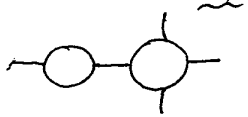
Продолжение



$\mathcal{B} \to S(\mathfrak{g})$

$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$J \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$

$\mu : \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\mu \overset{\text{метрика}}{\rightsquigarrow} J$

$\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$

$\mathcal{B}^{(n)} \to T^n(\mathfrak{g})$ (n-число 1-вал. вершин)

$\uparrow$ простр. с n 1-вал.

$\downarrow$

$S^n(\mathfrak{g})$ $\quad \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma$

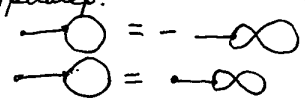
$b_1 = b_2$, $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ (диагр.)

$V(b_1) \xrightarrow{\sim} V(b_2)$, $E(b_1) \simeq E(b_2)$

1) соглас

2) сохр. цикл. порядок

Пример:



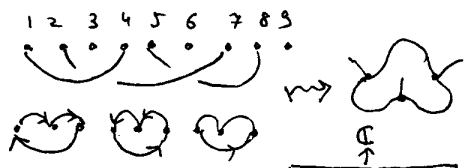
3-граф $\quad H$ - полурёбра

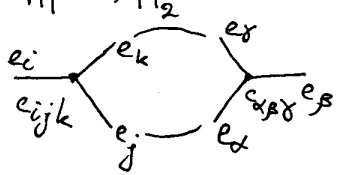
Перестановка H $(2)(2)\dots(2)$ $\sigma(1)$

$\quad$ — " — $(3)(3)\dots(3)$ τ

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \to & H_2 \\ \tau_1 \downarrow \sigma_1 & & \tau_2 \downarrow \sigma_2 \\ H_1 & \to & H_2 \end{array}$$

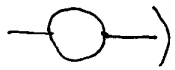
Пример:





$\sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha,\beta,\gamma}} c_{ijk} c_{\alpha\beta\gamma}\, e_i \otimes \underbrace{e_j \otimes \overbrace{e_k \otimes e_\alpha}^{\mathbb{C}} \otimes e_\beta \otimes e_\gamma}_{\mathbb{C}}$

$\uparrow \bigotimes_{v\in V_1} \mathfrak{g}$

$\psi_{\mathfrak{g}}$ () $\in S^2(\mathfrak{g})$

$\sum_{\substack{i,j,k\\ \beta,\gamma}} c_{ijk} c_{j\beta\gamma}\, e_i \otimes \overbrace{e_k \otimes e_\beta}^{\mathbb{C}} \otimes e_\gamma$

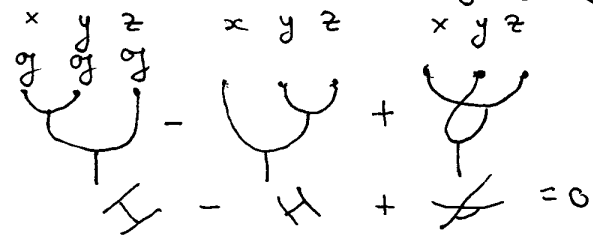
$\sum_{i,j,k,\beta} c_{ijk} c_{j\beta k}\, e_i \otimes e_\beta \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$

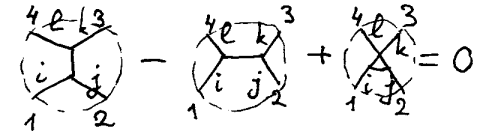
$\sum_{i,j,k,\beta} c_{ijk} c_{j\beta k}\, e_i e_\beta$ $\quad$ лев. $\quad$ пр.

ψ удовл. соотн. IHX (следствие т. Якоби)

$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$

лин. отобр. $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$





$e_1, \dots, e_n$ - ортон. базис

$\sum_{ijklm} c_{ijm} c_{mkl}\, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$

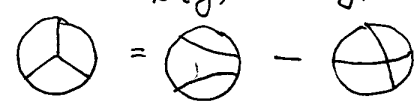
$-\sum_{\dots} c_{iml} c_{mjk}(\quad) + \sum c_{imk} c_{mjl}(\quad)$

$\sum_m (c_{ijm} c_{mkl} - c_{iml} c_{mjk} + c_{imk} c_{mjl}) = 0$

коэфф. при e_l в выражении $[[e_i, e_j], e_k]$ + цикл. перест.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \mathcal{A} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S(\mathfrak{g}) & \to & U(\mathfrak{g}) \end{array}$$

$x_1 \dots x_k \mapsto \frac{1}{k!}\sum_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}$



φ $\quad \sum e_i e_j \underline{e_j e_i} - \sum e_i e_j \underline{e_i e_j}$

$\sum e_i e_j [e_j, e_i]$, $\sum_{i,j,k} c_{jik} \underline{e_i e_j e_k}$ - образ $J \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ при симметр. $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to S^3(\mathfrak{g})$

Упр. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N \Rightarrow$ алгоритм удвоения рёбер

$\psi_{\mathfrak{gl}_N}(G)$ - мн-н от N со знач. в $S^{\#(1\text{-вал.})}(\mathfrak{g})$

Задача. G - рег. 3-граф ($G \in \Gamma$), $\mathfrak{g} = so(3)$

$\psi_{so(3)}(G)$ - число раскрасок рёбер графа G в 3 цвета, так что в любой вершине цвета разные.