Приближенное решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации

Е.Ф. Сачкова

Исследовательский Центр Процессов Управления
Институт Программных Систем РАН

Программные системы — Теория и приложения, 2006

Обзор доклада

Класс управляемых систем

Σ : $$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m,$$

$X_1, \dots, X_m$ — аналитические векторные поля в $\mathbb{R}^n$,
$u_1(t), \dots, u_m(t)$ — кусочно-непрерывные управления.

Для исследования представляет интерес случай $m < n$.

Задача управления

Дано: $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x)$,

$p, q \in \mathbb{R}^n, \quad T > 0, \quad \varepsilon > 0.$

Найти: $u(t), \; t \in [0, T]$, что соответствующая траектория $x(t)$

системы Σ: $x(0) = p, \; x(T) = \widetilde{q}, \; |\widetilde{q} - q| < \varepsilon$.

Алгебра Ли:

$$\mathrm{Lie}(X_1, \dots, X_m) = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_m, [X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \dots),$$

скобка Ли:

$$[X_i, X_j] = \frac{\partial X_j}{\partial x} X_i - \frac{\partial X_i}{\partial x} X_j$$

.

Теорема (Рашевский-Чжоу)

Система Σ вполне управляема на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она является системой полного ранга:

$$\dim \mathrm{Lie}(X_1, \dots, X_m)(x) = n \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Предполагаем: система Σ вполне управляема на $\mathbb{R}^n$.

Глобальная и локальная задачи управления

Зафиксируем $\delta > 0$.

- Глобальная задача, если $|p - q| \geqslant \delta$;
- Локальная задача, если $|p - q| < \delta$.

Алгоритм решения локальной задачи

- $\hat{\Sigma}$ — нильпотентная система в окрестности точки q, аппроксимирующая Σ;
- класс управлений (в процессе вычислений не меняется);
- точные решения $\hat{\Sigma}$: $u = \hat{u}(t), \;\; t \in [0, T], \quad x(0) = p, \;\; x(T) = q$;
- задача Коши: $\Sigma(\hat{u}(t)), \quad x(0) = p$;
- если решение задачи Коши $x(t): \;\; x(T) = \widetilde{q}, \quad |\widetilde{q} - q| \geqslant \varepsilon$, то
  $p := \widetilde{q}, \quad \Sigma(\hat{u}(t)), \quad x(0) = p$;
  количество итераций:= количество итераций $+ 1$,
  иначе stop;
  N — число итераций.

Локальное управление

$$u(t) = \begin{cases} u^1(Nt), & t \in [0, T/N], \\ u^2(Nt - T), & t \in [T/N, 2T/N], \\ \vdots & \\ u^N(Nt - (N-1)T), & t \in [T(N-1)/N, T], \end{cases}$$

где $u^i(t)$ — управление на i-ой итерации, $u(t)$ — конкатенация $u^1(t), \ldots, u^N(t)$.

Итак, $\Sigma(u(t))$: $\quad x(0) = p, \quad x(T) = \widetilde{q}, \quad |\widetilde{q} - q| < \varepsilon.$

Решение глобальной задачи

- Узлы $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$:
  $|p_{i+1} - p_i| < \delta$, $i = 0, \ldots, k$, $\quad p_0 = p$, $\quad p_{k+1} = q$;
- $k + 1$ локальных задач;
- $u(t)$ есть конкатенация $k + 1$ локальных управлений.

Решение глобальной задачи разрабатывается.

Построение нильпотентной аппроксимации $\hat{\Sigma}$

- Адаптированный базис в касательном пространстве, связанный с Σ.
- Адаптированные координаты, связанные с Σ.
- Векторные поля X_i разлагаются по формуле Тейлора в адаптированных координатах.
- $\hat{X}_i$ — главные члены тейлоровского разложения $X_i, \quad i = 1, \dots, m$.
- Нильпотентная система

$$\hat{\Sigma}: \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i \hat{X}_i.$$

Приложения

- Управление движением мобильных роботов.
- Мобильный робот — автомобиль.
- Движение: вперед - назад, поворот.
- Задача управления: перевести автомобиль из одного положения с заданной ориентацией в другое положение с другой заданной ориентацией.

Математическая модель

- (x_1, x_2) — положение автомобиля на плоскости;
- x_3 — угол поворота относительно OX;
- $v = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ — линейная скорость;
- $\dot{x}_3$ — угловая скорость;
- $u_1 = |v|,\ u_2 = \dot{x}_3$ — управляющие параметры;
- $\mathbb{R}^2_{x_1,x_2} \times S^1_{x_3}$ — пространство состояний автомобиля.

Управляемая система Σ_a

$$\Sigma_a : \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 &= u_2, \\ x &= (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2_{x_1,x_2} \times S^1_{x_3}, \\ u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Задача управления машиной на плоскости

Дано: $\Sigma_a,$

$$p, q \in \mathbb{R}^2_{x_1,x_2} \times S^1_{x_3}, \qquad T > 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

Найти: $u(t) = (u_1(t), u_2(t)), \;\; t \in [0, T]$, что

$$x(0) = p, \;\; x(T) = \widetilde{q}, \;\; |\widetilde{q} - q| < \varepsilon.$$

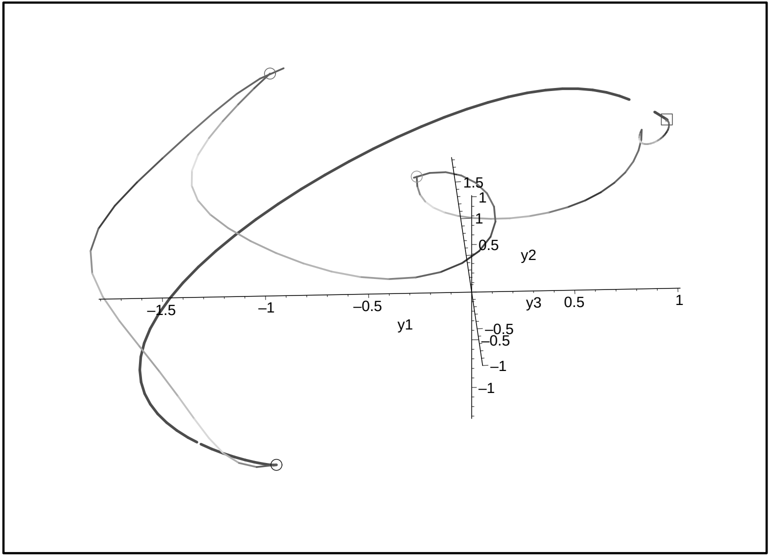
Нильпотентная аппроксимация системы $\hat{\Sigma}_a$

$$\hat{\Sigma}_a : \qquad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= u_1, \\ \dot{y}_2 &= u_2, \\ \dot{y}_3 &= u_2 y_1, \\ y &\in \mathbb{R}^3, \ \ u \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Решение задачи управления в классе оптимальных управлений

- Нильпотентная задача:
  Дано:
  $\hat{\Sigma}_a, \quad p, q \in \mathbb{R}^3, \quad T > 0.$
  Найти:
  $u(t), \quad t \in [0, T], \quad {\color{red} l} = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \to {\color{red} min},$
  $y(0) = p, \quad y(T) = q.$
- оптимальные управления ${\color{red} \hat{u}_o(t)}$ — тригонометрические функции.
- $\Sigma_a(\hat{u}_o^1(t))\colon \; p \to \widetilde{q}_1, \quad \dots, \quad \Sigma_a(\hat{u}_o^N(t))\colon \; \widetilde{q}_{N-1} \to \widetilde{q}_N, \quad |\widetilde{q}_N - q| < \varepsilon.$
- Конкатенация $\hat{u}_o^1(t), \dots, \hat{u}_o^N(t)$ — решение локальной задачи управления.

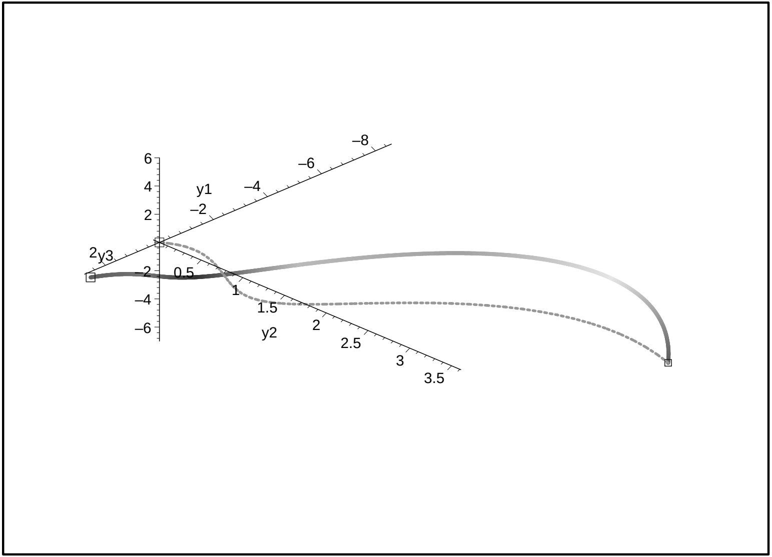
Оптимальная траектория



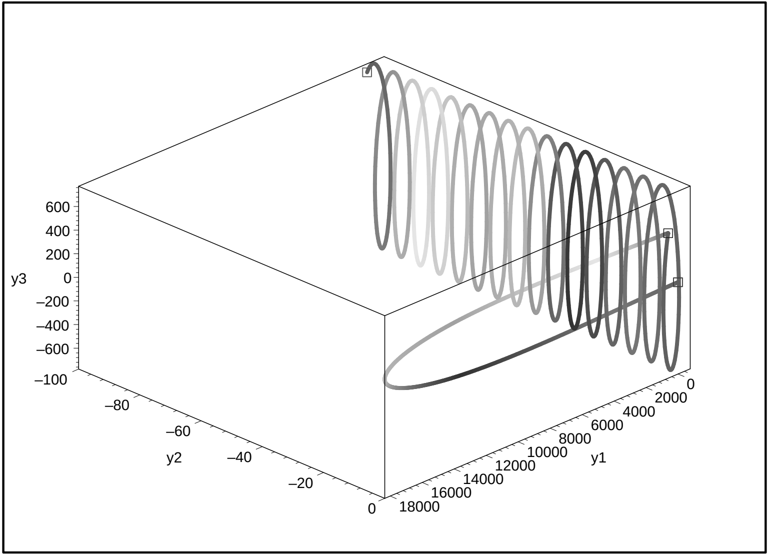
Решение задачи в классе тригонометрических управлений

- Нильпотентная задача:
  Дано:
  $\hat{\Sigma}_a, \quad p, q \in \mathbb{R}^3, \quad T > 0.$
  Найти:
  $u(t), \quad t \in [0, T]$: $u_1 = \frac{\nu_1}{T} + \beta \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad u_2 = \frac{\nu_2}{T} + \gamma \cos \frac{2\pi}{T} t.$
  $y(0) = p, \quad y(T) = q.$
- $\hat{u}(t) = \hat{u}(\nu_1, \nu_2, \beta, \gamma, t)$: $\nu_1(p, q), \quad \nu_2(p, q),; \quad \beta(p, q); \quad \gamma(p, q).$
- $\Sigma_a(\hat{u}^1(t))$: $\; p \to \widetilde{q}_1, \quad \dots, \quad \Sigma_a(\hat{u}^N(t))$: $\; \widetilde{q}_{N-1} \to \widetilde{q}_N, \quad |\widetilde{q}_N - q| < \varepsilon.$
- Конкатенация $\hat{u}^1(t), \dots, \hat{u}^N(t)$ — решение локальной задачи управления.

Траектория в классе тригонометрических управлений



Траектория в классе тригонометрических управлений



Решение задачи в классе кусочно-постоянных управлений с одним переключением

- Нильпотентная задача решена.
- Для $\Sigma_a(\hat{u}^N(t))$ компьютерные эксперименты показывают неустойчивую сходимость процесса.

Компьютерная реализация

- В системе MAPLE полностью реализован алгоритм решения задачи управления автомобилем на плоскости в классе оптимальных и в классе тригонометрических управлений.
- Проведены компьютерные эксперименты в классе кусочно - постоянных управлений.

Заключение

Рассмотрены

- Задача управления нелинейной системой, линейно зависящей от управлений.
- Метод нильпотентной аппроксимации.
- Алгоритм решения задачи управления.
- Приложение к мобильным роботам.
- Примеры в некоторых классах управлений.
- Компьютерная реализация алгоритма управления движением автомобиля на плоскости.

Планируется

- Исследовать сходимость локального алгоритма, глобального алгоритма.