городская олимпиада по математике

Переславль-Залесский, 16 декабря 2000

Решения задач 8–11 классов

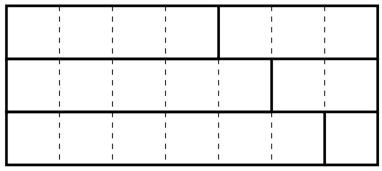
8 класс

1. Можно ли из шести прямоугольников размерами 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6 составить один прямоугольник, у которого обе стороны больше 1?

   Ответ. Да.

   Решение.

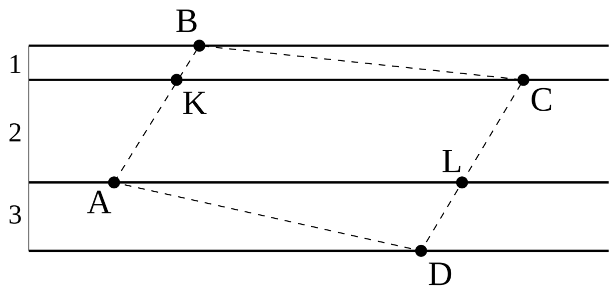
   Один из возможных способов показан на рисунке.

2. Четыре параллельные прямые расположены на расстояниях 1, 3 и 2 друг от друга (см. рисунок). Можно ли расположить по одной точке на каждой из этих прямых так, чтобы они были вершинами параллелограмма?

   Ответ. Нельзя.

   Решение.

   Предположим, что $ABCD$ — параллелограмм. Тогда $AKCL$ — тоже параллелограмм. Следовательно, треугольники ADL и BCK равны по двум углам и стороне между ними. Но их соответственные высоты, по условию, равны 1 и 2. Получаем противоречие.

3. Ученый Потапов предложил новую шкалу температур. Повышение температуры на 1° по Потапову равносильно повышению на $1{,}2^\circ$ по Цельсию. Температура 10° по Потапову — это все равно, что $20^\circ C$. Какая температура выражается одинаковым числом градусов по Цельсию и по Потапову?

   Ответ. -40°.

   Решение. Обозначим неизвестное число градусов за x. Тогда из условия следует, что $1{,}2(x - 10) = (x - 20)$.

4. Вычислите произведение

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1999^2}\right)\left(1-\frac{1}{2000^2}\right).$$

Ответ. 0,667.

Решение. Внутри каждой скобки приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1999^2-1}{1999^2}\cdot\frac{2000^2-1}{2000^2}.$$

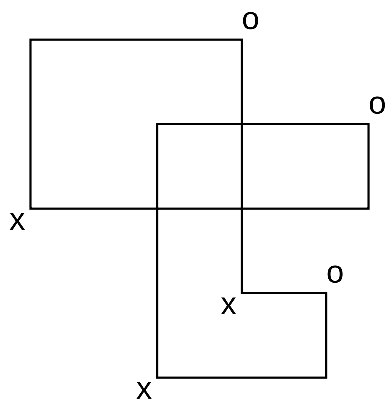
Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1998\cdot 2000}{1999^2}\cdot\frac{1999\cdot 2001}{2000^2}.$$

Теперь видно, что в числителе и знаменателе дроби, которая получается при перемножении, встречается очень много пар одинаковых чисел. Они все сократятся. А останется вот что:

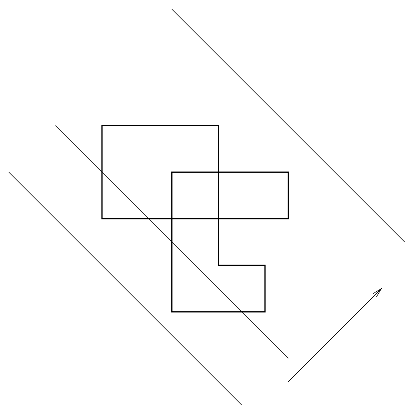
$$\frac{2\cdot 2001}{3\cdot 2000}=\frac{667}{1000}=0{,}667.$$

5. На плоскости дана замкнутая ломаная, все звенья которой горизонтальны или вертикальны. Докажите, что число вершин этой ломаной, направленных на северо-восток, равно числу вершин, направленных на юго-запад.
На рисунке изображен пример такой ломаной, где вершины, направленные на северо-восток, отмечены ноликом, а вершины, направленные на юго-запад, отмечены крестиком.



Решение.

Представим себе, что прямая линия, проходящая с северо-запада на юго-восток, движется в направлении с юго-запада на северо-восток. Пусть в начальный момент эта прямая находится целиком левее и ниже нашей ломаной.



Будем следить за числом точек пересечения прямой и ломаной. Это число меняется только в моменты прохождения движущейся прямой через вершины ломаной типа (x) и (o), причем при прохождении вершин типа (x) оно увеличивается на 2, а при прохождении вершин типа (о) оно уменьшается на 2. В начальный момент число точек пересечения было равно 0. Когда прямая уйдет далеко на северо-восток, число точек пересечения опять станет равным 0. Следовательно, его изменения за время движения компенсировали друг друга, и, стало быть, общее число вершин типа (х) равно общему числу вершин типа (о).

Другое (менее убедительное) решение этой задачи вытекает из такого наблюдения: при обходе ломаной точки, помеченные (х) и (о) должны чередоваться, поэтому число тех и других одинаково.

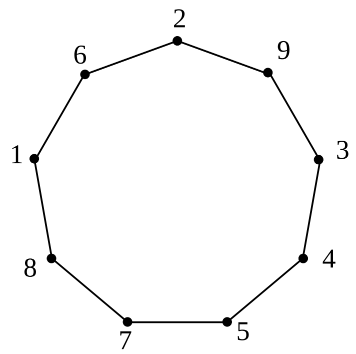
9 класс

1. В вершинах правильного девятиугольника расставляют числа 1, 2, ..., 9, после чего на каждой диагонали пишут произведение чисел, стоящих на ее концах. Можно ли так расставить числа в вершинах, чтобы все числа на диагоналях были разные?

   Ответ. Да.

   Решение.

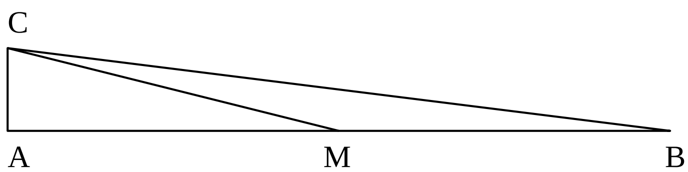
   Перечислим все пары чисел от 1 до 9, которые дают одинаковые произведения: $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. Чтобы одинаковые произведения не попали на две различные диагонали достаточно в соседние вершины поставить числа, фигурирующие (например) в левых частях этих равенств: 1 и 6, 1 и 8, 2 и 6, 2 и 9. Вот пример такой расстановки (далеко не единственный):



2. Существует ли треугольник, у которого медиана в 10 раз длиннее высоты, проведенной из той же вершины?

   Ответ. Да.

   Решение. Такой треугольник можно построить, например, следующим образом. Возьмем прямоугольный треугольник ABM с катетом $AC = 1$ и гипотенузой $AM = 10$ и продлим сторону AM до отрезка AB так, что $AM = MB$.

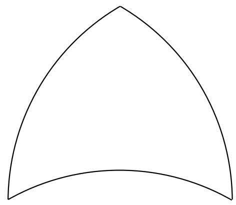


3. Можно ли числа 1, 2, ..., 2000 разбить на пары так, чтобы разность чисел в каждой паре была кратна 3?

Ответ. Нельзя.

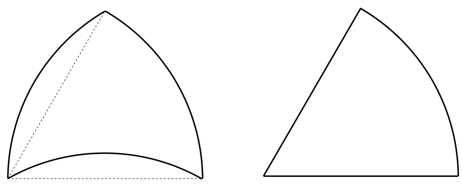
Решение. Данные числа можно разделить на 3 группы: кратные 3, дающие остаток 1 при делении на 3 и дающие остаток 2 при делении на 3. Числа из любой пары всегда относятся к одной группе, поэтому мы должны разбить на пары каждую группу. Но количество чисел во второй группе (с остатком 1) нечетно: оно равно 667. Поэтому такое разбиение невозможно.

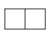
4. Из трех дуг окружности радиуса 1, каждая величиной 60°, составлен криволинейный треугольник, как показано на рисунке. Чему равна его площадь?

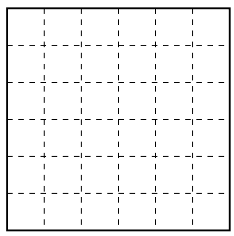


Ответ. $\pi/6 \approx 0{,}52$.

Решение. Если отрезать от данной фигуры сегмент, показанный на рисунке, и приложить его по-другому, то получится круговой сектор, составляющий $1/6$ полного круга:



5. Квадрат со стороной 6 разрезают на прямоугольники размером 1×2. Может ли при этом число вертикальных () и горизонтальных () прямоугольников быть одинаковым?



Ответ. Нет.

Решение. При любом разрезании число горизонтальных и вертикальных прямоугольников будет четным. Это вытекает из следующего более общего факта:

Данную область на клетчатой бумаге различными способами замащивают вертикальными и горизонтальными доминошками размера 1×2. *Тогда четность числа доминошек каждого вида будет всегда одна и та же.*

Доказательство. Покрасим область в горизонтальные черные и белые полосы. Пусть Ч — число черных клеток, Б — число белых клеток, В — число вертикальных доминошек, Гб — число белых горизонтальных доминошек, Гч — число черных горизонтальных доминошек. Тогда Ч = В + 2Гч , т. е. В имеет ту же четность, что и Ч.

10 класс

1. Существует ли набор чисел, сумма которых равна 1, а сумма квадратов меньше 0,1?

   Ответ. Да.

   Решение. Например, можно взять 100 чисел, равных 0,01.

2. Разложите на множители: $x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2$.

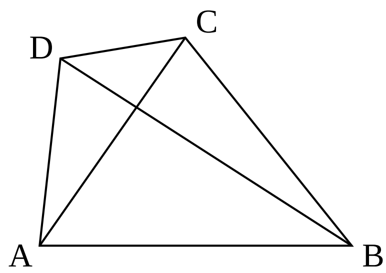
   Ответ. $(x - y)(x - z)(y - z)$.

   Решение. Сгруппировать $(x^2y - xy^2) + (y^2z - zx^2) + (z^2x - yz^2)$ и в каждом слагаемом вынести за скобки $(x - y)$.

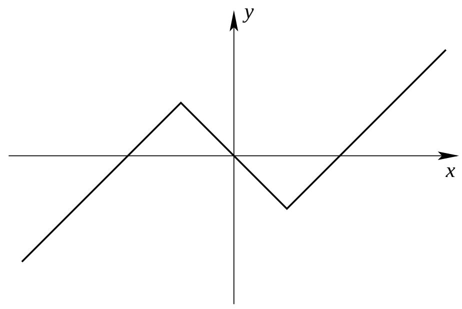
3. Докажите, что сумма длин диагоналей четырехугольника меньше его периметра.

   Решение.

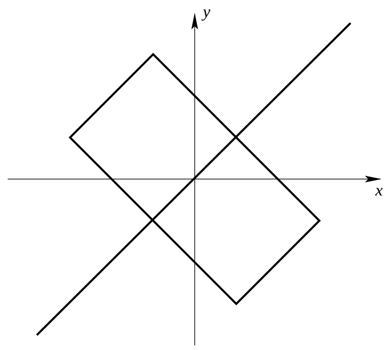
   Пусть дан четырехугольник $ABCD$. По неравенству треугольника имеем: $AC < AB + BC$, $AC < AD + DC$, $BD < BC + CD$, $BD < BA + AD$. Сложив все неравенства, получим $2(AC+BD) < 2(AB+BC+CD+DA)$, и остается лишь сократить на 2.



4. Функция $f(x)$ задана своим графиком, который имеет вид ломаной, показанной на рисунке. Изобразите на плоскости множество всех точек (x, y) таких, что $f(x) = f(y)$.



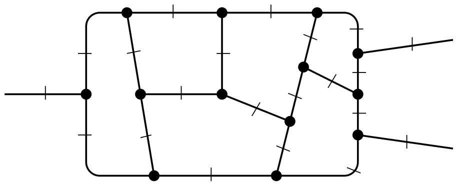
   Ответ.



5. В некотором городе на каждом перекрестке сходится 3 улицы. Каждая улица покрашена в один из трех цветов так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета. (Пример города показан на рисунке.)

   Решение.

   Разобьем каждую улицу на две полуулицы:

   Из каждого перекрестка выходит по одной полуулице каждого цвета. Кроме этого, есть три внешние полуулицы, не выходящие из перекрестков. Если n — число перекрестков в городе, а c_i — число внешних дорог цвета i, то числа полуулиц каждого цвета будут $n + c_1$, $n + c_2$, $n + c_3$. Все эти числа четные, следовательно, четность чисел c_1, c_2, c_3 одинакова. По условию, $c_1 + c_2 + c_3 = 3$. Значит, $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

11 класс

1. Назовем год квадратным, если его номер является квадратом натурального числа. Сколько квадратных годов будет в третьем тысячелетии?

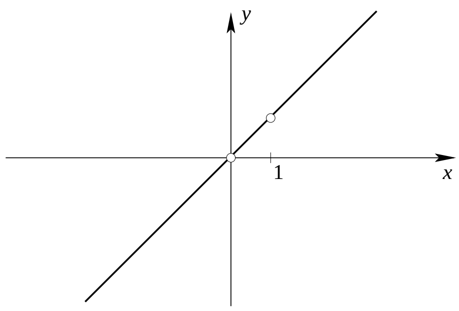
   Ответ. 10.

   Решение. Поскольку $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$, $54^2 = 2916$, $55^2 = 3025$, квадратные годы третьего тысячелетия — это квадраты натуральных чисел от 45 до 54 включительно.

2. Дана функция $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Постройте график функции $f(f(f(x)))$.

   Решение. Подставляя $1 - 1/x$ вместо x в выражение $1 - 1/x$, получаем: $f(f(x)) = 1/(1 - x)$. Подставляя сюда $1 - 1/x$ вместо x еще раз, получаем: $f(f(f(x))) = x$. Заметим, что промежуточные вычисления имеют смысл при всех значениях x, за исключением $x = 0$, $x = 1$. Поэтому полученная функция определена на вещественной оси везде, кроме этих двух точек.

   Ответ.



3. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 20 км от B. Доехав до A и B, они повернули обратно. Вторая встреча произошла в 10 км от A. Найдите расстояние между A и B. (Велосипедисты всю дорогу едут с постоянной скоростью, каждый со своей.)

   Ответ. 50 км.

   Решение. Пусть x — искомое расстояние, v_1 — скорость велосипедиста, выехавшего из A, v_2 — скорость велосипедиста, выехавшего из B. Условие задачи можно записать в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{x-20}{v_1} &= \frac{20}{v_2}, \\ \frac{2x-10}{v_1} &= \frac{x+10}{v_2}, \end{aligned}$$

   Если выразить отношение v_1/v_2 из первого уравнения и из второго и приравнять результаты друг другу, то получим уравнение с одним неизвестным

$$\frac{x-20}{20} = \frac{2x-10}{x+10},$$

   которое легко решается.

   Другое, более простое решение, предложенное членом жюри Д.Хангуляном, основано на том наблюдении, что от первой встречи до второй прошло ровно вдвое больше времени, чем от начала движения до первой встречи (потому что суммарное расстояние, пройденное велосипедистами за это время, ровно вдвое больше).

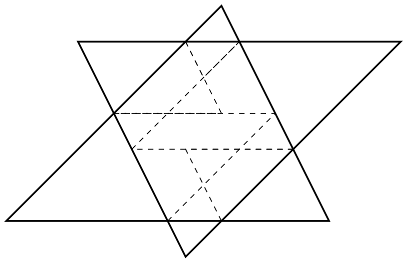
4. Два равных треугольника площади 1 центрально симметричны друг другу. Какова наибольшая возможная площадь общей части этих треугольников?

   Ответ. 2/3.

   Решение. Чтобы получить пересечение площади 2/3, нужно расположить треугольники так, чтобы каждый из них делил стороны другого на 3 равные части. Докажем, что при любом другом расположении треугольников площадь пересечения будет меньше.

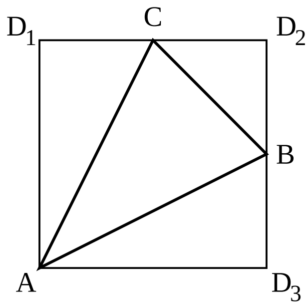
   Зафиксируем положение одного из данных треугольников (первого). Тогда все возможные положения второго треугольника отличаются друг от друга параллельным переносом.

   Можно предполагать, что треугольники расположены так, что любая сторона каждого треугольника пересекается с двумя сторонами другого треугольника. (Если бы это было не так, то очевидный сдвиг увеличил бы площадь пересечения.) Тогда пересечение треугольников — это шестиугольник H, который дополняется до первого треугольника тремя маленькими треугольниками T_1, T_2, T_3, а до второго тремя маленькими треугольниками T_4, T_5, T_6. При этом $T_1 = T_4$, $T_2 = T_5$, $T_3 = T_6$. Если S — площадь H, то каждая из этих двух троек треугольников (T_1, T_2, T_3 и T_4, T_5, T_6) имеет общую площадь $1 - S$.



Отобразим шесть этих маленьких треугольников внутрь шестиугольника H посредством центральной симметрии относительно середины внутренней стороны. Их образы покроют весь шестиугольник H, возможно с наложениями. Следовательно, $2(1-S) \geqslant S$, откуда $S \leqslant 2/3$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наложений нет, т.е. когда стороны каждого из двух исходных треугольников делят стороны другого на 3 равные части.

5. Поверхность тетраэдра $ABCD$ разрезали вдоль ребер, выходящих из вершины D. Боковые грани повернули и уложили на плоскость ABC. Получился квадрат со стороной 2. Найдите объем тетраэдра.



Ответ. 1/3.

Решение. Как известно, объем тетраэдра равен 1/3 произведения площади основания на высоту. Если в качестве основания взять треугольник BCD, то ребро AD будет высотой. В самом деле, AD перпендикулярно плоскости BCD, поскольку $AD_1D_2D_3$ — квадрат и, значит, $AD \perp DB$ и $AD \perp DB$. Остается проделать простое вычисление.

Олимпиада проведена при содействии Московского центра непрерывного математического образования (`http://www.mccme.ru`).

Происхождение задач

Ниже указаны авторы или источники приведенных задач. “Фольклор” включает вариации на хорошо известные темы.

Фольклор: 8–1, 8–3. 9–2, 10–1, 10–2, 10–3.
Прислали из Ярославля: 11–3, 11–5.
С.В.Чмутов привез из Америки: 8–4.
Придуманы составителем: 8–2, 8–5, 9–1, 9–3, 9–4, 9–5, 10–4, 10–5, 11–1, 11–2, 11–4.

Составитель С.В.Дужин (`duzhin@botik.ru`)