Графы Мура

С. В. Дужин.

Накрытие
Расслоение
Группа монодромии

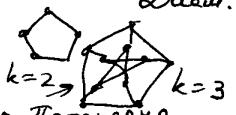
Графы Мура (Moore) неор., без кр. рёбер, петель

Диам. графа $= \max d(v_1, v_2)$ $v_1, v_2 \subset V$

Рег. граф валент. k, диам. 2 $\max n = 7$

$n \leq 1 + k + k(k-1) = k^2+1$

оценка Мура



ф Петерсена

Опр. Граф Мура – рег. граф валентности k и порядка k^2+1, diamatpa 2.

Теорема Графы Мура существ. для $k=2,3,7$ и, быть может, 57.

Предл. 1 Регулярный граф степ. k с k^2+1 верш. явл. гр. Мура $\Leftrightarrow$ не содержит циклов длины 3 и 4.

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i,j \text{ несм.} \\ 1 & i,j \text{ смежн.} \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & d(i,j)=2 \\ 0, & \text{если нет} \end{cases}$$

Гр. Мура $\underset{i=j}{E} + \underset{1}{A} + \underset{2}{B} = I$

Лемма 1 $A^2 = kE + B$

Лемма 2 $AB = (k-1)A + (k-1)B$

$$A^3 - (k-1)A^2 - (2k-1)A + k(k-1) = 0$$

Набл. Матр. см. рег. графа вал. k имеет с. зн. k кратн. $\cancel{k}$ 1

$A^2 + A - (k-1)$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – с. зн. $\neq k$

$\lambda^2 + \lambda - (k-1)$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

m_1 – кратность λ_1, $m_2 - \lambda_2$

$m_1 + m_2 = k^2$ $m = \frac{k^2}{2}$

$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 = -k$ $m = k$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

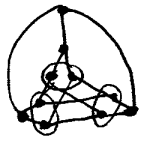
$m_1 = m_2$ возможно лишь при $k = 2$

$\lambda_1 = \frac{-1+t}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-1-t}{2}$, $t \in \mathbb{Q}$

$t^2 = 4k-3$

$t^4 - 2t^2 - 16(m_1 - m_2)t - 15 = 0$

$t = 1, 3, 5, 15$ $k = 1, 3, 7, 57$



$k(k-1)$
k групп
по $k-1$

$\forall$ верш. по 1 ребру в $\forall$ группу

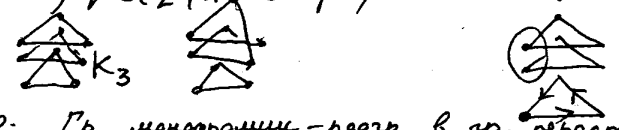
Граф $G \setminus (\{*\} \cup \text{окр.}\{*\}) = G'$

Рёбра в G': любые две группы вершин соединяются рёбрами взаимно однозначно.

Опр. Граф G – m-кратное накр. гр. H, если $\exists V(G) \xrightarrow{p} V(H)$ отобр. мн. вершин

1) $p^{-1}(v)$ – дискр. мн. из m вершин в G (нет рёбер) $\forall v \in V(H)$

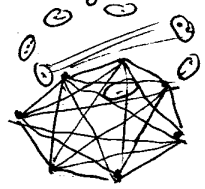
2) $\forall e \in E(H)$ в графе G соотв. m рёбер без общ. верш.



Опр. Гр. монодромии – подгр. в гр. перест. слоя порожд. поднятиями всех замкн. путей в базе

Если база связна, то опр. не зависит от выбора слоя

Предл. 2. Рег. граф G вал. k с k^2+1 верш. – гр. Мура $\Leftrightarrow$ для соотв. G' монодромия не имеет неподв. точек над 3-и 4-циклами в базе

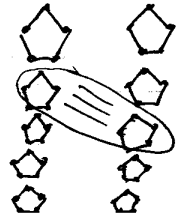


Граф Хоффмана – Синглтона

Предл. 3 Накрытие Игнатович графа $H' \to K_7$ (где H – гр. Х-С.) обладает 42 монодромией: 50

длина цикла в базе	преобр. монодромии	порядок
2	(1,1,1,1,1,1)	1
3	(2,2,2)	2
4	(3,3)	3
5	(4,1,1)	4
6	(5,1)	5
7	(3,2,1)	6

Граф Х-С. как расслоение над графом $K_{5,5}$ (полный двудольный граф порядка 5.5



$\mathbb{Z}_5$ – вершины 5-угольников

Из i-го 5-уг. левого ряда в j-й 5 уг. правого ряда $f(x) = 2x + ij \mod 5$