Лекция 1
Многочлены и алгебраические многообразия

Мы будем изучать многочлены над произвольным полем.

Напомним, что поле — алгебраическая область, в которой выполнимы и обладают обычными свойствами 4 действия арифметики: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на нуль).

Примеры полей:

$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

$\mathbb{Z}_p$ — поле вычетов по модулю p.

Моном от n переменных x_1, ..., x_n — это буквенное выражение вида $x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$, где i_1, ..., i_n — неотрицательные целые числа.

Например, $x_1^2 x_2^3$ — моном от переменных x_1 и x_2; при желании его можно рассматривать и как моном от переменных x_1, x_2, x_3 (считая показатель степени у x_3 равным 0).

xyz — моном от переменных x, y, z (все показатели степеней равны 1),

1 — моном от любого множества переменных (все в степени 0).

Мультииндекс $i = (i_1, \ldots i_n)$ — это вектор, составленный из целых чисел. Мультииндексы позволяют использовать следующую краткую запись монома $x^i = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$.

Многочлен (*полином*) от переменных x_1, ..., x_n над полем $\mathbb{K}$ — это сумма конечного числа мономов с коэффициентами из данного поля, т.е. выражение вида

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,c_n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n},$$

или, используя мультииндексные обозначения,

$$f = \sum_i c_i x^i.$$

Каждое слагаемое полинома называется членом, или термом. Таким образом, терм — это моном с численным множителем. Число (точнее, элемент данного поля) c_i называется *коэффициентом при мономе* x^i.

Примеры многочленов:
$x_1x_2^2x_3 + 2x_2x_3^3 - 3x_3^3$, $x^2 + 2xy + y^2$, x^5, $1/2$.
Примеры выражений, не являющихся многочленами: x^{-1}, $x+y/z$, $\sqrt{z}$.

Согласно нашему определению, многочлен — это чисто формальное алгебраическое выражение. Однако многочлену можно придать более конкретный смысл. А именно, многочлен над полем $\mathbb{K}$ от n переменных можно рассматривать как функцию, определенную на n-мерном пространстве $\mathbb{K}^n$ и принимающую значения в $\mathbb{K}$: значение этой функции $f(a_1, ..., a_n)$ в точке $(a_1, ..., a_n)$ получается, если значения a_i подставить вместо переменных x_i в многочлен и произвести необходимые вычисления. Такие функции называются *полиномиальными*.

В случае бесконечного поля, например, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, многочлен определяется соответствующей функцией однозначно, а в случае конечного поля, например $\mathbb{Z}_p$ — неоднозначно. Более конкретно, это значит:

1. Если два многочлена над полем, например, действительных чисел, отличается хотя бы одним коэффициентом при каком-то мономе, то значения этих многочленов будут различны при каких-то значениях переменных.

2. Над конечным полем существует два различных многочлена, для которых соответствующие полиномиальные функции тождественно равны. Простейший пример таков: многочлены x^2 и x от одного переменного над полем из двух элементов $\mathbb{Z}_2$.

Раз многочлен можно понимать как функцию, то можно поставить вопрос о множестве тех значений переменных x_1, ..., x_n, при которых эта функция обращается в нуль. Это множество состоит из векторов длины n, составленных из элементов поля $\mathbb{K}$ и, таким образом, лежит в координатном n-мерном пространстве $\mathbb{K}^n$ над полем $\mathbb{K}$.

Обощая эту конструкцию, мы приходим к такому определению.

Определение. Алгебраическое многообразие — это множество совместных нулей нескольких многочленов:

$$V(p_1, ...p_m) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_1(a) = ... = f_m(a) = 0$$

или, попросту говоря, множество всех решений системы уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= 0, \\ &\cdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Частные случаи.

1. При $n = 1$, $m = 1$ имеем один многочлен от одной переменной f. Алгебраическое многообразие $V(f)$ представляет собой мноежство корней многочлена f, т.е. некоторое конечное множество элементов поля $\mathbb{K}$. Любое конечное подмножество $\mathbb{K}$ можно получить таким способом.

2. При $n = 2$, $m = 1$: плоская алгебраическая кривая.

3. При $n = 3$, $m = 1$: алгебраическая поверхность в 3-мерном пространстве.

4. При $n = 3$, $m = 2$: пространственная алгебраическая кривая.

5. Для любых m и n: если все многочлены f_i первой степени, то $V(f_1, ..., f_m)$ — аффинное подпространство в $\mathbb{K}^n$, например, прямая, плоскость и т.д.

Теорема (об объединении и пересечении алгебраических многообразий). Пусть $V_1 = V(f_1, ...f_m)$, $V_2 = V(g_1, ..., g_k)$. Тогда:

1. $V_1 \cap V_2 = V(f_1, ...f_m, g_1, ..., g_k)$.

2. $V_1 \cup V_2 = V(\{f_i g_j\}_{i=1...m, j=1...k})$.

Задание на дом.

D1. Нарисовать алгебраическое многообразие $V(xy, xz)$.

D2. Задать уравнениями объединение четырех прямых на плоскости $\{x = 1\} \cup \{x = -1\} \cup \{y = 1\} \cup \{y = -1\}$.

D3. Задать уравнениями множество, состоящее из четырех точек на плоскости $\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$.

D4. Что представляет собой алгебраическое многообразие $V(x^2+y^2-1, x^2 + z^2 - 1)$?

D5. Найти параметризацию гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, использую пучок прямых, проходящих через точку $(1, 0)$.