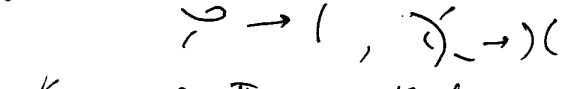
Узлы изотопны тогда и только тогда, когда их плоские диаграммы получаются друг из друга с помощью преобр.



Констр. 2 Полином Конвея

$$c(\nearrow\!\!\nearrow) - c(\times) = x\, c(\smile\!\!\frown)$$

$$c(\times) = x\, c(\smile\!\!\frown) \Rightarrow c(\bigcirc) = \sum c_i x^i,$$

где c_i – инв. В. порядка i

$v_2 = c_2$

$\mathcal{A} = \oplus \mathcal{A}_n$ – биалгебра $\quad \mu: \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_{m+n}$

$\Delta: \mathcal{A}_n \to \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k \otimes \mathcal{A}_{n-k}$

duzhin@botik.ru

www.botik.ru/~duzhin/NMU/

Биалгебра

= алгебра + коалгебра (структурн. согласованы)

$\mu: A\otimes A \to A$ умн. $\quad$ A – умн. пр. над F

$\iota: F \to A$ ед.

$\delta: A \to A\otimes A$ коумн.

$\varepsilon: A \to F$ коединица

Ассоц. μ $\quad A\otimes A\otimes A \xrightarrow{\mu\otimes id} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A$

Коумн. μ $\quad A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{id\otimes\mu} A\otimes A$

$A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{id\otimes\mu} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A$

$A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{\iota\otimes id} F\otimes A \xrightarrow{\simeq} A$

Ассоц. δ $\quad A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{\delta\otimes id} A\otimes A\otimes A$

$A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{id\otimes\delta} A\otimes A\otimes A$

Коумн. δ $\quad A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{\varepsilon\otimes id} F\otimes A \xrightarrow{\simeq} A$

$A \xrightarrow{\delta} A\otimes A \xrightarrow{id\otimes\varepsilon} A\otimes F \xrightarrow{\simeq} A$

(1) $\varepsilon(1) = 1$

(2) $\delta(1) = 1\otimes 1$

(3) $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$

(4) $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$

1, 3 ε – гом-м алгебр

2, 4 δ – —"— —"—

1, 2 ι – гом. коалгебр

3, 4 μ – гом. коалгебр

Ам. Хопфа – биалгебра с антиподом. ($S^2 = id, \ldots$)

Примеры: 1. G – конечная группа, $A = \{G \to F\}$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\quad A\otimes A = \{f: G\times G \to F\}$

$\delta(f)(x,y) = f(xy)$

2. G – конечн. гр. $A = \{G \to F\}$

$(fg)(x) = \sum_{y\in G} f(xy^{-1})\, g(y)$

$\delta(f) = f\otimes f$

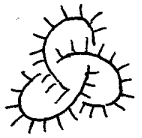
3. $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $A = U(\mathfrak{g})$

$\delta(g) = 1\otimes g + g\otimes 1$, $g \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$

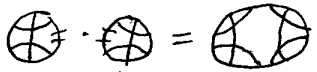
$\mathcal{A}$ – простр. порожд. х.д. по модулю 4T (только)

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}/(1T)$

$(\mathcal{A}'_n)^* = V_n / V_{n-1}$ $\quad \mathcal{A}_n^* = \tilde{V}_n / \tilde{V}_{n-1}$ (инв. Васильева основ. узла)



Умн. в $\mathcal{A}$



121323 454686 121323454686

$\mathcal{A}_6$

Лемма 1: Умнож. в $\mathcal{A}$ опред. корректно (по модулю 4T соотнош.)

$= 1$ $\quad \mu: \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_m \to \mathcal{A}_{n+m}$

Коумножение в $\mathcal{A}$

$$\delta(D) = \sum_{\substack{D' \subset D \\ \text{подмн-во хорд}}} D' \otimes (D \setminus D') \quad \text{(сумма } 2^n \text{ слаг.)}$$

Лемма 2 Коумнож. корректно.

$\delta(\bigcirc) = \bigcirc\otimes\bigcirc$

$\delta(\ominus) = \bigcirc\otimes\ominus + \ominus\otimes\bigcirc$

$\delta(\circledcirc) = 1\otimes\circledcirc + 2\,\ominus\otimes\ominus + \circledcirc\otimes 1$

$\delta(\oplus) = 1\otimes\oplus + 2\,\ominus\otimes\ominus + \oplus\otimes 1$

Теорема (Milnor – Moore) 1965 Ассоц., комм., коассоц.,