С.В.Дужин

КОМБИНАТОРИКА

Лекция 1

1. Вступительные замечания: перечислительная комбинаторика, структурная комбинаторика, перечисление комбинаторных структур.

2. Числа Фибоначчи. Определение. Последовательность Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ и начальными условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

3. Вывод формулы для чисел Фибоначчи при помощи линейной алгебры.

4. Теорема о решении линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.

5. Вывод формулы для чисел Фибоначчи при помощи производящих функций.

6. Алгебра формальных степенных рядов. Умножение на число, сложение, умножение. Композиция.

7. Числа Каталана C_n. Определение.

1°. Число способов расстановки скобок в произведении n букв.

2°. Число правильных скобочных структур из $n-1$ пар скобок.

3°. Число последовательностей $\{a_1, a_2, ..., a_{2n-1}\}$ с такими свойствами: $a_i \geqslant 0$, $a_1 = a_{2n-1} = 0$, $|a_i - a_{i+1}| = 1$ для всех i.

4°. Число триангуляций $n+1$-угольника.

5°. Число посаженных плоских деревьев с n ребрами.

6°. Число посаженных плоских бинарных деревьев с n листьями.

7°. Число хордовых диаграмм, состоящих из $n-1$ непересекающихся хорд.

Домашнее задание

Упражнение 1. Решить рекуррентное соотношение $F_n = 3F_{n-2} - 2F_{n-3}$ с начальными условиями $F_0 = 3$, $F_1 = 1$, $F_2 = 8$.

Упражнение 2. Проверьте, что формальные степенные ряды для $e^t - 1$ и $\ln(1+t)$ взаимно обратны в смысле композиции.

Упражнение 3. Докажите эквивалентность приведенных выше определений чисел Каталана.

Упражнение 4. а) Докажите рекуррентное соотношение для чисел Каталана

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}.$$

б) Переформулируйте это рекуррентное соотношение как уравнение на производящую функцию $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$.

в) Найдите функцию $C(t)$ в явном виде.

г) Найдите явное выражение для $C(n)$ через биномиальные коэффициенты.

д) Докажите следующее соотношение

$$C(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{1 - \dots}}},$$

предварительно придав ему смысл.