数, 式, 図形
数学者は孤独の中で何を考えるのか？

セルゲイ=ドゥージン, 数理科学センター

May 28, 1994

「数学とは何か」について私なりの考え方をこれからお話しします。そして純粋数学の研究者の典型的な研究生活がどんなものか少し紹介します。

1　数学暴動

数学とは退屈なものという感じを多くの人はお持ちでしょう。数学は抽象的な概念を操ります。数学の一番目につく特徴です。数学の美しさに感動するためには、あるレベルに達するための特別なトレーニングが要求されます。数学が多くの人を退屈させる理由はここにあります。しかし、数学上の発見のニュースが一般の人々に伝えら、それが大きな関心を集めただけにとどまらず、さらには暴動騒ぎ (数学フーリガン) に発展したことがあります。

最近の例では、1993 年、アンドリュー=ワイルス教授が「フェルマーの最終定理を証明した」とアナウンスしたときの事件があげられます。

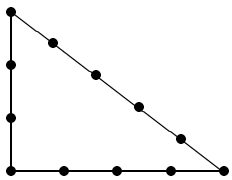
この定理はとても有名です。定理自身の主張は誰でも理解できる初等的なものだからです。しかし、360 年間の誰も証明に成功していません。この定理を説明しておきましょう。

> n を 2 より大きい整数としよう。すると次の方程式を満たす正の整数 x, y , z の組は存在しない。
>
> $$x^n + y^n = z^n.$$
>
> 言い方を替えると、$x^3 + y^3 = z^3$, あるいは $x^4 + y^4 = z^4$, あるいは $x^5 + y^5 = z^5$, ... などを満たす自然数は存在しない。

フランスの数学者フェルマーが、多分 1635 年あたり、彼がそのとき読んでいた数学の本の余白に書き残したものです。彼は続けて「私はこの事実のすばらしい証明を考えついたが、余白が足りなくて書けない。」と書いています。

$n = 2$ の場合についてちょっと注意しておきます。このときは $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組が存在します。最も簡単な例は $3^2 + 4^2 = 5^2$ です。ところでこの等式は、辺の長さが 3,4,5 の三角形が直角三角形であることを示しています。古代エジプト人たちは、

毎年のナイルの氾濫のあとの耕地の測量にこの事実を使っていました。図は測量に使ったロープです。



エジプト人のロープ

ファルマーはこの定理を 17 世紀に定式化しましたが証明は発表しませんでした。多分自分の議論の中に誤りを発見したからでしょう。18 世紀にはすべての数学者が証明を試みました。19 世紀には多くの数学者が証明を試みました。20 世紀に入ってからは何人かの「こだわり屋さん」の数学者だけが、この定理の証明の努力を続けて来ました。誰かがとうとう証明できたというアナウンスが時々聞かれましたが、いつも発見者自身あるいはその他の人が証明の誤りや論理の飛躍を見つけるのでした。

1988 年の事件もその例です。私がモスクワ大学のゲリファント=セミナーに出席中のことでした。日本の数学者、宮岡洋一教授がフェルマーの最終定理を証明したと宣言し、世界中の数学者多数に手紙を送ったというのです。次の週の同じセミナーでゲリファント教授は宮岡教授から証明の間違いについての別の手紙を受け取っていると言いました。

さて、去年の夏の事件に戻りましょう。ケンブリッジ大学での 3 回連続講演の中でプリンストンから来たアンドリュー=ワイルス教授は「谷山-志村予想」の証明について話しました。この予想が証明されると、そこからフェルマーの最終定理が出てくるのです。

このニュースがアメリカに伝わると、いつくかの大学町で学生たちが、街頭で馬鹿騒ぎを始めました。シカゴ=トリビューン (シカゴ新聞) が 1993 年 6 月 29 日に伝えたところによると:

> ... 先週、お祝いの中で暴動と破壊が行なわれた。本屋のウィンドウは割られ、棚は放りだされ、空き地では積み上げられた古い論文に火がつけられ周囲の空間を明るく照らした。
>
> ... “数学フーリガンは最悪だ” とシガゴ警察のスポークスマンは語った。“しかし、市当局はビーベルバッハ暴動の教訓があったので、今回の騒ぎに対処することができた。”

アメリカの警察官が数学の知識をもつようになったことがこれで分かるでしょう。「ビーベルバッハ」暴動は 1984 年、ルイ=ドゥブランジュが複素解析のビーベルバッハ予想を遂に証明したときに起こりました。さらに 8 年前、ハーケンとアペルによる有名な 4 色問題の解決のときに似た事件が起こっています。その時には、ハイドパーク中の騎馬警察隊が路上で車をひっくり返そうとする学生の群衆を押えようと出動しています。

専門家たちはワイルスの研究がフェルマーの定理の証明向かって最も正しい道筋を真剣に歩んでいると考えています。しかし、数学暴動は助けになりません: 1993 年 12 月ワイルスは電子メールで世界に向かって、自分の証明に飛躍があることを発見したがまだそれを埋めることができないと発表しました。フェルマーの最終定理の物語はさらに続くのです!

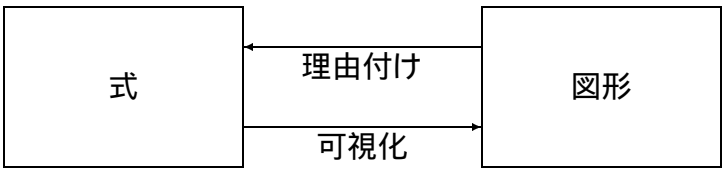
2　数学: 論証と知覚の双対性 (二重性)

日本語の「数学」は字面の意味は「数に関する学問」です。有名な西洋の百科辞典にも似たような数学の定義が書かれています。ヨーロッパ系の言語での mathematics の原義は古代ギリシャ語の「学ぶ」という動詞にさかのぼります。— 本当に広いとらえ方ですね！

歴史的にみれば、数学が他の諸学問から独立したばかりのころは 2 つの部門から成っていました: 算術 (数の学問) と幾何学 (図形の学問) です。

時代が下るにしたがって、新しい概念が導入され新しい分野が数学の中に登場しました。それでも根本的には、式と図形、あるいは代数的操作と幾何学的想像の双対性 (二重性) が数学の精神的な基盤を構成しています。

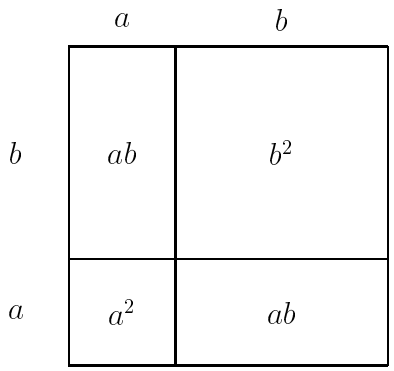
空間についての数学的考察は必ず厳密な (代数的な) 証明あるいは説明を伴います。逆に、抽象的な代数を考察する時に直観の助けを必要とするときは、可視化された概念のみが助けになります。



代数と幾何の関係

幾何学の考え方がいかに代数の考察に役に立つのか、逆に代数の概念がいかに幾何学に応用されるのか、いくつか例をあげましょう。

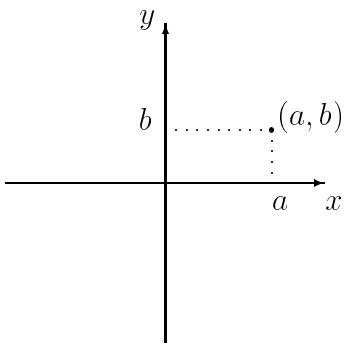
- 公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の幾何学的証明:



これは古代ギリシャにさかのぼります。幾何学的代数学と呼ばれるギリシャ数学の 1 分野でよくなされた議論です。

- デカルト座標

平面上の点に図のような座標と呼ばれる 2 つの数の組を結び付けるというアイデアです。



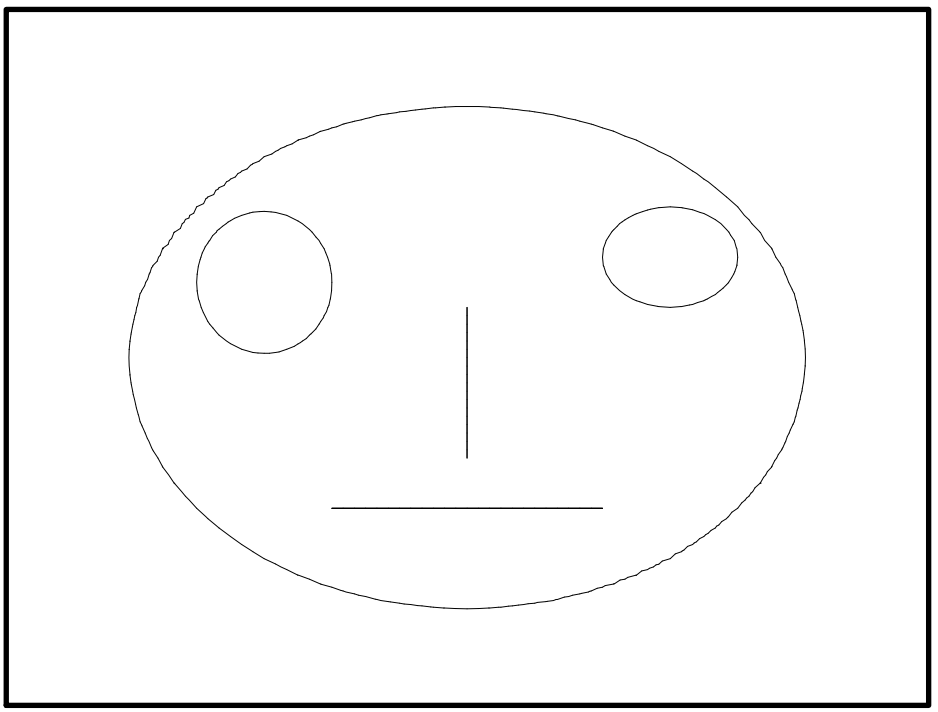
このトリックによって幾何学のどんな定理も代数的なお決まりの式変形で証明できることになります。

デカルトのアイデアを逆向きに使うと、代数の方程式問題を幾何学の図形の問題に翻訳することができます。

例えば、式

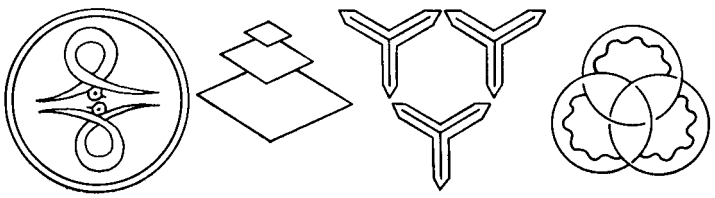
$$\left(x^2+y^2-25\right)\left(|x-2|+|x+2|-4+(y+3)^2\right)\left(x^2+|y-1|+|y+2|-3\right)$$
$$\left((x+3)^2+\frac{(y-3/2)^2}{2}-1\right)\left((x-3)^2+(y-2)^2-1\right)=0$$

は次の曲線を定義します。



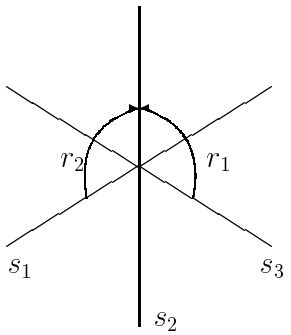
3　対称性を計る

次の図では日本の伝統的な家紋から 4 つ取ってきました。



日本の家紋

数学的な観点からは、これらはそれぞれ異なるタイプの対称性をもつということで非常に興味あるものになっています。例えば 3 番目の紋は 6 つの対称変換からなる群をもっています: 恒等変換 e, 2 つの回転 r_1 , r_2 そして折り返し s_1, s_2 and s_3:



もし、 2 つの対称変換を続けて実行するとしたら、それは下のかけ算表にしたがってもうひとつ別の対称変換を得ることになります。

	e	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
e	e	r_1	r_2	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	e	s_3	s_1	s_2
r_2	r_2	e	r_1	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	r_1	r_2
s_2	s_2	s_3	s_1	r_2	e	r_1
s_3	s_3	s_1	s_2	r_1	r_2	e

この「かけ算」は通常の数のかけ算と代数的性質が異なります。例えば交換法則 $xy = yx$ は成り立ちません。

4　数学者はいつも何をしているの？

短く答えるなら: 計算している。ということです。「計算」ということばが適切に解釈されるなら本当にこれが正解です。

古い時代には計算するとは数を勘定することを意味していました。そういう意味で計算力にとても優れた有名な数学者がいます。レオナルド=オイラーもそのひとりです。(彼が死んだ時の公式のアナウンスは「オイラーが亡くなった。そして計算を止めた。」)

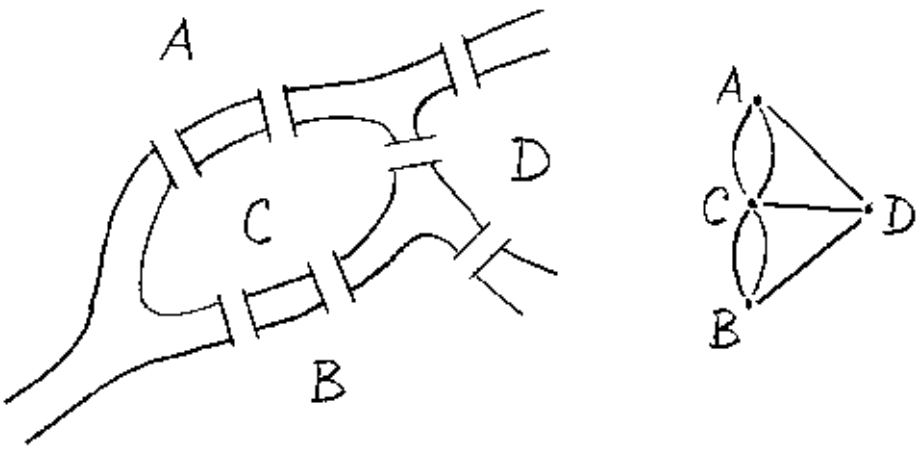
ここに彼の有名な計算の物語りをあげましょう。

作図の問題やその他で次の整数がよく登場します。$2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, $2^{2^5}+1=4294967297$, etc. もしそれらが素数だったら (つまり 2 つの数の積に分解できなかったら) 非常に重要です。(例えば $6=2\cdot 3$ は素数でない)

17 世紀にピエール=フェルマー (フェルマー最終定理のその人!) は最初の 4 つの数 (5,17,257,65537) が素数であることに気がつきました。そして先の数列中のすべての整数が素数であろうと予想しました。この予想はそれから 100 年間信じられていましたが、オイラーが — なんと直接計算によって — 5 番目の数 4294967297 が 641 で割れることを示しました。

オイラーに関してもうひとつの有名な話は彼が考えた「ケーニヒスベルクの橋」の問題です: 地図の中のすべての橋を丁度 1 回ずつ渡って 1 巡りできるか。

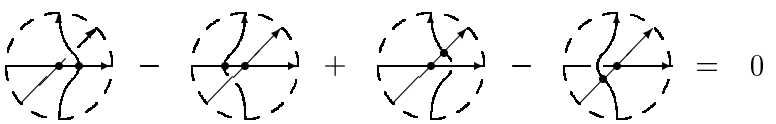
この図は問題自身とその解決方法の両方を示しています。



オイラーの定理は単純ですが、数学的考察の典型を与えてくれます: まず、問題を適切な別の言語で再定式化する、— このケースではグラフ理論のことば — 結果に結び付く対象物 (グラフ) の重要な性質 — このケースでは頂点の次数 — を調べることになるわけです。

このような考察はケーニヒスベルクの橋に端を発した数学の 1 分野、そして現在多くの研究が行なわれている代数的位相幾何学 (トポロジー) の典型的なスタイルです。

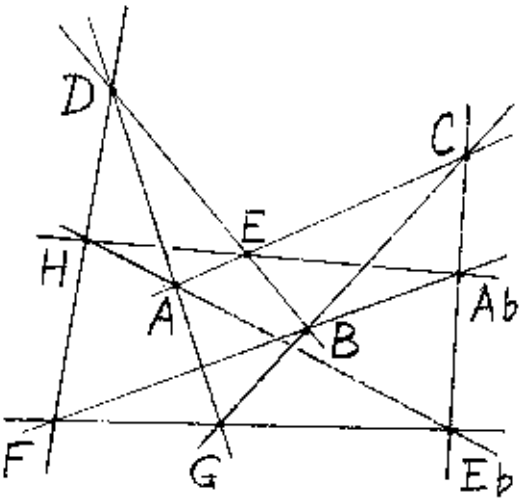
現代のトポロジーについて多くを語ることはできません。そこで結び目の不変量に関する論文にしばしば登場する方程式を紹介しましょう。

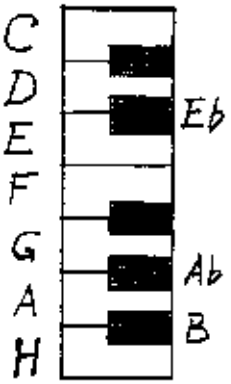


数学者はもはや、数と文字だけの式を書くだけでは満足できなくて、絵を式の中に使うようになってしまったのです！

5　幾何学を聴く

次の図では、10 本の直線、10 個の点が、ある条件で配置されています。すなわち、どの直線上にも丁度 3 つの点がのっており、どの点も丁度 3 本の直線が通っているという条件です。これはデザルクの配置と呼ばれる有名なものです。





1991 年、モスクワ大学の学生アレクセイ=ズボフと私は、ロシアのペレスラブリ-ザレスキーで行なわれたコンピュータ夏の学校で参加者にこの構成を教えました。

夜は、学生みんなと音楽を楽しんだものです。夏の学校の雰囲気は自然と次のアイデアに導いてくれました。デザルクの配置にちなんだ音楽を書いてみよう。

10 個の点それぞれに、12 音の中から選んだ 10 個の音階を割り当てました。どの直線も 3 和音の 1 つを構成します。これで 10 個 (直線 10 本) の和音が得られます。もちろん、でたらめに割り当てたなら、おそろしい和音ができあがるでしょう。そこで我々はプログラムを書きコンピュータにこの仕事をやられました。

満足のいく音階の割り当てがみつかったあと、我々はこの 10 個のデザルク和音に基づいて 1 曲書こうと決めました。メロディー、拍子、楽器の構成などは自由です。制限はハーモニーを破らないこと、すべてのデザルクコードを使うこと、これだけです。

さあみなさん、この奇妙な努力の結果に点をつけてください。では、始めます。「数学的」音楽を。