коммут. градуир. биалгебра с 1 совпадает с алгеброй многочленов над своим примит. подпр.

$\mu: A_k \otimes A_m \to A_{k+m}$ $\quad A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$

$1 \in A_0 \cong F$ $\quad \dim A_n < \infty$

$\delta: A_n \to \bigoplus_{k+l=n} A_k \otimes A_l$

Опр. $p \in A$ – биэлем. над. прим., если

$$\delta(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$$

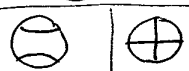
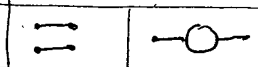
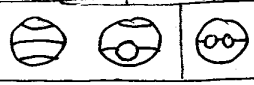
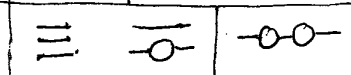
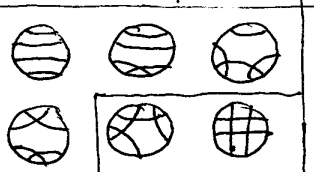
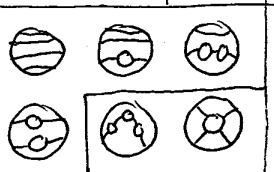
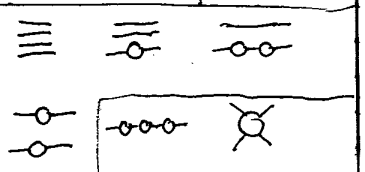
A – град. $\Rightarrow P = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_n$, $P_n = P \cap A_n$

$P = \{p \mid p$ прим.$\}$ – подпр. $\quad P_0 = 0$

Следствие $\forall n \; A_n = P_n \oplus R_n$, где R_n – пространство разложимых эл-тов степени n, т.е. порожд. ху, $x \in A_k$, $y \in A_l$, $k, l \geq 1$.

$P_1 = A_1 \quad x \in A_1 \xrightarrow{\delta} A_0 \otimes A_1 + A_1 \otimes A_0$

Задача: доказать вручную следствие для $n=1$.

n	$\mathcal{A}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{B}$
1			
2			
3			
4			
0			$\varnothing$

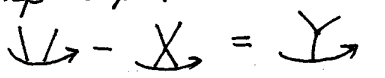
$$\delta(\oplus) = 1 \otimes \oplus + 2 \ominus \otimes \ominus + \dots$$

$$\delta(\ominus) = 1 \otimes \ominus + 2 \ominus \otimes \ominus + \dots \qquad P_2(\mathcal{A}) = \langle \oplus - \ominus \rangle$$

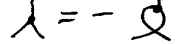
$$\delta(\oplus - \ominus) = 1 \otimes (\oplus - \ominus) \otimes 1$$

$\mathcal{F}$ – алгебра диаграмм Фейнмана

$\mathcal{D}.\Phi.$ = св. 3-вал. граф с выделенным ориентир. циклом ("клетка Уилсона") и заданным цикл. порядк. рёбер в каждой внутр. верш.

$\mathcal{F} = \langle \mathcal{D}.\Phi. \rangle / STU$ 

Предл. $STU \Rightarrow$ 1. 4T соотнош.

2. AS 

антисимм.

3. IHX для внутр. вершин

$$I = H - X$$

Теор. $\mathcal{A} \to \mathcal{F}$ (ест.) явл. изоморфизмом

Набл. $P(\mathcal{F})$ – мн. образующих мн-ва связных $\mathcal{D}.\Phi.$

Опр. Кит. диагр. = (вообще говоря, несвязный) граф с 1- и 3-вал. верш. причём есть хотя бы 1 1-вал. (кроме пустого), а в 3-вал. задан цикл. пор. рёбер.

$B_n = \langle$ китайские диаграммы с $2n$ верш. $\rangle / AS, IHX$

Алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$

Лемма 1 Умнож. в $\mathcal{A}$ корректно.

(1)

$\sum_{c \in D_1} (4T) =$ (произведение 1) $-$ (произведение 2)

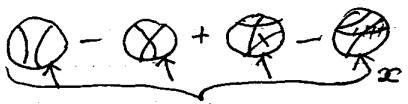
$1-2+3-4$

$2-3+5+6$

$4-5+6-7$

$1-7 \sim 0$

(2) $A = \langle D_A \rangle / 4T \qquad X/_Y \times X/_Y \to X/_Y$

$xy \in Y$ 

Лемма 2 → нечего доказать для F.

Структурная теорема для алгебр Хопфа (Milnor–Moore, Leray)

$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ – связная градуированная комм., асс., кокомм., коасс. биалгебра кон. типа над F,

тогда $P=0$, $\Rightarrow A = S(P(A))$, где

$$P(A) = \{x \mid \delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}$$

связность $\Leftrightarrow \dim A_0 = 1$ и $\varepsilon|_{A_n} = 0 \quad n > 0$.

кон. типа $\Leftrightarrow \dim A_n < \infty$

Д-во: $A_0 = F \cdot 1$; $A_1 = P_1$, т.е. $\delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \; \forall x \in A_1$

$A_1 \to A_0 \otimes A_1 + A_1 \otimes A_0$, $\delta(x) = 1 \otimes f(x) + f(x) \otimes 1$