$f: A_1 \to A_1$ оператор (лин.)

Упр. Коассоц. $\Leftrightarrow f^2 = f$ $\quad A \xleftarrow{\sim} F\otimes A \xleftarrow{\varepsilon\otimes id} A\otimes A \xleftarrow{\delta} A$

$\delta(x) = 1\otimes f(x) + a_1\otimes a_{n-1} + \dots$

$\varepsilon(1)=1 \quad \varepsilon(a_i)=0 \quad a_i\in A_i \quad i>0$

$\delta(x) = 1\otimes x + \sum y_i\otimes z_i + x\otimes 1$, $y_i, z_i \in A_n$, $n\neq 0$ — однор. степ. $\neq 0$

$x\in A_2 \quad \delta(x) = 1\otimes x + \sum y_i\otimes z_i + x\otimes 1$

$y_i, z_i \in A_1$

$e_1,\dots,e_k$ — базис A_1, $\delta(x) = 1\otimes x + \sum a_{ij}\, e_i\otimes e_j + x\otimes 1$ — однозн.

$a_{ij} = a_{ji}$ (кокомм.)

$\delta(\overbrace{\tfrac{1}{2}\sum a_{ij} e_i e_j}^{x'}) = 1\otimes x' + \sum a_{ij}\, e_i\otimes e_j + x'\otimes 1$

$\in A_2 \qquad \delta(e_i) = 1\otimes e_i + e_i\otimes 1$

$x = x' +$ (прим. эл-т) $\qquad A_2 = R_2 + P_2$

$\oplus \quad x\in R_1\cap P_2 \quad x = \frac{1}{2}\sum a_{ij} e_i e_j \in P_2$ (a_{ij} симм.)

$\delta(x) = 1\otimes x + x\otimes 1 \qquad \sum a_{ij}\, e_i\otimes e_j = 0$ в $A_1\otimes A_1$

Между эл-тами $e_1,\dots,e_k$ нет квадратичных соотнош., т.е. $x = \frac{1}{2}\sum a_{ij} e_i e_j = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$

$a_{ij} = a_{ji} \qquad \delta(x) = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$ ▷

Теорема $\mathcal{A} \simeq \mathcal{F}$

STU много раз $D_F \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}$

Но образ зависит от порядка разрешения тройных точек $\Rightarrow$ Пример:

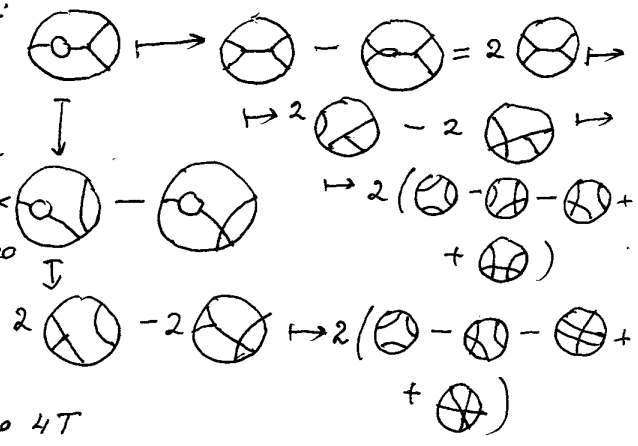
$D_F = D_F^0 \cup D_F^1 \cup D_F^2 \cup \dots$

$\quad\ \ \| $

$\quad D_A$

D_F^n — диагр. Ф. с $\le n$ внутр. тройных точек

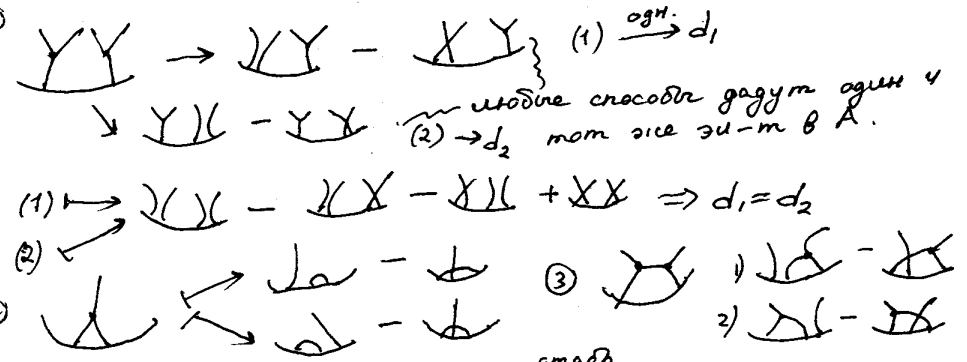
ρ строится индуктивно



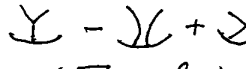
Д-во: корректности опред. ρ — индукция по n.

$n=1$ корр. по 4T

Допустим для всех д. Ф с $<n$ тр. точек ρ опред. корректно.



$D_F \xrightarrow{\rho} A$ продолжается до отобр. $F\to A$, так как $\rho(STU)\subset 4T$

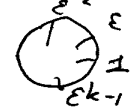


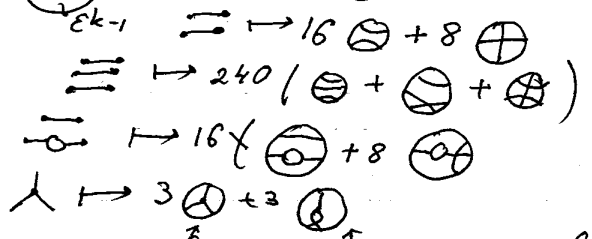
$\mapsto 0 \quad \mathrm{im}\,\rho = A \quad \ker\rho = 0$

$\rho(\sum c_i f_i) = 0$ в $A \Rightarrow \sum c_i f_i$ предст. в виде комбинации трёхчленов STU $\to$ упр.

Линейный изоморфизм $B\to F$: $b \mapsto \sum_{S_k}$ (b с окружн.)

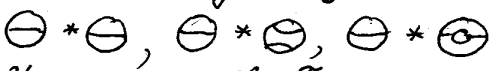
Примеры $\quad b\in B_{n,k}$ (k одновал. вершин)





Th: Это изоморфизм линейных пр-в.

обычный руль $\qquad$ руль после аварии

Упр. Перенести естеств. умн. из B в F и найти произведение 

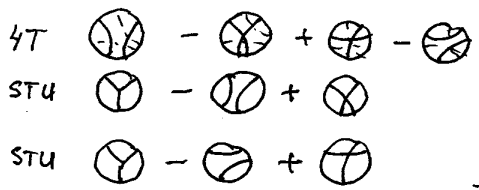
Изоморфизм $\mathcal{A}\simeq\mathcal{F}$

$\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{F}$ лин. изом.

$\mathcal{A} = \langle D_{\mathcal{A}}\rangle / \langle 4T\rangle$, $\quad \mathcal{F} = \langle D_{\mathcal{F}}\rangle / \langle STU\rangle$

$D_{\mathcal{A}} \hookrightarrow D_{\mathcal{F}} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{?} \mathcal{F} \qquad STU \Rightarrow 4T$

$\langle 4T\rangle \subset \langle STU\rangle$



$D_{\mathcal{F}} \to \mathcal{A} \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}$

$\rho\circ\iota = id$ и $\iota\circ\rho = id$