Лекция 3
Алгоритм Бухбергера

Всякую систему линейных уравнений можно решить путем приведения ее матрицы к ступенчатому виду по методу Гаусса. Аналогом метода Гаусса для произвольных систем полиномиальных уравнений является алгоритм Бухбергера. При этом имеют место такие соответствия:

линейная система	нелинейная системя
линейное многообразие	алгебраическое многообразие
пространство линейных функций	алгебра многочленов
подпространство	идеал
ступенчатая матрица	базис Гребнера

Основное действие в методе Гаусса — это добавление к одному уравнению другого, умноженного на подходящий множитель, с тем, чтобы обратить в ноль коэффициент при первой по порядку переменной этого уравнения. Для нелинейных уравнений аналогом этого действия является редукция одного многочлена по модулю другого.

Для определения редукции мы должны предполагать, что все члены (или мономы) обоих многочленов определенным образом упорядочены, т.е. для любых двух мономов мы можем сказать, который из них старше, чтобы при упорядочении поставить его вперед. Наиболее употребительный порядок на множестве мономов — лексикографический, т.е. два монома сравниваются сначала по степени переменной x_1, если у одного монома эта степень старше, то он объявляется старшим из двух, если равны, то сравниваем степени по переменной x_2, и т.д. Такой порядок на мономах обозначается $\mathrm{l}ex(x_1, ..., x_n)$. Другой употребительный способ сравнивать мономы: $\mathrm{d}eglex(x_1, ..., x_n)$. Это значит, что мономы вначале сравниваются по полной степени, а если эти степени совпали, то тогда проводится дополнительно лексикографическое сравнение.

Задача. Раскройте скобки и запишите в порядке убывания мономов многочлен $(x + y + z)^3$

а) используя порядок $\mathrm{l}ex(x > y > z)$,

б) используя порядок $\mathrm{d}eglex(x > y > z)$.

Если фиксирован какой-то порядок на мономах, то самый старший моном многочлена f (первый, если многочлен записан по порядку) называется ведущим и обозначается $\mathrm{l}m(f)$.

Определение. Пусть f и g — два многочлена от одного и того же набора переменных, $\mathrm{l}m(f)$ и $\mathrm{l}m(g)$ — их ведущие мономы. Редукция f по модулю g определена, если $\mathrm{l}m(f)$ делится нацело на $\mathrm{l}m(g)$, и задается правилом:

$$f \xrightarrow{g} f - (\mathrm{l}m(f)/\mathrm{l}m(g))g$$

Пояснение. Делимость одно монома на другой нацело означает, что в частном получается моном. Это равносильно тому, что степень любой переменной в первом мономе больше или равна степени той же переменной во втором мономе.

Определение. Редукция многочлена f по модулю семейства многочленов $\{g_1, ..., g_k\}$ — это редукция f посредством какого-либо из многочленов g_i.

Редукцию данного многочлена по модулю данного семейства (как, впрочем, и по модулю данного одно многочлена) можно итерировать. Поскольку после каждой отдельной редукции ведущий член многочлена становится меньше, рано или поздно всякая цепочка редукций закончится.

Пример. Покажем, что окончательный результат процесса редукции данного многочлена f по модулю данного набора $\{g_1, ..., g_k\}$ может зависеть от порядка, в котором проводятся действия.

Определение. S-полином пары многочленов f и g в смысле данного порядка на мономах определяется формулой:

$$S(f, g) = (\mathrm{l}m(g)/p)f - (\mathrm{l}m(f)/p)g,$$

где $p = \gcd(\mathrm{l}m(f), \mathrm{l}m(g))$ — наибольший общий делитель двух мономов.

Смысл этого определения заключается в том, что мы домножаем старшие мономы двух данных многочленов на такие наименьшие множители, чтобы они взаимно уничтожились.

Алгоритм Бухбергера.

Дан список многочленов $\{f_1, ..., f_k\}$ от n переменных x_1, ..., x_n и зафиксирован некий порядок на множестве мономов, скажем, лексикографический.

Алгоритм Бухбергера заключается в преобразовании данного списка путем попеременного выполнения следующих двух шагов до тех пор, пока в списке будет что-то меняться. Как только окажется, что после очередного выполнения двух шагов список не изменился, алгоритм заканчивает работу.

Пусть L_0 — исходный список. Алгоритм работает с переменным списком L, которому в начальный момент присваивается значение L_0, после чего начинаются итерации.

Шаг. Пусть $L = \{f_1, ..., f_m\}$ — текущее состояние переменного списка L. Для каждой пары i, j такой, что $1 \leqslant i < j \leqslant m$, составляется S-полином $S(f_i, f_j)$, затем делается его полная редукция по всем многочленам списка L и результат, если он отличен от 0, добавляется в список L.

Если в результате очередного исполнения Шага список L изменился, то происходит возврат к началу Шага. В противном случае алгоритм заканчивает работу.

Пример. Используя порядок $\mathrm{l}ex(x, y)$, применим алгоритм Бухбергера к паре многочленов $\{f_1, f_2\}$, где $f_1 = x^2 + xy - 3$, $f_2 = xy + y^2 - 6$,

Имеем:

$S(f_1, f_2) = y(x^2 + xy - 3) - x(xy + y^2 - 6) = 6x - 3y$. При вычислении базисов всякий многочлен можно умножать на ненулевой численный множитель, поэтому положим $f_3 = 2x - y$ и добавим его в список.

После первого шага алгоритма список многочленов получился такой: $\{f_1, f_2, f_3\}$. Составляем еще два S-полинома.

$S(f_1, f_3) = 2(x^2+xy-3)-x(2x-y) = 3xy-6 \xrightarrow{f_2} 3xy-6-3(xy+y^2-6) = -3y^2+12$. Делим полученный многочлен на -3 и добавляем его к списку как $f_4 = y^2 - 4$.

$S(f_2, f_3) = 2(xy + y^2 - 6) - y(2x - y) = 3y^2 - 12 \xrightarrow{f_4} 0$.

Список уже содержит 4 многочлена: $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Необходимо вычислить и прередуцировать S-полиномы для пар f_1, f_4, f_2, f_4, f_3, f_4. В результате все они дадут 0 (проверку этого факта мы оставляем читателю).

Следовательно, алгоритм работу завершает. Результат:

$$\{x^2 + xy - 3, xy + y^2 - 6, 2x - y, y^2 - 4\}.$$