Лекция 2

Общее понятие группы

Определение. Множество G называется *группой*, если:

(0) в G определена *операция*, т.е. задано правило, по которому каждой паре элементов $(a, b) \in G$ сопоставляется третий элемент $a \star b \in G$. Операция $\star$ должна обладать следующими свойствами:

(1) *ассоциативность*: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

(2) наличие *нейтрального элемента*, т.е. такого элемента $e \in G$, что $a \star e = e \star a = a$ для любого $a \in G$.

(3) наличие у каждого элемента $a \in G$ *обратного*, т.е. такого элемента $b \in G$, что $a \star b = b \star a = e$.

Пояснения к определению группы.

1. Множество G может состоять из элементов произвольной природы: это могут быть числа, наборы чисел, преобразования, алгебраические выражения, геометрические фигуры и т.д. и т.п.

2. Групповая операция $\star$ может быть задана каким угодно способом: формулой, алгоритмом, описанием — важно лишь, чтобы она обладала тремя перечисленными свойствами.

3. Замечание по поводу обозначений. Если в качестве операции используется сложение (чисел, векторов и т.п.), то группу называют *аддитивной*, нейтральный элемент обозначают 0, а обратный для a обозначают $-a$. Если в качестве операции берут умножение (чисел, матриц и т.п.), то группу называют *мультипликативной*, а обратный для a обозначают a^{-1}. Как и в случае обычного умножения, в произвольной группе часто используется упрощенная запись ab вместо $a \star b$, при этом говорят "умножение элементов группы" вместо "применение групповой операции", а элемент, обратный к $a \in G$, обозначают a^{-1}.

Пример. Образует ли группу каждое из перечисленных ниже множеств с указанной операцией?

1. все четные числа с операцией сложения.
2. все нечетные числа с операцией сложения.
3. все действительные числа с операцией вычитания.
4. все натуральные числа с операцией сложения.
5. все неотрицательные целые числа с операцией сложения.
6. все действительные числа с операцией $x * y = x + y - 1$.

Ответы. 1. Да.

2. Нет. Не выполняется свойство (0): сумма нечетных все нечетные числа с операцией сложения.

3. Нет. Нарушается свойство (1), например, $(1-2)-3=-4$, $1-(2-3)=2$.

4. Нет. Нарушается свойство (2): множество не содержит нейтрального элемента по отношению к сложению, т.е. числа 0.

5. Нет. Нарушается свойство (3): у положительных чисел в данном множестве нет обратного элемента по отношению к сложению.

6. Да. Поскольку операция нестандартная, здесь нужна полная проверка всех требований определения. Ассоциативность выполняется, т.к. $((x+y-1)+z)-1 = x+((y+z-1)-1)$ для любых чисел x, y, z. Нейтральный элемент — число 1, так как $x*1 = x+1-1 = x$. Обратное к данному x — число $2-x$, так как $x*(2-x) = x+(2-x)-1 = 1$.

Группы, часто встречающиеся в математике.

1. Группы преобразований.

   Всякая группа преобразований является группой в указанном общем смысле, поскольку композиция преобразований всегда обладает свойством ассоциативности, а нейтральный элемент (тождественное преобразование) принадлежит любой группе преобразований, как было отмечено выше.

2. Числовые группы.

   - Аддитивные группы целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$.
   - Мультипликативные группы целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел (для целых чисел группа состоит из двух элементов; в остальных случаях берутся все числа, кроме нуля): $\{-1,1\},\cdot)$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$.

3. Матричные группы

   - Аддитивная группа матриц данного размера с элементами определенного вида. Например, $(\mathrm{Mat}(2,3,\mathbb{R}),+)$ — группа матриц размера 2×3, состоящих из действительных чисел, относительно сложения.
   - Мультипликативная группа квадратных матриц данного порядка с определителем, отличным от 0. Например, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ — группа целочисленных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a, b, c, d — целые числа, причем $ad-bc\neq 0$, с операцией умножения.

Задачи на дом.

1. Образует ли группу каждое из перечисленных ниже множеств с указанной операцией:

(a) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +)$ — множество иррациональных чисел с операцией сложения.

(b) Множество действительных чисел $(1, +\infty)$ с такой операцией: $x * y = xy - x - y + 2$.

(c) Множество всех двоично-рациональных чисел относительно операции сложения. (Число называется двоично-рациональным, если оно имеет вид $m/2^n$, где m, n — целые числа).

(d) Множество всех двоично-рациональных чисел относительно операции умножения.

2. Найдите множество действительных чисел, образующее группу относительно операции $x \star y = (x + y)/(1 - xy)$ и состоящее более чем из одного элемента.