Геометрические структуры на решениях системы уравнений адиабатического движения газа

В. А. Юмагужин

Учреждение Российской академии наук
Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН,
г. Переславль-Залесский

1. Уравнения адиабатического движения газа в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$
    - Характеристические ковекторы
    - Геометрические структуры на решениях
    - Расслоение 3-тканей, $n = 1$
    - Расслоение плоскостей и конусов, $n = 2$
    - Расслоение плоскостей и конусов, $n = 3$
2. Дифференциальные инварианты естественных расслоений
    - Формальные симметрии и алгебры изотропии
    - Дифференциальные инварианты
3. Явные решения
    - 1-мерная газовая динамика
    - 2-мерная газовая динамика
    - 3-мерная газовая динамика
4. Литература

1. Уравнения адиабатического движения газа в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
&v^i_t + v^1 v^i_{x^1} + \ldots + v^n v^i_{x^n} + p_{x^i}/\rho = 0, \ i = 1, \ldots, n, \\
&\rho_t + v^1 \rho_{x^1} + \ldots + v^n \rho_{x^n} + \rho(v^1_{x^1} + \ldots + v^n_{x^n}) = 0, \\
&p_t + v^1 p_{x^1} + \ldots + v^n p_{x^n} + A(\rho, p)(v^1_{x^1} + \ldots + v^n_{x^n}) = 0\,,
\end{aligned} \tag{1}
$$

$(v^1, \ldots, v^n)$ – вектор скорости газа, ρ – его плотность, p – давление и $A(\rho, p) = -\rho(\partial S/\partial\rho)/(\partial S/\partial p)$, где $S(\rho, p)$ – энтропия. Вид системы для n=1, 2, 3

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\pi : (t, x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n, \rho, p) \mapsto (t, x^1, \ldots, x^n) = m.$$

$$\pi_k : J^k\pi \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \pi_k : j^k_m S \mapsto m$$

– расслоение k-джетов сечений расслоения π.
Геометрически система (1) – подмногообразие $\mathcal{E}$ в $J^1\pi$

2. Характеристические ковекторы

$\theta_1 \in \mathcal{E}$, $m = \pi_1(\theta_1)$, $\xi = \xi_0 dt + \xi_1 dx^1 + \ldots + \xi_n dx^n \in T^*_m$ и $\xi \neq 0$.

ξ – *характеристический ковектор* для θ_1, если:

$$\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial w^j_t}\xi_0 + \frac{\partial F^i}{\partial w^j_{x^1}}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial F^i}{\partial w^j_{x^n}}\xi_n\right)(\theta_1) = 0\,,$$

где F^i, $i = 1, \ldots, n+2$, - левые части уравнений системы (1), $w^j = v^j$, $j = 1, \ldots, n$, $w^{n+1} = \rho$ и $w^{n+2} = p$.

Вычисляя этот определитель, получим:

$$n = 1, \qquad (\xi_0 + v^1\xi_1)\left(\xi_0 + v^1\xi_1 + \sqrt{A(\rho,p)/\rho}\,\xi_1\right)\times \left(\xi_0 + v^1\xi_1 - \sqrt{A(\rho,p)/\rho}\,\xi_1\right) = 0,$$

$$n = 2, 3, \quad (\xi_0 + v^1\xi_1 + \ldots + v^n\xi_n)^3 \times \left((\xi_0 + v^1\xi_1 + \ldots + v^n\xi_n)^2 - \frac{A(\rho,p)}{\rho}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)\right) = 0.$$

3. Характеристические ковекторы

Характеричтические ковекторы порождают в T_m^*:

при $n = 1$, три попарно трансверсальных 1-мерных подпространства, определяемые соответственно уравнениями

$$\xi_0 + v^1 \xi_1 = 0,$$

$$\xi_0 + (v^1 - \sqrt{A(\rho, p)/\rho})\xi_1 = 0, \quad \xi_0 + (v^1 + \sqrt{A(\rho, p)/\rho})\xi_1 = 0\,;$$

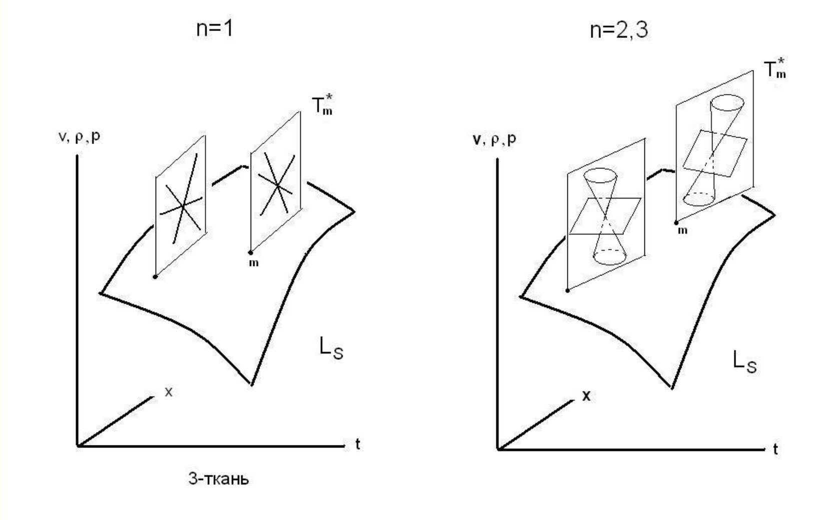
при $n = 2, 3$, n-мерные плоскость и конус, пересекающиеся только в нуле и определяемые соответственно уравнениями

$$\xi_0 + v^1 \xi_1 + \ldots + v^n \xi_n = 0,$$

$$(\xi_0 + v^1 \xi_1 + \ldots + v^n \xi_n)^2 - \frac{A(\rho, p)}{\rho}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) = 0$$

4. Геометрические структуры на решениях

$S = (v^1, \ldots, v^n, \rho, p)$ – решение системы (1), L_S – его график. Характеристические ковекторы системы (1) определяют на L_S геометрическую структуру.



5. Расслоение 3-тканей, $n = 1$

Пусть Ψ – 3-ткань на $\mathbb{R}^2$, т. е.

$$\Psi : m \longmapsto \{\ell_m^1, \ell_m^2, \ell_m^3\}, \quad \ell_m^i \in T_m^* \quad \forall\, m \in \mathbb{R}^2,$$
$$\ell_{\theta_1}^i \cap \ell_{\theta_1}^j = \{0\}, \quad i \neq j. \tag{2}$$

ℓ_m^i определяются соответственно уравнениями

$$\Psi_i^1(m)\xi_1 + \Psi_i^2(m)\xi_2 = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

определенными с точностью до умножения на ненулевые функции, где ξ_1, ξ_2 – координаты в T_m^*.
Структура Ψ отождествляется с сечением

$$\Psi : m \longmapsto (\, m,\, [\Psi_1^1(m) : \Psi_1^2(m)],\, [\Psi_2^1(m) : \Psi_2^2(m)],\, [\Psi_3^1(m) : \Psi_3^2(m)]\,)$$

тривиального расслоения

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1) \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$\tau : (\, m,\, [q_1^1 : q_1^2],\, [q_2^1 : q_2^2],\, [q_3^1 : q_3^2]\,) \mapsto m\,,$$

где $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ – 1-мерное проективное пространство.

6. Расслоение 3-тканей, $n = 1$

Расслоение τ естественное.

Условие (2) означает

$$\det \begin{pmatrix} \Psi_i^1(m) & \Psi_i^2(m) \\ \Psi_j^1(m) & \Psi_j^2(m) \end{pmatrix} \neq 0 \,, \quad 1 \leq i < j \leq 3 \,, \quad \forall\, p \,.$$

Оно определяет открытое подмножество E тотального пространства расслоения τ инвариантное относительно диффеоморфизмов, поднятых с базы.

$$\mu = \tau|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

– естественное расслоение 3-тканей над $\mathbb{R}^2$.

Пусть $S = (v, \rho, p)$ – решение системы (1). Тогда 3-ткань на решении $L_S^{(0)}$ – сечение

$$\Psi_S : m \mapsto \Big(m,\, v(m),\, v(m) - \sqrt{A\big(\rho(m), p(m)\big)/\rho(m)}, \\ v(m) + \sqrt{A\big(\rho(m), p(m)\big)/\rho(m)} \,\Big)$$

расслоения μ.

7. Расслоение плоскостей и конусов, $n = 2$

Пусть Ψ – геометрическая структура на $\mathbb{R}^3$, состоящая из плоскости P_m и конуса C_m в кокасательном пространстве T_m^* к $\mathbb{R}^3$ в каждой точке $m \in \mathbb{R}^3$ так, что

$$\mathrm{P}_m \cap \mathrm{C}_m = \{0\}\,, \forall\, m \in \mathbb{R}^3\,. \tag{3}$$

Эти поля плоскостей и конусов можно определить соответственно уравнениями

$$\Psi^i(m)\xi_i = 0, \quad \Psi^{ij}(m)\xi_i\xi_j = 0. \tag{4}$$

Тогда условие (3) означает, что

$$\Psi^{ij}(m)\xi_i\xi_j \neq 0 \quad \forall\, \xi \in \mathrm{P}_m \text{ и } \xi \neq 0\,. \tag{5}$$

Уравнения (4) определены с точностью до умножения на ненулевые функции. Следовательно Ψ отождествляется с сечением

$$\Psi : m \longmapsto ([\Psi^1(m) : \Psi^2(m) : \Psi^3(m)],$$
$$[\Psi^{11}(m) : 2\Psi^{12}(m) : 2\Psi^{13}(m) : \Psi^{22}(m) : 2\Psi^{23}(m) : \Psi^{33}(m)])$$

8. Расслоение плоскостей и конусов, $n = 2$

тривиального естественного расслоения

$$\tau : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^5) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\tau : (m, [q^1 : q^2 : q^3], [r^{11} : r^{12} : r^{13} : r^{22} : r^{23} : r^{33}]) \mapsto m\,,$$

где $\mathbb{R}\mathrm{P}^{\mathrm{i}}$ – i-мерное проективное пространство.
Условие (5) определяет открытое подмножество E тотального пространства расслоения τ, инвариантное относительно поднятых диффеоморфизмов.

$$\mu = \tau|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

– естественное расслоение геометрических структур типа Ψ.

Пусть $S = (v^1, v^2, \rho, p)$ – решение системы (1) и Ψ_S – ее геометрическая структура, т.е. сечение

$$\Psi_S : m \mapsto \Big(m, v^1(m), v^2(m), v^1(m), v^2(m)$$

$$\left(v^1(m)\right)^2 - \frac{A\big(\rho(m), p(m)\big)}{\rho(m)},\ v^1(m)v^2(m),\ \left(v^2(m)\right)^2 - \frac{A\big(\rho(m), p(m)\big)}{\rho(m)}\Big).$$

9. Расслоение плоскостей и конусов, $n = 3$

Пусть $S = (v^1, v^2, v^3, \rho, p)$ – решение системы (1) и Ψ_S – ее геометрическая структура плоскостей и конусов. Точно так, как при $n = 2$, эта структура отождествляется с сечением

$$\Psi_S : m \longmapsto \Big(m, v^1(m), v^2(m), v^3(m), v^1(m), v^2(m), v^3(m),$$

$$\big(v^1(m)\big)^2 - \frac{A\big(\rho(m), p(m)\big)}{\rho(m)}, v^1(m)v^2(m), v^1(m)v^3(m),$$

$$\big(v^2(m)\big)^2 - \frac{A\big(\rho(m), p(m)\big)}{\rho(m)}, v^2(m)v^3(m)$$

$$\big(v^3(m)\big)^2 - \frac{A\big(\rho(m), p(m)\big)}{\rho(m)}\Big)$$

естественного подрасслоения расслоения

$$\tau : \mathbb{R}^4 \times (\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^9) \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

$$\tau : \big(m, [q^1 : \ldots : q^4],$$

$$[r^{11} : r^{12} : r^{13} : r^{14} : r^{22} : r^{23} : r^{24} : r^{33} : r^{34} : r^{44}] \big) \mapsto m.$$

10. Формальные симметрии и алгебры изотропии, $k = 1$

$$\pi : E \longrightarrow M$$

– естественное расслоение дифференциального порядка 1;

$$\pi_1 : J^1\pi \longrightarrow M, \quad \pi_1 : j^k_m S \mapsto m$$

– расслоение 1-джетов его сечений S;

$$j_1 S : M \longrightarrow J^1\pi, \quad j_1 S : m \mapsto j^1_m S$$

– сечение расслоения π_1, порожденное S.

$$\pi_{1,0} : J^1\pi \longrightarrow E, \quad \pi_{1,0} : j^1_m S \mapsto S(m).$$

Всякий $\theta_1 = j^1_m S \in J^1\pi$ отождествляется с касательным пространством $\mathcal{K}_{\theta_1}$ к образу сечения $j_1 S$ в точке $S(m)$.

X – векторное поле на M, $X^{(0)}$ – его поднятие в E. Значение $X^{(0)}_{\theta_0}$ поля $X^{(0)}$ в точке $\theta_0 \in E$ определяется 1-джетом $j^1_m X$, где $m = \pi(\theta_0)$.

11. Формальные симметрии и алгебры изотропии

Пусть $\theta_1 \in J^1\pi$, $\theta_0 = \pi_{1,0}(\theta_1)$, $m = \pi(\theta_0)$ и X – произвольное векторное поле в окрестности точки m. Тогда

$$\mathcal{A}_{\theta_1} = \{\, j^1_m X \mid X^{(0)}_{\theta_0} \in \mathcal{K}_{\theta_1} \,\}$$

– пространство формальных симметрий джета θ_1,

$$\mathfrak{g}_{\theta_0} = \{\, j^1_m X \mid X^{(0)}_{\theta_0} = 0 \,\}$$

– алгебра изотропии точки θ_0. Ясно, что

$$\mathfrak{g}_{\theta_0} \subset \mathcal{A}_{\theta_1}.$$

Подпространство $H \subset \mathcal{A}_{\theta_1}$ называется горизонтальным, если проекция

$$\rho_{1,0}|_H : H \to T_m M, \quad \rho_{1,0} : j^1_m X \mapsto X_m \,,$$

– изоморфизм.

$$\mathcal{A}_{\theta_1} = H \oplus \mathfrak{g}_{\theta_0}.$$

12. Дифференциальные инварианты

Значение скобки $[\, X,\, Y\,]_m$ зависит от 1-джетов $j^1_m X$ и $j^1_m Y$. Поэтому можно ввести операцию

$$[\, j^1_m X,\, j^1_m Y\,] = [\, X,\, Y\,]_m\,.$$

Ограничение ее на $\mathcal{A}_{\theta_1} \times \mathcal{A}_{\theta_1}$ дает

$$[\,\cdot,\cdot\,] : \mathcal{A}_{\theta_1} \times \mathcal{A}_{\theta_1} \to T_m M.$$

Горизонтальное подпространство $H \subset \mathcal{A}_{\theta_1}$ определяет внешнюю 2-форму на $T_m M$ со значениями в $T_m M$

$$\omega^0_H \in T_m M \otimes (T^*_m M \wedge T^*_m M)$$

по формуле

$$\omega^0_H(X_m, Y_m) = [\, (\rho_{1,0}|_H)^{-1}(X_m),\, (\rho_{1,0}|_H)^{-1}(Y_m)\,]$$
$$\forall\, X_m, Y_m \in T_m M.$$

13. Дифференциальные инварианты

$$\mathfrak{g}_{\theta_0} \subset T_m M \otimes T_m^* M \,.$$

Комплекс Спенсера

$$0 \to (g_{\theta_0})^{(1)} \hookrightarrow g_{\theta_0} \otimes T_m^* M \xrightarrow{\partial_{1,1}} T_m M \otimes (T_m^* M \wedge T_m^* M) \to 0\,, \quad (6)$$

$$(g_{\theta_k})^{(1)} = (\, g_{\theta_k} \otimes T_m^* M \,) \cap \big(\, T_m M \otimes (T_m^* M \odot T_m^* M) \big)\,,$$

$$\partial_{1,1}(h)(X_m, Y_m) = h(X_m)(Y_m) - h(Y_m)(X_m)\,, \quad \forall\, X_m, Y_m \in T_m M\,.$$

Теорема. Класс когомологий

$$\omega^0_{\theta_1} = \omega^0_H + \partial_{1,1}(\mathfrak{g}_{\theta_0} \otimes T_m^* M)$$

не зависит от выбора горизонтального подпространства $H \subset \mathcal{A}_{\theta_1}$.

14. Дифференциальные инварианты

Функция на $J^1\pi$ со значениями в когомологиях Спенсера

$$\omega^1 : \theta_k \longmapsto \omega^0_{\theta_1}$$

– дифференциальный инвариант порядка 1 расслоения π.

Пусть S – сечение расслоения π, т.е. S – геометрическая структура на M, и $L_S^{(1)}$ – образ сечения $j_1 S$. Тогда

$$\omega^1_S = \omega^1|_{L_S^{(1)}}$$

– дифференциальный инвариант порядка 1 структуры S.

Если $\theta_0 \longmapsto C_{\theta_0}$ – инвариантное поле таких подпространств $C_{\theta_0} \subset T_m M \otimes (T^*_m M \wedge T^*_m M)$, что

$$T_m M \otimes (T^*_m M \wedge T^*_m M) = C_{\theta_0} \oplus \partial_{1,1}(g_{\theta_0} \otimes T^*_m M),$$

то ω^1 и ω^1_S – тензорные дифференциальные инварианты.

15. Дифференциальные инварианты

Теорема. Пусть S – сечение расслоения π и пусть выполнены условия:

1. $\theta_0 \longmapsto C_{\theta_0}$ – инвариантное поле таких подпространств $C_{\theta_0} \subset T_m M \otimes (T_m^* M \wedge T_m^* M)$, что

$$T_m M \otimes (T_m^* M \wedge T_m^* M) = C_{\theta_0} \oplus \partial_{1,1}(g_{\theta_0} \otimes T_m^* M),$$

2. $(g_{\theta_0})^{(1)} = \{0\}$ для всех $\theta_0 \in L_S^{(0)}$.

Тогда:

1. на $L_S^{(1)}$ определена инвариантная линейная связность ,
2. ω_S^1 – тензор кручения этой связности.

16. 1-мерная газовая динамика

μ – естественное расслоение 3-тканей на $\mathbb{R}^2$, $\theta_0 \in J^0\mu$. Тогда

$$\mathfrak{g}_{\theta_0} = \{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

$$\mathfrak{g}^{(1)}_{\theta_0} = \{0\} .$$

Из комплекса Спенсера (6) следует

$$T_m M \otimes (T^*_m M \wedge T^*_m M) = \{0\} \oplus \partial_{1,1}(\mathfrak{g}_{\theta_0} \otimes T^*_m M).$$

Следствие. Пусть Ψ_S – 3-ткань на решении $S = (v, \rho, p)$ системы (1). Тогда

1. Инвариант $\omega^1_{\Psi_S}$ равен нулю.
2. На $L^{(1)}_S$ определена линейная связность без кручения.

17. Тензор кривизны. Локально-плоские решения.

Исследование $\mathcal{A}_{\theta_2}$ приводит к инварианту $\omega^2_{\Psi_S}$. В терминах решения $S = (v, \rho, p)$

$$\omega^2_{\Psi} = \Big(\big(-\alpha\alpha_{tx} - u\alpha\alpha_{xx} + u_{xx}\alpha^2 + \alpha_t\alpha_x + u\alpha_x^2 - u_x\alpha\alpha_x \big)/\alpha^2 \Big)(dt \wedge dx),$$

где $\alpha = \sqrt{A(\rho, p)/\rho}$.

Решения $S = (v, \rho, p)$ с $\omega^2_S = 0$. Случай $A(\rho, p) = \rho$.

$$u(t,x) = \frac{x + c_3}{t + c_1} - \frac{t + c_1}{2} - c_2\,,$$

$$\rho(t,x) = \frac{c_2}{t + c_1} \exp\big(h(t,x) \big)\,,$$

$$p(t,x) = \frac{t + c_1 + c_2}{t + c_1} \exp\big(h(t,x) \big)\,,$$

где

$$h(t,x) = \frac{c_2}{t + c_1}x + \frac{c_2}{2}t + c_2^2 \ln(t + c_1) + \frac{c_2 c_3}{t + c_1} + c_4\,,$$

c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные.

18. 2-мерная газовая динамика

Пусть $S = (v^1, v^2, \rho, p)$ – решение системы (1), Ψ_S – геометрическая структура на S и θ_0 – точка из образа сечения Ψ_S.

$$\mathfrak{g}_{\theta_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -v^2 b & a & b \\ v^1 b & -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathfrak{g}_{\theta_0}^{(1)} = \{0\}.$$

$$0 \to 0 \to \mathfrak{g}_{\theta_0} \otimes T_m^* M \xrightarrow{\partial_{1,1}} T_m M \otimes (T_m^* M \wedge T_m^* M) \to 0,$$

$$T_m M \otimes (T_m^* M \wedge T_m^* M) = (T_m M \otimes (dx \wedge dy)) \oplus \partial_{1,1}(\mathfrak{g}_{\theta_0} \otimes T_m^* M).$$

$$\omega_{\Psi_S}^1 \in T_m M \otimes (dx \wedge dy).$$

19. Решения со связностями без кручения, $n = 2$

Следствие. Пусть $S = (v^1, v^2, \rho, p)$ – решение системы (1). Тогда на $L_S^{(1)}$ определена линейная связность и $\omega^1_{\Psi_S}$ – ее тензор кручения.

$$\omega^1_{\Psi_S} = \frac{1}{(v^1)^2 + (v^2)^2}\Big(\big(v^1(v^1_y + v^2_x) - v^2(v^1_x - v^2_y)\big)\frac{\partial}{\partial x} - \big(v^2(v^1_y + v^2_x) + v^1(v^1_x - v^2_y)\big)\frac{\partial}{\partial y}\Big) \otimes (dx \wedge dy).$$

Пусть S такое решение системы (1), что $\omega^1_{\Psi_S} = 0$, тогда

$$v^1_x = v^2_y, \quad v^1_y = -v^2_x\,.$$

Т.е. скорость $v = (v^1, v^2)$ – комплексно-аналитическая функция

20. Политропное движение газа постоянного объема, $n = 2$. Решения со связностями без кручения

Решения $S = (v^1, v^2, \rho, p)$ системы (1) с $\omega^1_{\Psi_S} = 0$. Пусть $A(\rho, p) = \gamma p$, γ – постоянная и $\rho = \mathrm{Const}$.

$$
\begin{aligned}
v^1(t,x,y) &= k_{11}t + yc_{11} + k_{12},\\
v^2(t,x,y) &= k_{21}t - xc_{11} + k_{22},\\
\rho &= \mathrm{Const},\\
p(t,x,y) &= \rho\big(\,t^2(k_{11}^2 + k_{21}^2) - 2txc_{11}k_{21} + 2tyc_{11}k_{11}\\
&\quad + 2t(k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22}) + x^2c_{11}^2 - 2x(c_{11}k_{22} + k_{11})\\
&\quad + y^2c_{11}^2 + 2y(c_{11}k_{12} - k_{21}) + 2k_{33}\,\big)/2\,,
\end{aligned}
$$

где c_{ij} и k_{ij} – константы.

21. Политропное движение газа, $n = 2$. Решения со связностями без кручения

Решения $S = (v^1, v^2, \rho, p)$ системы (1) с $\omega^1_{\Psi_S} = 0$. Пусть $A(\rho, p) = \gamma p$, γ – постоянная.

$$v^1 = \frac{x + k_3}{t + k_1} - \frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3 - 2\gamma}(t + k_1)^{1-2\gamma}|t + k_1|,$$

$$v^2 = \frac{y + k_4}{t + k_1} - \frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3 - 2\gamma}(t + k_1)^{1-2\gamma}|t + k_1|,$$

$$\rho = \frac{e^{-2k_2+k_5}}{(t + k_1)^2}\exp\Big(e^{-k_2}\frac{x + y + k_3 + k_4}{|t + k_1|} + e^{-2\gamma k_2}\frac{2(t + k_1)^{2-2\gamma}}{(3 - 2\gamma)(2 - 2\gamma)}\Big),$$

$$p = \frac{e^{-2\gamma k_2+k_5}}{(t + k_1)^{2\gamma}}\exp\Big(e^{-k_2}\frac{x + y + k_3 + k_4}{|t + k_1|} + e^{-2\gamma k_2}\frac{2(t + k_1)^{2-2\gamma}}{(3 - 2\gamma)(2 - 2\gamma)}\Big),$$

где $k_1, \ldots, k_5$ – произвольные константы,

22. Политропное движение газа, $n = 2$. Решения со связностями без кручения

$$v^1 = \frac{x+k_3}{t+k_1} - k_6\frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3-2\gamma}(t+k_1)^{1-2\gamma}|t+k_1|,$$

$$v^2 = \frac{y+k_4}{t+k_1} - k_6\frac{e^{(1-2\gamma)k_2}}{3-2\gamma}(t+k_1)^{1-2\gamma}|t+k_1|,$$

$$\rho = \frac{e^{-2k_2}}{(t+k_1)^2}\Big(e^{-k_2}\frac{x+y+k_3+k_4}{|t+k_1|} + e^{-2\gamma k_2}\frac{2k_6(t+k_1)^{2-2\gamma}}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)} + k_5\Big)^{k_6-1},$$

$$p = \frac{e^{-2\gamma k_2}}{(t+k_1)^{2\gamma}}\Big(e^{-k_2}\frac{x+y+k_3+k_4}{|t+k_1|} + e^{-2\gamma k_2}\frac{2k_6(t+k_1)^{2-2\gamma}}{(3-2\gamma)(2-2\gamma)} + k_5\Big)^{k_6},$$

где $k_1, \ldots, k_6$ – произвольные константы.

23. Политропное движение газа, $n = 2$. Решения со связностями без кручения

$$v^1 = \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,y + c(t)\,,\ \ k_2 \neq 0\,,$$

$$v^2 = \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2-k_2^2}\,y + d(t)\,,$$

$$\rho = \frac{e^{-2k_3+k_4}}{(t+k_1)^2+k_2^2}\ \exp(f)\,,$$

$$p = \frac{e^{-2\gamma k_3+k_4}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{\gamma}}\ \exp(f)\,,$$

$$f = \frac{e^{-k_3}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{1/2}}\Big(\,x(\cos\beta-\sin\beta)+y(\cos\beta+\sin\beta)\,\Big)$$

$$-\int \frac{e^{-k_3}}{\big((t+k_1)^2+k_2^2\big)^{1/2}}\Big(\,c(t)(\cos\beta-\sin\beta)+d(t)(\cos\beta+\sin\beta)\,\Big)dt\,,$$

24. Политропное движение газа, $n = 2$. Решения со связностями без кручения

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{t + k_1}{k_2}\right) + k_5\,,$$

$$c(t) = \Big(\big(e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_c + k_6\big)\cos\beta - \big(e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_d + k_7\big)\sin\beta\Big)\Big((t+k_1)^2 + k_2^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$d(t) = \Big(\big(e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_c + k_6\big)\sin\beta + \big(e^{(1-2\gamma)k_3}\Gamma_d + k_7\big)\cos\beta\Big)\Big((t+k_1)^2 + k_2^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma_c = \frac{1}{\delta^2 + 1}\int \frac{1}{\big((t + k_1)^2 + k_2^2\big)^{\gamma+1}}\Big((\delta^2 - 2\delta - 1)(t + k_1)^2 + 2k_1(-\delta^2 - 2\delta + 1)(t + k_1) + k_1^2(-\delta^2 + 2\delta + 1)\Big)dt\,,$$

$$\Gamma_d = \frac{1}{\delta^2 + 1}\int \frac{1}{\big((t + k_1)^2 + k_2^2\big)^{\gamma+1}}\Big((\delta^2 + 2\delta - 1)(t + k_1)^2 + 2k_1(\delta^2 - 2\delta - 1)(t + k_1) + k_1^2(-\delta^2 - 2\delta + 1)\Big)dt\,,$$

$\delta = \operatorname{tg}(k_5)$ и $k_1, \ldots, k_7$ – произвольные константы.

25. Политропное движение газа, $n = 2$. Решения со связностями без кручения

$$v^1 = \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,y + k_4 c(t)\,,\ \ k_2 \neq 0\,,$$

$$v^2 = \frac{k_2}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,x + \frac{t+k_1}{(t+k_1)^2-k_2^2}\,y + k_4 d(t)\,,$$

$$\rho = \frac{e^{-2k_3}}{(t+k_1)^2+k_2^2}\,(f)^{k_4-1}\,,$$

$$p = \frac{e^{-2\gamma k_3+k_4}}{\left((t+k_1)^2+k_2^2\right)^{\gamma}}\,(f)^{k_4}\,,$$

где $k_1, \ldots, k_4$ – произвольные константы, а функции $c(t)$, $d(t)$ и f вычисляются по тем же формулам, что и выше.

26. 3-мерная газовая динамика

Пусть $S = (v^1, v^2, v^3, \rho, p)$ – решение системы (1), Ψ_S – геометрическая структура на S и θ_0 – точка из образа сечения Ψ_S.

$$\mathfrak{g}_{\theta_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -bv^2 - cv^3 & a & b & c \\ bv^1 - dv^3 & -b & a & d \\ cv^1 + dv^2 & -c & -d & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathfrak{g}_{\theta_0}^{(1)} = \{0\} \,.$$

$$0 \to 0 \to \mathfrak{g}_{\theta_0} \otimes T_m^* M \xrightarrow{\partial_{1,1}} T_m M \otimes (T_m^* M \wedge T_m^* M) \to 0 \,,$$

27. Структурный дифференциальный инвариант на решении, n=3.

Следствие. Пусть S – решение системы (1). Тогда $\omega^1_{\Psi_S}$ – функция на $L_S^{(1)}$ со значениями в когомологиях Спенсера.

$$\omega^1_{\Psi_S} = \frac{\partial}{\partial y} \otimes \big((v^2_x + v^1_y) dt \wedge dx + (v^2_y - v^1_x) dt \wedge dy \big)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \otimes \big((v^3_x + v^1_z) dt \wedge dx + (v^3_y + v^2_z) dt \wedge dy + (v^3_z - v^1_x) dt \wedge dz \big)$$

$$+ \partial_{1,1}(\mathfrak{g}_{\theta_0} \otimes T^*_m M).$$

28. Политропное движение газа постоянного объема, $n = 3$. Явные решения

Решения $S = (v^1, v^2, v^3, \rho, p)$ системы (1) с $\omega^1_{\Psi_S} = 0$. Пусть $A(\rho, p) = \gamma p$, γ – постоянная и $\rho = \mathrm{Const}$.

$$
\begin{aligned}
&v^1(t,x,y,z) = k_{11}t + yc_{11} + zc_{21} + k_{12}\,,\\
&v^2(t,x,y,z) = k_{21}t - xc_{11} + zc_{31} + k_{22}\,,\\
&v^3(t,x,y,z) = k_{31}t - xc_{21} - yc_{31} + k_{32}\,,\\
&\rho = \mathrm{Const}\,,\\
&p(t,x,y,z) = \rho\Big(x^2(c_{11}^2 + c_{21}^2) + 2xyc_{21}c_{31} - 2xzc_{11}c_{31}\\
&\;- 2x\big(c_{11}(k_{21}t + k_{22}) + c_{21}(k_{31}t + k_{32}) + k_{11}\big) + y^2(c_{11}^2\\
&\;+ c_{31}^2) + 2yzc_{11}c_{21} + 2y\big(c_{11}(k_{11}t + k_{12}) - c_{31}(k_{31}t - k_{32})\\
&\;- k_{21}\big) + z^2(c_{21}^2 + c_{31}^2) + 2z\big(c_{21}(k_{11}t + k_{12}) + c_{31}(k_{21}t\\
&\;+ k_{22}) - k_{31}\big) + k_{11}^2t^2 + 2k_{11}k_{12}t + k_{21}^2t^2 + 2k_{21}k_{22}t\\
&\;+ k_{31}^2t^2 + 2k_{31}k_{32}t + 2k_{33}\Big)/2
\end{aligned}
$$

где c_{ij} и k_{ij} – константы.

29. Политропное движение газа, $n = 3$. Явные решения

Решения $S = (v^1, v^2, v^3, \rho, p)$ системы (1) с $\omega^1_{\Psi_S} = 0$. Пусть $A(\rho, p) = \gamma p$, γ – постоянная.

$$v^1 = \frac{x + k_3}{t + k_1} - \frac{e^{(2-3\gamma)k_2}}{4 - 3\gamma}(t + k_1)^{2-3\gamma}|t + k_1|,$$

$$v^2 = \frac{y + k_4}{t + k_1} - \frac{e^{(2-3\gamma)k_2}}{4 - 3\gamma}(t + k_1)^{2-3\gamma}|t + k_1|,$$

$$v^3 = \frac{z + k_5}{t + k_1} - \frac{e^{(2-3\gamma)k_2}}{4 - 3\gamma}(t + k_1)^{2-3\gamma}|t + k_1|,$$

$$\rho = \frac{e^{-3k_2+k_6}}{|t + k_1|^3}\exp(f),$$

$$p = \frac{e^{-3k_2\gamma+k_6}}{|t + k_1|(t + k_1)^{3\gamma-1}}\exp(f),$$

где

$$f = e^{-k_2}\frac{x + y + z + k_3 + k_4 + k_5}{|t + k_1|} + e^{(1-3\gamma)k_2}\frac{3(t + k_1)^{3-3\gamma}}{(3 - 3\gamma)(4 - 3\gamma)},$$

а $k_1, \ldots, k_6$ – произвольные константы.

30. Политропное движение газа, $n = 3$. Явные решения

$$
\begin{aligned}
v^1 &= \frac{x+k_3}{t+k_1} - k_7 \frac{e^{(2-3\gamma)k_2}}{4-3\gamma}(t+k_1)^{2-3\gamma}|t+k_1|,\\
v^2 &= \frac{y+k_4}{t+k_1} - k_7 \frac{e^{(2-3\gamma)k_2}}{4-3\gamma}(t+k_1)^{2-3\gamma}|t+k_1|,\\
v^3 &= \frac{z+k_5}{t+k_1} - k_7 \frac{e^{(2-3\gamma)k_2}}{4-3\gamma}(t+k_1)^{2-3\gamma}|t+k_1|,\\
\rho &= \frac{e^{-3k_2+k_6}}{|t+k_1|^3} f^{k_7-1},\\
p &= \frac{e^{-3k_2\gamma+k_6}}{|t+k_1|(t+k_1)^{3g-1}} f^{k_7},
\end{aligned}
$$

где

$$
f = e^{-k_2}\frac{x+y+z+k_3+k_4+k_5}{|t+k_1|} + e^{(1-3\gamma)k_2}\frac{3k_7(t+k_1)^{3-3\gamma}}{(3-3\gamma)(4-3\gamma)},
$$

а $k_1, \ldots, k_7$ – произвольные константы.

31. Литература

- V. Lychagin, V. Yumaguzhin, *On geometric structures of 2-dimensional gas dynamics equations*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2009, Vol. 30, No. 4, pp. 327-332.
- Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Москва, «Наука», 1981, 368 с.
- И.Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Москва, «Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры», 1950, 303 с.
- V. Yumaguzhin, *Differential invariants of 2-order ODEs, I*, Acta Applicandae Mathematicae, (2010), Vol. 109, No. 1, pp. 283-313.

Вернуться

$$n=1 \quad \begin{aligned} & v_t + v v_x + p_x/\rho = 0, \\ & \rho_t + v\rho_x + \rho\, v_x = 0, \\ & p_t + v p_x + A(\rho,p)\, v_x = 0. \end{aligned}$$

$$n=2 \quad \begin{aligned} & v^1_t + v^1 v^1_{x^1} + v^2 v^1_{x^2} + p_{x^1}/\rho = 0, \\ & v^2_t + v^1 v^2_{x^1} + v^2 v^2_{x^2} + p_{x^2}/\rho = 0, \\ & \rho_t + v^1\rho_{x^1} + v^2\rho_{x^2} + \rho\,(v^1_{x^1} + v^2_{x^2}) = 0, \\ & p_t + v^1 p_{x^1} + v^2 p_{x^2} + A(\rho,p)(v^1_{x^1} + v^2_{x^2}) = 0. \end{aligned}$$

$$n=3 \quad \begin{aligned} & v^1_t + v^1 v^1_{x^1} + v^2 v^1_{x^2} + v^2 v^1_{x^3} + p_{x^1}/\rho = 0, \\ & v^2_t + v^1 v^2_{x^1} + v^2 v^2_{x^2} + v^3 v^2_{x^3} + p_{x^2}/\rho = 0, \\ & v^3_t + v^1 v^3_{x^1} + v^2 v^3_{x^2} + v^3 v^3_{x^3} + p_{x^3}/\rho = 0, \\ & \rho_t + v^1\rho_{x^1} + v^2\rho_{x^2} + v^3\rho_{x^3} + \rho\,(v^1_{x^1} + v^2_{x^2} + v^3_{x^3}) = 0, \\ & p_t + v^1 p_{x^1} + v^2 p_{x^2} + v^3 p_{x^3} + A(\rho,p)(v^1_{x^1} + v^2_{x^2} + v^3_{x^3}) = 0. \end{aligned}$$

Естественные расслоения

$$\pi : E \longrightarrow M \quad \text{- локально-тривиальное расслоение.}$$

Расслоение π *естественное*, если выполнены условия:

1. Для каждого диффеоморфизма $f : M \to M$ определен диффеоморфизм $f^{(0)} : E \to E$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f^{(0)}"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

2. $(\mathrm{id}_M)^{(0)} = \mathrm{id}_E$.
3. $(f \circ g)^{(0)} = f^{(0)} \circ g^{(0)}$.

Эти условия определяют поднятие $f^{(0)}$ однозначно.

Примерами естественных расслоений являются касательное, кокасательное расслоения, расслоение тензоров типа (r, s) и т.д. Вернуться

Линейные связности

$$\rho : TM \longrightarrow M \quad \text{касательное расслоение над} \quad M.$$

$$\rho_{1,0} : J^1 TM \longrightarrow TM\,, \quad \rho_{1,0} : j^1_m X \mapsto X_m.$$

Линейная связность на M - это сечение

$$\Gamma : TM \longrightarrow J^1\rho\,, \quad \rho_{1,0} \circ \Gamma = \mathrm{id}_{TM}$$

линейное на каждом слое $T_m M$.

Классическое определение линейной связности.

$$\tilde{\Gamma}^{i'}_{j'm'}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^{j'} \partial \tilde{x}^{m'}} + \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{jm}(x) \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^{m'}}.$$

Тензор кручения связности.

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

Тензор кривизны связности.

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^j} - \Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl}.$$