бМЗЕВТБ Й БОБМЙЪ
фПН 00 (0000), №0

Доклад в ИПС РАН 28 мая 2012 года.

строение дискриминантной поверхности пространства квадратичных форм

© С. Д. МЕШВЕЛИАНИ

§1. Введение

Исследуется поверхность $\mathbb{M}$ вещественных симметрических матриц размера $n > 1$, имеющих кратное собственное значение.

Доказывается (*в дополнение к известным выводам*), что

1) $\mathbb{M}$ неприводима,

2) для $n = 3$ скалярные матрицы и только они являются особыми точками на $\mathbb{M}$.

Для $n = 3$ дается описание поверхности $\mathbb{M}$ в виде прямого цилиндра над $\mathbb{M}_0$, где $\mathbb{M}_0$ есть конус над орбитой диагональной матрицы $\mathrm{diag}(1, 1, -2)$ по ортогональным заменам координат.

Разбираются некоторые свойства этой орбиты — которая есть образ диффеоморфного вложения проективной плоскости.

Определение.

$\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ есть пространство симметрических матриц (квадратичных форм) размера n над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел

$(\dim \mathrm{Sym}(n) = n(n + 1)/2)$.

$\mathbb{M} = \{X \in \mathrm{Sym}(n)|\ \mathrm{discr}\, X = 0\}$ есть поверхность матриц из $\mathrm{Sym}(n)$, имеющих кратное собственное значение.

"Поверхность" есть открытое подмножество в гладком многообразии или в аффинном алгебраическом многообразии в конечномерном евклидовом пространстве (поверхность может иметь особые точки).

$\mathbb{MH}$ есть множество форм из $\mathbb{M}$, имеющих $n-1$ различных собственных значений.

Я благодарен *А.Г. Хованскому* за ссылку на книгу В.И. Арнольда. Благодаря ей из статьи удалена обширная часть с переоткрытием и пере-доказательством некоторых результатов. Я благодарен *Н. В. Илюшечкину, С. Ю. Оревкову, Ю. Л. Сачкову* за некоторое обсуждение предмета статьи в беседе.

В книге [1], в Добавлении 10, открытая область $\mathrm{Sym}_+(n)$ положительно определённых форм из $\mathrm{Sym}(n)$ представлена в виде области эллипсоидов. И показано, что (в наших обозначениях)

а) коразмерность $\mathbb{M}$ есть 2,

б) $\mathbb{MH}$ есть гладкое многообразие.

Также из теоремы и леммы этого раздела из [1] немедленно следует, что $\mathbb{MH}$ есть открытое в $\mathbb{M}$ и плотное в $\mathbb{M}$ множество.

Цель: разобрать вопросы

(1) об алгебраической неприводимости поверхности $\mathbb{M}$,

(2) о расположении её особых точек, её строении в целом для случая $n = 3$,

(3) об алгебраических уравнениях орбиты формы из $\mathbb{M}$ по ортогональным заменам координат и расположении орбиты относительно плоскости диагональных матриц.

Любая форма из $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ имеет n вещественных собственных значений, из которых некоторые могут совпадать.

Определение. *Спектр (*spec*) есть много-множество собственных значений оператора.*

1.1. О приложениях. В Добавлении 10, книги [1] описывается задача о юстировке твёрдого тела за счёт перемещения гирьки вдоль стержня с целью получить тело, эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения. Оказывается, что в общем положении одного этого параметра для регулирования не хватает. Ибо $codim\mathbb{M} = 2$.

В разделе 6 статьи [2] пишется об отношении этой задачи о квадратичных формах к теореме Неймана–Вигнера (из области квантовой механики) о пересечении электронных уровней. Вывод о коразмерности $\mathbb{M}$ объясняет, почему для линейного пучка квадратичных форм в общем положении наблюдается явление расталкивания электронных уровней. Конечно, в обоих приложениях важны знания о расположении особых точек на $\mathbb{M}$.

Также, с точки зрения механики и физики, квадратичная форма $X(p)$, зависящая от параметра p, выражает некую физическую характеристику объекта, где собственные значения формы суть частоты колебаний частей объекта.

Вообще: дискриминантная поверхность есть объект важный, и чем больше о ней известно, тем лучше.

1.2. Случай $n = 2$. Для формы

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

имеем $\mathrm{charPol}(X)(\lambda) = (x-\lambda)(z-\lambda) - y^2 = \lambda^2 - (x+z)\lambda + xz - y^2$.
$\mathrm{discr}(X) =$

$$(x+z)^2 - 4(xz - y^2) = x^2 + 2xz + z^2 - 4xz + 4y^2 = (x-z)^2 + (2y)^2.$$

$\mathbb{M}$ задается уравнениями $\{x = z,\ y = 0\}$ и является прямой скалярных матриц: неприводимая поверхность в $\mathrm{Sym}(2)$ коразмерности 2.
Особых точек нет.

1.3. О неприводимости. Применяя подход симметрий, мы весьма просто доказываем неприводимость поверхности $\mathbb{M}$, заданной уравнением discr. Далее, так как discr не содержит кратных множителей, то из неприводимости $\mathbb{M}$ следует неприводимость discr над $\mathbb{R}$.

Мы не знаем вывода в обратном направлении — по следующим причинам.

1. Дискриминант многочлена над $\mathbb{R}$ неприводим — даже над комплексными числами. Это доказано, например, в [9] §35.

2. Похожим образом можно доказать, что $\mathrm{discr}(X)$ в нашей задаче является неприводимым над $\mathbb{R}$.

3. Как мы видели, для $n = 2$ $\mathrm{discr}(X)$ приводим над комплексными числами. Мы предполагаем, что при $n > 2$ $\mathrm{discr}(X)$ неприводим над комплексными числами, но доказательства пока не знаем.

4. Из теоремы Гильберта о нулях следует, что многочлен неприводимый над комплексными числами задает неприводимую комплексную поверхность.

5. Это утверждение не верно для поля действительных чисел.

6. Свойство неприводимости вещественной поверхности несёт в себе больше смысла, чем свойство неприводимости вещественного многочлена.

1.4. О системах уравнений для $\mathbb{M}$. Для $n = 3$ $\mathrm{discr}(X)$ есть однородный многочлен полной степени 6 от шести независимых переменных $x_{i,j}$, состоящий из 123 ненулевых мономов. Как из вида многочлена $\mathrm{discr}(X)$ вывести сведения о размерности $\mathbb{M}$, её неприводимых составляющих, особых точках? Например, суждение "6 переменных, одно уравнение, поэтому размерность есть 5" является ошибкой.

Дискриминант квадратичной формы разлагается в сумму квадратов нескольких вещественных многочленов. Это независимо доказано в нескольких работах, начиная с Борхардта в 1846 году и кончая Н. В. Илюшечкиным в 1985 году. Далее, в статье [5] выводятся некоторые соотношения между слагаемыми этого разложения. Благодаря этому для случая

$n = 3$ в статье [5] выводятся четыре замечательные кубические формы, задающие поверхность $\mathbb{M}$.

1.5. Наш подход. Метод гладкой группы симметрий.

Сопряжения операторами из $\mathrm{SO}(n)$.

Смещение по плоскости диагональных матриц и смещение по орбите по действию $\mathrm{SO}(n)$ ортогональны друг другу (в подобранной нами евклидовой метрике). Это дает гладкую параметризацию для $\mathbb{M}$ — за исключением некоторых вырожденных точек. Остается выяснить строение орбиты для двух случаев: когда число различных собственных значений диагональной матрицы есть $n-1$ или меньшее число.

Также мы используем приём сдвига на скалярную матрицу — это важная подгруппа симметрий для $\mathbb{M}$.

Определение.

1) Шириной спектра формы из $\mathrm{Sym}(n)$ назовем число её различных собственных значений.
Для любого множества $\mathbb{X}$ в $\mathrm{Sym}(n)$ форму из $\mathbb{X}$ наибольшей по $\mathbb{X}$ ширины спектра называем *формой наибольшего спектра* в $\mathbb{X}$,
а остальные формы из $\mathbb{X}$ называем *формами суженного спектра.*

2) $\mathbb{MH}$ есть множество форм наибольшего спектра в $\mathbb{M}$.

1.6. Итоги. * Доказано, что $\mathbb{M}$ есть неприводимое алгебраическое многообразие (§2).

* Даны алгебраические уравнения для орбиты формы из $\mathbb{MH}$ под действием ортогональных замен координат (§7.1).

Показана ортогональность пересечения этой орбиты с плоскостью диагональных матриц.

* Для $n = 3$ доказано, что особые точки на $\mathbb{M}$ суть скалярные матрицы и только они (§7.3).

* Для $n = 3$ дано более определённое описание поверхности $\mathbb{M}$: прямой цилиндр над конусом $\mathbb{M}_0$ над диффеоморфным образом проективной плоскости $\mathbb{R}P(2)$ (лемма Orbit1, §§7.2, 7.3).

* Для $n = 3$ разобраны некоторые дополнительные свойства орбиты формы из $\mathbb{MH}$ по ортогональным заменам (§7.2).

Дальнейшие задачи могут быть, например, такими.

1) Верно ли для $n > 3$, что всякая форма суженного спектра из $\mathbb{M}$ является особой точкой ?

2) Строение поверхности $\mathbb{M}$ в основном зависит от строения орбиты $\mathrm{Orbit}(A, n)$ формы $A \in \mathbb{M}$, и подобно случаю $n = 3$ имеет смысл найти для $n = 4, 5, \ldots$ глобальное описание $\mathrm{Orbit}(A, n)$ в более определённом виде.

Мы опираемся на следующую классическую теорему.

Теорема (DO).

(1) Всякая вещественная симметрическая билинейная форма M некоторой ортогональной заменой приводится к диагональному виду с вещественными собственными значениями на диагонали.
Здесь ортогональность понимается в смысле названной в определении Basic метрики scp *на пространстве V, на котором действует оператор M.*

(2) Каждому собственному значению оператора M соответствует ненулевое собственное подпространство для этого собственного значения для M.

(3) Подпространства, принадлежащие разным собственным значениям оператора M, ортогональны друг другу.

(4) Для такого приведения к диагональному виду достаточно замен по операторам из $\mathrm{SO}(n)$.

Эта теорема доказана, например, в книге [9]. Надо только добавить доказательство утверждения (4).

Лемма (П0) (видимо, известная). *Коммутатор диагональной и кососимметрической квадратных матриц одного размера есть симметрическая матрица с нулевой диагональю.*

Лемма (П1) (известная). *Прообраз $\mathbb{M}'$ алгебраического множества $\mathbb{M}$ при многочленном отображении $F : R^n \to R^m$ есть алгебраическое множество.*

Лемма (П2) (видимо, известная). *При многочленном отображении алгебраических множеств $\mathbb{M}$ на все $\mathbb{M}'$, если $\mathbb{M}$ неприводимо, то $\mathbb{M}'$ неприводимо.*

(смотри Приложение).

§2. Теорема о неприводимости

Теорема. *Дискриминантная поверхность $\mathbb{M}$ является алгебраически неприводимой (то есть она не представима в виде объединения двух алгебраических множеств отличных от $\mathbb{M}$).*

Доказательство. Пусть $\Pi = \mathbb{R}^{n-1}$ есть плоскость, параметризованная набором $(\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2})$ действительных чисел. Рассмотрим отображение

$\mathrm{DO}: \ \Pi \times \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{M}$,

$\mathrm{DO}((\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2}), \ g) = \ g^c \,\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2})$.

Это есть многочленное отображение алгебраических поверхностей.

Докажем сюръективность DO. Пусть $A \in \mathbb{M}$. По теореме DO, на орбите матрицы A существует диагональная матрица D. В D есть кратное собственное значение, обозначим его λ. По утверждению 4 леммы Orbit1, любые перестановки на диагонали D представляются заменами из $\mathrm{SO}(n)$. Некоторая перестановка на диагонали D даёт матрицу вида $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2})$. Следовательно, $A = \mathrm{DO}((\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2}), \ g)$ для некоторого $g \in \mathrm{SO}(n)$. Сюръективность доказана.

Как отмечено в начале §4, алгебраическая поверхность $\mathrm{SO}(n)$ является неприводимой. Плоскость Π тоже есть неприводимая поверхность.

Прямое произведение неприводимых алгебраических множеств является неприводимым алгебраическим множеством.

Доказательство этого есть упражнение для читателя, с другой стороны, оно имеется в книге [7] (глава I, §3, теорема 3). И хотя все результаты [7] приведены для случая пространства над алгебраически замкнутым полем, но доказательство этого утверждения о прямом произведении годится и для нашего случая вещественного пространства. Итак, по вышеназванной теореме о прямом произведении, поверхность $\Pi \times \mathrm{SO}(n)$ является неприводимой. Поэтому, по лемме П2, $\mathbb{M}$ также неприводима. $\square$

§3. Результаты из книги [1]

Теорема (Ar).

(1) $\mathbb{M}$ *есть конечное объединение гладких подмногообразий коразмерности 2 и выше в пространстве* $\mathrm{Sym}(n)$.

(2) $\mathbb{MH}$ *есть гладкое подмногообразие коразмерности 2 в* $\mathrm{Sym}(n)$.

(3) $\mathbb{MH}$ *есть множество открытое в* $\mathbb{M}$ *и плотное в* $\mathbb{M}$.

Доказательство. Эта теорема сразу следует из построений Добавления 10 книги [1]. Пункты (1) и (2) есть наша переформулировка, ибо в данном параграфе [1] рассматриваются только положительно определенные формы из $\mathrm{Sym}(n)$.

Эта теорема следует из [1] следующим образом.

Определение.

1) Обозначим $\mathrm{Sym}_+(n)$ *множество положительно определенных форм из* $\mathrm{Sym}(n)$. *Оно задается условием положительности собственных значений и является открытым множеством в* $\mathrm{Sym}(n)$.

2) Обозначим $\mathbb{M}_+ = \mathbb{M} \cap \mathrm{Sym}_+(n)$, $\quad \mathbb{MH}_+ = \mathbb{MH} \cap \mathrm{Sym}_+(n)$.

Каждое из многообразий $\mathrm{Sym}_+(n)$, $\mathbb{M}_+$, $\mathbb{MH}_+$ изометрично отображается на себя действием замен координат из $\mathrm{SO}(n)$ (смотри ниже лемму S). Далее, прибавление скалярной матрицы (*скалярный сдвиг*) изометрично отображает на себя каждое из многообразий $\mathrm{Sym}(n)$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{MH}$ (смотри ниже лемму Orbit1). И для всякой формы из $\mathrm{Sym}(n)$ некоторая ее окрестность отображается некоторым скалярным сдвигом на окрестность в $\mathrm{Sym}(n)_+$. Поэтому локальные метрические свойства $\mathbb{M}_+$ — таковы же, как у поверхности $\mathbb{M}$. Таким образом мы обобщаем (через скалярный сдвиг) теорему из [1] для эллипсоидов на случай поверхности $\mathbb{M}$ в $\mathrm{Sym}(n)$.

В книге [1], в разделе (A) Добавления 10, описывается диффеоморфизм из $\mathbb{M}_+$ в многообразие эллипсоидов пространства $V = \mathbb{R}^n$, имеющих центр в точке 0: $\quad A \mapsto \{v \in V \mid vAv* = 1\}$
— квадратичной форме соответствует множество – эллипсоид всех векторов, на которых эта форма равна 1. Добавим объяснение: в каком смысле эллипсоиды образуют гладкое многообразие. Многообразие эллипсоидов отождествлено с $\mathrm{SO}(n) \times R^n_+$ посредством параметризации парой (g, spe), $g \in \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{spe} \in R^n_+$. Здесь g есть оператор вращения, переводящий фиксированный ортогональный репер $(e_1, \ldots, e_n)$ в репер главных осей эллипсоида, а набор spe положительных вещественных чисел задает длины главных осей. Итого — $\dim\mathrm{SO}(n) + n = (n(n-1)/2) + n = n(n+1)/2$ параметров.

В этом представлении $\mathbb{M}_+$ есть многообразие всех *эллипсоидов вращения*.

Теорема 1 Добавления 10 книги [1] гласит (в наших обозначениях): *(1)* $\mathbb{M}_+$ *есть конечное объединение гладких подмногообразий коразмерности 2 и выше в многообразии* Sym_+,

(2) $\mathbb{MH}_+$ *есть гладкое подмногообразие коразмерности 2 в* Sym_+ (утверждение (2) в формулировке отсутствует, но является первой частью доказательства этой теоремы 1, данного в [1]).

Далее, по лемме из вышеприведенной теоремы 1 книги [1], $\mathbb{M}_+ \backslash \mathbb{MH}_+$ есть объединение конечного множества гладких подмногообразий в Sym_+ коразмерности больше 2. Поэтому $\mathbb{MH}_+$ есть открытое и плотное в $\mathbb{M}_+$ множество.

Ввиду отмеченной выше симметрии по скалярным сдвигам, эта теорема верна (в нашей формулировке) и для поверхностей $\mathbb{M}, \mathbb{MH}$ в $\mathrm{Sym}(n)$. $\square$

§4. Некоторые определения и предварительные построения

Определение (Basic).

0. $V = \mathbb{R}^n$ — евклидово пространство,

1. Dg — пространство диагональных матриц,
$\mathbb{M}$ есть конусное множество, содержащее прямую Scal скалярных матриц.

Для диагональной матрицы D обозначим $D(i) = D(i,i)$.
Диагонально-упорядоченной матрицей называем диагональную матрицу D, в которой $D(1) \leqslant \ldots \leqslant D(n)$.

2. $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(V)$ есть подгруппа в $O(V)$, выделенная условием определитель $= 1$, имеет размерность $\dim\mathrm{SO}(n) = n(n-1)/2$.

$\mathrm{SO}(n)$ есть алгебраическая, компактная, связная группа Ли, являющаяся алгебраически неприводимой поверхностью.

3. $X \mapsto g\ X\ g^{-1}$ есть действие невырожденной замены координат. Для ортогонального g выполнено $g^{-1} = g^*$ (транспонирование), и $g\ X\ g^*$ есть замена базиса для симметричной билинейной формы X. Для оператора g из $O(n)$ обозначаем действие замены по этому оператору как

$$g^c X = g^c(X) = g\ X\ g^*,$$

g^{-c} обозначает $(g^{-1})^c$.

В случае трёхмерного пространства $(n = 3)$ 1) $\mathrm{RtA}(l, \phi)$ обозначает оператор вращения пространства вокруг оси l на угол ϕ,

2) l^ϕ обозначает замену $\mathrm{RtA}(l, \phi)^c$,

3) 1-орбитой формы M по оси l называем орбиту M под действием замен по вращениям вокруг l.

4. Обозначим $\mathbb{MD}$ множество диагональных матриц из $\mathbb{M}$,
$\mathbb{MDH} = \mathbb{MD} \cap \mathbb{MH}$.
Для $1 \leqslant i < j \leqslant n$ обозначим $\Pi_{i,j}$ плоскость в Dg, заданную уравнением $D(i) = D(j)$.

Например, для $n = 3$ $\Pi = \Pi_{1,2}$ есть все матрицы вида $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu)$, а $\Pi_{1,3}$ и $\Pi_{2,3}$ получаются из Π перестановочными заменами из $\mathrm{SO}(3)$.

Обозначим $\Pi^h_{i,j} = \Pi_{i,j} \cap \mathbb{MH}$.

5. Фиксируем некоторое скалярное произведение scp на пространстве $V = \mathbb{R}^n$, базис $\mathrm{Bas} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в V ортонормированный по scp,
и будем считать, что матрицы из $\mathbb{L}(V)$ суть записи линейных операторов пространства V в базисе Bas.

Считаем, что матрицы из $\mathrm{Sym}(n)$ суть записи в Bas квадратичных форм.

Также говорим об операторах из $O(n)$, задаваемых перестановками на множестве Bas, или, например (для случая $n = 3$), являющихся вращениями вокруг оси e_i.

6. Стабилизатором $\mathrm{St}(A)$ формы A из $\mathrm{Sym}(n)$ в группе $G = \mathrm{SO}(n)$, $O(n)$ называем подгруппу тех операторов $g \in G$, для которых $g^c A = A$.

7. Для коммутативного кольца R и подмножества $S \subset R^n$ отображение $P : S \to R^m$ называем *многочленным*, если каждая координата образа задана в виде многочлена от координат $\{x_1, \ldots, x_n\}$ области определения.

Например, отображение $P : \mathrm{Dg} \times \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Sym}(n)$, заданное формулой $P(D, g) = g^c\, D$, является многочленным, так как каждый элемент матрицы-результата выражен в виде многочлена от элементов матриц D и g.

Пример 1. Для $n = 3$ диагональные матрицы из $\mathbb{MH}$ суть все матрицы вида $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu)$ при $\lambda \neq \mu$ и ещё два семейства, получаемые из этого перестановками на диагонали.

Лемма (Stab). *Пусть матрица M принадлежит $\mathbb{MH}$.*

1) Множество V_1, состоящее из векторов, принадлежащих кратному собственному значению M, есть двумерное подпространство.

2) Связная составляющая G_e единицы в стабилизаторе $\mathrm{St}(M)$ в $\mathrm{SO}(n)$ есть однопараметрическая подгруппа операторов, которые на V_1 являются вращениями двумерной плоскости, а на ортогональном дополнении к V_1 являются тождественными.

Приложение Stab содержит простое доказательство этой леммы.

Определение (s-метрика). *Зададим на пространстве $\mathbb{L}(n)$ скалярное произведение $\langle_s, \rangle$:*

$$\langle_s X, Y\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{i,j} y_{i,j}$$

назовем его s-произведением и s-метрикой.
Это есть евклидова метрика. Ей соответствующую квадратичную форму назовем $\mathrm{sQuad}(X)$ — сумма квадратов элементов матрицы X.

S-метрика задает ту же топологию в $\mathbb{L}(n)$, что и обычная норма линейного оператора.

В этой статье слова “расстояние”, “угол”, “ортогональность”, “изометрия”, “ортогональная проекция”, “окружность”, “сфера”, “радиус”, “центр окружности”, “прямой цилиндр” в применении к точкам и подмножествам $\mathbb{L}(n)$ — понимаются в смысле s-метрики
(но это условие не относится к пространству V, на котором действуют операторы из $\mathbb{L}(V)$!).

Лемма (S) (видимо, известная).

Для любой матрицы X из $\mathbb{L}(n)$ и любого ортогонального оператора g выполнено равенство

$$\mathrm{sQuad}(X) = \mathrm{sQuad}(g\ X) = \mathrm{sQuad}(g^c X)$$

§5. Предварительные сведения об орбите

Лемма (Orbit1). *(1) Действие* $\mathrm{SO}(n)$ *отображает* $\mathbb{M}$ *на себя.*

(2) Скалярные матрицы и только они суть неподвижные точки действия $\mathrm{SO}(n)$ *заменами на* $\mathrm{Sym}(n)$.

(3) $\mathbb{M}$ *есть объединение взаимно непересекающихся орбит.*

(4) Любая диагональная матрица из $\mathbb{M}$ *приводится заменой по некоторому оператору из* $\mathrm{SO}(n)$ *к упорядоченной диагонали. В частности, перестановки на диагонали матрицы из* $\mathbb{MD}$ *представимы в виде замен из* $\mathrm{SO}(n)$.

(5) Две формы из $\mathbb{M}$ *принадлежат одной орбите тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый спектр.*

(6) Для каждой матрицы из $\mathbb{M}$ *в её орбите есть ровно одна диагонально-упорядоченная матрица.*

(7) 7.1. Для любого действительного t *и любой формы* $A \in \mathrm{Sym}(n)$ *орбита формы* $t \cdot A$ *получается из орбиты* A *растяжением на множитель* t.

7.2. Для $n = 3$ *орбиты любых двух форм из* $\mathbb{MH}$ *отличаются между собой некоторым скалярным сдвигом и растяжением на некоторый ненулевой множитель (и мы используем свойство такого преобразования сохранять углы в смысле* s*-метрики между любыми прямыми в пространстве* $\mathrm{Sym}(n)$*).*

(8) 8.1. Дискриминант матрицы из $\mathbb{L}(n)$ *не изменяется при скалярном сдвиге. Скалярные сдвиги отображают поверхность* $\mathbb{M}$ *на себя.*

8.2. Для каждого действительного s *сечение* $\mathbb{M}_s$ *поверхности* $\mathbb{M}$ *гиперплоскостью след*$(X) = s$ *есть подповерхность, отображаемая на себя действием замен из* $\mathrm{SO}(n)$.

$\mathbb{M}$ *есть прямой цилиндр над* $\mathbb{M}_0$ *с прямой* Scal *в качестве образующей.*

В утверждениях (4), (5) и (6) существенно, что матрица имеет кратное собственное значение.

§6. Строение дискриминантной поверхности в $\mathrm{Sym}(n)$

Ниже Π обозначает плоскость $\Pi_{1,2}$, принадлежащую поверхности $\mathbb{MD}$ (определение Basic). Здесь мы её отождествляем с пространством $\mathbb{R}^{n-1}$ посредством параметризации $(\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2}) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2})$.

И имеем в виду, что в плоскости Π матрицы из $\mathbb{MH}$ образуют открытое множество.

Слово "орбита" означает в дальнейшем орбиту формы из $\mathrm{Sym}(n)$ под действием замен из $\mathrm{SO}(n)$.

Теорема (DS). **(1)** $\mathbb{M}$ *есть неприводимая алгебраическая поверхность.*

(2) $\mathbb{M}$ *есть объединение сечений* $\mathbb{M}_s$*, задаваемых условиями след*$(X) = s$.

$\mathbb{M}$ *есть прямой цилиндр над* $\mathbb{M}_0$ *с образующей — прямой* Scal.

(3) *Орбиты форм из* $\mathbb{M}$ *классифицируются по спектру.*

(4) $\mathbb{MH}$ *имеет следующее строение.*

4.1. *Локально,* $\mathbb{MH}$ *есть гладкое расслоение над плоскостью* Π *со слоем — орбитой соответствующей матрицы из* $\Pi \cap \mathbb{MH}$.

Орбита каждой матрицы из $\mathbb{MH}$ *ортогонально пересекает плоскость* Dg *диагональных матриц.*

4.2. *Орбита любой формы из* $\mathbb{MH}$ *есть гладкая, компактная, алгебраическая, связная поверхность размерности* $\dim \mathrm{SO}(n) - 1 = (n(n-1)/2) - 1$. *Эта орбита лежит на сфере в гиперплоскости, ортогональной к прямой скалярных матриц.*

(5) *Отображение* $\mathrm{DO} : \Pi \times \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{M}$,

$\mathrm{DO}((\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2}),\ g) = \ g^c \,\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2})$ *есть сюръективное многочленное отображение алгебраических поверхностей.*

Замечание. *1. Локальная параметризация* $\mathbb{MH}$ *есть то же, что параметризация* $\mathbb{M}$ *в окрестности точки из* $\mathbb{MH}$*, ибо по теореме Ar, множество* $\mathbb{MH}$ *открыто в* $\mathbb{M}$.

2. Утверждение 4.1 мало чем отличается от теоремы из [1] *о гладкости подмногообразия* $\mathbb{MH}$ *в области эллипсоидов (пункт (2) теоремы Ar §3 нашей статьи). Поэтому мы пропускаем доказательство пункта 4.1. Вместо него дадим следующее неформальное описание.*

Ввиду действия $\mathrm{SO}(n)$, $\mathbb{MH}$ имеет повсюду такое же локальное строение, как в окрестности любой диагональной матрицы из $\mathbb{MH}$. В окрестности такой матрицы D_0 поверхность $\mathbb{MH}$ гладко расслаивается на орбиты, каждая орбита ортогонально к плоскости Dg исходит из некоторой матрицы $D \in \Pi$ из окрестности D_0. Орбита D локально диффеоморфна однородному пространству $\mathrm{SO}(n)/\,\mathrm{St}(D)$ смежных классов по стабилизатору. А по лемме Stab, связная составляющая St_1 единицы в стабилизаторе $\mathrm{St}(D)$ есть однопараметрическая подгруппа вращений двумерного собственного подпространства V_1 для (единственного) кратного собственного значения для D (на ортогональном дополнении к V_1 операторы из St_1 тождественны).

Используемые здесь сведения о стабилизаторе, орбите и гладком многообразии смежных классов — имеются, например, в книге [8]: глава 1, §1, теорема 1 и следующее за ней упражнение; теоремы 3, 4, раздел 9 об однородных пространствах.

В терминах многообразия эллипсоидов ([1], Добавление 10) это утверждение (4.1) о гладком расслоении выражается так. В параметризации окрестности матрицы D из $\mathbb{MDH}$ парой (g, spe) (из §3) часть spe соответствует плоскости Π в пространстве диагональных матриц, и при малых поворотах (g) репера главных осей каждая ость поворачивается в направлении ортогональном этой оси.

§7. Дополнение к теореме для случая $n = 3$

Напомним, что $\mathbb{M}_s = \{A \in \mathbb{M}| \ \text{след}(A) = s\}$.

Теорема (DS3).

(1) *Особые точки в $\mathbb{M}$ суть скалярные матрицы и только они.*

(2) *$\mathbb{M}$ есть прямой цилиндр над $\mathbb{M}_0$ (теорема DS (2)). Поэтому достаточно описания поверхности $\mathbb{M}_0$. Трёхмерная поверхность $\mathbb{M}_0$ в пятимерном пространстве имеет следующее строение.*

2.1. *$\mathbb{M}_0$ есть конус с вершиной в нуле над орбитой матрицы* $\operatorname{diag}(1, 1, -2)$. *Эта двумерная орбита лежит на четырёхмерной сфере с центром в нуле.*

2.2. *Орбита любой нескалярной матрицы из $\mathbb{M}$ есть двумерная алгебраическая поверхность, лежащая на четырёхмерной сфере и диффеоморфная проективной плоскости $\mathbb{R}P(2)$.*

(3) *Орбита всякой матрицы из $\mathbb{M}$ получается из орбиты матрицы* $\operatorname{diag}(1, 1, -2)$ *некоторыми скалярным сдвигом и растяжением.*

(4) *Пересечение поверхности $\mathbb{M}_0$ с плоскостью диагональных матриц состоит из трёх прямых, пересекающихся в нуле. Для этих прямых имеются такие параметризации:*

$\operatorname{diag}(\lambda, \lambda, -2\lambda)$, $\operatorname{diag}(\lambda, -2\lambda, \lambda)$, $\operatorname{diag}(-2\lambda, \lambda, \lambda)$.

Замечание. *Естественная гладкая параметризация поверхности $\mathbb{M}_0$ в окрестности всякой формы $A \neq 0$ из $\mathbb{M}_0$ есть расслоение над прямой $\overline{0A}$ со слоем — орбитой матрицы, лежащей на этой прямой, причём эта орбита ортогонально пересекает $\overline{0A}$.*

Дальнейшее изложение служит доказательству теорем DS, DS3.

7.1. Выводы об орбите по ортогональным заменам.

Лемма 1 (AlgSO). *(известная). (1) Касательное пространство к поверхности* $\mathrm{SO}(n)$ *в точке E (алгебра Ли группы Ли* $\mathrm{SO}(n)$*) состоит из всех кососимметрических матриц.*

(2) Касательное пространство к орбите любой диагональной матрицы D в точке D состоит из коммутаторов матрицы D со всеми кососимметрическими матрицами.

Приложение AlgSO содержит простое доказательство этой леммы.

Лемма (Orbit2). (1) *Орбита любой нескалярной матрицы из* $\mathrm{Sym}(n)$ *ортогонально пересекает плоскость диагональных матриц.*

(2) *Орбита матрицы из* $\mathrm{Sym}(n)$ *лежит в гиперплоскости ортогональной к прямой скалярных матриц.*

(3) *Орбита любой матрицы из* $\mathbb{MH}$ *есть гладкая, компактная, алгебраическая, связная поверхность размерности* $\dim \mathrm{SO}(n) - 1$.

7.1.1. *Дальнейший вывод об орбите.* Отображение

$$\mathrm{DO}_A : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Orbit}(A), \quad \mathrm{DO}_A(g) = g^c A$$

есть многочленное отображение алгебраических поверхностей; его образ есть $\mathrm{Orbit}(A)$ (по определению орбиты), а группа $\mathrm{SO}(n)$ является компактной и связной. Поэтому DO_A непрерывно, а поверхность $\mathrm{Orbit}(A)$ является компактной и связной.

Неприводимость орбиты следует из того, что а) $\mathrm{SO}(n)$ есть неприводимая поверхность (ссылка из определения Basic, §4),

б) DO_A есть сюръективное многочленное отображение на орбиту A,

в) из леммы П2.

Итак, орбита для A есть неприводимая, связная, компактная алгебраическая поверхность, лежащая на некоторой сфере в гиперплоскости Π^*. Наименьшая размерность объемлющей плоскости для орбиты зависит от кратностей в спектре A.

Опишем гладкую параметризацию орбиты любой формы A из $\mathbb{MH}$.

Пусть $\mathrm{Bas} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ есть базис из собственных векторов для $A \in \mathbb{MH}$, и вектора e_1 и e_2 соответствуют одному собственному значению. По лемме Stab, связная составляющая St_1 единицы в стабилизаторе $\mathrm{St}(A)$ есть однопараметрическая подгруппа вращений плоскости $V_1 = L(e_1, e_2)$ (на ортогональном дополнении к V_1 операторы из St_1 тождественны). $\mathrm{St}(A)$ есть подгруппа Ли размерности 1, а однородное пространство $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{St}(A)$ левых смежных классов есть гладкое многообразие размерности $\dim \mathrm{SO}(n) - 1$. Соответственно, орбита формы A есть гладкое замкнутое подмногообразие в $\mathrm{Sym}(n)$ размерности $\dim \mathrm{SO}(n) - 1$ локально диффеоморфное $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{St}(A)$.

Пункт 2 замечания после теоремы DS дает ссылку на теорию, из которой сразу следуют эти три последние утверждения о стабилизаторе и орбите.

Ввиду действия $\mathrm{SO}(n)$, малые окрестности различных точек орбиты являются изометричными. Точнее: для любых двух таких точек A и B существует окрестность точки A на орбите, которая некоторой заменой из $\mathrm{SO}(n)$ изометрично отображается на окрестность точки B на орбите. Это дает однородный атлас гладкой параметризации всей орбиты.

Лемма Orbit2 доказана.

Таким образом **Теорема DS доказана**.

Вот части этого доказательства.

* Гладкость $\mathbb{MH}$ и коразмерность 2 — в книге [1].

(1): неприводимость (теорема "Неприводимость" §2).

(2): строение $\mathbb{M}$ в виде прямого цилиндра (лемма Orbit1, пункт 8).

(3) — лемма Orbit1, пункт 5.

(4.1): орбита каждой матрицы из $\mathbb{MH}$ ортогонально пересекает плоскость диагональных матриц (лемма Orbit2, пункт 1).

(4.2) — лемма Orbit2.

(5) (о сюръективном отображении DO) — в доказательстве теоремы "Неприводимость".

7.2. Подробности строения орбиты для $n = 3$.

Лемма 2 (ST). *В случае* $n = 3$ *орбита любой нескалярной матрицы* A *из* $\mathbb{M}$ *есть двумерная алгебраическая поверхность, лежащая на четырёхмерной сфере и диффеоморфная проективной плоскости* $\mathbb{R}P(2)$.

Доказательство. Утверждение об алгебраичности орбиты доказано в лемме Orbit2.

По утверждению 2 леммы Orbit2, орбита лежит в 5-мерной плоскости — ортогональном дополнении к скалярной прямой. Действие замен из $\mathrm{SO}(V)$ сохраняет s-метрику (лемма S). Это добавляет уравнение сферы для произвольной матрицы орбиты, и выходит, что орбита лежит на 4-мерной сфере (в смысле s-метрики).

Осталось доказать утверждение о диффеоморфном вложении из проективной плоскости на орбиту. Ввиду действия группы $\mathrm{SO}(3)$ и утверждения (7) леммы Orbit1, достаточно доказательства этого для диагональной матрицы $D = \mathrm{diag}(1, 1, -2)$ (имеющей след 0).

Представляем $\mathbb{R}P(2)$ в виде многообразия осей в трёхмерном пространстве V, и зададим отображение

$$s:\ \mathbb{R}P(2) \to\ \mathrm{Orbit}(D), \quad s(l) = \mathrm{Rt}(e_3, l)^c D.$$

Здесь 1) ось e_3 соответствует собственному значению -2 матрицы D,
2) l есть любая ось в V — элемент проективной плоскости,
3) $g = \mathrm{Rt}(e_3, l)$ есть оператор поворота пространства V от оси e_3 до оси l вокруг нормали к плоскости $L(e_3, l)$, при этом для $l = e_3$ полагаем $g = E$.
4) g^c есть оператор замены в $\mathrm{Sym}(3)$ по этому повороту.

По построению, $g \in \mathrm{SO}(3)$, так что образ s лежит на орбите D.

Требуется доказать, что s есть диффеоморфное вложение из проективной плоскости в пространство $\mathrm{Sym}(3)$, на орбиту. Гладкость отображения s видна из его формулы — транспонирование и умножение матриц. Далее, заметим сначала, что **1)** по утверждению (5) леммы Orbit1, всякий оператор A из орбиты матрицы D имеет спектр $\mathrm{spe} = \{1, 1, -2\}$,

2) существует и единственная для этого A ось l, имеющая собственное значение -2 для A. Единственность этой оси следует из того, что при наличии другой такой оси значение -2 в спектре A было бы (по теореме DO) кратным, что противоречит значению много-множества spe.

Далее, для осей $l_1 \neq l_2$ рассмотрим операторы $s(l_1)$ и $s(l_2)$. Они имеют разные оси для собственного значения -2, а как выше доказано, каждый оператор орбиты D имеет единственную ось для собственного значения -2. Следовательно, $s(l_1) \neq s(l_2)$, и потому отображение s инъективно.

Осталось доказать сюръективность s. Пусть $A \in \mathrm{Orbit}(D)$. Этот оператор имеет спектр $\mathrm{spe} = \{1, 1, -2\}$, и существует единственная ось l, имеющая собственное значение -2 для A. Положим $g = \mathrm{Rt}(e_3, l)$. Тогда $s(l) = g^c D = A$. Докажем это разобрав следующие два случая.

1) $l = e_3$. Тогда $g = E$, $Ae_3 = -2e_3$, двумерное подпространство $V_1 = L(e_1, e_2)$, принадлежащее собственному значению 1, ортогонально e_3 (по утверждению 3 теоремы DO), на подпространстве V_1 оператор A действует тождественно, поэтому $A = D = g^c D = s(l)$.

2) $l \neq e_3$. Оператор g переводит ось e_3 в l, и будучи ортогональным, переводит подпространство $L(e_1, e_2)$ в ортогональное дополнение $l^\perp$ к оси l. l имеет собственное значение -2 для A. Поэтому, и по теореме DO, $l^\perp$ есть собственное подпространство для значения 1 для A. Поэтому в базисе $(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ оператор A имеет матрицу $\mathrm{diag}(1, 1, -2) = D$. Это означает, что $g^c D = A$, и это доказывает сюръективность s. $\square$

Замечание. *1. Соображение о параметризации этой орбиты однозначным выбором оси l подсказано мне С. Ю. Оревковым.*

2. В [6] доказывается, что эта орбита не лежит ни в какой четырёхмерной плоскости и содержит семейство окружностей, полученное вращениями окружности вокруг одной точки в пятимерном пространстве.

7.3. Доказательство строения $\mathbb{M}$ для $n = 3$. По утверждению (8) леммы Orbit1, $\mathbb{M}$ есть прямой цилиндр над сечением $\mathbb{M}_0$. Так что остается выяснить геометрическое строение $\mathbb{M}_0$. Спектр всякой матрицы из $\mathbb{M}_0$ есть много-множество вида $\{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$, так как на три собственные значения наложены условия нулевой суммы и совпадения по меньшей мере двух значений. Поэтому, по теореме DO, диагональные матрицы из $\mathbb{M}_0$ суть те и только те, что имеют вид $D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, -2\lambda)$ или $D_2(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, -2\lambda, \lambda)$ или $D_3(\lambda) = \mathrm{diag}(-2\lambda, \lambda, \lambda)$.
Утверждение (4) теоремы DS3 *доказано.*

Замечание. **1)** *Для любого λ матрицы $D(\lambda), D_2(\lambda)$ и $D_3(\lambda)$ принадлежат одной орбите (по утверждению 5 леммы Orbit1).*

2) *$D(1)$ и $D(-1)$ суть диаметрально противоположные точки на сфере S_4, содержащей $D(1)$, но они лежат на разных орбитах.*

Конус $\mathbb{M}_0$ есть объединение "положительного" полуконуса — объединения орбит семейства $D(\lambda)$ для $\lambda \geqslant 0$, и "отрицательного" полу-конуса — объединения орбит семейства $D(\lambda)$ для $\lambda \leqslant 0$.

3) *Пересечение $\mathbb{M}_0$ со сферой S_4, содержащей $D(1)$, есть* $\mathrm{Orbit}(D(1)) \cup \mathrm{Orbit}(D(-1))$.

Спектр всякой формы $A \in \mathbb{M}_0$ пропорционален много-множеству $\{1, 1, -2\}$ с множителем λ, зависящим от A. Поэтому орбиты форм из $\mathbb{M}_0$ суть орбиты матриц $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, -2\lambda)$ при всех вещественных λ. А всякая такая орбита получается из орбиты матрицы $D = \mathrm{diag}(1, 1, -2)$ растяжением на множитель λ, ибо $g^c \lambda D = \lambda g^c D$ для любого невырожденного $g \in \mathbb{L}(n)$.

Поэтому $\mathbb{M}_0$ есть конус с вершиной в нуле над орбитой матрицы D. А по лемме ST из §7.2, эта орбита есть диффеоморфный образ проективной плоскости, лежащий на сфере S_4 с центром в нуле.

Теорема. *Нулевая матрица есть единственная особая точка на поверхности $\mathbb{M}_0$.*

Доказательство. Всякая ненулевая матрица A из $\mathbb{M}_0$ принадлежит $\mathbb{MH}$. Согласно [1] (смотри §3 этой статьи), такая точка есть неособая на $\mathbb{M}$. Раз $\mathbb{M}$ есть прямой цилиндр над $\mathbb{M}_0$, то A также является неособой в $\mathbb{M}_0$.

Почему нуль есть особая точка ? Основание конуса в нашем случае есть двумерная поверхность весьма непросто вложенная в четырёхмерную сферу. Поэтому для доказательства не достаточно наглядного представления о прямом круговом конусе. Получим доказательство, вычисляя зависимости между касательными векторами. Особенность в нуле имеется из-за того, что 1) $\mathbb{M}_0$ есть конусное множество с вершиной в нуле,
2) мы предъявляем четыре матрицы A_i на орбите матрицы $D = \mathrm{diag}(1, 1, -2)$ такие, что оси $\overline{0A_i}$ являются линейно независимыми (и лежат на $\mathbb{M}_0$).

Первые две и из этих матриц суть $D = \mathrm{diag}(1, 1, -2)$ и $D_2 = \mathrm{diag}(1, -2, 1)$. Далее, орбита матрицы D содержит 1-орбиту для D по оси e_1. Это есть окружность, проходящая через матрицы D и D_2, причём D получается при угле поворота 0, D_2 получается при угле поворота $\pi/2$. Нам также нужна пара недиагональных матриц на орбите. Так, $e_1^{\pi/4} D$ есть матрица

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a-1 \end{pmatrix}, \quad a = -1/2,\ b = -3/2$$

(напомним, что e_i^{ϕ} есть замена по оператору поворота $\mathrm{RtA}(e_i, \phi)$). Таким же образом на 1-орбите D по e_2 есть матрица

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -a-1 \end{pmatrix}$$

— с теми же a и b. Теперь, чтобы легче увидеть линейную независимость симметрических матриц D, D_2, M_1, M_2 запишем каждую из них в виде одной строки — вектора $[X(i,j)|\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3]$. При этом пропускаем под-диагональную часть каждой из этих матриц, ибо она равна над-диагональной части. Получим четыре вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a & b & -a-1 \\ a & 0 & b & 1 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

После прохода очистки первой колонки при приведении к ступенчатому виду получается матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b & -a+1 \\ 0 & 0 & b & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Далее, четвёртый вектор переставляется на второе место, а к третьему прибавляется второй, умноженный на $a-1$, и получается матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & b & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $b \neq 0$, $b_2 = b - 2(a-1) = -3/2 - 2(-3/2) \neq 0$. Поэтому это есть ступенчатая матрица ранга 4, и матрицы D, D_2, M_1, M_2 линейно не зависимы, как и им соответствующие оси. На поверхности $\mathbb{M}_0$ найдены четыре оси, проходящие через вершину этой конусной поверхности и имеющие линейно независимые направления. Поэтому эта вершина есть особая точка на $\mathbb{M}_0$. Объясним, почему. Как доказано выше, каждая ненулевая точка в $\mathbb{M}_0$ является неособой и потому имеет окрестность в $\mathbb{M}_0$ диффеоморфную трёхмерному шару. Если бы нуль был неособой точкой, то, по определению неособости, существовала бы окрестность нуля в $\mathbb{M}_0$ диффеоморфная трёхмерному шару. Размерность 3 этого шара противоречит наличию указанных нами четырёх линейно независимых осей в $\mathbb{M}_0$, исходящих из нуля. Поэтому точка нуль есть особая на $\mathbb{M}_0$. □

Итак, 0 есть единственная особая точка в $\mathbb{M}_0$. А по доказанной теореме DS, $\mathbb{M}$ есть прямой цилиндр над $\mathbb{M}_0$ с прямой Scal в качестве образующей. Это доказывает последнее оставшееся утверждение теоремы DS3:

для $n = 3$ особые точки в $\mathbb{M}$ суть скалярные матрицы и только они.

Теорема DS3 доказана.

§8. Приложение

Доказательства в Приложении не используют утверждений, доказываемых в основной части статьи.

Все утверждения из Приложения являются очевидными или известными, они доказываются здесь по формальным причинам.

Лемма (Stab). *Пусть матрица M принадлежит $\mathbb{MH}$.*

1) Множество V_1, состоящее из векторов, принадлежащих кратному собственному значению M, есть двумерное подпространство.

2) Связная составляющая G_e единицы в стабилизаторе $\mathrm{St}(M)$ в $\mathrm{SO}(n)$ есть однопараметрическая подгруппа операторов, которые на V_1 являются вращениями двумерной плоскости, а на ортогональном дополнении к V_1 являются тождественными.

Доказательство. Пусть λ есть (единственное) кратное собственное значение оператора M (его кратность равна 2). По теореме DO, в пространстве V существует базис B, состоящий из собственных векторов оператора M, причём в этом базисе ровно два вектора, — обозначим их u и v, — имеют собственное значение λ. Обозначим $B_2 = B\backslash\{u, v\}$,
$V_1 = L(u, v)$, $V_2 = L(B_2)$.

Условие $g \in \mathrm{St}(M)$ значит, что оператор g перестановочен с M. Поэтому, если вектор v принадлежит собственному значению μ для M, то $Mgv = gMv = g\mu v = \mu gv$. Следовательно, каждое собственное подпространство для M отображается оператором g на себя.

Пусть g_1 и g_2 суть соответственно сужения g на V_1 и V_2.

Вектора из B_2 принадлежат одномерным собственным подпространствам для M и потому являются собственными для g. Оператор из $\mathrm{SO}(n)$ может иметь собственное значение только 1 или -1. Поэтому в базисе B_2 оператор g_2 имеет диагональную матрицу, в которой каждый диагональный элемент есть 1 или -1.

Далее, подпространство V_1 переводится в себя оператором g. Оператор M является скалярным на V_1, и потому его сужение на V_1 перестановочно с любым линейным оператором на V_1. g_1 есть ортогональный оператор двумерного пространства. Если g_2 имеет чётную кратность m для собственного значения -1, то g_1 имеет положительную ориентацию и является вращением вокруг нуля на некоторый угол — так как $\det(g) = 1$. Соответственно, если m нечётно, то g_1 имеет отрицательную ориентацию и является композицией вращения и отражения.

$\mathrm{St}(M)$ есть алгебраическая группа Ли ([8], глава 1, §1, теорема 1 и следующее за ней упражнение). Она состоит из нескольких частей связности. Пусть H есть множество операторов из $\mathrm{St}(M)$ тождественных на

V_2. Тогда $H \subseteq G_e$, ибо выше доказано, что всякий оператор из H есть вращение вокруг нуля на V_1, а множество таких вращений связно и гладко параметризовано углом поворота.

Выше доказано, что всякий оператор g из $\mathrm{St}(M)$ имеет на V_2 в базисе B_2 диагональную матрицу $D(g)$, в которой каждый диагональный элемент есть 1 или -1. Множество таких матриц $D(g)$ конечно и дискретно. Поэтому связной составляющей G_e принадлежат только те операторы g из $\mathrm{St}(M)$, для которых g_2 имеет единичную матрицу в базисе B_2 — то есть — тождественных на V_2. Поэтому $H = G_e$ — связная составляющая единицы. □

Лемма (AlgSO) (известная).

(1) Касательное пространство $so(n)$ *к поверхности* $\mathrm{SO}(n)$ *в точке* E *(алгебра Ли группы Ли* $\mathrm{SO}(n)$*) состоит из всех кососимметрических матриц.*

(2) Касательное пространство T *к орбите любой диагональной матрицы* D *в точке* D *состоит из коммутаторов матрицы* D *со всеми кососимметрическими матрицами.*

Доказательство. Обозначим $G = \mathrm{SO}(n)$.
<u>Докажем (1)</u> По определению, $so(n)$ состоит из производных $g'(0)$ гладких кривых $g(t)$ на поверхности G таких, что $g(0) = E$. По свойству транспонирования ортогональной матрицы, имеем тождество $g(t)g(t)^* = gg^{-1} = E$. Дифференцируя это тождество в точке $t = 0$, учитывая линейность отображения транспонирования и применяя правило дифференцирования произведения линейных операторов, зависящих от t, получаем

$$0 = (g(t)g(t)^*)'(0) = g'(0)g(0)^* + g(0)g'(0)^* = g'(0) + g'(0)^* = 0.$$

Это доказывает утверждение (1) о кососимметричности произвольной матрицы $(g'(0))$ из $so(n)$.
<u>Докажем (2)</u> По определению, T состоит из производных в точке $t = 0$ кривых вида $\gamma(t) = g(t)^c D$, где $g(t)$ есть всякая гладкая кривая на G такая, что $g(0) = E$. По правилу дифференцирования произведения линейных операторов, зависящих от t, имеем

$$(d/dt\ \gamma)(0) = d/dt\ (g(t)\ D\ g(t)^*)(0) = g'(0)\ D\ g(0)^* + g(0)\ D\ g'(0)^* = g'(0)D + D\ g'(0)^* \qquad (1).$$

Дифференцируя в нуле тождество $g(t)g(t)^* = E$ (для $g \in \mathrm{SO}(n)$), выводим равенство $g'(0)^* = -g'(0)$. Поэтому равенство (1) равносильно равенству $(d/dt\ \gamma)(0) = [g'(0),\ D]$ — коммутатор двух матриц. В нашем случае $g'(0)$ есть произвольный элемент алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$, а по утверждению (1), эта алгебра состоит состоит из всех кососимметрических матриц. □

Лемма (П0). *Для диагональной квадратной матрицы D и кососимметрической матрицы A того же размера коммутатор $[D, A]$ есть симметрическая матрица с нулевой диагональю.*

Доказательство. Симметричность коммутатора доказывают равенства

$$(DA - AD)^* = (DA)^* - (AD)^* = A^*D^* - D^*A^* = (-A)D - D(-A) = DA - AD.$$

Далее, достаточно доказать, что **(а)** DA имеет нулевую диагональ и **(б)** AD имеет нулевую диагональ. Причём (б) следует из (а), так как $AD = -(DA)^*$, а транспонирование и изменение знака свойство нулевой диагонали не изменяют. По определению произведения матриц, для любой (i-й) диагональной позиции имеем равенства

$$(DA)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} D_{i,j}A_{j,i} = D_{i,i}A_{i,i} = 0$$

— так как $D_{i,j} = 0$ при $i \neq j$, и $A_{i,i} = 0$.

□

Для наглядности дадим пример: для матриц

$$D = \operatorname{diag}(a, b), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем $[A, D] =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-a \\ b-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма (П1) (известная). *Прообраз $\mathbb{M}'$ алгебраического множества $\mathbb{M}$ при многочленном отображении $F:\ R^n \to R^m$ есть алгебраическое множество.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ есть множество нулей системы $\{p_1, \ldots, p_k\}$ многочленов. Тогда $\mathbb{M}'$ есть множество нулей для множества композиций $\{p_1(F(X)), \ldots, p_k(F(X))\}$. Действительно, если A принадлежит $\mathbb{M}'$, то $F(A)$ принадлежит $\mathbb{M}$; тогда $p_i(F(A)) = 0$ для всех i. Обратно: если $p_i(F(A)) = 0$ для всех i, то $F(A)$ принадлежит $\mathbb{M}$, следовательно, A принадлежит $\mathbb{M}'$ (по определению прообраза множества). □

Лемма (П2) (известная). *При сюръективном многочленном отображении алгебраических множеств $\mathbb{M}$ на $\mathbb{M}'$, если $\mathbb{M}$ неприводимо, то $\mathbb{M}'$ неприводимо.*

Доказательство. От противного: предположим, что $\mathbb{M}'$ есть объединение алгебраических множеств M_1 и M_2 отличных от $\mathbb{M}'$. По лемме П1, прообраз C_1 для M_1 и прообраз C_2 для M_2 суть алгебраические множества. И $\mathbb{M} = C_1 \cup C_2$. $M_1 \neq \mathbb{M}'$, поэтому $C_1 \neq \mathbb{M}$. По такой же причине $C_2 \neq \mathbb{M}$. Так что разложение $\mathbb{M} = C_1 \cup C_2$ противоречит неприводимости $\mathbb{M}$. □

Список литературы

[1] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1979.

[2] Арнольд В. И., *Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению*, Труды Математического института имени В. А. Стеклова, **224** (1999), 56–67.

[3] Борель А., *Линейные алгебраические группы*, Мир, М., 1972.

[4] Илюшечкин Н. В., *Дискриминант характеристического многочлена нормальной матрицы*, Математические заметки, **51** (1992), 16–23.

[5] Илюшечкин Н. В., *О соотношениях между слагаемыми дискриминанта симметрической матрицы*, Математические заметки, в 2011 году принято к печати.

[6] Mechveliani S. D., *Geometry of the Discriminant Surface of Quadratic Forms*, препринт в электронной библиотеке Корнельского Университета,
`http://arxiv.org/abs/0907.3293`, файлы .pdf, .ps.
Файл от октября 2011 года, хранящийся по этому адресу, есть исправленная статья по сравнению с файлом 2009 года, хранящимся по этому адресу.

[7] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, МЦНМО, М., 2007

[8] Винберг Э. Б., Онищик А. Л., *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.

[9] ван дер Варден Б. Л., *Алгебра*, Наука, М., 1979.

Институт программных систем РАН, г. Переславль-Залесский
E-mail: mechvel@botik.ru

рПУФХРИМП 19 апреля 2012 года.