Лекция 4
Базисы Гребнера

Алгоритм Бухбергера, рассмотренный на предыдущей лекции, в результате своей работы выдает список многочленов, который называется базисом Гребнера. Вот точное определение.

Определение. Набор многочленов $F = \{f_1, ..., f_m\}$ называется базисом Гребнера относительного данного порядка на мономах μ, если он обладает таким свойством:

$$S(f_i, f_j) \xrightarrow{F} 0$$

для любых i и j (где S-полином и редукция вычисляются в соответствии с выбранным порядком μ).

Иными словами, характеристическое свойство базиса Гребнера состоит в том, что, составляя S-полиномы, мы не можем добавить к множеству F никаких новых элементов.

Определение. Базис Гребнера называется *минимальным*, если никакой его элемент нельзя редуцировать относительно остальных элементов, т.е. $\mathrm{l}m(f_i)$ не делится на $\mathrm{l}m(f_j)$ ни для каких номеров i и j.

Определение. Базис Гребнера F называется *редуцированным*, если

1. никакой моном никакого полинома $f_i \in F$ не делится на старший моном никакого полинома $f_j \in F$.

2. старший коэффициент любого многочлена из F равен 1.

Теорема. Для выбранного порядка на мономах минимальный редуцированный базис Гребнера данного идеала определен однозначно. В частности, он не зависит от последовательности выбора пар для составления S-полиномов и от последовательности, в которой проводились редукции.

Примеры.

1. $F = \{x^2 + xy - 3, xy + y^2 - 6, 2x - y, y^2 - 4\}$ — базис Гребнера. Он не минимален. Соответствующий минимальный базис таков: $F = \{2x - y, y^2 - 4\}$. Этот базис не является редуцированным, так как старший коэффициент одного из многочленов равен 2. Редуцированный базис имеет вид $F = \{x - \frac{1}{2}y, y^2 - 4\}$. Вот пример базиса Гребнера, который не является редуцированным по другой причине: $\{x + y^3 - y, y^2 - 1\}$ (здесь

моном y^2 первого полинома делится на старший моном второго полинома).

2. Пример, когда минимальный редуцированный базис Гребнера зависит от порядка на мономах: набор многочленов $\{y - x^2, z - x^3\}$ является базисом Гребнера относительно лексикографического порядка: при котором $y > z > x$, но не является таковым, если положить $x > y > z$.

Приведем пример применения базисов Гребнера в реальной задаче (поиск экстремума функции нескольких переменных).

Задача. Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = x^3 + 2xyz - z^2$. Найти max и min функции f на сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$.

Применим метод множителей Лагранжа. Для этого составим функцию $\phi = f - \lambda g$, где $g = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, т.е. $\phi = x^3 + 2xyz - z^2 - \lambda x^2 - \lambda y^2 - \lambda z^2 - \lambda$. По известному правилу теперь нужно приравнять нулю частные производные функции $\phi(x, y, z, \lambda)$ по всем переменным и решить полученную систему уравнений:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yz - 2\lambda x &= 0, \\ 2xz - 2\lambda y &= 0, \\ 2xy - 2z - 2z\lambda &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы решить эту систему, найдем базис Гребнера идеала, порожденного левыми частями этих четырех уравнений. Компьютерные вычисления показывают, что ответ состоит из восьми довольно громоздких многочленов, среди которых есть следующий:

$$z^7 - \frac{1763}{1152}z^5 + \frac{655}{1152}z^3 - \frac{11}{88}z.$$

Это уравнение, несмотря на то, что выглядит устрашающе, довольно легко решается: его корни $z = 0$, $z = \pm 1$, $z = \pm 2/3$, $z = \pm 8\sqrt{11/2}$. Подставляя эти значения в предыдущее уравнение из базиса Гребнера (в которое входят только две неизвестные: y и z), получим уравнение для y, решим его и т.д.

Домашнее задание.

1. Найдите минимальный редуцированный базис Гребнера для набора многочленов $\{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\}$, используя порядок deglex.

2. Сравните минимальные редуцированные базисы Гребнера для набора $\{x-t^2, y-t^3, z-t^4\}$, полученные с использованием порядка l$ex(x > y > z > t)$ и l$ex(t > x > y > z)$.