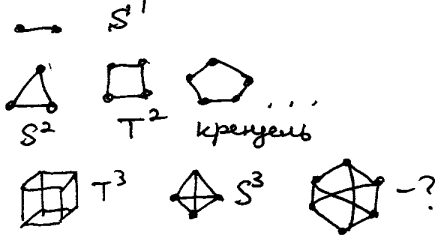


Инварианты Васильева

Алгебра Хопфа хордовых диаграмм

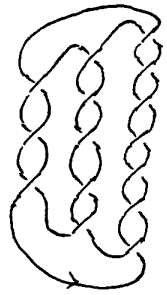
1990 В. Васильев $\mathcal{A}$
1992 М. Концевич

Узел $f: \underset{\text{ор.}}{S^1} \to \underset{\text{ор.}}{\mathbb{R}^3}$ C^∞ $f' \neq 0$

$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow$
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^3 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ S^1 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$
h_1, h_2 сохр. ор.

$\{f_t\}: [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3$

$\{h_t\}: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



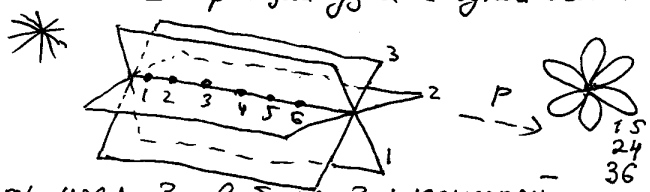
трилистник – не экв. зерк. отраж. → не экв. узлу с противоположн. ориент.

1962 Троттер

$f(S^1) = \Gamma \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

$dp = 0$

Вчиппеч 1892: $\exists$ проекция узла с одной особой точкой вида

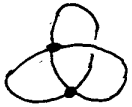


Упр. Вложить узел 3_1 в объед. 3 плоскостей (книгу из 6 листов)

K_0 – множ. всех узлов с точн. до экв.

Инв. узлов $\varphi: K_0 \to \mathbb{C}$

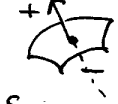
K_n – мн. особых узлов имеющих $\not\geq n$ дв. точек

$S^1 \to \mathbb{R}^3$  $\in K_2$ $\quad K = \bigcup_{n \geq 0} K_n$

φ продолжается до $\varphi: K \to \mathbb{C}$: $\varphi(\times) = \varphi(\nwarrow\!\!\nearrow) - \varphi(\nwarrow\!\!\nearrow)$

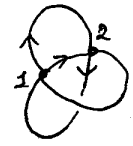
$n+1$ $\quad n \quad n$

$f: S^1 \to \mathbb{R}^3$ $\quad M \supset \sum_{\text{codim}=1}$



$\varphi(k) = \sum_{\varepsilon_i} (-1)^{|\varepsilon|} \underbrace{k_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}}$

$k \in K_n$



$\varphi: K \to \mathbb{C}$
инв. Вас. пор. $\leq n$
$\varphi|_{K_{n+1}} \equiv 0$

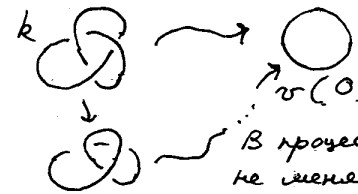
$V_n \subset V_{n+1}$

$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$ $\quad \bigcup_{n \geq 0} V_n = V$

n	0	1	2	3		12
$\dim V$	1	1	2	3	...	(*)

Все пространства конечномерны.

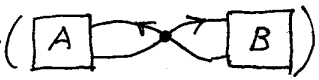
$V_0 = \{\varphi: K \to \mathbb{C} : \varphi|_{K_1} \equiv 0\}$

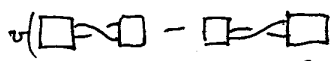


$v(0) = c$

В процессе деформации значение инв. не менялось $\Rightarrow v(k) = c$

$V_1 = \{\varphi: K \to \mathbb{C} : \varphi|_{K_2} \equiv 0\}$

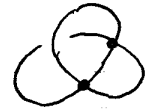
Лемма $v($  $) = 0 \quad \forall v \in V$

◀ $v($  $) = 0$ (совмещаются поворотом на $180°$) ▶

$V_1 = V_0 \qquad \varphi \in V_1 \overset{?}{\Longrightarrow} \varphi \in V_0, \ \varphi|_{K_2} = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \varphi|_{K_1} = 0$

$\xrightarrow{\times\times}$ $= 0$ по лемме.

1122

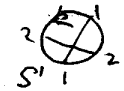


1212

Опр. Х. д. n пар точек (с точн. до дифф S^1, сохр. ориент.)

$(a_1 a_2 \dots a_{2n})$ в алф. из n букв $b_1, \dots, b_n$ с точностью до цикл. перест. $(\mathbb{Z}_n)$ и перест. (S_n).

Хордовая диаграмма особого узла



$\to \mathbb{R}^3$ прообразы дв. точек