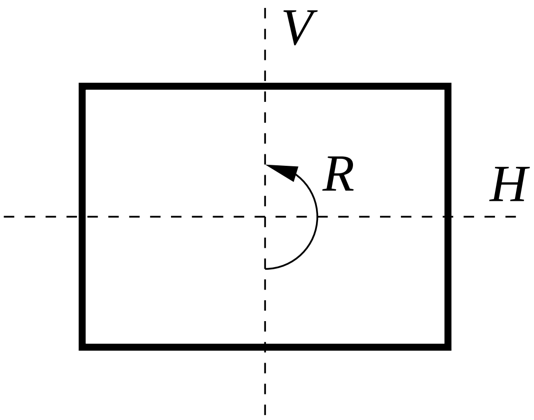
Лекция 1

Понятие о группе преобразований

История. Поиск формул для решения алгебраичесикх уравнений в радикалах. Абель. Галуа. Жордан. С.Ли. Кристаллография.

Пример. Группа симметрий прямоугольника. Пусть П — прямоугольник на плоскости. Существует четыре движения плоскости, при которых П переходит сам в себя: I — тождественное преобразование, R — поворот на $180°$ вокруг центра прямоугольника, H — отражение (осевая симметрия) относительно горизонтальной прямой, V — отражение относительно вертикальной прямой,



Оказывается, что множество, состоящее из этих четырех элементов

$$G = \{I, R, H, V\},$$

обладает определенной внутренней структурой, основанной на понятии композиции.

Определение. Если f и g — два преобразования одного и того же множества M, то их композиция $f \circ g$ — это преобразование, заключающееся в последовательном выполнении сначала g, а потом f.

Для любых двух преобразований из списка $\{I, R, H, V\}$ их композиция переводит наш прямоугольник в себя. Следовательно, такая композиция также принадлежит множеству G. Перебирая все пары, мы можем составить таблицу композиций (или таблицу умножение) нашей группы:

	I	R	V	H
I	I	R	V	H
R	R	I	H	V
V	V	H	I	R
H	H	V	R	I

Теперь дадим точное определение группы преобразований.

Определение. Группа преобразований — это совокупность преобразования данного множества, которая вместе с каждой парой элементов содержит их композицию, и для каждого элемента содержит обратное к нему преобразование.

Замечания по поводу определения.

1. Всякая группа преобразований обязательно содержит тождественное преобразование.

2. Композиция преобразований обладает свойством ассоциативности $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

3. Если группа конечна, то второе свойство из определения вытекает их первого.

Примеры: две бесконечные серии конечных групп преобразований.

1. C_n — группа, состоящая из поворотов плоскости вокруг фиксированного центра на углы, кратные $2\pi/n$. $C_n = \{I, R, ..., R^{n-1}$. $R^n = I$. Порядок группы $|C_n| = n$. R — образующий элемент.

2. D_n — группа симметрий правильного n-угольника. Она включает в себя все элементы группы C_n и, кроме того, n различных отражений относительно осей симметрии многоугольника.

Коммутативность. Группа G называется коммутативной, если групповая операция обладает свойством перестановочности $f \star g = g \star f$ для любых $f, g \in G$. Все группы C_n, а также группы D_1, D_2 коммутативны. Группы D_n при $n \geqslant 3$ некоммутативны.

Задача. Составьте таблицу умножения для группы D_3. Убедитесь в том, что эта группа некоммутативна.