

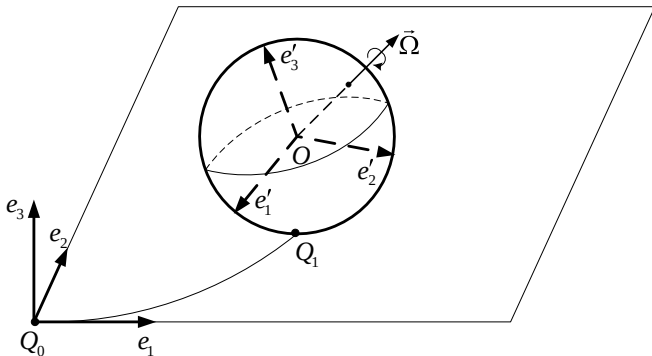
Об оптимальном качении шара по плоскости с прокручиванием, но без проскальзывания

И.Ю. Бесчастный

Исследовательский центр процессов управления
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский

Формулировка задачи

Шар катится по горизонтальной плоскости с прокручиванием, но без проскальзывания.



Неподвижный репер e_i , Подвижный репер e'_i ,
вектор угловой скорости $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$

Формулировка задачи

Состояние системы:

- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — точка касания сферы и плоскости,
- $R \in SO(3)$ — матрица ориентации сферы.

Задача: Перекатить сферу из начального состояния $Q_0 = (x_0, y_0, R_0)$ в конечное $Q_1 = (x_1, y_1, R_1)$ так, чтобы достигался минимум функционала действия:

$$\int_0^{t_1} \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

Возможные приложения

1. Приложения в механике и робототехнике;
2. Задача о качении шара без прокручивания и проскальзывания не решена;
3. Важная задача субримановой геометрии.

$SO(3)$ и $so(3)$

Группа Ли $SO(3) \ni R$:

$$SO(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det X = 1, X^T X = 1\}.$$

Алгебра Ли $so(3) \ni R^{-1}\dot{R}$:

$$so(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A^T = -A\}.$$

Скобка Ли:

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in so(3).$$

$so(3)$ изоморфно $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Задача оптимального управления

$$\dot{x} = -u_2, \quad \dot{y} = u_1, \quad \dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = (x, y, R) \in \mathbb{R}^2 \times SO(3), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$Q_0 = (x_0, y_0, R_0), \quad Q_1 = (x_1, y_1, R_1),$$

$$\int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} dt \rightarrow \min, \quad t_1 \text{ фиксировано.}$$

Субриманова задача

Левинвариантные векторные поля на $G = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$:

$$X_1 = e_2 + V_1, \quad X_2 = -e_1 + V_2, \quad X_3 = V_3,$$

где

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$V_1 = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = R \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задают распределение:

$$\Delta = \text{span}\{X_1, X_2, X_3\}.$$

Субриманова задача

Управляемая система

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q) + u_3 X_3(Q)$$

описывает допустимые кривые в G , т.е. липщицевы кривые, вектор скорости которых лежит в Δ для почти всех t .

Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt \rightarrow \min \iff \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} dt \rightarrow \min$$

Субриманова задача: Для заданного распределения Δ и метрики в нём найти допустимую кривую минимальной длины, которая соединяет заданные точки Q_0, Q_1 .

Управляемость и существование оптимальных траекторий

$$\dot{Q} = \sum_{i=1}^3 u_i X_i(Q), \quad Q \in \mathbb{R}^2 \times SO(3), \quad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$$

- $\text{span}\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}(Q) = T_Q G$ для любой точки Q . По теореме Рашевского-Чжоу система вполне управляема.
- Существование оптимальных траекторий следует из теоремы Филиппова.

Параметризация аномальных геодезических

Теорема

Аномальные геодезические параметризуются следующими уравнениями:

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и оптимальны на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$.

Качение по прямой без прокручивания и проскальзывания

Движение по аномальной траектории

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина в нормальном случае

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Omega_2, & \dot{\Omega}_1 &= \omega_2 \Omega_3, \\ \dot{y} &= -\Omega_1, & \dot{\Omega}_2 &= -\omega_1 \Omega_3, \\ \dot{R} &= R\tilde{\Omega}, & \dot{\Omega}_3 &= \omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1 \\ & & \omega_1, \omega_2 &= \text{const}.\end{aligned}$$

$$\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}{2} = \text{const}, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нормальный случай

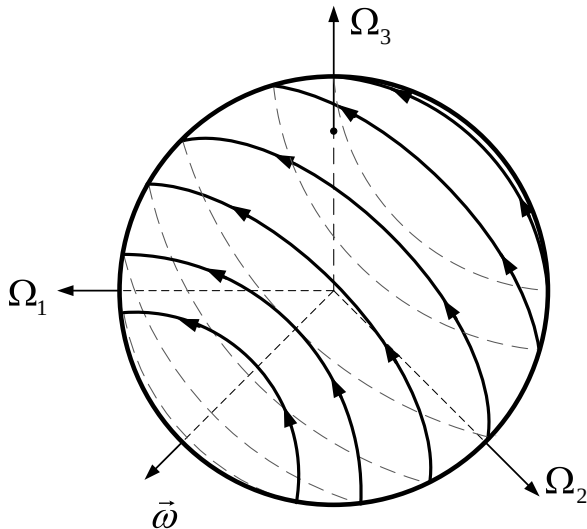
Уравнения для вектора угловой скорости:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{\omega} \times \vec{\Omega}, \quad \vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0) = \text{const.}$

Вектор $\vec{\Omega}$ вращается равномерно вокруг неподвижного горизонтального вектора $\vec{\omega}$.

Равномерное вращение $\vec{\Omega}$ вокруг $\vec{\omega}$



Качение по прямой

Если $\vec{\Omega} = \lambda \vec{\omega}$ для некоторых $\lambda \neq 0$ и $\vec{\omega} \neq 0$, то, проинтегрировав гамильтонову систему, мы получим уравнения аномальных геодезических.

Если $\vec{\omega} \equiv 0$, то $\vec{\Omega} = \text{const}$ и нормальные геодезические параметризуются уравнениями:

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шар катится по прямой с прокручиванием.

Качение по прямой с прокручиванием

Нормальная траектория ($\vec{\omega} \equiv 0$):

Вращательные симметрии гамильтоновой системы

Теорема

Вращение $\{\Phi^\beta, \beta \in S^1\}$, определенное следующим способом:

$$\Phi^\beta : \{\tilde{\Omega}_s, \tilde{\omega}_s, Q_s | s \in [0, t]\} \mapsto \{\tilde{\Omega}_s^\beta, \tilde{\omega}_s^\beta, Q_s^\beta | s \in [0, t]\},$$

$$\tilde{\Omega}_s^\beta = e^{\beta A_3} \tilde{\Omega}_s e^{-\beta A_3}, \quad \tilde{\omega}_s^\beta = e^{\beta A_3} \tilde{\omega}_s e^{-\beta A_3},$$

$$\begin{pmatrix} x_s^\beta \\ y_s^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix},$$

$$R_s^\beta = e^{\beta A_3} R_s e^{-\beta A_3}$$

является симметрией гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина.

Нормальная гамильтонова система ПМП

Можно положить $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$, тогда экстремальные траектории описываются уравнениями:

$$x = -\omega^{-1}(\Omega_2^0 \sin \omega t + \Omega_3^0 \cos \omega t - \Omega_3^0), \quad y = \Omega_1^0 t,$$

$$R(t) = e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} e^{-t\tilde{\omega}}.$$

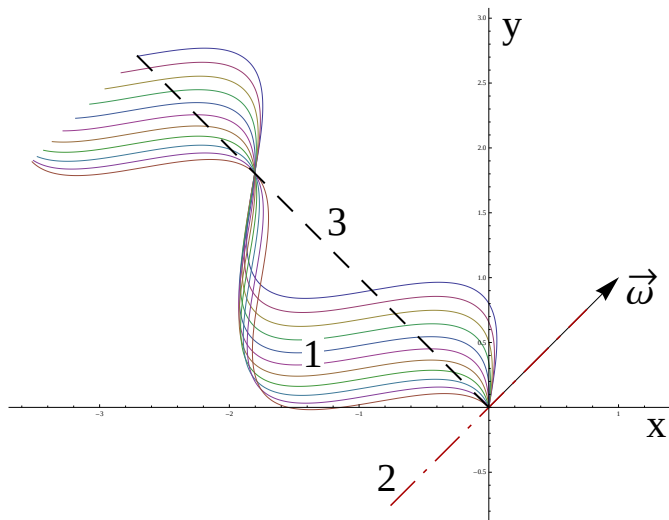
Шар катится по синусоиде, а матрица вращения является композицией двух вращений: вокруг вектора $-\vec{\omega}$ и вокруг вектора $\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0$.

Можно использовать повороты Φ^β , чтобы получить уравнения экстремальных траекторий с произвольным $\vec{\omega}$.

Качение по синусоиде

Нормальная траектория (общий случай):

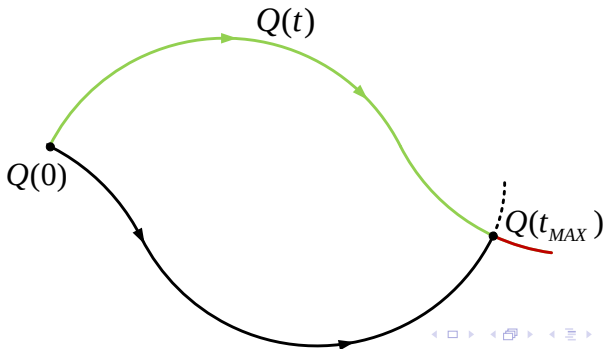
Проекции траекторий на горизонтальную плоскость



Точки Максвелла и время разреза

Временем разреза называется момент времени, когда экстремальная траектория теряет оптимальность.

Оценить время разреза сверху можно с помощью точек Максвелла, т.е. таких точек, в которые встречаются две различные геодезические одинаковой длины. После точки Максвелла экстремальная траектория перестает быть оптимальной.



Точка Максвелла

Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : T_{Q_0}^* G \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G,$$

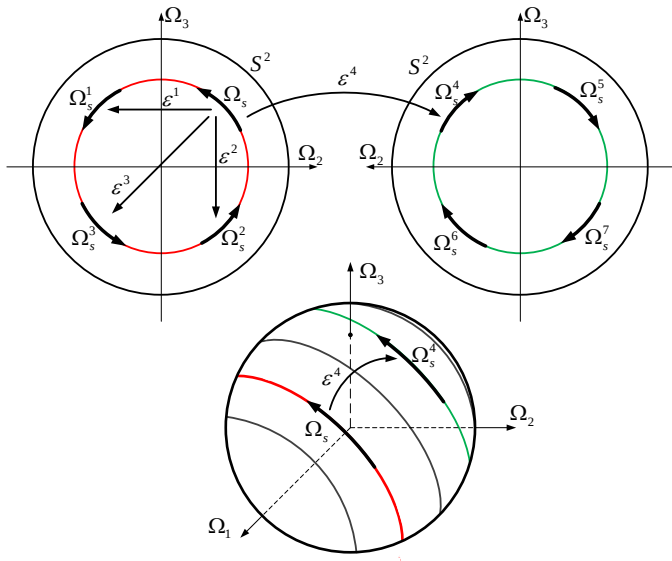
$$\text{Exp}(\lambda, t) = Q_t = (x_t, y_t, R_t),$$

$$\lambda = (\vec{\Omega}_0, \vec{\omega}) \in S^2 \times \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad Q_t \in G.$$

Множество Максвелла

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) : \exists \tilde{\lambda} \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\}$$

Отражения в прообразе экспоненциального отображения

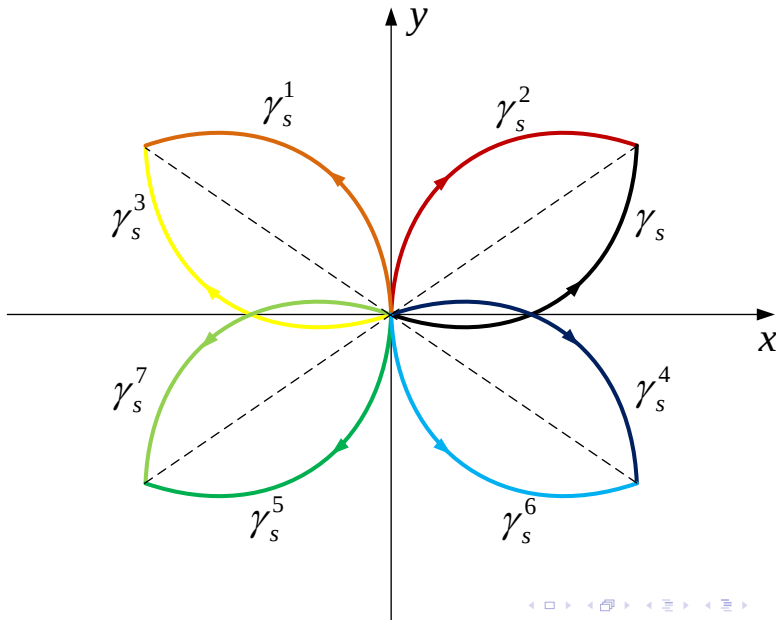


Группа дискретных симметрий вертикальной подсистемы гамильтоновой системы

Таблица умножения в группе дискретных симметрий
 $\langle \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7 \rangle = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

	ε^1	ε^2	ε^3	ε^4	ε^5	ε^6	ε^7
ε^1	Id	ε^3	ε^2	ε^5	ε^4	ε^7	ε^6
ε^2		Id	ε^1	ε^6	ε^7	ε^4	ε^5
ε^3			Id	ε^7	ε^6	ε^5	ε^4
ε^4				Id	ε^1	ε^2	ε^3
ε^5					Id	ε^3	ε^2
ε^6						Id	ε^1
ε^7							Id

Отражения дуг синусоид на плоскости



Представление вращений с помощью кватернионов

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mid (q_0, \dots, q_3) \in \mathbb{R}^4\}$ — алгебра кватернионов. Любое вращение R трехмерного пространства может быть представлено парой кватернионов единичной длины $\pm q$.

Предположим, что R есть вращение вокруг вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ на угол θ . Тогда соответствующий кватернион q задается формулой:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \sin \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, можно представить обе матричные экспоненты, входящие в R , как кватернионы:

$$e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} = \cos \frac{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|t}{2} + \frac{(\omega + \Omega_1^0)i + \Omega_2^0j + \Omega_3^0k}{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|} \sin \frac{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|t}{2},$$

$$e^{-t\tilde{\omega}} = \cos \frac{\omega t}{2} - i \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Неподвижные точки симметрий в образе экспоненциального отображения

Пусть $q_t = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ — кватернион, которому соответствует ориентация шара в $\mathbb{R}^3$ в момент времени t .

Теорема

$$\begin{aligned}\Phi^\beta \circ \varepsilon^1(Q_t) = Q_t &\iff \begin{cases} q_3 = 0, \\ q = \pm k; \end{cases} \\ \Phi^\beta \circ \varepsilon^2(Q_t) = Q_t &\iff \begin{cases} q_1x + q_2y = 0, \\ q = \pm(\cos \chi i + \sin \chi j); \end{cases} \\ \Phi^\beta \circ \varepsilon^3(Q_t) = Q_t &\iff \begin{cases} q_1x + q_2y = 0, \\ q_3 = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q_1y - q_2x = 0, \\ q_0 = 0; \end{cases}\end{aligned}$$

где:

$$\cos \chi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \chi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Время Максвелла t_{max}^1

Утверждение

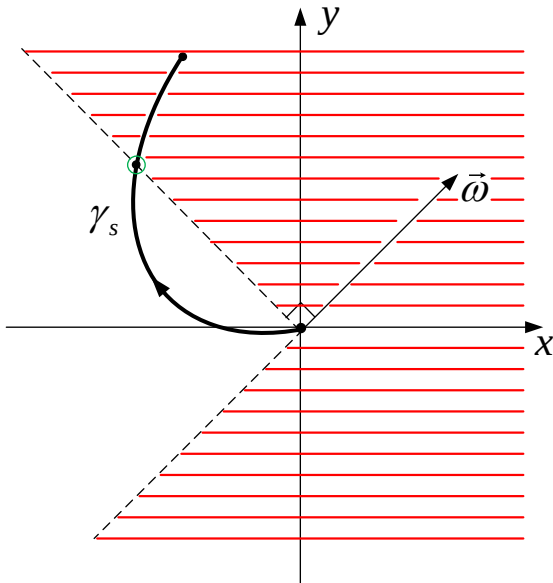
Первое положительное значение:

$$t_{max}^1 = \frac{\pi(2k - 1) - 2\psi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

является временем Максвелла для экстремальных траекторий, проекции которых не являются прямыми. ψ — это угол между проекцией $\vec{\Omega}_0$ на плоскость $\Omega_2 O \Omega_3$ и ось $O \Omega_2$

Геометрический смысл: В момент времени t_{max}^1 траектория точки контакта сферы и плоскости пересекает линию, проходящую через начало координат, и перпендикулярную вектору $\vec{\omega}$.

Геометрический смысл t_{max}^1



Время Максвелла t_{max}^2

Утверждение

Величина

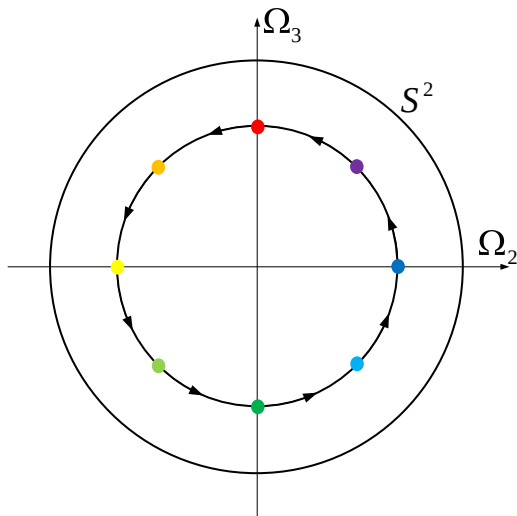
$$t_{max}^2 = \frac{2\pi}{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}|}$$

является временем Максвелла для экстремальных траекторий, проекции которых не являются прямыми.

Теорема

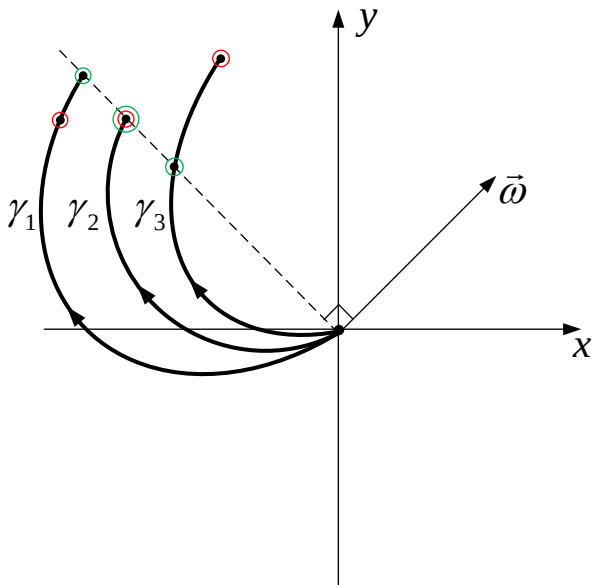
$$t_{cut} \leq \min\{t_{max}^1, t_{max}^2\}.$$

Свойства $t_{\max}^2$



Свойства $t_{\max}^2$

$$t_{\max}^1 \geq t_{\max}^2 ?$$



Какое из времен Максвелла наступает раньше?

Теорема

Обозначим

$$\underline{\omega} = \frac{(\pi - \psi')^2}{\psi'(2\pi - \psi')} \left(\Omega_1^0 + \sqrt{(\Omega_1^0)^2 + \frac{\psi'(2\pi - \psi')}{(\pi - \psi')^2}} \right),$$

где

$$\psi' = \psi + \frac{\pi}{2} \mod \pi, \quad \psi' \neq 0$$

тогда:

- $t_{\max}^1 < t_{\max}^2 \iff \omega > \underline{\omega};$
- $t_{\max}^1 = t_{\max}^2 \iff \omega = \underline{\omega};$
- $t_{\max}^1 > t_{\max}^2 \iff \omega < \underline{\omega}.$

Как перевернуть шар?

Вопрос: Как можно оптимально перекатить шар в исходную точку с новой ориентацией?

$$(x, y)(0) = (x, y)(t_1)$$

Шар может вернуться назад в начало координат только, если он катится по прямой (или вращается на месте).

Идея решения

1. Сузить экспоненциальное отображение;
2. Отбросить все заведомо неоптимальные траектории с помощью теоремы сравнения;
3. Разбить прообраз и образ на диффеоморфные области;
4. Проверить, что полный прообраз каждой точки внутри диффеоморфных областей образа состоит из единственной точки в прообразе.
5. В силу теоремы существования, соответствующая единственная траектория будет оптимальной.

Шаг 1

Некоторые свойства качения по отрезку:

1. $\vec{\Omega} \perp \vec{\omega}$. Если $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ то $\Omega_1^0 = 0$;
2. Шар возвращается назад в t_{max}^1 ;
3. Если $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$, то $q_2(t_{max}^1) = 0$.

Сужение экспоненциального отображения:

$$Exp : \mathbb{R}_+ \times S^1 \rightarrow S^2,$$

$$Exp : (\omega, \psi) \mapsto (q_0, q_1, q_3).$$

Шаг 2

Шар возвращается в начало координат в момент времени t_{max}^1 . Следовательно, должно выполняться $\omega > \underline{\omega}$, где

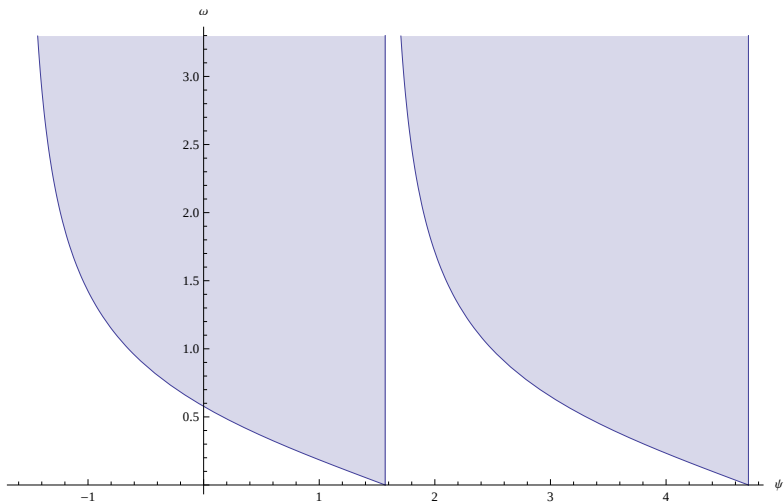
$$\underline{\omega} = \frac{\pi - \psi'}{\sqrt{\psi'(2\pi - \psi')}}.$$

Рассмотрим две области в прообразе:

$$D_+ = \left\{ (\omega, \psi) \in \mathbb{R}^2 : t_{max}^1 < t_{max}^2, \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\},$$

$$D_- = \left\{ (\omega, \psi) \in \mathbb{R}^2 : t_{max}^1 < t_{max}^2, \psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}.$$

Области D_+ (слева) и D_- (справа)



Шаг 3

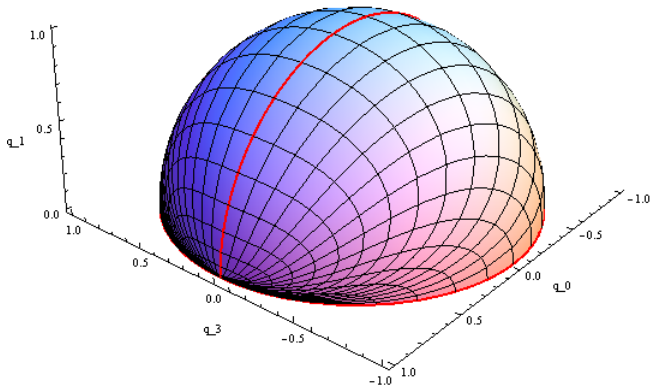
Теорема

Если $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$, $\Omega_1^0 = 0$, то экспоненциальное отображение является прямой суммой диффеоморфизмов $\text{Exp} : D_+ \rightarrow Q_+$ и $\text{Exp} : D_- \rightarrow Q_-$, где

$$Q_+ = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, q_1 > 0, q_3 > 0\},$$

$$Q_- = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, q_1 > 0, q_3 < 0\}.$$

Образ экспоненциального отображения



Множества $Q_+ \cup Q_-$ всех возможных ориентаций.

Идея доказательства

Мы представим экспоненциальное отображение, как композицию простых отображений f_i и применим следующую теорему:

Теорема (Адамара об обратной функции)

Пусть $f : M \rightarrow N$ гладкое отображение, $\dim M = \dim N$. Если:

1. f невырожденное,
2. f собственное,
3. M, N связны,
4. N односвязно,

то f — диффеоморфизм.

Решение задачи о переориентации шара

Теорема

Пусть $R_1 \in SO(3)$ — матрица, соответствующая повороту вокруг единичного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $a_1^2 + a_2^2 \neq 1$ и $|a_3| \neq 1$ на некоторый угол. Тогда существует единственная экстремальная траектория, переводящая шар из состояния $Q_0 = (0, 0, \text{Id})$ в $Q_1 = (0, 0, R)$. На этой траектории достигается минимум функционала действия.

Решение задачи оптимального управления сведено к решению системы алгебраических уравнений. На основе полученных результатов была написана программа, решающая эту задачу.

Результаты

- Рассмотрена задача оптимального качения шара по плоскости с прокручиванием;
- Получена полная параметризация экстремальных траекторий;
- Исследована и промоделирована динамика шара;
- Получены оценки на время разреза;
- Решена задача о переориентации;
- Принята к публикации статья в журнале математический сборник.

Спасибо за внимание