Экзаменационные задачи по курсу “Комбинаторика”

С. В. Дужин

1. Пусть $a_{m,n}$ — число, стоящее на n-м месте в строке номер $m+n$ треугольника Бернулли-Эйлера. Найдите производящую функцию
$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

2. Обозначим через γ_n число непомеченных простых (т.е. без петель и кратных ребер) графов с n вершинами. Выведите формулу для γ_n и сосчитайте значения γ_n для $n \leqslant 7$.

3. Найдите сумму ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k}\ln\frac{1}{1-x^k},$$
где $\varphi(k)$ — функция Эйлера. (*Указание*: рассмотрите ряд Z_C для структуры циклических перестановок C.)

4. Приведите список всех молекулярных видов комбинаторных структур на множествах из 4 элементов.

5. Рассмотрим S_4 как группу собственных вращений куба (перестановки больших диагоналей). Укажите выражение через атомы структур, отвечающих действию S_4 на множествах вершин, граней и ребер куба.

6. Пусть F — произвольный комбинаторный вид. Представьте функториальную композицию $((X+X^2)\cdot E)\square F$ в виде декартова произведения.

7. Структура вида Inj на данном двухсортном множестве $U = U_X \cup U_Y$ — это инъективное отображение множества точек первого сорта (U_X) в множество точек второго сорта (U_Y). Выразите Inj через простейшие виды 1, E, X, Y при помощи операций сложения, умножения и композиции. Найдите производящие ряды $\mathrm{Inj}(x,y)$, $\widetilde{\mathrm{Inj}}(x,y)$ и Z_{Inj}.

8. Многочлен Эрмита $H_n(x)$ определяется равенством
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2/2}.$$
Найдите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$
в замкнутом виде. (*Указание*: используйте формулу обращения Лагранжа).

Задание выдано 10 декабря 2000. Решения в рукописном виде класть в ячейку “Дужин” до 19.12.2000 либо присылать в электронном виде до того же срока по адресу `duzhin@mccme.ru`. Лекционные заметки см. по адресу `http://www.botik.ru/~duzhin/NMU`.