

$$KG = F_NG$$

для соответствующих факторгрупп и означает, что группы гомеоморфизмов окружности относительно вложений (69) для факторгрупп также удовлетворяют экстремальному свойству. Соответственно, такие группы в смысле вложений (69) для факторгрупп поддаются полной классификации.

Более того, для таких конечно порожденных групп, рост факторгруппы также удовлетворяет экстремальному свойству: либо полиномиальный (для факторгрупп из KG), либо экспоненциальный (для факторгрупп из FG) и не существует факторгрупп промежуточного роста.

3 Цепочки Дейя и аналог альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов прямой. Инвариантные меры.

Для групп гомеоморфизмов прямой $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ также дадим эквивалентную переформулировку теоремы 7 в форме критерия существования инвариантной меры. Очевидно, что, в отличие от групп гомеоморфизмов окружности условия на факторгруппу G/H_G должны быть более жесткими.

Теорема 13 ((2002)**[11]**). *Для группы гомеоморфизмов прямой $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ с не пустым минимальным множеством, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G.*■

Сформулируем аналог альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов прямой.

Теорема 14 ((2002)**[11]**). *Для группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*■

Обозначим через F_NPG класс групп, не содержащих свободных подполугрупп с двумя образующими, а через FPG класс групп содержащих свободные подполугрупп с двумя образующими. Тогда справедлива цепочка вложений (аналог цепочки Дейя)

$$KG \subseteq F_NPG \subseteq (F_NPG \cup FPG). \tag{70}$$

Отметим, что вложения (69), (70), в ситуации общего положения, друг с другом не связаны. Существуют примеры конечно порожденных неаменабельных групп (следовательно экспоненциального роста), не содержащих свободных подполугрупп с двумя образующими. Следовательно между свойствами аменабельности и наличия свободных подполугрупп с двумя образующими нет никакой связи. Вместе с тем, многие известные группы с экспоненциальным ростом содержат свободные подполугруппы с двумя образующими.

Конечно порожденные группы, содержащие свободные подполугруппы с двумя образующими, имеют экспоненциальный рост (доказывается с помощью правила пинг-понг, восходящего к Клейну). Среди таких групп могут быть и элементарные группы. В частности: *группа гомеоморфизмов прямой с двумя образующими, одна из которых сдвиг на единицу, а вторая– аффинное преобразование, является разрешимой группой ступени два и имеет свободную подполугруппу с двумя образующими (соответственно, имеет экспоненциальный рост).*

В терминах вложений (70) для групп гомеоморфизмов прямой теорема 14 эквивалентна условию

$$KG = F_NPG$$

для соответствующих факторгрупп и означает, что группы гомеоморфизмов прямой относительно вложений (70) для факторгрупп также удовлетворяют экстремальному свойству.

Это означает, что такие группы в смысле вложений (70) для факторгрупп поддаются полной классификации. Более того, для таких конечно порожденных групп, рост факторгруппы также удовлетворяет экстремальному свойству: либо полиномиальный (для факторгрупп из $F_N PG$), либо экспоненциальный (для факторгрупп из FPG) и не существует факторгрупп промежуточного роста.

Таким образом, исследование групп гомеоморфизмов G окружности (прямой) сводится к изучению канонической подгруппы H_G, в которой и сосредоточена вся алгебраическая сложность исходной группы. Для этого привлекаются дополнительные метрические инварианты в виде проективно-инвариантной меры [5],[7],[8],[38] и ω-проективно-инвариантной меры [9].

4 Цепочки Дейя и аналог альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов прямой. Проективно-инвариантные меры.

Для специальных групп гомеоморфизмов прямой мы можем дать эквивалентную переформулировку теоремы 8 в виде критерия существования проективно-инвариантной меры.

Теорема 15 ((1999)**[9]**). *Пусть для группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ максимальная нормальная подгруппа M_0 с инвариантной мерой содержит свободно действующий элемент. Тогда, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо существует борелевская мера, конечная на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G.* ■

Теперь мы можем дать формулировку аналога альтернативы Титса для рассматриваемых специальных групп гомеоморфизмов прямой.

Теорема 16 ((2002)**[11]**). *Пусть для группы $G \subseteq Homeo_+ (\mathbb{R})$ максимальная нормальная подгруппа Γ с инвариантной мерой содержит свободно действующий элемент. Тогда факторгруппа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является разрешимой подгруппой ступени не более двух.*■

Расмотрим цепочки вложений

$$EG \subseteq AG \subseteq F_N G \subseteq (F_N G \cup FG). \tag{71}$$

В терминах такой цепочки для групп гомеоморфизмов окружности теорема 16 эквивалентна условию

$$EG = F_N G$$

для соответствующих факторгрупп и означает, что группы гомеоморфизмов окружности относительно вложений (71) для факторгрупп также удовлетворяют экстремальному свойству. Соответственно, такие группы в смысле вложений (71) для факторгрупп поддаются полной классификации.

Литература

1. Адян С.И. Случайные блуждания на свободных периодических группах// Изв.АН СССР. Сер. мат. (1982), т.46, No. 6, с.1139-1149

2. Альфорс А. Преобразования Мебиуса в многомерном пространстве.М.: Мир, (1986).

3. Аносов Д.И. О вкладе Н.Н. Боголюбова в теорию динамических систем//Успехи мат. наук (1994), т.49, No. 5(299), с.5-20.

4. Бекларян Л.А. Структура факторгруппы группы гомеоморфизмов R, сохраняющих ориентацию, по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов// Доклады РАН (1993), т.331, No.2, с.137-139.

5. Бекларян Л.А. Инвариантные и проективно-инвариантные меры для групп гомеоморфизмов R, сохраняющих ориентацию// Доклады РАН (1993), т.332, No.6, с.679-681.

6. Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры.// Математический сборник (1996), т.187, No. 3, с.23-54.

7. Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II.Проективно-инвариантные меры.//Математический сборник (1996), т.187, No. 4, с.3-28.

8. Бекларян Л.А. Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек.//Математические заметки (1996), т.51, No.3, с.179-180.

9. Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω-проективно-инвариантные меры.//Математический сборник (1999), т.190, No.4, с.43-62.

10. Бекларян Л.А. О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$.// Математический сборник (2000), т.191, No.6, с.31—42.

11. Бекларян Л.А. Об аналогах альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности и прямой// Математические заметки (2002), т.71, No.3, с.334–347.

12. Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты// Успехи математических наук (2004), т.59, No. 4, с.3–68.

13. Brin M.C., Squier C.C. Groups of piecewise linear homeomorphisms on the real line// Invent. math. (1985), v.79, p.485-498

14. Боголюбов Н.Н. Про деякі ергодичні властивості груп неперервних перетворень// Накові Записки Київського Університету, Фізика-Математика (1939), т.4:3, с.45-53

15. Cannon J.F., Floyd W.J., Parry W.R. Introductory notes on Richard Thompson's groups// Enseign. math. (1996), vol.42, No.3-4, p.215-256 (РЖМат, 1998, 1A203)

16. Степин А.М., Ахалая Ш.И. Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразованиях окружности// Труды МИРАН (2004), т.244, с.23-34.

17. Чеккерини-Зилберштейн, Т. Вокруг аменабельности.//Итоги науки и техники, (1998) т. 69, с.229-258.

18. Day M. Amenable Semigroups// Ill. J. Math.(1957), No.1, c.509-544

19. Day M.M. Fixed-point theorems for compact convex sets// Illinois J. Math. (1961), v.5, p.585-590.

20. Григорчук Р.И. Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних// Изв. АН СССР (1984), т.48, No. 5, с.939-985

21 Григорчук Р.И., Курчанов П.Ф. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (1990), т. 58, с. 191–256.

22 Grigorchuk R.I., Maki, A. J. On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms.// Mat. Zametki (1993), vol.53, p. 46-63. Translation to english in Math. Notes (1993), vol.53, p.146-157.

23. Григорчук Р.И. Пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу EG// Математический сборник (1998), т.189, No. 1, с.79-100

24. Grigorchuk R.I., Ceccherini–Silberstein T., P. de la Harpe. Amenability and Paradoxical Decompositions for Pseudogroups and for Discrete Metric Spaces// Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, (1999), vol.224, p. 57–97.

25. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps// Publ.Math. de l'IHES (1981), vol.53, p.53-73.

26. Gromov V. Hyperbolic groups// "Essays Group Theory S.M.Gerstern Ed., M.S.R.I. Publ.8, Springer (1987), p.75-263.

27. Chys E. Groups acting on the circle// Enseignement Math., (2001), vol.47, p. 329–407.

28. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, (1973).

29. Hector G., Hirsh U. Introduction to the geometric theory of foliations. Part B. Wiesbaden: Wiley, (1983).

30. Imanishi H. Structure of codemention 1 foliations without holonomic on manifolds with abelian fundamental group// J. of Math. Kyoto Univ. (1979), vol. 19, No.3, p. 481–495.

31. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, (1973).

32. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, (1980).

33. Карлович Ю.И. $C*$–алгебра операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов и осциллирующими коэффициентами// ДАН СССР (1988), т. 302, No. 3, с. 535–540.

34. Margulis G. Free subgroups of the homeomorphism group on the circle// C.R.Acad.Sci. Paris,(2000), vol.331, ser. I, p.669—674.

35. Новиков С.П. Топология слоений//Труды ММО. (1965), т.14, с.248-278

36. Ольшанский А.Ю. Проблема существования инвариантного среднего на группе// Успехи мат.наук. (1980), т.35, No. 4, с.180-181

37. Plante J.F. Foliations with measure preserving holonomy// Ann. Math. (1975), vol. 102, p. 327–361.

38. Plante J.F. Solvable groups acting on the line// Transl. of the Amer. Math. Soc. (1983), vol. 278, p. 401–414.

39. Rosenblatt J. Invariant measures and growth conditions// Trans. of the AMS (1974), vol.197, p.33-53

40. Солодов В.В. Гомеоморфизмы окружности и слоения// Изв. АН СССР. Сер. матем. (1984), т.48, No. 3, с. 599–613.

41. Salhi E. Sur les ensembles locaux// C.R.A.S. Paris. (1982), vol. 295, ser. I, No. 12, p. 691–694.

42. Salhi E. Sur une theorie de structure de feuilletages de codimention 1// C.R.A.S. Paris. (1985), vol. 300, ser. I, No.18, p.635–638.

43. Salhi E. Niveau de feuilles// C.R.A.S. Paris. (1985), vol. 301, ser. I, No.5, p.219–222.

44. Tarski A. Cardinal algebras// Oxford University Press, (1949).

45. Tits J. Free Subgroups in Linear Groups// J. of Algebra (1979), vol.20, p.250-270.

46. Wagon S. The Banach-Tarski paradox// Camdridge University Press, (1985).