Задачи по комбинаторным видам

С. В. Дужин

1. Придумайте комбинаторный вид F такой, что

   (a) Число f_n структур вида F на n-элементном множестве есть n-е число Фибоначчи.

   (b) Число $\tilde{f}_n$ классов эквивалентности структур вида F на n-элементном множестве есть n-е число Фибоначчи.

   В каждом случае найдите производящие функции $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$.

2. Дайте явное описание комбинаторных видов Y, B и P, удовлетворяющих соотношениям

$$
\begin{aligned}
Y &= 1 + X \cdot Y, \\
B &= 1 + X \cdot B^2, \\
P &= X + E_2 \circ P,
\end{aligned}
$$

   где 1, X и E_2 — виды пустых, одноточечных и двухточечных множеств соответственно. Найдите производящие функции $Y(x)$, $\tilde{Y}(x)$, $B(x)$, $\tilde{B}(x)$, $P(x)$, $\tilde{P}(x)$.

3. Пусть T — вид деревьев, $R = T^\bullet$ — вид корневыых деревьев, $V = R^\bullet$ — вид позвоночных. Докажите изоморфизм $V = R + V \cdot R$.

4. Пусть L — вид линейных порядков, L_+ — вид линейных порядков на непустых множествах, C — вид циклических перестановок, $\mathrm{Oct} = C(L_+)$ — вид осьминогов. Докажите, что

   (a) $\mathrm{Oct}(X) + C(X) = C(2X)$, где X — вид одноточечных множеств.

   (b) $\mathrm{Oct}^\bullet + L(2X) = L(X) \cdot L(2X)$, где точка обозначает операцию пунктирования (выделения точки).

5. (a) Представьте вид $(X \cdot E_2) \times (X \cdot E_2)$ в виде многочлена от X и E_2. (Многочлен понимается относительно сложения и ‘обычного’ умножения видов.)

   (b) Разложите вид $\mathrm{Oct} + C$, где Oct — вид осьминогов, а C — вид циклических перестановок, нетривиальным способом в декартово произведение двух видов.

Задание выдано 31 октября 2000. Решения в рукописном виде сдавать 14.11.2000 либо в электронном виде до того же срока по адресу `duzhin@botik.ru`.

Лекционные заметки см. по адресу `http://www.botik.ru/~duzhin/NMU`.