Интегрируемость свободной нильпотентной субримановой структуры с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$

Ю.Л. Сачков Е.Ф. Сачкова

Институт Программных Систем РАН

Семинар под рук. М.И.Зеликина и Л.В.Локуциевского
“Геометрические методы
в теории оптимального управления”
Мех.-мат. факультет МГУ
17 апреля 2013 г.

Свободные нильпотентные субримановы задачи ранга 2

Свободная нильпотентная алгебра Ли
с 2-мя образующими, длины r:
$L = \mathrm{Lie}(X_1, X_2)$ — левоинвариантные векторные поля на соответствующей связной односвязной группе Ли G
$[X_{i_{r+1}}, \dots, [X_{i_2}, X_{i_1}] \dots] = 0$, $i_1, \dots, i_{r+1} \in \{1, 2\}$

Левоинвариантная субриманова задача:

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$\int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle}\, dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min .$$

$G = \mathbb{R}^n_{x_1 \dots x_n}$, изопериметрическая задача для кривых в $\mathbb{R}^2_{x_1 x_2}$

Замкнутые кривые $(x_1(t), x_2(t))$

- $r = 2 \Rightarrow$ вектор роста $(2, 3)$
  фиксированная площадь
  замкнутые кривые: окружности
- $r = 3 \Rightarrow$ вектор роста $(2, 3, 5)$
  фиксированные площадь и центр масс
  замкнутые кривые: окружности, эйлерова эластика-восьмерка
- $r = 4 \Rightarrow$ вектор роста $(2, 3, 5, 8)$
  фиксированные площадь, центр масс, и 3 момента
  замкнутые кривые: окружности, эйлерова эластика-восьмерка, кривая с 2-мя петлями (Ж.-П. Готье, шар с прицепом на плоскости)

Свободные нильпотентные субримановы задачи ранга 2, длины r

$L = \mathrm{Lie}(X_1, X_2) = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_n)$
$n = \sum_{k=1}^{r} \ell_2(k)$, $k\ell_2(k) = 2^k - \sum_{j|k} j\ell_d(j)$

$$\dot q = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q \in G, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$
$$q(0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$
$$\int_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot q, \dot q \rangle}\, dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min .$$

Нормальная гамильтонова система
принципа максимума Понтрягина:
$h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle, \qquad \lambda \in T^*G,$
$H(\lambda) = \frac{1}{2}(h_1^2(\lambda) + h_2^2(\lambda))$
$\dot\lambda = \vec{H}(\lambda)$ интегрируема по Лиувиллю?

Интегралы гамильтоновой системы

Симметрии:

- правые сдвиги на G
  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathrm{Vec}(G)$, $(R_g)_* Y_i = Y_i$
- Вращения в $\Delta = \mathrm{span}(X_1, X_2)$:
  $Z \in \mathrm{so}(\Delta)$

Алгебра Пуассона интегралов гамильтонова поля $\vec{H}$:

$$I = \mathrm{span}(H;\ g_1, \dots, g_n;\ f;\ C_1, \dots C_k)$$

- Гамильтониан системы H,
- Правоинвариантные гамильтонианы $g_i(\lambda) = \langle \lambda, Y_i \rangle$,
- Гамильтониан вращения $f(\lambda) = \langle \lambda, Z \rangle$,
- функции Казимира $C_j : L^* \to \mathbb{R}$, $\{C_j, h_i\} = 0\ \forall\ i = 1, \dots, n$.

1) $\vec{H}$ интегрируемо по Лиувиллю?
2) I содержит n независимых интегралов в инволюции?

Вектор роста (2, 3)

$L = \mathrm{Lie}(X_1, X_2) = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3)$
$[X_1, X_2] = X_3$
$G = \mathbb{R}^3_{xyz}$
$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3 \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3 \\ \dot{h}_3 = 0 \\ \dot{q} = h_1 X_1 + h_2 X_2 \end{cases}$$

Интегрируемость в тригонометрических функциях

Замкнутые кривые $(x(t), y(t))$ — окружности

Анормальные траектории тривиальны

Интегрируемость по Лиувиллю в случае $(2, 3)$

- Правоинвариантный репер $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathrm{Vec}(G)$,
  $Y_i(\mathrm{Id}) = -X_i(\mathrm{Id})$:
  $Y_1 = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}$, $Y_2 = -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}$, $Y_3 = -\frac{\partial}{\partial z}$
- Вращение $X_0 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

Интегралы поля $\vec{H}$:

- Гамильтониан системы $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$
- Правоинвариантные гамильтонианы
  $g_1 = -h_1 - yh_3$, $g_2 = -h_2 + xh_3$, $g_3 = -h_3$
- Гамильтониан вращений $h_0(\lambda) = \langle \lambda, X_0 \rangle$
- Функция Казимира h_3

Алгебра интегралов: $I = \mathrm{span}(H,\, g_1, g_2, g_3,\, h_0)$

Абелева подалгебра: $\widetilde{I} = \mathrm{span}(H,\, g_2, g_3)$

Вектор роста $(2, 3, 5)$

$$L = \mathrm{Lie}(X_1, X_2) = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \ [X_1, X_3] = X_4, \ [X_2, X_3] = X_5$$

$$G = \mathbb{R}^5_{xyzvw}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial w}, \ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2+y^2}{2}\frac{\partial}{\partial v},$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial v} + y\frac{\partial}{\partial w}, \ X_4 = \frac{\partial}{\partial v}, \ X_5 = \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3 \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3 \\ \dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5 \\ \dot{h}_4 = \dot{h}_5 = 0 \\ \dot{q} = h_1 X_1 + h_2 X_2 \end{cases}$$

Интегрируемость поля $\vec{H}$ в случае $(2,3,5)$

$2H = h_1^2 + h_2^2 = r^2 = \text{const}$

$h_1 = r\cos\theta,\ h_2 = r\sin\theta,\ h_3 = c,\ h_4 = \alpha\sin\beta,\ h_5 = -\alpha\cos\beta$

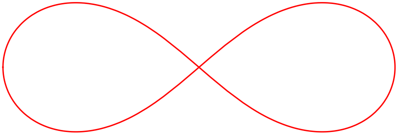
$\dot\theta = c,\ \dot c = -\alpha r\sin(\theta-\beta),\ \dot\alpha = \dot\beta = 0$

$E = c^2/2 - \alpha r\cos(\theta-\beta)$ энергия маятника

Интегрируемость в функциях Якоби

$(x(t), y(t))$ эластики Эйлера

Замкнутые кривые $(x(t), y(t))$: окружности и эластика-восьмерка



Анормальные траектории — прямые

Интегралы поля $\vec{H}$ в случае $(2,3,5)$

- Гамильтониан системы $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$
- Правоинвариантные гамильтонианы g_1, g_2, g_3, $g_4 = -h_4$, $g_5 = -h_5$
- Гамильтониан вращения $h_0(\lambda)$
- Функции Казимира $E = \frac{h_3^2}{2} + h_1 h_5 - h_2 h_4$, h_4, h_5

Алгебра интегралов: $I = \mathrm{span}(H,\ g_1, \dots, g_5,\ h_0,\ E)$

Абелева подалгебра: $\widetilde{I} = \mathrm{span}(H,\ g_3, g_4, g_5,\ E)$

Вектор роста $(2, 3, 5, 8)$

$L = \mathrm{Lie}(X_1, X_2) = \mathrm{span}(X_1, \dots, X_8)$

$[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = X_5$, $[X_1, X_4] = X_6$,
$[X_1, X_5] = [X_2, X_4] = X_7$, $[X_2, X_5] = X_8$.

$G = \mathbb{R}^8_{x_1 \dots x_8}$

Построение реализации свободной нильпотентной алгебры Ли полиномиальными векторными полями:
M.Grayson, R.Grossman, Nilpotent Lie algebras and vector fields (1989)

Левоинвариантный репер в случае $(2, 3, 5, 8)$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6}\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_7},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_6} + x_1 x_2\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + x_1\frac{\partial}{\partial x_6} + x_2\frac{\partial}{\partial x_7},$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_5} + x_1\frac{\partial}{\partial x_7} + x_2\frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$X_6 = \frac{\partial}{\partial x_6}, \qquad X_7 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \qquad X_8 = \frac{\partial}{\partial x_8}.$$

Нормальное гамильтоново поле в случае $(2, 3, 5, 8)$

$$\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_2 h_3, \\ \dot{h}_2 = h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 = h_1 h_4 + h_2 h_5, \\ \dot{h}_4 = h_1 h_6 + h_2 h_7, \\ \dot{h}_5 = h_1 h_7 + h_2 h_8, \\ \dot{h}_6 = \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0, \\ \dot{q} = h_1 X_1(q) + h_2 X_2(q) \end{cases}$$

Интегралы поля $\vec{H}$ в случае $(2,3,5,8)$

- Гамильтониан системы $H = (h_1^2 + h_2^2)/2$
- Правоинвариантные гамильтонианы g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, $g_6 = -h_6$, $g_7 = -h_7$, $g_8 = -h_8$
- Гамильтониан вращения h_0
- Функции Казимира $C = h_5^2 h_6 - 2h_4 h_5 h_7 + h_4^2 h_8 - 2h_3(h_6 h_8 - h_7^2) = C(g_3, \dots, g_8)$, h_6, h_7, h_8

Алгебра интегралов: $I = \mathrm{span}(H,\, g_1, \dots g_8,\, h_0)$

Абелева подалгебра: $\widetilde{I} = \mathrm{span}(H,\, g_3, \dots g_8)$

$\vec{H}$ интегрируемо по Лиувиллю?

Редукция вертикальной подсистемы для системы $\dot{\lambda} = \vec{H}(\lambda)$

$2H = h_1^2 + h_2^2 = 1$

$h_1 = \cos\theta,\ h_2 = \sin\theta,$

$h_3 = c,\ h_4 = a,\ h_5 = b,\ h_6 = m,\ h_7 = p,\ h_8 = n$

$$\begin{aligned}
\dot\theta &= c,\\
\dot c &= a\cos\theta + b\sin\theta,\\
\dot a &= m\cos\theta + p\sin\theta,\\
\dot b &= p\cos\theta + n\sin\theta,\\
m,\ \ n,\ \ p &= \mathrm{const}\,.
\end{aligned}$$

$\delta = p^2 - mn \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dot\theta &= (2pab - na^2 - mb^2)/(2\delta) + k,\\
\dot a &= m\cos\theta + p\sin\theta,\\
\dot b &= p\cos\theta + n\sin\theta, \qquad m,\ \ n,\ \ p,\ \ k = \mathrm{const}.
\end{aligned}$$

Проекции $(x_1(t), x_2(t))$ нормальных экстремалей

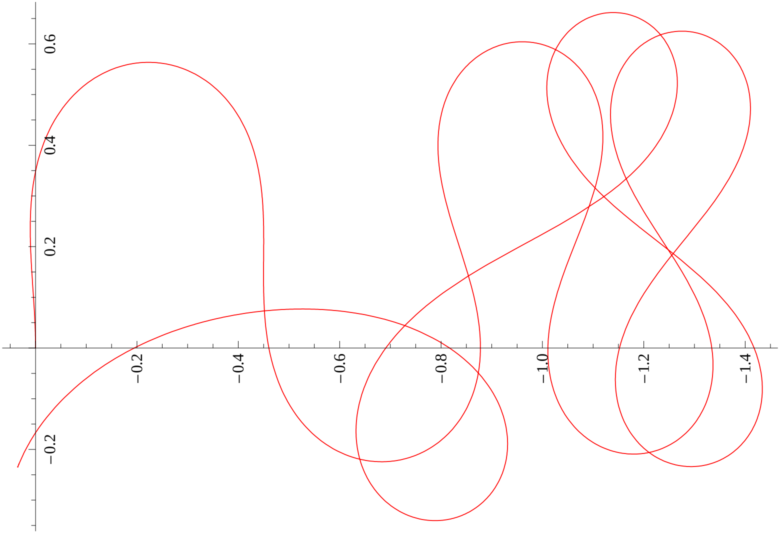
Специальные случаи:

- $c = a = b = m = n = p = 0 \Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ прямые
- $a = b = m = n = p = 0 \Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ окружности
- $m = n = p = 0 \Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ эластики Эйлера

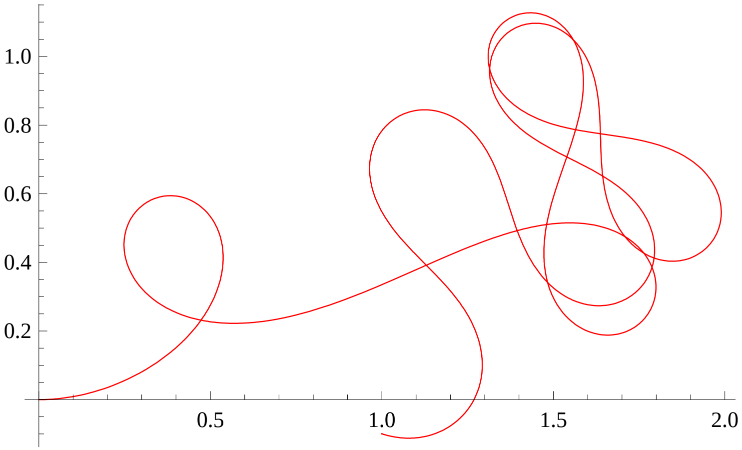
Общий случай $\Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ обобщенные эластики

Замкнутые обобщенные эластики?
Ж.-П. Готье: кривые с 3-мя петлями (Шар с прицепом на плоскости)

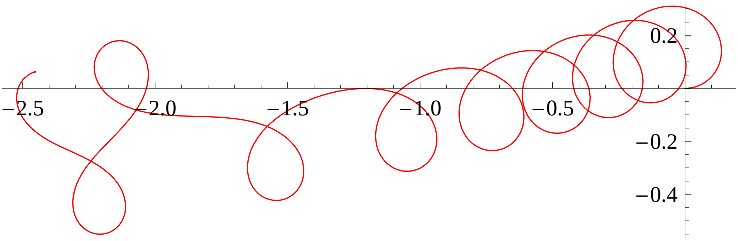
Обобщенные эластики



Обобщенные эластики



Обобщенные эластики



Анормальные траектории для случая $(2, 3, 5, 8)$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \dot h_4 \\ \dot h_5 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix} = \mathrm{const}$$

$$\dot h_6 = \dot h_7 = \dot h_8 = 0,$$

$$\dot q = -h_5 X_1 + h_4 X_2.$$

- $\det A < 0 \Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ гиперболы,
- $\det A > 0 \Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ эллипсы,
- $\det A = 0 \Rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ параболы или прямые.

Гиперболы и параболы не являются нормальными траекториями $\Rightarrow$ они строго анормальны

Заключение

- Свободная нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$,
- Реализация в $\mathbb{R}^8$,
- Симметрии нормальной гамильтоновой системы,
- Интегралы нормальной гамильтоновой системы: 10 интегралов, из них в инволюции лишь 7,
- Проекции анормальных траекторий — кривые 2-го порядка,
- Существуют строго анормальные экстремальные траектории,
- Вычислены функции Казимира и орбиты коприсоединенного представления,
- Написаны 2 статьи, 3-я в работе.