Лекция 9
Кривые Безье

В этой лекции речь пойдет о следующей проблеме. Дана последовательность точек на плоскости. Провести гладкую кривую, которая (в каком-то смысле) следует за ломаной, соединяющей эти точки.

Кривые, обладающие таким свойством, называются *сплайнами* (spline). Существует несколько различных понятий сплайна и, соответственно, несколько различных алгоритмов их построения. В данной лекции мы рассмотрим две простейших классических конструкции: интерполяцию Лагранжа (J.-L. Lagrange, знаменитый французский математик 18 века) и кривые Безье (P. Bézier, инженер фирмы Рено, 1960-е годы).

Интерполяция Лагранжа

Кривая Лагранжа $L_{P_0,\dots,P_n}$, определенная данным набором точек $P_i(a_i, b_i)$, $i = 0, \dots, n$ — это график многочлена $y = f(x)$ степени n, проходящий через данные точки, т.е. такого, что $f(a_0) = b_0$, ..., $f(a_n) = b_n$. Многочлен $f(x)$ называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

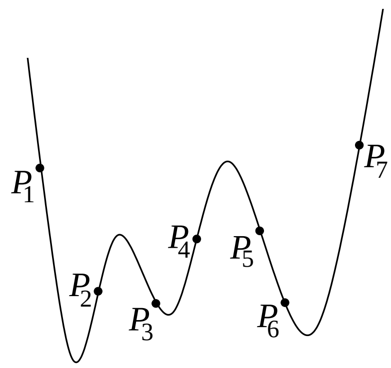
Свойства кривых Лагранжа.

1. При построении кривых Лагранжа существенное значение имеет расположение системы координат (x, y) относительно заданных точек. В частности, кривую можно провести только в том случае, когда x-координаты всех данных точек различны: $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

2. Если выполнено предыдущее условие, то кривая Лагранжа определена однозначно. (Этот факт вытекает из того, что многочлен степени не выше n не может иметь $n + 1$ корень.)

3. Кривая Лагранжа проходит точно через данные точки.

4. В промежутках между точками P_i кривая Лагранжа может весьма сильно от них отклоняться. Зависимость кривой $L_{P_0,\dots,P_n}$ от набора точек $P_0, \dots, P_n$ обладает свойством неустойчивости: при малых сдвигах одной точки поведение кривой в целом может существенно измениться. (Читатель может попытаться найти пример такой неустойчивости экспериментально, рисуя кривые Лагранжа на компьютере.)



Пункты 2, 3 можно отнести к числу достоинств, а пункты 1, 4 — к числу недостатков интерполяции по Лагранжу.

Интерполяционный многочлен Лагранжа можно задать следующей явной формулой:

$$f_{P_0,\ldots,P_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{j\neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j},$$

где для данного значения i произведение берется по всем j от 0 до n, кроме значения $j=i$. Например, при $n=2$ получим:

$$f_{P_0,P_1,P_2}(x) = b_0\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + b_1\frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + b_2\frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}.$$

Кривые Безье

Кривые Безье, в отличие от кривых Лагранжа, не проходят точно через все данные точки, зато они лишены недостатков 1 и 4 кривых Лагранжа, сохраняя при этом свойство 2. Вот точное определение.

Кривая Безье $B_{P_0,\ldots,P_n}$, определенная данным набором точек $P_i(a_i,b_i)$, $i = 0,\ldots,n$, задается параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} a_k, \\ y(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} b_k \end{aligned}$$

или, в векторной форме,

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} P_k,$$

где $P(t)$ — переменная точка этой кривой с координатами $x(t), y(t)$.

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, а многочлен от переменной t

$$B_n^k(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

называется *многочленом Бернштейна* (специаисты по компьютерной графике, плохо знающие историю математики, часто называют его многочленом Безье). Сумма значений всех многочленов Бернштейна равна 1:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \Big(t + (1-t)\Big)^n = 1,$$

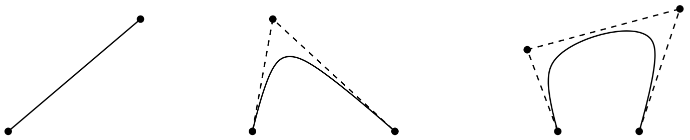
поэтому точка $P(t)$ является "взвешенным средним" точек P_0, P_1, ..., P_n с весами $B_n^k(t)$. Отсюда, в частности, следует, что кривая Безье лежит в выпуклой оболочке точек P_0, P_1, ..., P_n.

Рассмотрим кривые Безье для малых значений n.

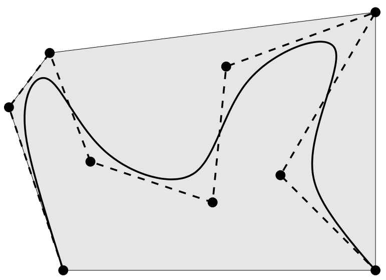
1. $n = 1$. В этом случае получается прямая.

2. $n = 2$. Получается кривая второй степени (парабола), проходящая через точки P_0, P_2 и такая, что касательные в этих точках к кривой проходят через P_1. Эти свойства определяют параболу однозначно.

3. $n = 3$ — кубическая кривая с аналогичными свойствами: она начинается в P_0, заканчивается в P_3, а касательные в этих точках проходят через P_1 и P_2. Эти свойства, однако, не определяют кубическую кривую однозначно, и степень ее искривленности определяется длинами отрезков P_0P_1, P_2P_3.



В общем случае кривая Безье — гладкая кривая, которая выходит из P_0, заканчивается в P_n, а по дороге "старается" следовать за контрольными точками P_i:



Еще одно важное свойство кривых Безье произвольной степени: такая кривая "извивается" не больше, чем исходная ломаная $P_0P_1 \ldots P_n$. Точный математический смысл таков: какую бы прямую на плоскости ни провести, число точек ее пересечения с кривой Безье не больше, чем число точек ее пересечения с ломаной.