

# Исследование задач механики, робототехники и восстановления изображений методами геометрической теории управления

Ю.Л. Сачков

при участии А.А. Ардентова и А.П. Маштакова

Институт Программных Систем РАН  
Переславль-Залесский

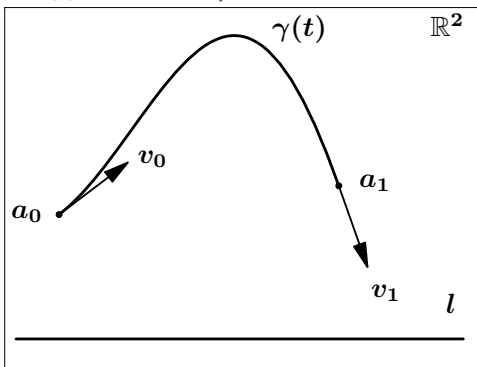
Объединенный семинар ИЦСА и ИЦПУ  
по оптимизации и управлению

*ИПС РАН, 24 января 2011 г.*

# План доклада

- Задача Эйлера об эластиках
- Задача об оптимальном качении шара по плоскости
- Задача об оптимальном движении мобильного робота по плоскости и ее приложение к восстановлению поврежденных изображений
- Геометрические методы теории управления

## Задача Эйлера об эластиках



**Дано:**  $l > 0$ ,  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $v_0 \in T_{a_0}\mathbb{R}^2$ ,  $v_1 \in T_{a_1}\mathbb{R}^2$ ,  $|v_0| = |v_1| = 1$ .

**Найти:**  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ :

$$\gamma(0) = a_0, \gamma(t_1) = a_1, \dot{\gamma}(0) = v_0, \dot{\gamma}(t_1) = v_1.$$

$$|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1 \Rightarrow t_1 = l$$

**Упругая энергия**  $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} k^2 dt \rightarrow \min$ ,  $k(t)$  — кривизна  $\gamma(t)$ .

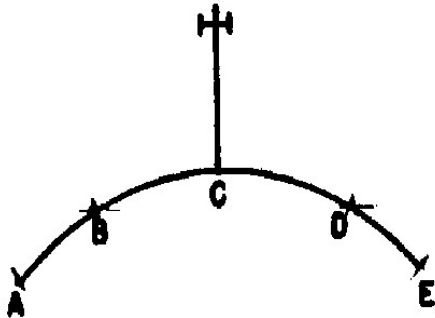
## XIII век: Жорданус де Неморе

Jordanus de Nemore (Жорданус Лесной)

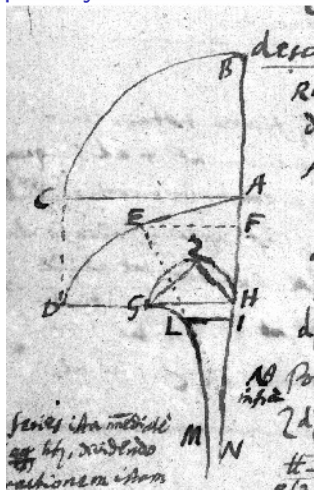
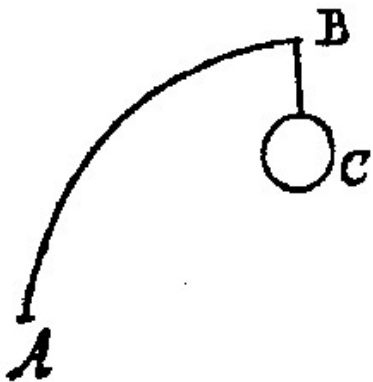
*De Ratione Ponderis* (О причине веса)

Книга 4, Предложение 13: **неверное** решение.

*(Все) упругие кривые — окружности.*



1691: Якоб Бернулли, прямоугольная эластика



$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$x \in [0, 1]$$

## 1742: Даниил Бернулли

- Упругая энергия

$$J = \text{const} \cdot \int \frac{ds}{R^2},$$

$R$  — радиус кривизны.

- Вариационный принцип

$$J \rightarrow \min,$$

попытка решения вариационной задачи.

- Письмо своему другу Л. Эйлеру:  
предложение решить эту задачу.

## 1744: Леонард Эйлер

- “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук, Лозанна, Женева, 1744,
- Приложение «Об упругих кривых»:  
*«... в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»*
- «Среди всех кривых одной и той же длины, которые не только проходят через  $A$  и  $B$ , но и касаются в этих точках прямых, заданных по положению, определить ту, для которой значение выражения  $\int \frac{ds}{R^2}$  будет наименьшим.»

## 1744: Леонард Эйлер

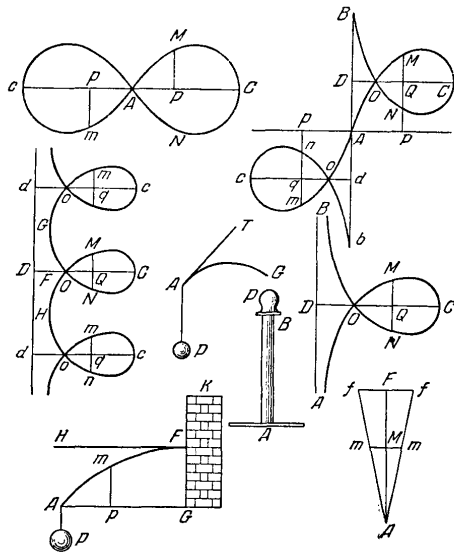
- Изопериметрическая задача вариационного исчисления,
- Уравнение Эйлера,
- Сведение к квадратурам

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}, \quad ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

- Качественный анализ (эллиптических) интегралов,
- Все типы решений: **эластики Эйлера**.

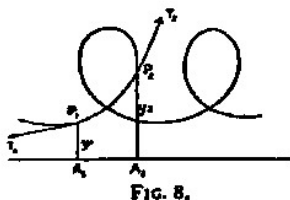
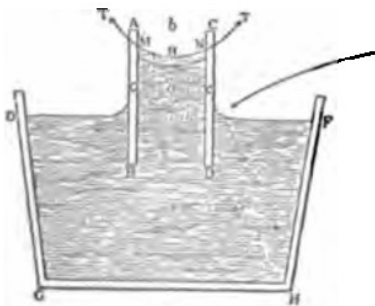


# Эскизы из книги Л. Эйлера



## 1807: Пьер Симон Лаплас

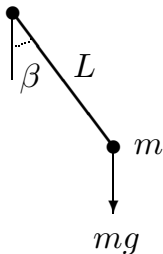
Форма поверхности капилляра  
между вертикальными плоскостями



Рисунки Дж.Максвелла (Британская Энциклопедия, 1890 г.)

## 1859: Густав Роберт Кирхгофф

Кинетический (динамический) аналог эластик:  
математический маятник



$$\ddot{\beta} = -r \sin \beta, \quad r = \frac{g}{L}$$

1880: Л. Заалшютц

Первая явная параметризация эйлеровых эластик функциями  
Якоби:

L.Saalschütz, *О стержне, нагруженном действием боковой силы*,  
Лейпциг, 1880.

## 1906: Макс Борн

- Диссертация «Устойчивость упругих кривых на плоскости и в пространстве», Геттинген, 1906 г.  
(науч. рук. Д.Гильберт)

- Уравнения Эйлера  $\Rightarrow$

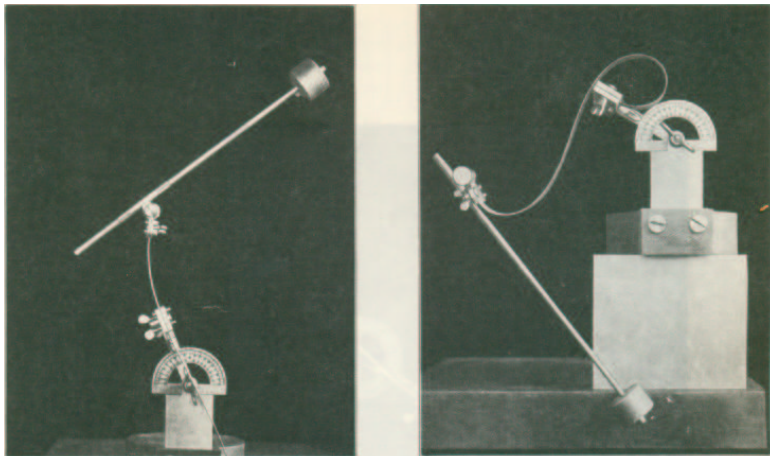
$$\dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta,$$

$$A\ddot{\theta} + B \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad A, B, \gamma = \text{const},$$

- эластика без точек перегиба  $\Rightarrow$  **устойчивость**,
- эластика с точками перегиба  $\Rightarrow$  численное исследование сопряженных точек,
- чертежи эластик на основе приближенных вычислений.

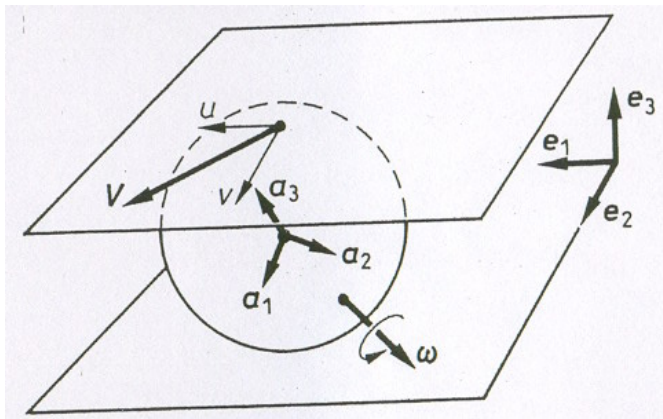
## 1906: Макс Борн

Эксперименты с упругими стержнями:



## 1993: Велимир Джурджевич

При оптимальном качении сферы по плоскости без прокручивания и проскальзывания, сфера катится по эластике



## 1993: Роджер Брокетт и Лийи Даи

Эйлеровы эластики — проекции геодезических в нильпотентной субримановой задаче с вектором роста (2,3,5):

$$\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2, \quad q \in \mathbb{R}^5, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min,$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$



## Приложения эйлеровых эластик

- теория упругости и сопротивление материалов (моделирование колонн, балок, упругих стержней),
- размер и форма в биологии (максимальная высота дерева, изгиб пальм под действием ветра, кривизна позвоночника, механика крыльев насекомых),
- аналоги сплайнов в теории аппроксимации (Г.Биркхоф, К.Р. де Бур, 1964),
- восстановление скрытых изображений в компьютерном видении (Д.Мамфорд, 1994),
- моделирование тонких оптических волокон и гибких соединений в микроэлектронике (В.Джеирезбхой, 2008),
- динамика оси вихря и кубическое уравнение Шредингера (Х.Хасимото, 1971),
- моделирование молекул ДНК (Р.С.Маннинг, 1996), ...

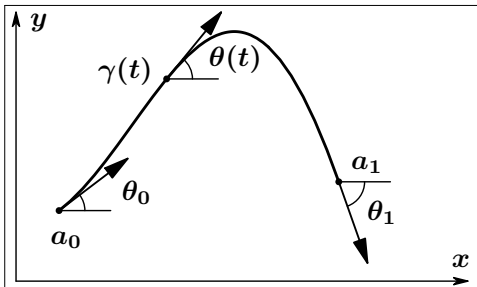
## Последователям Эйлера

S.S.Antman, The influence of elasticity on analysis: Modern developments, *Bulletin American Math. Society*, 1983, v. 9, No. 3, 267–291:

*«К счастью, Эйлер оставил несколько нерешенных вопросов для своих последователей»*

*«К сожалению, существует объемная и растущая литература, в которой делается плохо то, что Эйлер делал хорошо.»*

## Задача Эйлера: Координаты в $\mathbb{R}^2 \times S^1$



- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in S^1$ ,
- $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, t_1]$ ,
- $a_0 = (x_0, y_0)$ ,  $a_1 = (x_1, y_1)$ ,
- $v_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ ,  $v_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ .

## Задача оптимального управления

$$\dot{x} = \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$q = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_{\theta}^1, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = q_0 = (x_0, y_0, \theta_0), \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), \quad t_1 \text{ фиксировано.}$$

$$k^2 = \dot{\theta}^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Допустимые управления  $u(t) \in L_2[0, t_1]$ ,  
траектории  $q(t) \in AC[0, t_1]$ .

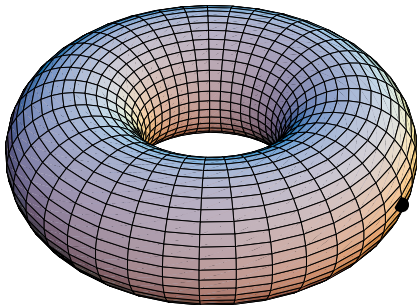
## Непрерывные симметрии и нормализация условий задачи

- Параллельные переносы в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$
- Повороты в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow \theta_0 = 0$
- Гомотетии в  $\mathbb{R}^2$   $\Rightarrow t_1 = 1$

## Множество достижимости

$$q_0 = (0, 0, 0), \quad t_1 = 1$$

$$\mathcal{A}_{q_0}(t_1) = \{(x, y, \theta) \mid x^2 + y^2 < 1 \ \forall \theta \in S^1 \text{ или } (x, y, \theta) = (1, 0, 0)\}.$$



Далее:  $q_1 \in \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$

## Существование оптимальных управлений

$$\dot{q} = X_1(q) + u X_2(q), \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R} \text{ неограничено}$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min,$$

- Общая теорема существования (Л. Чезари):  
 $\exists$  оптимальное  $u(t) \in L_2$
- Переход к задаче быстродействия и компактификация пространства управлений (А.Сарычев, Д.Торрес):  
оптимальное  $u(t) \in L_\infty$
- $\Rightarrow$  применим принцип максимума Понтрягина

## Принцип максимума Понтрягина в инвариантной форме

$$\dot{q} = X_1(q) + uX_2(q), \quad q \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad u \in \mathbb{R}, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} u^2 dt \rightarrow \min$$

- $T_q M = \text{span}(X_1(q), X_2(q), X_3(q)), \quad X_3 = [X_1, X_2]$
- $T_q^* M = \{(h_1, h_2, h_3)\}, \quad h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \quad \lambda \in T^* M$
- Гамильтоновы векторные поля  $\vec{h}_i \in \text{Vec}(T^* M)$
- $h_u^\nu = \langle \lambda, X_1 + uX_2 \rangle + \frac{\nu}{2} u^2 = h_1(\lambda) + u h_2(\lambda) + \frac{\nu}{2} u^2$

### Теорема (ПМП)

$u(t)$  и  $q(t)$  оптимальны  $\Rightarrow \exists \lambda_t \in T_{q(t)}^* M, \nu \leq 0$ :

$$(1) \quad \dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \vec{h}_1(\lambda_t) + u(t) \vec{h}_2(\lambda_t),$$

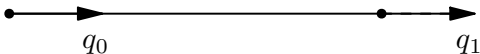
$$(2) \quad h_{u(t)}^\nu(\lambda_t) = \max_{v \in \mathbb{R}} h_v^\nu(\lambda_t),$$

$$(3) \quad (\nu, \lambda_t) \neq 0, \quad t \in [0, t_1].$$



## Аномальные экстремальные траектории

$$\nu = 0 \Rightarrow u(t) \equiv 0 \Rightarrow \theta \equiv 0, \quad x = t, \quad y \equiv 0$$



$$J = 0 = \text{min} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  аномальные экстремальные траектории  
оптимальны при  $t \in [0, t_1]$

**Единственная** траектория из  $q_0 = (0, 0, 0)$  в  $(t_1, 0, 0) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(t_1)$ .

## Гамильтонова система ПМП в нормальном случае

$\nu = -1 \Rightarrow$  **неединственность** экстремальных траекторий

Гамильтонова система:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -h_2 h_3, & \dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{h}_2 &= h_3, & \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{h}_3 &= h_1 h_2, & \dot{\theta} &= h_2 \end{aligned}$$

Полная интегрируемость по Лиувиллю:

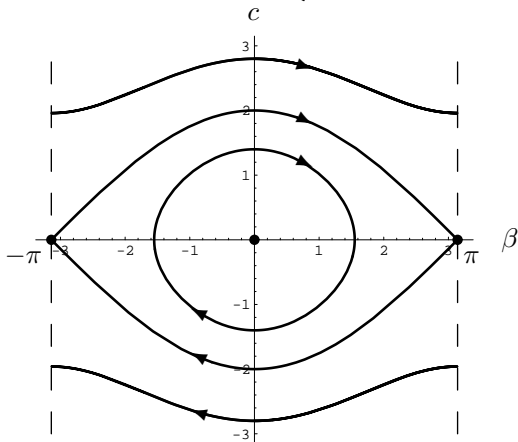
$\exists$  3 независимых интеграла в инволюции

$$h_1^2 + h_3^2 = r^2 \equiv \text{const} \Rightarrow h_1 = -r \cos \beta, h_3 = -r \sin \beta$$

# Уравнение маятника

Кинетический аналог Кирхгоффа

$$\ddot{\beta} = -r \sin \beta \iff \begin{cases} \dot{\beta} = c, \\ \dot{c} = -r \sin \beta \end{cases}$$



## Параметризация экстремальных траекторий функциями Якоби

$$\sin \frac{\theta_t}{2} = k \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t) - k \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t),$$

$$\cos \frac{\theta_t}{2} = \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi_t) + k^2 \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi_t),$$

$$\begin{aligned} x_t = & \frac{2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) (E(\sqrt{r}\varphi_t) - E(\sqrt{r}\varphi)) \\ & + \frac{4k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) (\operatorname{cn} \sqrt{r}\varphi - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) \\ & + \frac{2k^2}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}^2(\sqrt{r}\varphi) (\sqrt{r}t + E(\sqrt{r}\varphi) - E(\sqrt{r}\varphi_t)) - t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t = & \frac{2k}{\sqrt{r}} (2 \operatorname{dn}^2(\sqrt{r}\varphi) - 1) (\operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi) - \operatorname{cn}(\sqrt{r}\varphi_t)) \\ & - \frac{2k}{\sqrt{r}} \operatorname{sn}(\sqrt{r}\varphi) \operatorname{dn}(\sqrt{r}\varphi) (2(E(\sqrt{r}\varphi_t) - E(\sqrt{r}\varphi)) - \sqrt{r}t). \end{aligned}$$

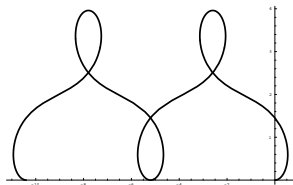
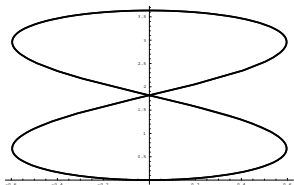
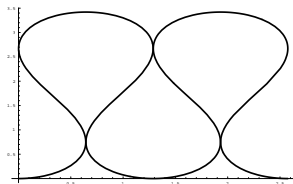
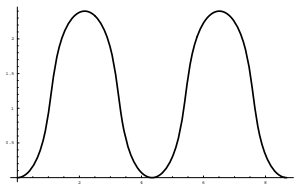
# Эйлеровы эластики

## Энергия маятника

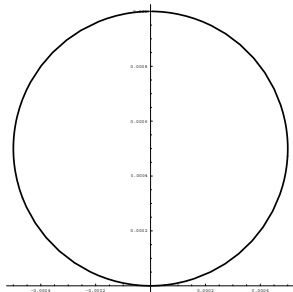
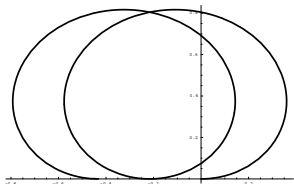
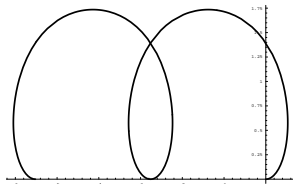
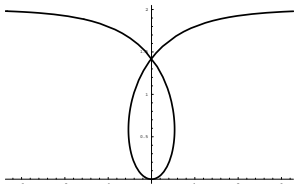
$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - r \cos(\theta - \gamma) \equiv \text{const} \in [-r, +\infty)$$

- $E = -r \neq 0 \Rightarrow$  прямые
- $E \in (-r, r), r \neq 0 \Rightarrow$  перегибные эластики
- $E = r \neq 0, \theta - \gamma = \pi \Rightarrow$  прямые
- $E = r \neq 0, \theta - \gamma \neq \pi \Rightarrow$  критические эластики
- $E > r \neq 0 \Rightarrow$  бесперегибные эластики
- $r = 0 \Rightarrow$  прямые и окружности

# Перегибные эластики



# Бесперегибные эластики



# Оптимальность нормальных экстремальных траекторий

$q(t)$  **локально** оптимальна:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \tilde{q} : \quad \|\tilde{q} - q\|_C < \varepsilon, \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \\ J(q) \leq J(\tilde{q})$$

Устойчивая эластика  $(x(t), y(t))$

$q(t)$  **глобально** оптимальна:

$$\forall \tilde{q} : \quad q(0) = \tilde{q}(0), \quad q(t_1) = \tilde{q}(t_1) \quad \Rightarrow \quad J(q) \leq J(\tilde{q})$$

Эластика  $(x(t), y(t))$  минимальной упругой энергии



## Потеря оптимальности

Теорема (Усиленное условие Лежандра)

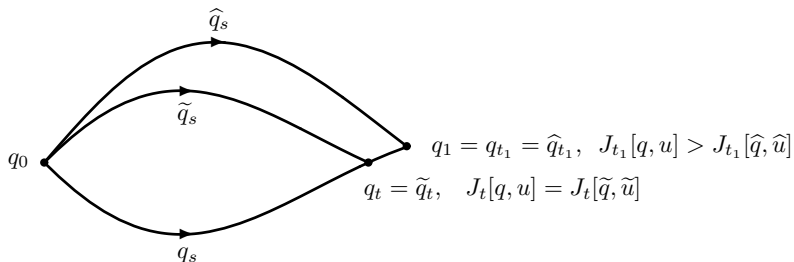
$$\frac{\partial^2 h_u^{-1}}{\partial u^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{малые дуги } q(t) \text{ локально оптимальны.}$$

Время разреза:

$$t_{\text{cut}}(q) = \sup\{t > 0 \mid q(s), s \in [0, t], \text{ оптимальна}\}.$$

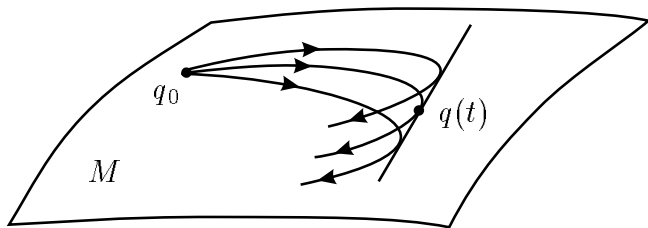
# Глобальная причина потери оптимальности: Точка Максвелла

Точка Максвелла  $q_t$ :  $\exists \tilde{q}_s \neq q_s : q_t = \tilde{q}_t, J_t[q, u] = J_t[\tilde{q}, \tilde{u}]$



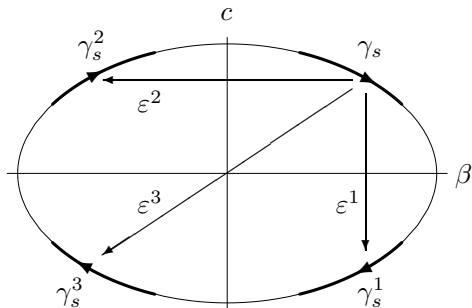
# Локальная причина потери оптимальности: Сопряженная точка

$q(t) \in$  огибающей семейства экстремалей



$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\text{Max}}, t_{\text{conj}})$$

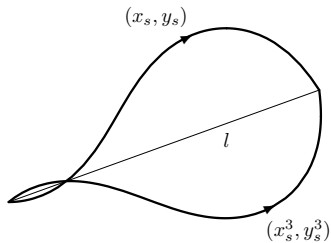
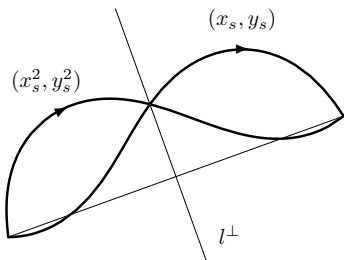
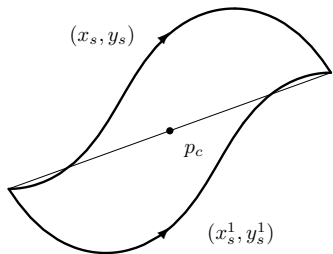
Отражения в фазовом цилиндре маятника  $\ddot{\beta} = -r \sin \beta$



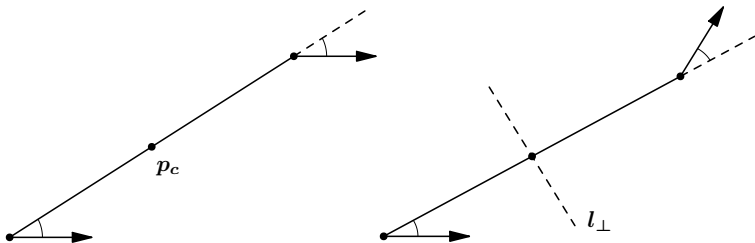
Группа симметрий прямоугольника  $D_2 = \{\text{Id}, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$

	$\epsilon^1$	$\epsilon^2$	$\epsilon^3$
$\epsilon^1$	ld	$\epsilon^3$	$\epsilon^2$
$\epsilon^2$	$\epsilon^3$	ld	$\epsilon^1$
$\epsilon^3$	$\epsilon^2$	$\epsilon^1$	ld

# Действие отражений $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ на элаستيку



# Неподвижные точки отражений $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$



## Точки Максвелла, соответствующие отражениям

Неподвижные точки отражений  $\varepsilon^i$ :

$$t = t_{\varepsilon^i}^n, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Верхняя оценка времени разреза:

$$t_{\text{cut}} \leq \min(t_{\varepsilon^1}^1, t_{\varepsilon^2}^1) \leq T,$$

$T$  — период колебания маятника

## Сопряженные точки

$$\text{Exp}_t : T_{q_0}^* M \rightarrow M, \quad \lambda_0 \mapsto q(t) = \pi \circ e^{t\vec{h}}(\lambda_0)$$

$q(t)$  — сопряж. точка  $\iff q(t)$  — критическое значение  $\text{Exp}_t$

$$\text{Exp}_t(h_1, h_2, h_3) = (x, y, \theta)$$

$$\frac{\partial(x, y, \theta)}{\partial(h_1, h_2, h_3)} = 0$$

### Теорема

- *Бесперегибные эластики*  $\Rightarrow$  *нет сопряженных точек*  
(М. Борн, 1906)
- *Перегибные эластики*  $\Rightarrow t_{\text{conj}}^1 \in [t_{\epsilon^1}^1, t_{\epsilon^2}^1]$



# Локальная оптимальность нормальных экстремальных траекторий

$q(t) = (x(t), y(t), \theta(t))$  нормальная экстремальная траектория

## Теорема (Условие Якоби)

- $(0, t_1]$  не содержит сопряженных точек  $\Rightarrow q(t)$  локально оптимальна;
- $(0, t_1)$  содержит сопряженные точки  $\Rightarrow q(t)$  не является локально оптимальной.

Локальная оптимальность теряется в  
первой сопряженной точке

## Устойчивость эйлеровых эластиков

$t_{\text{conj}}^1 \in (0, +\infty]$  первая сопряженная точка

- $t_1 < t_{\text{conj}}^1 \Rightarrow$  устойчивость
- $t_1 > t_{\text{conj}}^1 \Rightarrow$  неустойчивость
- прямые, окружности, бесперегибные эластики **устойчивы**

# Устойчивость перегибных эластик

Потеря устойчивости в **первой сопряженной точке**

## Теорема

- $t_1 \leq \frac{1}{2}T \Rightarrow$  *устойчивость*
- $t_1 \geq \frac{3}{2}T \Rightarrow$  *неустойчивость*

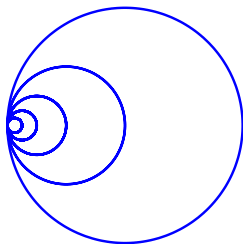
*В частности:*

- *нет точек перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость*
- *1 или 2 точки перегиба  $\Rightarrow$  устойчивость или неустойчивость*
- *3 точки перегиба  $\Rightarrow$  неустойчивость*

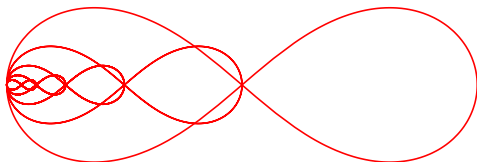
Замкнутые эластики:

$$x(0) = x(t_1), y(0) = y(t_1), \theta(0) = \theta(t_1)$$

Нестягиваемые эластики (все устойчивы):



Стягиваемые эластики (устойчива только однократная 8-ка):



Решение задачи Эйлера  
для периодических граничных условий:  
 $8 > 0$

Решение задачи Эйлера  
для периодических граничных условий:  
 $8 > 0$

- $\frac{8}{0} = \infty ?$

Решение задачи Эйлера  
для периодических граничных условий:  
 $8 > 0$

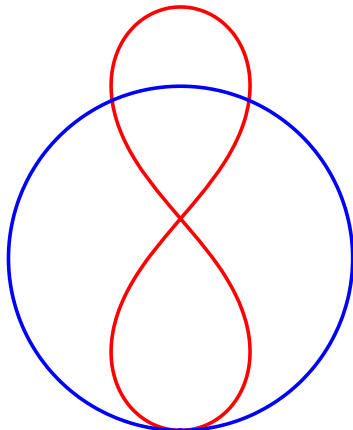
- $\frac{8}{0} = \infty ?$

- $\frac{8}{0} \approx 2.8 !$

# Решение задачи Эйлера для периодических граничных условий:

$$8 > 0$$

- $\frac{8}{0} = \infty ?$
- $\frac{8}{0} \approx 2.8 !$
- $\frac{J_8}{J_0} \approx 2.8$





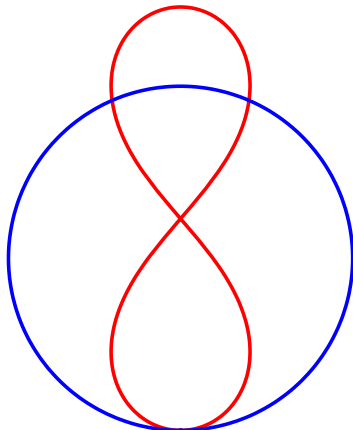
# Решение задачи Эйлера для периодических граничных условий:

$$8 > 0$$

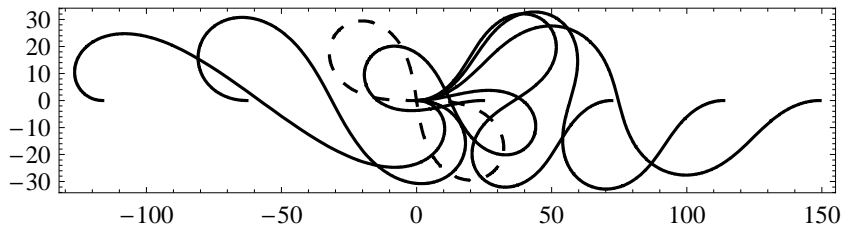
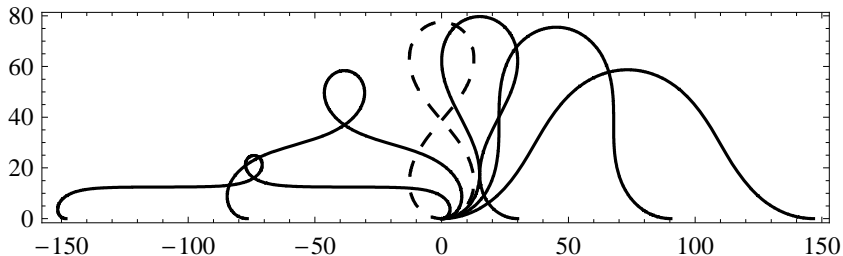
- $\frac{8}{0} = \infty ?$
- $\frac{8}{0} \approx 2.8 !$
- $\frac{J_8}{J_0} \approx 2.8$

## Теорема

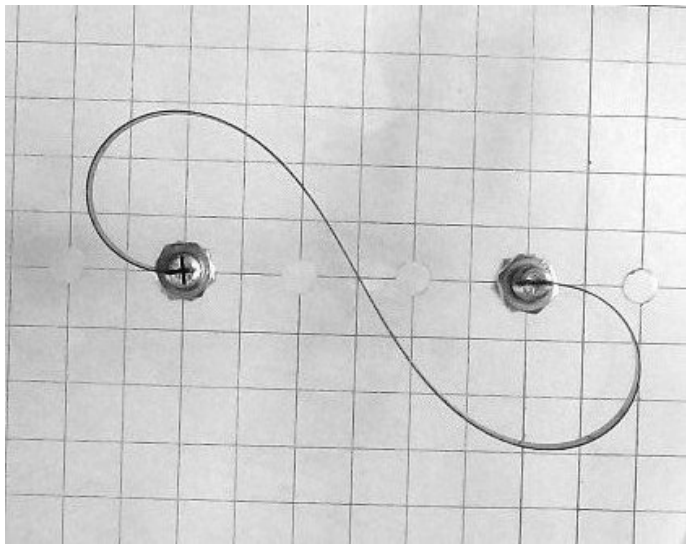
- *Окружность оптимальна глобально*
- *Восьмерка оптимальна локально*



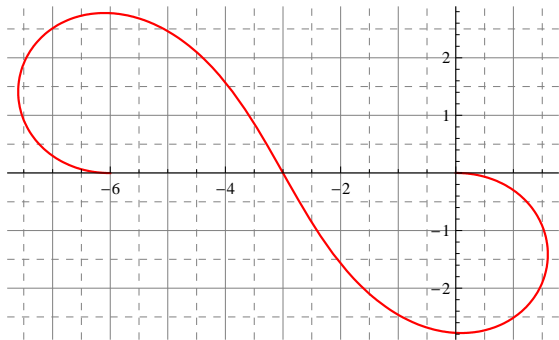
# Потеря устойчивости в однопараметрических семействах эластик



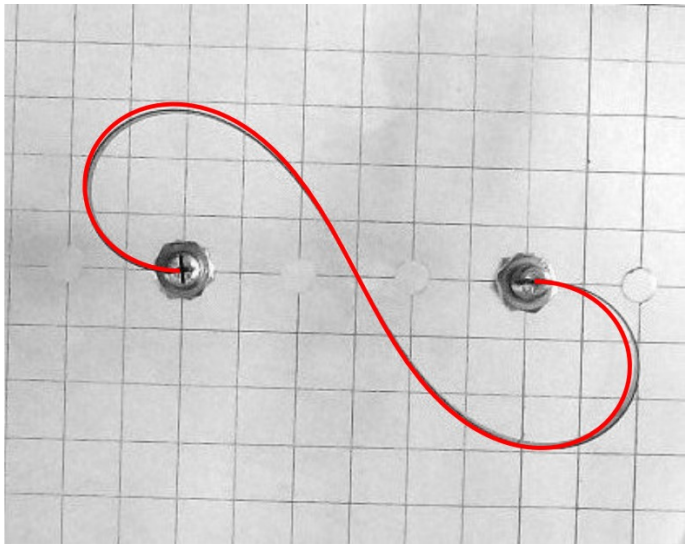
## Эксперименты с эластичими (совместная работа с С.В.Левяковым)



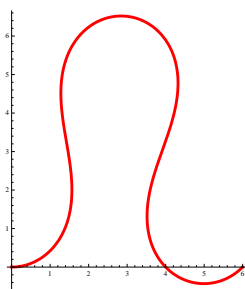
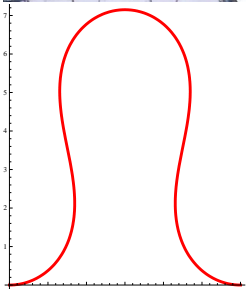
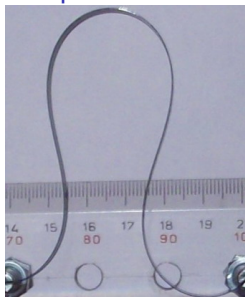
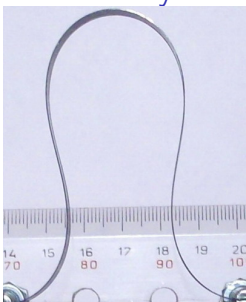
## Чертеж элаستيки (Mathematica)



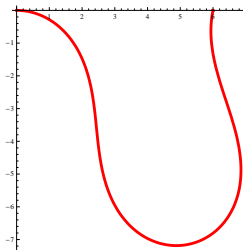
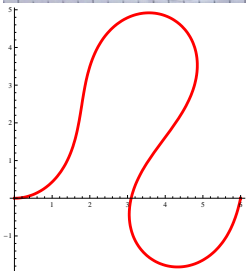
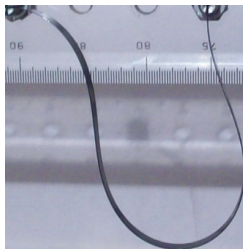
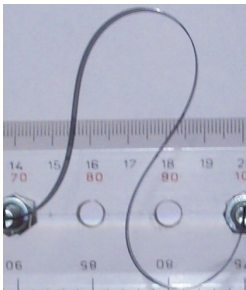
# Сравнение физической и математической эластик



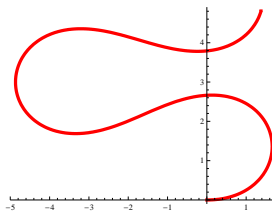
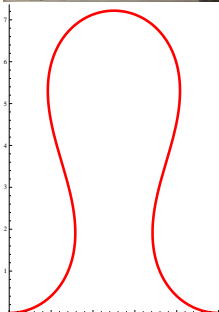
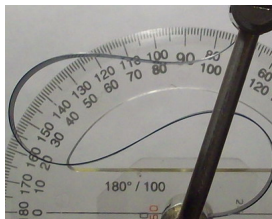
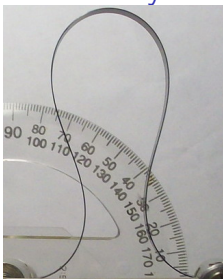
# Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А



# Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия А

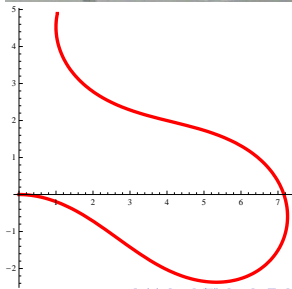
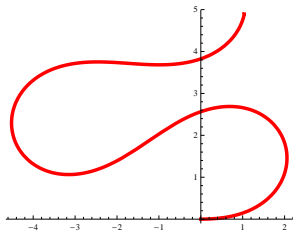
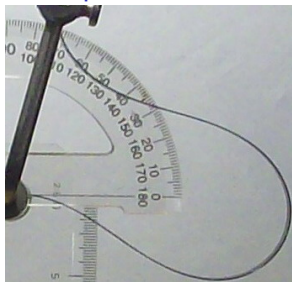
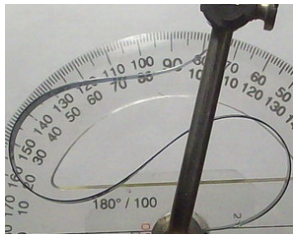


# Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В

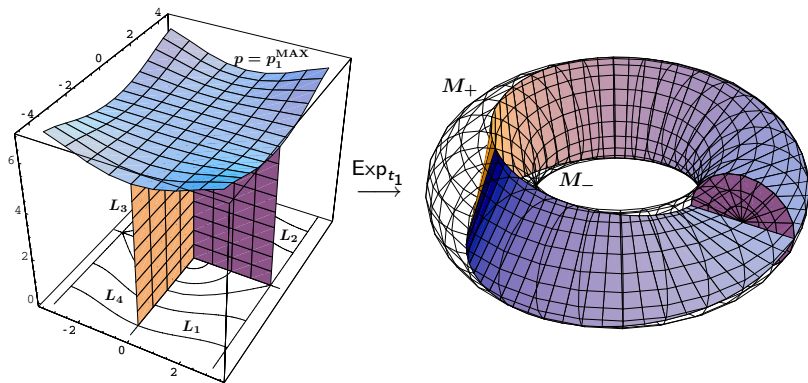




# Однопараметрическое семейство эластик с потерей устойчивости: Серия В



# Глобальная структура экспоненциального отображения



$\text{Exp}_{t_1} : L_1, L_3 \rightarrow M_+$  диффеоморфизмы

$\text{Exp}_{t_1} : L_2, L_4 \rightarrow M_-$  диффеоморфизмы

## Конкурирующие эластики

$$q^1(t) = \text{Exp}_t(\lambda^1)$$
$$\lambda^1 \in L_1$$

$$? : J[q^1(\cdot)] \leq J[q^2(\cdot)]$$

$\Rightarrow$  анимации ...


$$q_1 \in M_+$$

$$q^2(t) = \text{Exp}_t(\lambda^2)$$
$$\lambda^2 \in L_3$$

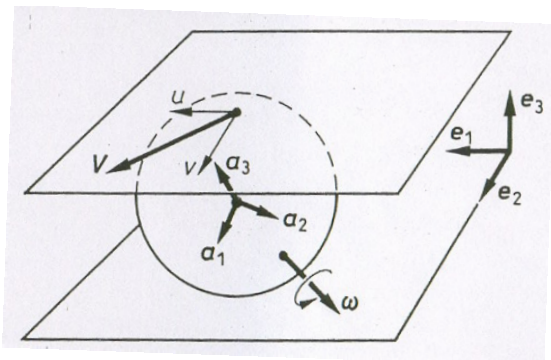
## Задача об оптимальном качении сферы по плоскости

**Дано:**  $A, B \in \mathbb{R}^2$ , реперы  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**Найти:**  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , — кратчайшую кривую т.ч.:

$\gamma(0) = A$ ,  $\gamma(t_1) = B$ ,

при качении сферы по кривой  $\gamma(t)$  ориентация сферы переходит из  $(a_1, a_2, a_3)$  в  $(b_1, b_2, b_3)$ .



# Оптимальное качение сферы по плоскости: Задача оптимального управления

$$\dot{x}_1 = u_1,$$

$$\dot{x}_2 = u_2,$$

$$\dot{R} = u_1 R(E_{31} - E_{13}) + u_2 R(E_{23} - E_{32}),$$

$$Q = (x_1, x_2, R) \in G = \mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$Q(0) = Q_0, \quad Q(t_1) = Q_1,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min.$$

Инвариантная задача на группе Ли  $\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$

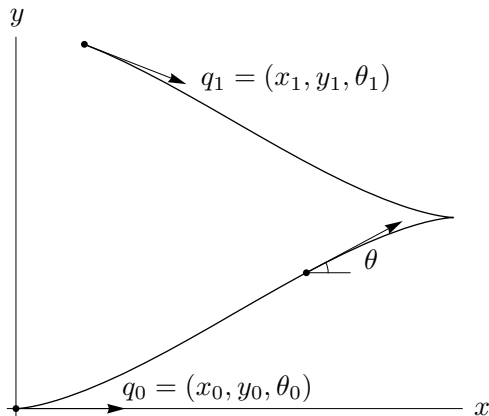
## Результаты по задаче об оптимальном качении сферы по плоскости

- Экстремальные кривые — эластики Эйлера (В.Джурджевич),
- Непрерывные и дискретные симметрии,
- Описание поверхностей Максвелла алгебраическими уравнениями,
- Локальное описание сопряженных точек и точек Максвелла.

Гипотеза А.А.Аграчева:

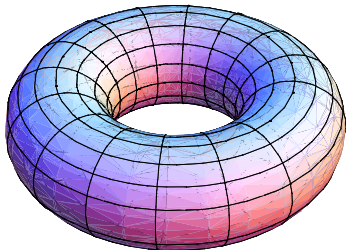
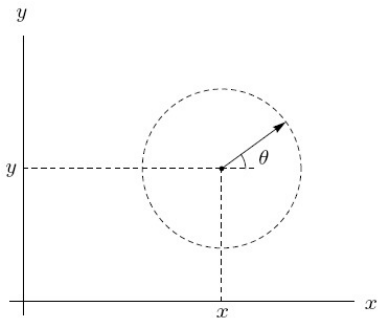
субриманова сфера имеет счетную стратификацию

# Задача об оптимальном движении машины на плоскости



$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2 \dot{\theta}^2} dt \rightarrow \min$$

## Пространство состояний — гладкое многообразие



$$G = \{q = (x, y, \theta) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1\} = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S^1$$



## Пространство состояний — группа движений плоскости

- $q = (0, 0, \theta)$  — поворот плоскости  $\mathbb{R}^2$  на угол  $\theta$
- $q = (x, y, 0)$  — параллельный перенос  $\mathbb{R}^2$  на вектор  $(x, y)$
- $q = (x, y, \theta)$  — поворот  $\mathbb{R}^2$  на угол  $\theta$  + параллельный перенос  $\mathbb{R}^2$  на вектор  $(x, y)$
- $q_1 = (x_1, y_1, \theta_1), q_2 = (x_2, y_2, \theta_2) \Rightarrow$   
 $q_2 \cdot q_1 = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta}):$   
 $\tilde{x} = x_2 + x_1 \cos \theta_2 - y_1 \sin \theta_2,$   
 $\tilde{y} = y_2 + x_1 \sin \theta_2 + y_1 \cos \theta_2,$   
 $\tilde{\theta} = \theta_2 + \theta_1$
- $q = (x, y, \theta) \Rightarrow$   
 $q^{-1} = (-x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta, -\theta)$

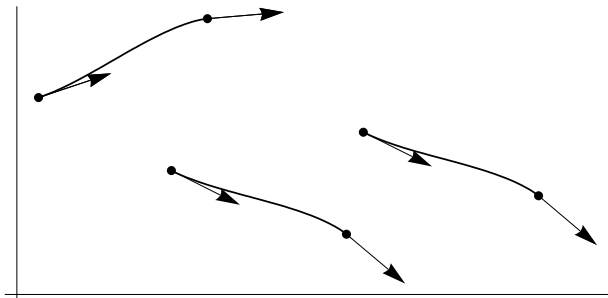
## Пространство состояний $G$ — группа Ли

- $G$  — гладкое многообразие:  
локальные координаты  $q = (x, y, \theta)$
- $G$  — группа:  
 $q_2 \cdot q_1$  — композиция движений плоскости  
 $q^{-1}$  — обратное движение плоскости
- Групповые операции гладкие в локальных координатах
- $\Rightarrow G$  — группа Ли
- $G = SE(2)$

## Инвариантная задача на группе Ли

$q(t) \in G$  — оптимальное решение  $\Rightarrow$

$\forall \hat{q} \in G \quad \tilde{q}(t) = \hat{q} \cdot q(t)$  — оптимальное решение



# Группы Ли

- $G$  — группа Ли:

- 1)  $G$  — гладкое многообразие,
- 2)  $G$  — группа,
- 3) групповые операции гладкие.

- Примеры групп Ли:

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ ,
- $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{\theta \in [0, 2\pi] / 0 \sim 2\pi\}$ ,
- $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \mid \theta_i \in S^1\}$ ,
- $GL(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det X \neq 0\}$ ,
- $SO(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^T = X^{-1}, \det X = 1\}$ ,
- $SE(n) = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid A \in SO(n), v \in \mathbb{R}^n \right\}$ ,
- $SU(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \overline{X^T} = X^{-1}, \det X = 1\}$ .

# Инвариантные задачи оптимального управления на группах Ли

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q, u), \quad q \in G \text{ — группа Ли,} \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \\ q(0) &= q_0, \quad q(t_1) = q_1 \\ J &= \int_0^{t_1} g(q, u) dt \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Динамика  $f(q, u)$  и функционал  $J$  инвариантны относительно сдвигов на  $G$ :

$$\begin{aligned}q(t) \in G \text{ — оптимальная траектория} &\Rightarrow \\ \forall \hat{q} \in G \quad \tilde{q}(t) = \hat{q} \cdot q(t) \text{ — оптимальная траектория}\end{aligned}$$

## Примеры инвариантных задач на группах Ли

- Управление вращениями твердого тела:  $G = SO(3)$ ,
- Задача Дидоны:  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ ,
- Задача об эластиках на плоскости или в пространстве:  
 $G = SE(2)$  или  $SE(3)$ ,
- Оптимальное качение сферы по плоскости:  
 $G = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$ ,
- Управление трехуровневой квантовой системой:  
 $G = SU(3)$ ,
- Управление спиновой системой из  $n$  частиц:  $G = SU(2^n)$ ,
- Моделирование квантового компьютера:  $G = SU(n)$ .

# Исследование инвариантных задач на группах Ли: сдвиг начальной точки

- $q(t)$  :

$$q(0) = \text{Id} \text{ — единичный элемент } G, \quad q(t_1) = q_1$$

- $\tilde{q}(t) = ?$  :

$$\tilde{q}(0) = \tilde{q}_0, \quad \tilde{q}(t_1) = \tilde{q}_1$$

- $q(t) = \tilde{q}_0^{-1} \cdot \tilde{q}(t)$  :

$$q(0) = \text{Id}, \quad q(t_1) = \tilde{q}_0^{-1} \cdot \tilde{q}_1,$$

$$\tilde{q}(t) = \tilde{q}_0 \cdot q(t).$$

## Принцип максимума Понтрягина

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$
$$\int_0^{t_1} g(q, u) dt \rightarrow \min.$$

$q(t)$  оптимальна  $\Rightarrow \exists \psi(t) \in \mathbb{R}^n, \quad n = \dim G:$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial q}(\psi, q), & \psi \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, q), & q \in G, \end{cases}$$

$$H(\psi, q) = \max_u (\psi f(q, u) - g(q, u))$$



# Гамильтонова система принципа максимума для инвариантных задач на группах Ли

Замена сопряженных переменных  $\varphi = \varphi(\psi, q)$ :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = K(\varphi), & \varphi \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{q} = L(\varphi, q), & q \in G, \end{cases}$$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , где  $\varphi_i(\psi, q)$  линейные по  $\psi$  гамильтонианы, соответствующие полям  $f$  и их коммутаторам.

Интегрирование гамильтоновой системы ПМП:

- 1)  $\varphi = \varphi(t)$ ,
- 2)  $q = q(t)$ .

## Симметрии гамильтоновой системы ПМП

$$\dot{\varphi} = K(\varphi), \quad (1)$$

$$\dot{q} = L(\varphi, q). \quad (2)$$

Диффеоморфизм  $F(\varphi, q) = (\Phi, Q)$  — симметрия (1), (2), если:

$$(\varphi(t), q(t)) \text{ решение} \quad \Rightarrow \quad (\Phi(t), Q(t)) \text{ решение.}$$

Симметрия подсистемы (1):

$$M(\varphi) = \Phi.$$

Продолжение до симметрии полной системы (1), (2):

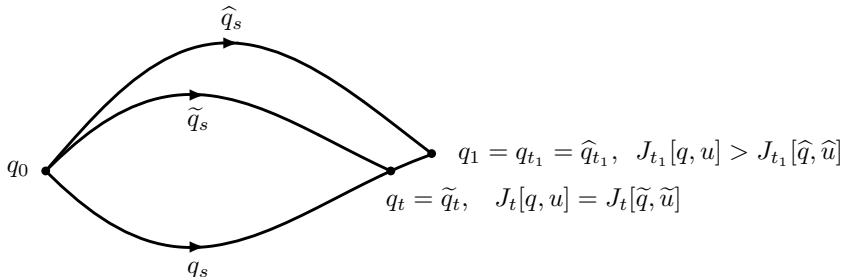
$$\Phi = M(\varphi), \quad Q = N(q)$$

# Непрерывные и дискретные симметрии гамильтоновой системы ПМП

- Группа симметрий:

$$\text{Sym} = \{F(\varphi, q) \text{ — симметрии гамильтоновой системы}\},$$

- Непрерывные симметрии: понижение порядка системы,
- Дискретные симметрии: исследование оптимальности экстремальных траекторий (точки Максвелла).



# Оптимальное движение машины на плоскости: Задача оптимального управления

$$\dot{x} = u \cos \theta,$$

$$\dot{y} = u \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = v,$$

$$q = (x, y, \theta) \in G = \text{SE}(2),$$

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$

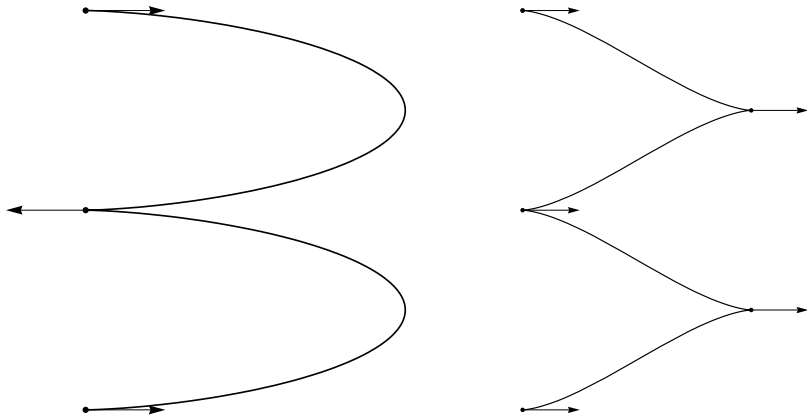
$$I = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \alpha^2 \dot{\theta}^2} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + \alpha^2 v^2} dt \rightarrow \min .$$

Растяжения плоскости  $(x, y) \Rightarrow \alpha = 1$

# Результаты по задаче об оптимальном движении машины по плоскости

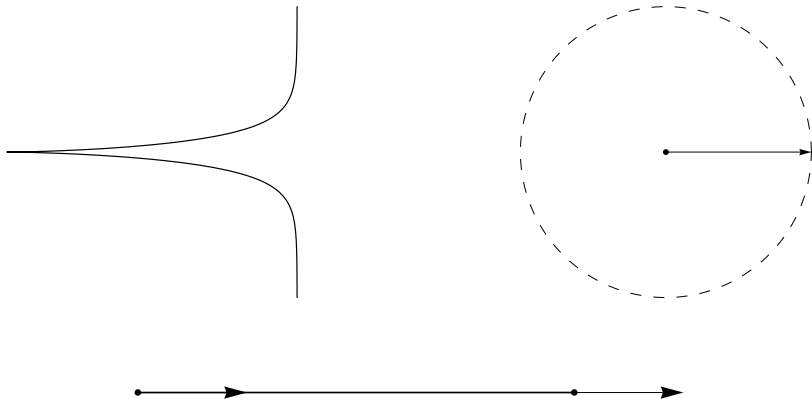
- Существование оптимальных траекторий,
- Параметризация экстремальных траекторий (ПМП),
- Описание оптимальных траекторий:
  - Общие граничные условия  $\Rightarrow$  сведение к системам алгебраических уравнений,
  - Специальные граничные условия  $\Rightarrow$  явные решения,
- Структура оптимального синтеза и множества Максвелла,
- Субримановы сферы,
- Приложения: восстановление поврежденных изображений, Параллельный программный комплекс для восстановления изображений.

# Оптимальное движение машины по плоскости: экстремальные траектории общего положения



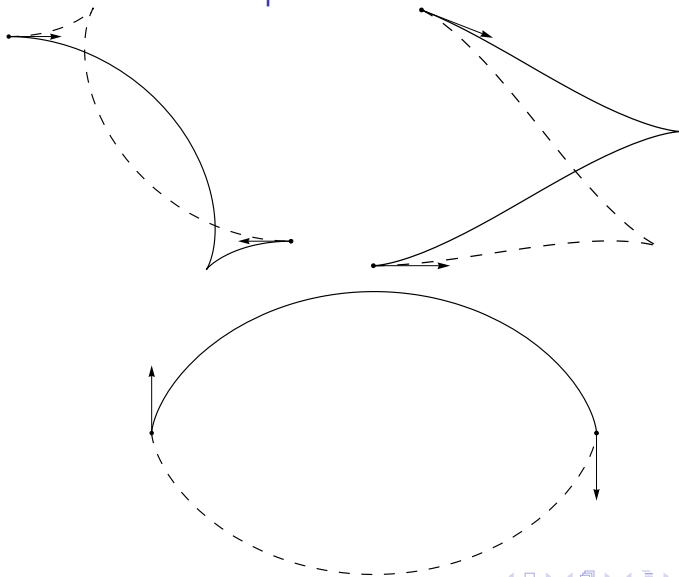
Параметризация функциями Якоби  $cn$ ,  $sn$ ,  $dn$ ,  $E$ .

# Оптимальное движение машины по плоскости: экстремальные траектории специального вида



Параметризация элементарными функциями.

# Точки Максвелла на экстремальных траекториях: потеря оптимальности



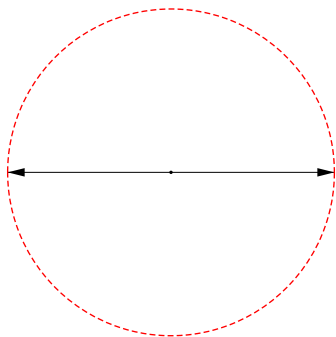


## Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = 0$$

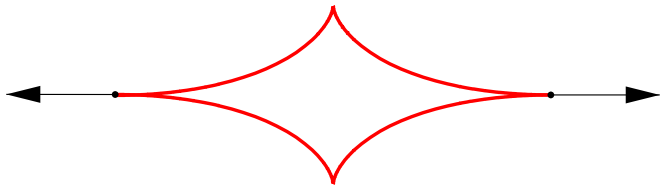


$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 \neq 0$$



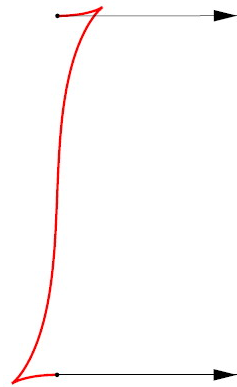
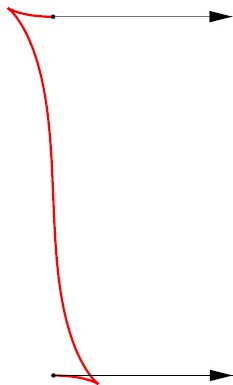
## Оптимальные траектории

$$x_1 \neq 0, \quad y_1 = 0, \quad \theta_1 = \pi$$



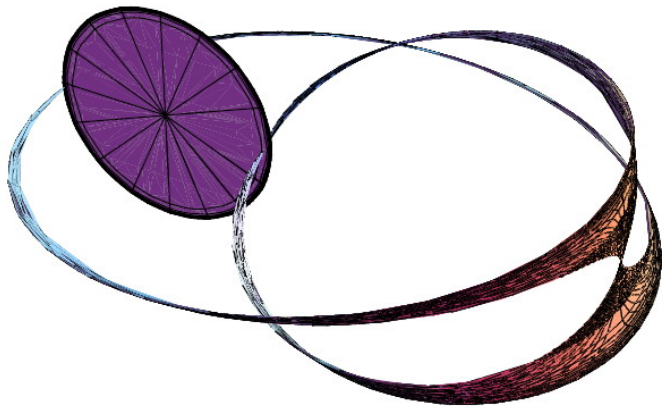
## Оптимальные траектории

$$x_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \theta_1 = 0$$



## Множество Максвелла

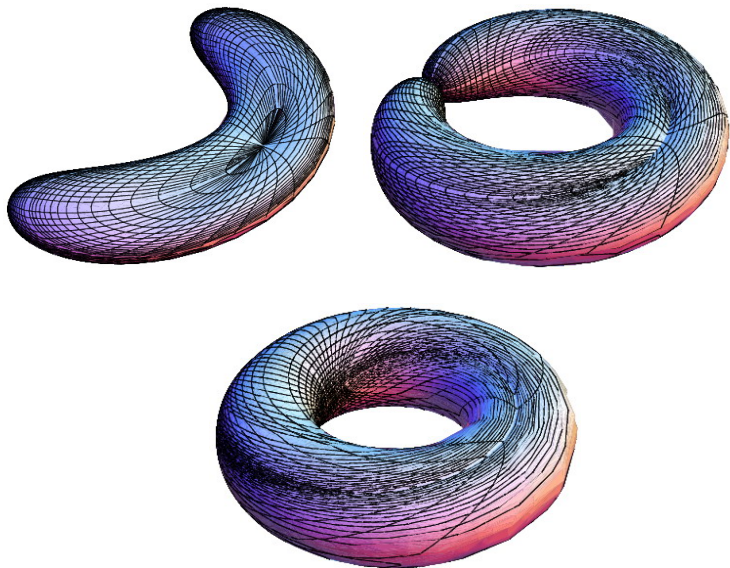
$\text{Max} = \{q_1 \in G \mid \exists > 1 \text{ оптимальной траектории } q(\cdot) : q(t_1) = q_1\}$



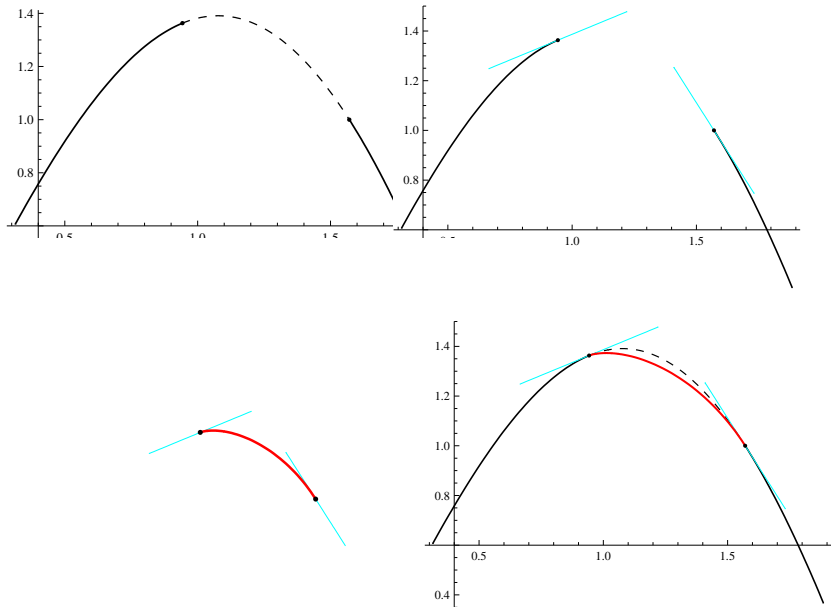
## Субриманова метрика и сферы

- $d(q_0, q_1) = \inf\{l(q(\cdot)) \mid q(0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$
- $S_R = \{q \in G \mid d(q_0, q) = R\}$
- $R = 0 \Rightarrow S_R = \{q_0\}$
- $R \in (0, \pi) \Rightarrow S_R \cong S^2$
- $R = \pi \Rightarrow S_R \cong S^2 / \{N = S\}$
- $R > \pi \Rightarrow S_R \cong \mathbb{T}^2$

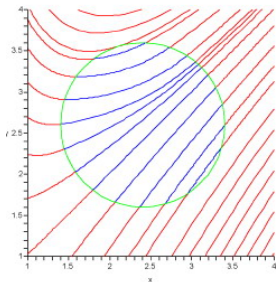
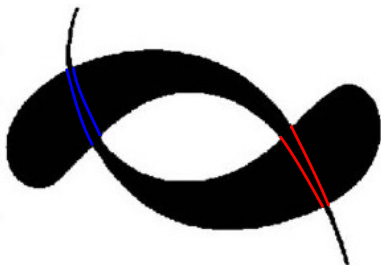
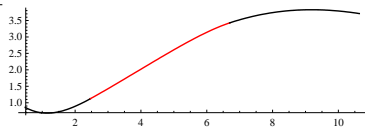
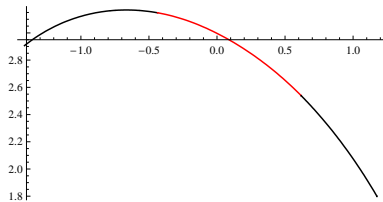
# Глобальная структура субримановых сфер



# Приложения: Восстановление скрытого контура



# Приложения: Восстановление скрытого контура





# Параллельный ПК OptimalInpainting для восстановления поврежденных изображений

The screenshot displays the OptimalInpainting software interface, which is used for image restoration. The main window is titled "OptimalInpainting" and contains the following settings:

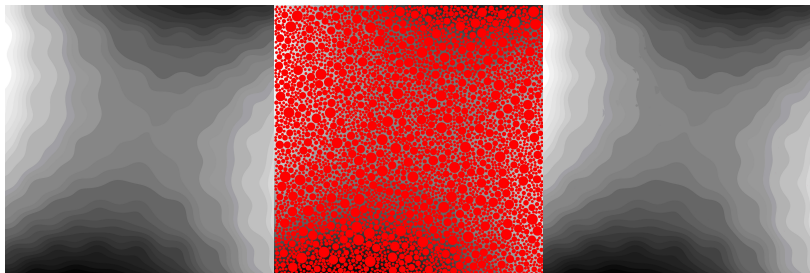
- Equation:  $F(x,y) = (6x - 170x - 1) - y^2 - 127\cos(x - 57\cos(x - 5)/3 - 3\cos(y - 1)/\cos(y - 1) + 6^2y + \sqrt{x^3(x - 57(x - 5) + 30)})$
- Coordinates:  $x_{min} = -5$ ,  $x_{max} = 5$ ,  $y_{min} = -5$ ,  $y_{max} = 5$
- Resolution:  $x\_pixels = 1600$ ,  $y\_pixels = 1600$
- Isophotes: 150, Mode: W, Nodes: 4, Threads: 8
- Parameters:  $R_{min} = 0.001$ ,  $R_{max} = 0.6$ , DomainGoal = 1000
- Attempts: 100000, RminMeasure = 0.2
- Extended Settings: Time quantization = 20000, Recovered isophote Color Coefficient = 1.5, Alpha = 1, Epoxy = 0.009, Epstheta = 0.028
- Options:  Use Automatic Alpha Regulation,  Display Images
- Image recovered:
- Buttons: Create Image, Recover Image, Testing Generation, Testing Solving, Testing Recovery, Exit

The "Statistics" window shows the following performance metrics:

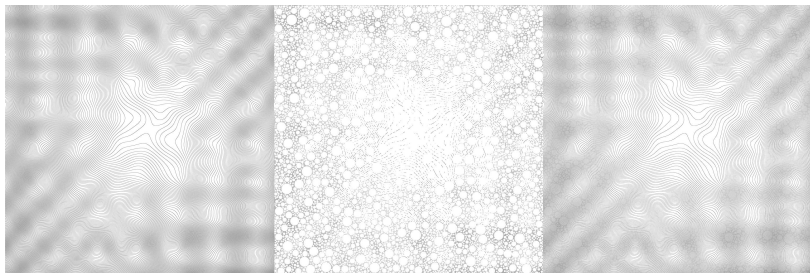
- Domain Constructed = 1000
- Original Creating Time = 55 sec
- Task Creating Time = 7 sec
- Solve Time = 5.15 sec
- Recovery Time = 351.57 sec
- Tasks = 2305
- Light Tasks = 323
- Heavy Tasks = 1982

The "Restored Boundary" window displays the restored boundary of the image, showing a complex pattern of lines and circles. The "Original" window shows the original image, the "Corrupted" window shows the image with missing data, and the "Restored" window shows the final restored image.

# Исходное, поврежденное и восстановленное полутонное изображение



# Исходное, поврежденное и восстановленное бинарное изображение



## Публикации

<http://www.botik.ru/PSI/CPRC/sachkov/>

- [1] Maxwell strata in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14 (2008), No. 2, 169–234, arXiv:0705.0614 [math.OC].
- [2] Conjugate points in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 14 (2008), No. 3, 409–439, arXiv:0705.1003 [math.OC].
- [3] Оптимальность эйлеровых эластик, *ДАН*, Т. 417, No. 1, ноябрь 2007, 23–25.
- [4] (с А.А.Ардентовым) Решение задачи Эйлера об эластике. *Автоматика и телемеханика*, 2009, No. 4, 78 – 88.
- [5] (с Левяковым С.В.) Устойчивость инфлекссионных эластик, центрированных в вершинах или точках перегиба // *Труды МИАН*, 2010, Т. 271, 187 – 203.

[6] (с А.А.Ардентовым) Параллельные алгоритмы и программы для моделирования эйлеровых эластик. *Программные продукты и системы*, No. 4, 2009 , 71–73.

[7] Симметрии и страты Максвелла и симметрии в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости. *Мат. Сборник*, 2010, Т. 201, N 7, С. 99–120.

[8] (с Маштаковым А.П.) Экстремальные траектории и точки Максвелла в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости, *Мат. сборник* (2011), принята к публикации.

[9] (с И.Моисеевым) Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 380–399, arXiv:0807.4731 [math.OC].

[10] Conjugate and cut time in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 16 (2010), 1018–1039, arXiv:0903.0727 [math.OC].

- [11] Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane, *ESAIM: COCV*, 17 (2011) *принята к публикации*, arXiv:0903.0727 [math.OC].
- [12] (с А.А.Ардентовым, В.М.Касимовым, А.П.Маштаковым) Восстановление изображений на основе вариационного принципа. *Программные продукты и системы*, No. 4, 2009, 126–127.
- [13] (с А.А.Ардентовым, А.П.Маштаковым) Параллельный алгоритм и программа восстановления изофот для поврежденных изображений // *Программные системы: теория и приложения*, 1(2010).
- [14] Теория управления на группах Ли. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007, т. 27, 5-59.
- [15] (с Аграчевым А.А.) *Геометрическая теория управления*. - М.: Физматлит, 2005.