Лекция 7
Визуализация трехмерных объектов

В этой лекции мы рассмотрим основные математические алгоритмы, используемые для наглядного изображения трехмерных тел на плоскости:

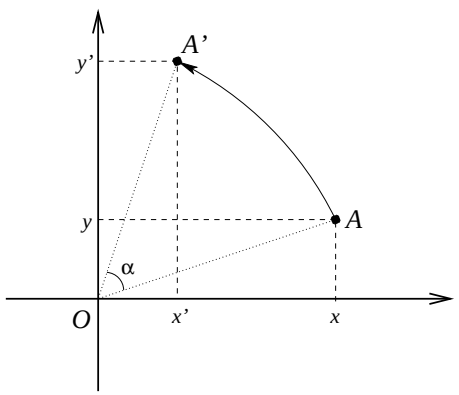
1. проекция $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$.
2. вращения в $\mathbb{R}^3$.
3. различение видимых и невидимых линий.

Проекция

Существует разные проекции трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ ("реального мира") на двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ ("дисплей компьютера"). Простейший способ — ортогональная проекция: берут плоскость $\mathbb{R}^2$, вложенную в трехмерное пространство, и делают проекцию на эту плоскость вдоль перпендикуляра к ней. Проще всего такая проекция выглядит, если в качестве $\mathbb{R}^2$ взять координатную плоскость, например, плоскость Oxy, тогда проекция действует по правилу: $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Для наглядности восприятия трехмерного тела нужно уметь проектировать его на разные плоскости. Заметим, однако, что вращение плоскости проекции приводит к тому же результату, что проектирование на неподвижную плоскость повернутого тела. Алгоритм вращения тел в пространстве мы рассмотрим в следующем параграфе.

Практический вывод: для изображения точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ нужно просто отбросить координату z, останутся координаты проекции (x, y).

Формулы вращений

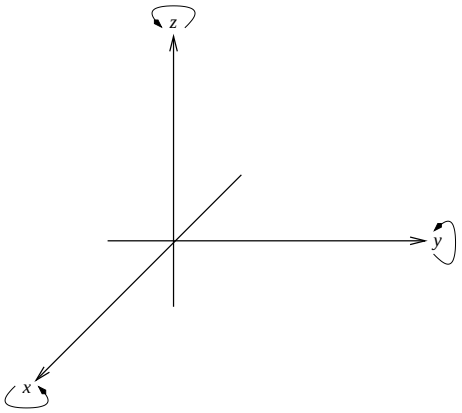


Как известно из аналитической геометрии, при повороте плоскости вокруг начала координат на угол α произвольная точка (x, y) переходит в точку (x', y'), которая определяется по формулам

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матрица, которая фигурирует в этой формуле, есть *матрица поворота*

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

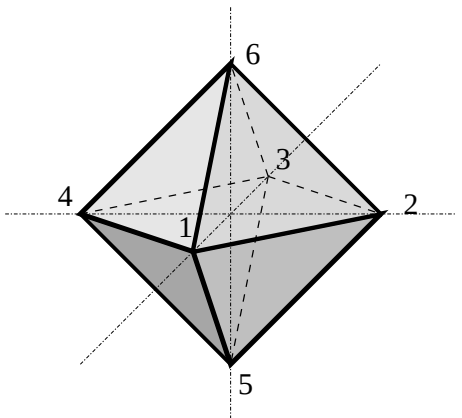


Формулы вращения трехмерного пространства вокруг координатных осей легко отсюда выводятся, ведь каждый такой поворот не затрагивает одну ось и фактически происходит в одной плоскости. Соответствующие матрицы таковы:

$$\begin{aligned} R_x^\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \\ R_y^\alpha &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \\ R_z^\alpha &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Распознавание видимых и невидимых линий

Рассмотрим задачу изображения выпуклого многогранника в ортогональной проекции на плоскость Oxy параллельно оси Oz.

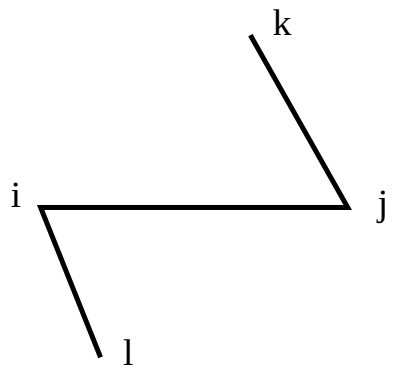


Если мы смотрим на многогранник сверху, то данная грань видима, если нормаль (перпендикулярный к ней вектор) имеет неотрицательную z-компоненту (т.е. грань "смотрит" вверх).

Ребро многогранника видимо, если хотя бы одна из двух соседних граней видима.

Как определить векторы нормали для двух граней, соседних с данным ребром? Для этого нужно воспользоваться векторным произведением векторов. Рассмотрим ребро A_iA_j:

Пусть k — номер какой-то третьей вершины в левой грани (если двигаться вдоль ребра от i к j, находясь снаружи многогранника), а l — номер какой-то вершины в правой грани.



Векторы нормали n_1, n_2 к этим двум граням моджно выбрать, например, таким образом:

$$\begin{aligned} n_1 &= (A_j - A_i) \times (A_k - A_j), \\ n_2 &= (A_l - A_i) \times (A_j - A_i). \end{aligned}$$

Указания по прогшраммированию

Структура входного файла (на примере октаэдра):

```
6
1 0 0
0 1 0
...
12
1 2 6 5
4 5 1 3
...
```

Первая строка — число вершин (n).

Следующие n строк — координаты вершин.

Следующая строка — число ребер (m).

Следующие m строк — четверки (i, j, k, l) для каждого ребра ((i, j) — само ребро, k — какая-то вершина слева, если идти от i к j, l — какая-то вершина справа).

В программе должен быть массив координат всех вершин (переменный). К нему нужно применять повороты вокруг осей (для плавности, на небольшие углы), и после каждого поворота выводить соответствующее плоское изображение, изображая видимые ребра сплошными линиями, а невидимые — пунктиром.