# Графы Мура

С. В. Дужин.

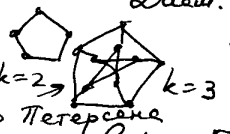
Накрытие
Расслоение
Группа монодромии

Графы Мура (Мооре) неор., без кр. рёбер, петель

Диам. графа $= \max d(v_1, v_2)$ $v_1, v_2 \in V$

Рег. граф валент. $k$, диам. 2 $\max n = 7$

$n \le 1 + k + k(k-1) = k^2 + 1$ оценка Мура



гр Петерсена

**Опр.** Граф Мура – рег. граф валентности $k$ и порядка $k^2+1$, диаметра 2.

**Теорема** Графы Мура существ. для $k = 2, 3, 7$ и, быть может, 57.

**Предл. 1** Регулярный граф степ. $k$ с $k^2+1$ верш. явл. гр. Мура $\Leftrightarrow$ не содержит циклов длины 3 и 4.

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i,j \text{ несм.} \\ 1 & i,j \text{ смежн.} \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & d(i,j) = 2 \\ 0, & \text{если нет} \end{cases}$$

Гр. Мура $E + A + B = I$

$i=j$ 1 2

Лемма 1 $A^2 = kE + B$

Лемма 2 $AB = (k-1)A + (k-1)B$

$$A^3 - (k-1)A^2 - (2k-1)A + k(k-1) = 0$$

**Набл.** Метр. сп. рег. графа вал. $k$ имеет с. зн. $k$ кратн. 1, $k$.

$A^2 + A - (k-1)$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – с. зн. $\neq k$

$\lambda^2 + \lambda - (k-1)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$m_1$ – кратность $\lambda_1$, $m_2$ – $\lambda_2$

$m_1 + m_2 = k^2$ $\quad m = \frac{k^2}{2}$

$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 = -k$ $\quad m = k$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

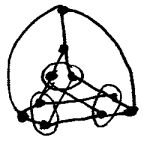
$m_1 = m_2$ возможно лишь при $k = 2$

$\lambda_1 = \frac{-1+t}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1-t}{2}$, $t \in \mathbb{Q}$

$t^2 = 4k - 3$

$t^4 - 2t^2 - 16(m_1 - m_2)t - 15 = 0$

$t = 1, 3, 5, 15$ $\quad k = 1, 3, 7, 57$




$\forall$ верш. по 1 ребру в $\forall$ группу

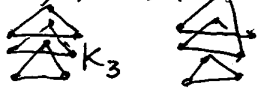
Граф $G \setminus (\{*\} \cup \text{окр. } \{*\}) = G'$

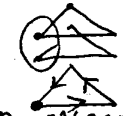
Рёбра в $G'$: любые две группы вершин соединяются рёбрами взаимно однозначно.

**Опр.** Граф $G$ – $m$-кратное накр. гр. $H$, если $\exists V(G) \xrightarrow{p} V(H)$ отобр. мн. вершин из $m$ вершин

1) $p^{-1}(v)$ – дискр. мн. $\vec{v}$ в $G$ (нет рёбер) $\forall v \in V(H)$

2) $\forall e \in E(H)$ в графе $G$ соотв. $m$ рёбер без общ. верш.

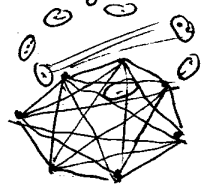


**Опр.** Гр. монодромии – подгр. в гр. перест. слоя порожд. поднятиями всех замкн. путей в базе

Если база связна, то опр. не зависит от выбора слоя

**Предл. 2.** Рег. граф $G$ вал. $k$ с $k^2+1$ верш. – гр. Мура $\Leftrightarrow$ для соотв. $G'$ монодромия не имеет неподв. точек над 3- и 4-циклами в базе

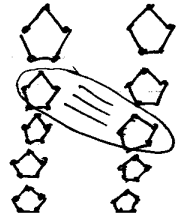


Граф Хоффмана – Синглтона

**Предл. 3** Накрытие Ивановича графа $H^{42} \xrightarrow{l} K_7$ (где $H$ – гр. Х-С.) обладает монодромией: 50

| длина цикла в базе | преобр. монодромии | порядок |
|---|---|---|
| 2 | (1,1,1,1,1,1,1) | 1 |
| 3 | (2,2,2) | 2 |
| 4 | (3,3) | 3 |
| 5 | (4,1,1) | 4 |
| 6 | (5,1) | 5 |
| 7 | (3,2,1) | 6 |

Граф Х-С. как расслоение над графом $K_{5,5}$ (полный двудольный граф порядка 5.5)



$\mathbb{Z}_5$ – вершины 5-угольников

Из $i$-го 5-уг. левого ряда в $j$-й 5-уг. правого ряда $f(x) = 2x + ij \bmod 5$