Февральский экзамен по комбинаторике

С. В. Дужин

1. Последовательность a_n задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n$$

и начальными условиями $a_0 = a_1 = a_2 = 1$. Найдите явную формулу для a_n.

2. Число Белла B_n определяется как число различных разбиений множества из n элементов на непустые подмножества: $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ и т.д. Найдите экспоненциальную производящую функцию последовательности B_n.

   [*Пояснение.* $B_0 = 1$, так как существует ровно одно (а именно, пустое) семейство непустых подмножеств пустого множества, объединение которого равно всему (пустому!) множеству. Кто этому не верит, пусть примут равенство $B_0 = 1$ по определению.]

3. Пусть E — вид множеств. Верно ли, что для любых двух комбинаторных видов F и G виды $E(F+G)$ и $E(F) \cdot E(G)$ изоморфны?

4. Пусть $\varepsilon = E^{\bullet}$ — вид элементов, а F — неизвестный вид. Имеет ли уравнение $F' = \varepsilon$ решение: (а) в обычных комбинаторных видах? (б) в виртуальных видах?

5. Разложите вид $C_4 \times C_4$ на атомарные виды. (C_4 — ориентированные циклы на 4 элементах.)

6. Пусть X, Y — два сорта, а $M(X,Y)$ — вид двухсортных перестановок, у которых в каждый цикл входит хотя бы по одному элементу каждого сорта.

   (a) Найдите алгебраическое соотношение, связывающее виды $M(X,Y)$, $S(X)$, $S(Y)$ и $S(X+Y)$, где S — обычные перестановки.

   (b) Найдите производящие функции $M(x,y)$, $\widetilde{M}(x,y)$ и $Z_M(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$.

7. Пусть L — вид линейных порядков. Докажите, что существует, и притом единственный, виртуальный вид L^c такой, что $L = E(L^c)$. Найдите атомарное разложение L^c до членов четвертого порядка.

8. Пусть g_n — свободный член многочлена $(x^{-1} + 1 + x)^n$. Найдите производящую функцию $\sum g_n x^n$.

Задачи 1–5 стоят 1 балл, задачи 6–8 — 2 балла. Критерии оценок: отлично — 9 баллов, хорошо — 7 баллов, удовлетворительно — 5 баллов.

Задание выдано в Татьянин день 25 января 2001. Решения в рукописном виде класть в ячейку "Дужин" до 17^{30} 12.02.2001 либо присылать в электронном виде до того же срока по адресу `duzhin@mccme.ru`.

Лекционные заметки см. по адресу `http://www.botik.ru/~duzhin/NMU`.