Ответы к задачам от 31.10.00

`http://www.botik.ru/~duzhin/NMU/2000a/`

1. Придумайте комбинаторный вид F такой, что

   (a) Число f_n структур вида F на n-элементном множестве есть n-е число Фибоначчи.

   (b) Число $\tilde{f}_n$ классов эквивалентности структур вида F на n-элементном множестве есть n-е число Фибоначчи.

   В каждом случае найдите производящие функции $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$.

   Ответ.

   (a) Тривиальный вид $F = \sum_{k \geq 0} f_k E_k$ (здесь E_k — вид множеств мощности k, а слово "тривиальный" означает тривиальное действие группы перестановок S_k на множестве $F[k]$). $F(x) = (e^{\varphi x} - e^{x/\varphi})/\sqrt{5}$, где $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение; $\tilde{F}(x) = x/(1-x-x^2)$.

   (b) Есть два разумных ответа: $F = L(X + X^2)$ и $F = L(X + E_2)$. Производящая функция, перечисляющая типы, в обоих случаях одна и та же и совпадает с $\tilde{F}$ из предыдущего пункта. Функции $F(x)$ разные: для первого варианта $1/(1-x-x^2)$, для второго $1/(1-x-x^2/2)$.

2. Дайте явное описание комбинаторных видов Y, B и P, удовлетворяющих соотношениям

$$
\begin{array}{rrcl}
(a) & Y & = & 1 + X \cdot Y, \\
(b) & B & = & 1 + X \cdot B^2, \\
(c) & P & = & X + E_2 \circ P,
\end{array}
$$

   где 1, X и E_2 — виды пустых, одноточечных и двухточечных множеств соответственно. Найдите производящие функции $Y(x)$, $\tilde{Y}(x)$, $B(x)$, $\tilde{B}(x)$, $P(x)$, $\tilde{P}(x)$.

   Ответ.

   (a) $Y = L$ — вид линейных порядков. $L(x) = \tilde{L}(x) = 1/(1-x)$.

   (b) $B[U]$ — плоские бинарные корневые деревья с множеством вершин U. Производящие функции $B(x) = \tilde{B}(x) = (1 + \sqrt{1-4x})/(2x)$.

   (c) $P[U]$ — бинарные корневые деревья с множеством листьев U, они же — коммутативные неассоциативные скобочные структуры на множестве U. $P(x) = 1 - \sqrt{1-2x}$. Для $\tilde{P}(x)$ имеется уравнение $\tilde{P}(x) = x + (\tilde{P}(x)^2 + \tilde{P}(x^2))/2$, откуда находим: $\tilde{P}(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + 46x^9 + \ldots$. Общую формулу никому найти не удалось.

3. Пусть T — вид деревьев, $R = T^{\bullet}$ — вид корневыых деревьев, $V = R^{\bullet}$ — вид позвоночных. Докажите изоморфизм $V = R + V \cdot R$.

   Решение. Если голова позвоночного совпадает с хвостом, то это не что иное, как корневое дерево. В противном случае нужно отрубить голову, и позвоночное развалится на дерево и меньшее позвоночное.

4. Пусть L — вид линейных порядков, L_+ — вид линейных порядков на непустых множествах, C — вид циклических перестановок, $\mathrm{Oct} = C(L_+)$ — вид осьминогов. Докажите, что

   (a) $\mathrm{Oct}(X) + C(X) = C(2X)$, где X — вид одноточечных множеств.

   (b) $\mathrm{Oct}^{\bullet} + L(2X) = L(X) \cdot L(2X)$, где точка обозначает операцию пунктирования (выделения точки).

   Решение.

   (a) $C(2X)$ — это цикл, состоящий из точек двух цветов. Если все точки черные, то это структура типа $C(X)$. В противном случае из цикла можно сделать осьминога, поместив белые точки на центральную окружность, а черные выпустив в виде щупалец в стороны.

   (b) Можно доказать подобным же комбинаторным рассуждением. А можно при помощи тождественных преобразований в кольце виртуальных видов. С одной стороны,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Oct}(X) &= C(2X) - C(X), \\
\mathrm{Oct}^{\bullet} &= C(2X)^{\bullet} - C(X)^{\bullet} = L(2X) \cdot 2X - X \cdot L \\
&= \frac{2X}{1-2X} - \frac{X}{1-X} = \frac{X}{(1-X)(1-2X)}.
\end{aligned}$$

   С другой стороны:

$$\begin{aligned}
L(X)L(2X) - L(2X) &= \frac{1}{1-X} \cdot \frac{1}{1-2X} - \frac{1}{1-2X} \\
&= \frac{X}{(1-X)(1-2X)}.
\end{aligned}$$

5. (a) Представьте вид $(X \cdot E_2) \times (X \cdot E_2)$ в виде многочлена от X и E_2. (Многочлен понимается относительно сложения и 'обычного' умножения видов.)

   (b) Разложите вид $\mathrm{Oct} + C$, где Oct — вид осьминогов, а C — вид циклических перестановок, нетривиальным способом в декартово произведение двух видов.

   Ответ.

   (a) $(X \cdot E_2) \times (X \cdot E_2) = X \cdot E_2 + X^3$.

   (b) $\mathrm{Oct} + C = C(2X) = C \times \mathrm{Sub}$, где $\mathrm{Sub} = E \cdot E$ — вид подмножеств.