Задача Коши для уравнения Эйнштейна. Когомологическая единственность формальных решений

В. А. Юмагужин

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
г. Переславль-Залесский
yuma@diffiety.botik.ru

Valentin Lychagin,Valeriy Yumaguzhin, *Cohomological uniqueness of the Cauchy problem solutions for the Einstein equation*, Journal of Geometry and Physics (to appear).

1. Уравнение Эйнштейна

M - n-мерное многообразие, g - метрика на M.

$g = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ - метрика, $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Связность Леви-Чивита

$$\Gamma^k_{ij}(g) = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right).$$

Тензор кривизны

$$\mathrm{C}^l_{ijk}(g) = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk}.$$

Тензор Риччи

$$\mathcal{R}_{ij}(g) = \mathrm{C}^m_{mij}(g) = \mathrm{C}^1_{1ij}(g) + \ldots + \mathrm{C}^n_{nij}(g).$$

Уравнение Эйнштейна

$$\mathcal{E}(g) \equiv \mathcal{R}(g) - \Lambda\, g = 0, \tag{1}$$

Λ - космологическая константа.

2. Задача Коши

$$u(x) = (u^1(x), \ldots, u^m(x)), \quad x = (x^1, \ldots, x^n).$$

Система квазилинейных УрЧП 2-го порядка

$$\mathcal{E}(u) = 0,$$
$$A^i_{j\,l_1 l_2}(x, u, u_1)\, u^j_{l_1 l_2} + B^i(x, u, u_1) = 0,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, m, \quad l_1, l_2 = 1, 2, \ldots, n.$$

M_0 - начальная гиперповерхность.
Начальные данные:
$\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$ - вектор-функции на M_0.
X - невырожденное векторное поле, трансверсальное M_0.

Задача Коши.
Найти такое u, что:

$$1^\circ \quad \mathcal{E}(u) = 0,$$
$$2^\circ \quad u\big|_{M_0} = \varphi \quad \text{и} \quad X(u)\big|_{M_0} = \psi.$$

2.1. "Выпрямление". Корректность задачи Коши.

φ - поток поля X.

Локально M_0 - график функции $x^1 = h(x^2, \ldots, x^n)$.

Замена координат:

$$(t^1, \ldots, t^n) \mapsto \Big(\varphi\big(t^1, h(t^2, \ldots, t^n)e_1 + t^2 e_2 + \ldots + t^n e_n\big)\Big).$$

В координатах $t^1, \ldots, t^n$

$$X = \partial/\partial t^1, \quad M_0 = \{t^1 = 0\}.$$

Поскольку

$$u^k_{x^r x^s} = \sum_{l,m} u^j_{t^l t^m} \frac{\partial t^l}{\partial x^r} \frac{\partial t^m}{\partial x^s} = \frac{\partial t^1}{\partial x^r} \frac{\partial t^1}{\partial x^s} u^k_{t^1 t^1} + \ldots,$$

то задача Коши:

$$1^\circ \quad A^i_{j\, l_1 l_2}(t, u, u_1) \frac{\partial t^1}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial t^1}{\partial x^{l_2}} u^j_{t^1 t^1} = \ldots - B^i(t, u, u_1),$$

$$2^\circ \quad u\big|_{t^1=0} = a \quad \text{и} \quad u_{t^1}\big|_{t_1=0} = b.$$

3. Формальные решения задачи Коши для уравнения Эйнштейна.

$t = x^1$, $x = (x^2, \ldots, x^n)$.

Задача Коши:

$$M_0 = \{t = 0\}, \quad g^0 = g^0_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad g^1 = g^1_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

g^0 - метрика, g^1 - симметричн. кв. форма.

Найти метрику $g = g_{ij}(t, x) dx^i dx^j$

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad \mathcal{E}(g) = 0, \\ &2^\circ \quad g\big|_{t=0} = g^0, \quad g_t\big|_{t=0} = g^1. \end{aligned}$$

Формальное решение задачи Коши на M_0:

$$g = g^0 + tg^1 + \ldots + t^k g^k + \ldots,$$
$$g^k = g^k_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad k = 2, 3, \ldots,$$
$$\mathcal{E}(g^0 + tg^1 + \ldots + t^k g^k) = 0 \bmod t^{k-1}\Sigma^2, \quad \forall\, k = 2, 3, \ldots.$$

Σ^2 - все симметричные квадратичные формы на M.

4. Дополнительные условия на данные Коши.

1. Нехарактеристичность:

$$|\partial/\partial t|^2_{g^0} \equiv g_0(\partial/\partial t, \partial/\partial t) \neq 0 \ \ \forall x \in M_0. \tag{2}$$

$$g_1 = u^0 + tg^1, \quad \theta_1 = g_1 \mod t^2\Sigma^2.$$

2. Дифференциальный инвариант, препятствующий существованию формальных решений.

$$\omega_{\theta_1} = \sigma_{dt}(\mathcal{B}_{g_1})\big(\mathcal{E}(g_1)\big)\Big|_{M_0}$$

$$\omega_{\theta_1} = 0. \tag{3}$$

ОПЕРАТОР БИАНКИ

ЕГО СИМВОЛ

5.Существование формального решения.

Лемма 1. *Если данные Коши удовлетворяют* (2) *и* (3), *то существует такая симметричная 2-форма* $g^2 = g^2_{ij}(x)dx^i dx^j$, *что*

$$\mathcal{E}(g^0 + tg^1 + t^2 g^2) = 0 \mod t^1\Sigma^2.$$

Набросок доказательства.

$$g_1 = g^0 + tg^1, \quad v = v_{ij}(x)dx^i dx^j$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(g_1 + t^2 v) &= \mathcal{E}(g_1) + l_{g_1}(\mathcal{E})(t^2 v) \mod t^1\Sigma^2 \\ &= \mathcal{E}(g_1) + \sigma_{dt}\big(l_{g_1}(\mathcal{E})\big)(2v) \mod t^1\Sigma^2.\end{aligned}$$

$$(3) \Leftrightarrow \mathcal{E}(g_1) \in \operatorname{Ker}\sigma_{dt}(\mathcal{B}_{g_1}) + t^1\Sigma^2.$$

$$(2) \Rightarrow \text{ точность комплекса}$$

$$0 \to T^* \xrightarrow{\sigma_p(\mathcal{L}_{g_1})} S^2T^* \xrightarrow{\sigma_p\left(l_{g_1}(\mathcal{E})\right)} S^2T^* \xrightarrow{\sigma_p(\mathcal{B}_{g_1})} T^* \to 0.$$

6. Существование формального решения.

Лемма 2. *Пусть данные Коши удовлетворяют* (2) *и*

$$\mathcal{E}(g^0 + tg^1 + \ldots + t^{k+1}g^{k+1}) = 0 \mod t^k\Sigma^2, \; k \geq 1.$$

Тогда существует такая симметричная 2-форма $g^{k+2} = g^{k+2}_{ij}(x)dx^i dx^j$, *что*

$$\mathcal{E}(g^0 + tg^1 + \ldots + t^{k+1}g^{k+1} + t^{k+2}g^{k+2}) = 0 \mod t^{k+1}\Sigma^2$$

Начало доказательства.

$$g_{k+1} = g^0 + tg^1 + \ldots + t^{k+1}g^{k+1}, \quad v = v_{ij}(x)dx^i dx^j$$

$$\mathcal{E}(g_{k+1} + t^{k+2}v) = \mathcal{E}(g_{k+1}) + l_{g_{k+1}}(\mathcal{E})(t^{k+2}v) \mod t^{k+1}\Sigma^2.$$

Существует ли $t^{k+2}v \in t^{k+2}\Sigma^2$, что

$$\mathcal{E}(g_{k+1}) + l_{g_{k+1}}(\mathcal{E})(t^{k+2}v) = 0 \mod t^{k+1}\Sigma^2 \quad ?$$

7. Комплекс Эйнштейна.

g - решение уравнения Эйнштейна.

$$0 \to \Omega^1 \xrightarrow{\mathcal{L}_g} \Sigma^2 \xrightarrow{l_g(\mathcal{E})} \Sigma^2 \xrightarrow{\mathcal{B}_g} \Omega^1 \to 0 \tag{4}$$

$$0 \to \mathcal{K}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{K}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{K}_3 \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{K}_4 \to 0$$

$$\ldots = \mathcal{K}_i = \ldots = \mathcal{K}_i \supset t\,\mathcal{K}_i \supset \ldots \supset t^k\,\mathcal{K}_i \supset t^{k+1}\,\mathcal{K}_i \supset \ldots$$

$F^{m,n}$,

m - фильтрующая, $m+n = 1,2,3,4$ - градуирующая степени.

$$\partial_{m+n}(F^{m,n}) = F^{m,n+1}.$$

$$F^{m,1-m} = \mathcal{K}_1,\ m \le 0;\ F^{m,1-m} = t^m\mathcal{K}_1,\ m > 0;$$
$$F^{m,2-m} = \mathcal{K}_2,\ m \le 1;\ F^{m,2-m} = t^{m-1}\mathcal{K}_2,\ m > 1;$$
$$F^{m,3-m} = \mathcal{K}_3,\ m \le 3;\ F^{m,3-m} = t^{m-3}\mathcal{K}_3,\ m > 3;$$
$$F^{m,4-m} = \mathcal{K}_4,\ m \le 4;\ F^{m,4-m} = t^{m-4}\mathcal{K}_4,\ m > 4.$$

8. Комплекс Эйнштейна.

Градуированный модуль:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_3 \oplus \mathcal{K}_4 \,.$$

Дифференциал степени +1:

$$\partial = \partial_1 \oplus \partial_2 \oplus \partial_3 \oplus 0,$$
$$\partial \circ \partial = 0,$$
$$\partial(\mathcal{K}_i) \subset \mathcal{K}_{i+1} \,.$$

Фильтрация, согласованная с градуировкой:

$$\ldots \supset F^m \supset F^{m+1} \supset \ldots,$$
$$F^m = F^{m,1-m} \oplus F^{m,2-m} \oplus F^{m,3-m} \oplus F^{m,4-m}.$$

Дифференциал сохраняет фильтрацию:

$$\partial(F^m) \subset F^m.$$

9. Спектральная последовательность.

$$Z_r^m = \{x \in F^m \,|\, \partial x \in F^{m+r}\}; \quad Z_r^m = F^m, \; r \le 0.$$

$$B_r^m = F^m \cap \partial F^{m-r} = \partial(Z_r^{m-r})$$

$$Z_r^m \supset Z_{r-1}^{m+1}, \quad Z_r^m \supset B_{r-1}^m.$$

$$Z_r^{m,n} = Z_r^m \cap \mathcal{K}_{m+n}, \quad B_r^{m,n} = B_r^m \cap \mathcal{K}_{m+n}, \quad m+n = 1,2,3,4.$$

$$E_r^{m,n} = Z_r^{m,n}/(B_{r-1}^{m,n} + Z_{r-1}^{m+1,n-1}); \quad E_r^{m,n} = 0, \; r < 0.$$

Оператор ∂ определяет очевидным образом операторы

$$\partial_r^{m,n} : E_r^{m,n} \longrightarrow E_r^{m+r,n-r+1}.$$

Спектральная последовательность:

$$\{E_r^{m,n}, \partial_r^{m,n}\}$$

$$r = 0,1,2,\ldots, \; m \in \mathbb{Z}, \; m+n = 1,2,3,4.$$

10. Спектральная последовательность.

$$\ldots \to E_r^{m-r,n+r-1} \xrightarrow{\partial_r^{m-r,n+r-1}} E_r^{m,n} \xrightarrow{\partial_r^{m,n}} E_r^{m+r,n-r+1} \to \ldots$$

$$\operatorname{Ker} \partial_r^{m,n} / \operatorname{Im} \partial_r^{m-r,n+r-1} = E_{r+1}^{m,n}.$$

Член $\{E_0^{m,n}, \partial_0^{m,n}\}$:

$$E_0^{m,n} = F^{m,n}/F^{m+1,n-1},$$

$$\partial_0^{m,n} \ \text{ порожден оператором } \ \partial_{m+n}.$$

Теорема. Если выполнено условие $|\partial/\partial t|^2_{g^0} \neq 0$ для всех $x \in M_0$, то

$$E_r^{m,n} = 0, \ \ \forall\, r \geq 1.$$

11. Комплекс Эйнштейна для приближенного решения.

$$g = g^0 + tg^1 + \ldots + t^{k+1}g^{k+1}, \quad \mathcal{E}(g) = 0 \mod t^k\,\mathcal{K}_3\,.$$

$$\mathcal{K}_1 = \{\langle g, X\rangle \subset \Omega^1 \mid X - \text{векторное поле, касательное к } M_0\}.$$

$$0 \to \mathcal{K}_1\,/t^{k+3}\,\mathcal{K}_1 \xrightarrow{\bar{\mathcal{L}}_u} \mathcal{K}_2\,/t^{k+2}\,\mathcal{K}_2 \xrightarrow{\bar{l}_u(\mathcal{E})} \mathcal{K}_3\,/t^k\,\mathcal{K}_3$$
$$\xrightarrow{\bar{\mathcal{B}}_u} \mathcal{K}_4\,/t^{k-1}\,\mathcal{K}_4 \to 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1\,/t^{k+3}\,\mathcal{K}_1 &\supset t^1\,\mathcal{K}_1\,/t^{k+3}\,\mathcal{K}_1 \supset \ldots \supset t^{k+2}\,\mathcal{K}_1\,/t^{k+3}\,\mathcal{K}_1,\\
\mathcal{K}_2\,/t^{k+2}\,\mathcal{K}_2 &\supset t^1\,\mathcal{K}_2\,/t^{k+2}\,\mathcal{K}_2 \supset \ldots \supset t^{k+1}\,\mathcal{K}_2\,/t^{k+2}\,\mathcal{K}_2,\\
\mathcal{K}_3\,/t^{k}\,\mathcal{K}_3 &\supset t^1\,\mathcal{K}_3\,/t^{k}\,\mathcal{K}_3 \supset \ldots \supset t^{k-1}\,\mathcal{K}_3\,/t^{k}\,\mathcal{K}_3,\\
\mathcal{K}_4\,/t^{k-1}\,\mathcal{K}_4 &\supset t^1\,\mathcal{K}_4\,/t^{k-1}\,\mathcal{K}_4 \supset \ldots \supset t^{k-2}\,\mathcal{K}_4\,/t^{k-1}\,\mathcal{K}_4\,.
\end{aligned}$$

12. Спектральная последовательность комплекса Эйнштейна, ассоциированного с приближенным решением.

$$0 \to E_r^{m,1-m} \xrightarrow{\partial_r^{m,1-m}} E_r^{m+r,2-m-r} \xrightarrow{\partial_r^{m+r,2-m-r}}$$
$$E_r^{m+2r,3-m-2r} \xrightarrow{\partial_r^{m+2r,2-m-2r}} E_r^{m+3r,4-m-3r} \to 0,$$

$r = 0, 1, 2, \dots, \quad m \in \mathbb{Z}.$

Теорема. Если выполнено условие $|\partial/\partial t|^2_{g^0} \neq 0$ для всех $x \in M_0$, то

$$E_r^{m,n} = \begin{cases} 0, & m+n \neq 2, \\ \langle\, (dt)^2 \rangle \otimes (dt)^{m-1}, & m+n = 2 \end{cases}$$

для всех m, n и $r \geq 1$.

13. Применения к задаче Коши.

$$0 \to E_0^{k+2,-k-1} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,-k-1}} E_0^{k+2,-k} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,-k}}$$
$$E_0^{k+2,1-k} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,1-k}} E_0^{k+2,2-k} \to 0,$$

где

$$\begin{aligned} E_0^{k+2,-k-1} &= t^{k+2}\,\mathcal{K}_1 \,/ t^{k+3}\,\mathcal{K}_1, & \partial_0^{k+2,-k-1} &= \bar{\mathcal{L}}u\big|_{(t^{k+2}\,\mathcal{K}_1\,/t^{k+3}\,\mathcal{K}_1)}, \\ E_0^{k+2,-k} &= t^{k+1}\,\mathcal{K}_2 \,/ t^{k+2}\,\mathcal{K}_2, & \partial_0^{k+2,-k} &= \bar{l}_u(\mathcal{E})\big|_{(t^{k+1}\,\mathcal{K}_2\,/t^{k+2}\,\mathcal{K}_2)}, \\ E_0^{k+2,1-k} &= t^{k-1}\,\mathcal{K}_3 \,/ t^{k}\,\mathcal{K}_3, & \partial_0^{k+2,1-k} &= \bar{\mathcal{B}}u\big|_{(t^{k-1}\,\mathcal{K}_3\,/t^{k}\,\mathcal{K}_3)}. \end{aligned}$$

Существование формальных решений

14. Когомологическая единственность.

$$0 \to E_0^{k+2,-k-1} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,-k-1}} E_0^{k+2,-k} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,-k}}$$
$$E_0^{k+2,1-k} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,1-k}} E_0^{k+2,2-k} \to 0.$$

$$g = g^0 + tg^1 + \ldots + t^{k+1}g^{k+1}, \;\; \mathcal{E}(g) = 0 \mod t^k\,\mathcal{K}_3, \;\; k \geq 1 \text{ и}$$
$$t^{k+1}v \in E_0^{k+2,-k}.$$

Лемма 3.

$$\mathcal{E}(g + t^{k+1}v) = 0 \mod t^k\,\mathcal{K}_3 \Longleftrightarrow t^{k+1}v \in \operatorname{Ker}\partial_0^{k+2,-k}.$$

Леммы 1,2,3 $\Longrightarrow$ Sol - множество формальных решений

Теорема. *Если h - произвольное формальное решение, то* $h \in \mathrm{Sol}$.

15. Когомологическая единственность.

$$0 \to E_0^{k+2,-k-1} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,-k-1}} E_0^{k+2,-k} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,-k}}$$
$$E_0^{k+2,1-k} \xrightarrow{\partial_0^{k+2,1-k}} E_0^{k+2,2-k} \to 0.$$

$$g_{k+1} = g^0 + tg^1 + \ldots + t^{k+1}g^{k+1}, \quad \mathcal{E}(g) = 0 \mod t^k\,\mathcal{K}_3, \ k \geq 1 \text{ и}$$
$$t^{k+1}v \in E_0^{k+2,-k}.$$

Лемма 4. *Следующие условия эквивалентны:*

$$t^{k+1}v \in \operatorname{Im}\partial_0^{k+2,-k-1},$$
$$\exists\, F, \quad F(M_0) = M_0, \quad F^*(g_{k+1}) = g_{k+1} + t^{k+1}v,$$

где F - диффеоморфизм многообразия M.

Теорема. *Имеет место естественная биекция:*

$$\{\text{Множество орбит формальных решений}\} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} E_1^{k+2,-k}(g_{k+1}).$$

Литература

- Valentin Lychagin,Valeriy Yumaguzhin, *Cohomological uniqueness of the Cauchy problem solutions for the Einstein equation*, Journal of Geometry and Physics (to appear).
- И.Г.Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1950 Ленинград 303 стр.

Вернуться

6. Операторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}_g$ и $\mathcal{B}_g$

Оператор Эйнштейна $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} : \Sigma_0^2 \longrightarrow \Sigma^2, \quad \mathcal{E}(g) = \mathcal{R}(g) - \lambda g,$$
$$\sigma_{dt}(\mathcal{E}) : S^2T^* \longrightarrow S^2T^*.$$

Его линеаризация $l_g(\mathcal{E})$ на метрике g:

$$l_g(\mathcal{E})(h) = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \mathcal{E}(g + \tau h).$$

Оператор $\mathcal{L}_g$:

$$\mathcal{L}_g : \Omega^1 \longrightarrow \Sigma^2, \quad \mathcal{L}_g(q) = L_{g^{-1}(q)} g,$$
$$\sigma_{dt}(\mathcal{L}_g) : T^* \longrightarrow S^2T^*.$$

Оператор Бьянки $\mathcal{B}_g$:

$$\mathcal{B}_g : \Sigma^2 \longrightarrow \Omega^1, \quad \mathcal{B}_g(h) = -\frac{1}{2} d\langle g^{-1}, h\rangle + \langle g^{-1}, \nabla_g h\rangle,$$
$$\sigma_{dt}(\mathcal{B}_g) : S^2T^* \longrightarrow T^*.$$

4. Символ дифференциального оператора.

Линейный дифференциальный оператор в координатах:

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad u(x) = (u^1(x), \dots, u^{m_1}(x)),$$

$$\Delta : u \mapsto \left(A^i_{j\, l_1 \dots l_k}(x) \frac{\partial^k u^j}{\partial_{l_1} \dots \partial_{l_k}} + \dots \right),$$

где $i = 1, \dots, m_2$, $j = 1, \dots, m_1$ $l_r = 1, 2, \dots, n$ и $r = 1, \dots, k$.

$$df = f_1 dx^1 + \dots + f_n dx^n.$$

Символ оператора Δ ограниченный на $(df)^k$:

$$\sigma_{df}(\Delta) : u \mapsto \left(A^i_{j\, l_1 \dots l_k}(x) f_{l_1} \dots f_{l_k} u^j \right).$$

ДАННЫЕ КОШИ