УДК 533.95: 537.84

НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МГД-ТЕЧЕНИЙ СОЛНЕЧНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ СИЛЬНОГО ПОЛЯ

В.С. ТИТОВ

Дан обзор новых теоретических методов исследования МГД-течений солнечной плазмы в приближении сильного вмороженного магнитного поля. Показано, что и в квазистатическом, и в гиперзвуковом режимах течения плазмы все его физические параметры могут быть рассчитаны с помощью метода характеристик. В зависимости от режима или от определяемой величины, характеристиками являются либо магнитные силовые линии, либо траектории жидких частиц. Рассматривается также общий метод расчета двумерных магнитных полей с несколькими токовыми слоями по заданной нормальной компоненте магнитного поля на фотосфере.

Введение

Приближение сильного магнитного поля применимо в условиях, когда максвелловские магнитные напряжения значительно больше по величине, чем все другие силовые напряжения, возможные в хорошо проводящей плазме или жидкости. Поэтому магнитные силы натяжения и давления в этой ситуации почти полностью уравновешивают друг друга, а имеющийся незначительный дисбаланс магнитных сил компенсируется градиентом газового давления, силами инерции, гравитации и вязкости. Так что в каждый момент времени такое магнитное поле является практически бессиловым или, иначе говоря, его эволюция осуществляется в виде непрерывной последовательности бессиловых равновесных конфигураций.

Малая сила инерции соответствует скоростям движения плазмы много меньшим альфвеновской скорости, поэтому при таком условии всякое локальное смещение магнитных силовых линий в поперечном направлении происходит значительно медленнее, чем само это смещение может распространяться вдоль силовых линий альфвеновскими волнами. В результате чего магнитное поле успевает подстраиваться под изменяющиеся граничные условия, не отклоняясь существенно от бессилового равновесия. Именно такая ситуация обычно имеет место в активных областях на Солнце, где, во-первых, скорость движения плазмы на фотосферной границе значительно меньше скорости распространения альфвеновских возмущений в короне, а, во-вторых, корональная плазма слишком разряженна, чтобы ее давление или вес заметно влияли на равновесие магнитного поля.

Таким образом, зная в каждый момент времени необходимые граничные условия для магнитного поля на фотосфере, можно в принципе найти его эволюцию. Последняя в свою очередь, в силу условия вмороженности магнитного поля, должна полностью определять поперечное движение плазмы.

Что касается продольного движения, то его характер зависит главным образом от соотношения между градиентом газового давления и силой инерции, поскольку сила Лоренца не действует вдоль силовых линий, а силы гравитации и вязкости обычно пренебрежимо малы для условий солнечной атмосферы. В самом деле, допустим, что продольная компонента силы инерции тоже пренебрежимо мала, тогда и уравновешивающий ее продольный градиент давления тоже мал, т.е. давление плазмы должно быть постоянным вдоль силовых линий. В этом случае для продольных течений плазмы будет действовать своего рода гидравлическое приближение, а при учете гравитации – гидростатическое приближение. Оно справедливо при условии, что характерное время эволюции магнитной конфигурации много больше времени распространения продольных возмущений плотности плазмы. Если это выполнено, то в процессе деформации магнитных силовых трубок заполняющая их плазма будет успевать переходить из одного гидростатического равновесия в другое. Поэтому соответствующий режим течения плазмы естественно называть *квазистатическим* или гипозвуковым, учитывая его чрезвычайно медленный характер.

В противоположном предельном случае, когда градиент давления пренебрежимо мал по сравнению с силой инерции, течение плазмы происходит в *гиперзвуковом* режиме с нулевым продольным ускорением плазмы. Последнее, однако, не означает, что продольная скорость течения равна нулю или постоянна, поскольку вследствие непрерывной деформации силовых линий направление "продольности" изменяется с течением времени. В действительности продольное движение в этом режиме неравномерно и оно происходит так, что в каждой неинерциальной системе отсчета, связанной с каким-то малым элементом силовой трубки, центробежная сила и сила Кориолиса, а также сила, обусловленная неравномерностью вращения указанного элемента, в сумме уравновешивают друг друга, преобладая в то же время над всеми остальными силами, действующими в продольном направлении.

Такова физическая основа приближения сильного вмороженного магнитного поля, предложенного впервые С.И. Сыроватским (см. [[1]-[3]]). Главное в этом подходе то, что магнитное поле, не содержащее нулевых точек, определяется независимо от течения плазмы, а само течение может быть затем найдено по уже известной эволюции равновесного магнитного поля. Каждая из указанных задач при этом описывается более простыми, чем в исходной системе, уравнениями.

Наиболее интересные результаты применения этого приближения к астрофизике были получены в работах [[2]] и [[4]] для двумерных конфигураций магнитного поля, а также для трехмерных конфигураций, обладающих осевой [[5]] или какой-то другой симметрией (см. [[6]]). Наличие подобной симметрии делает возможным описание поля в терминах функции магнитного потока. Это в свою очередь позволяет свести расчет течения плазмы в гиперзвуковом режиме к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) ([[2], [4]]), что безусловно является важным достижением в магнитной гидродинамике.

Цель данной работы состоит в том, чтобы дать обзор новых результатов, связанных с дальнейшим развитием методов исследования МГД-течений солнечной плазмы в приближении сильного магнитного поля.

1 МГД-уравнения в приближении сильного вмороженного магнитного поля

Как уже говорилось выше, магнитное поле $\mathbf{B}$ в рассматриваемом приближении удовлетворяет уравнению бессилового равновесия

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0, \tag{1}$$

а также уравнению соленоидальности

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

в которые время t входит как параметр.

Плазма считается идеально проводящей, поэтому должно выполняться также уравнение вмороженности магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ есть скорость течения плазмы.

В *квазистатическом* режиме плазма течет так, что ее давление p остается постоянным вдоль силовых линий, т.е. (см. [[3]])

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0. \tag{4}$$

Это уравнение применимо в условиях, когда скорость течения плазмы много меньше скорости звука, а эффекты вязкости и гравитации пренебрежимо малы.

В *гиперзвуковом* режиме вместо (4) должно выполняться условие поперечности ускорения плазмы [[4]]

$$\mathbf{B} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = 0. \tag{5}$$

Оно справедливо для течений со скоростями много большими скорости звука, но много меньшими альфвеновской скорости; вязкость и гравитация здесь тоже считаются пренебрежимо малыми.

Независимо от того, какой из указанных режимов рассматривается, полная система МГД-уравнений должна включать также уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{6}$$

и уравнение энергии, которое для идеальной плазмы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \tag{7}$$

где ρ есть плотность плазмы, а γ – показатель адиабаты.

Рассмотрим вначале как действует приближение сильного поля в двумерном случае. Отметим прежде всего, что для описания магнитного поля $\mathbf{B} \equiv (B_\mathrm{x}, B_\mathrm{y})$ в этом случае можно ввести согласно (2) функцию магнитного потока $A(\mathbf{r}, t)$, связанную с полем соотношением

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x} \right). \tag{8}$$

Тогда в терминах этой функции уравнение бессилового равновесия (1) сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta A = 0, \tag{9}$$

а уравнение вмороженности (3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = 0. \tag{10}$$

Аналогичным образом получаем вместо (4) в квазистатическом режиме [[3]]

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla A \cdot \nabla p = 0 \tag{11}$$

и вместо (5) соответственно в гиперзвуковом режиме [[2]]

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla A \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = 0, \tag{12}$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ есть единичный вектор, направленный вдоль координатной оси z перпендикулярно плоскости течения плазмы.

Предположим, что решение уравнения (9) известно, тогда, независимо от режима течения, из условия вмороженности (10) можно найти поперечную компоненту скорости [[2]]

$$\mathbf{v}_{\perp} = -\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\nabla A}{(\nabla A)^2}. \tag{13}$$

Продольная же компонента скорости $\mathbf{v}_{\|}$ должна определяться, исходя из уравнения (11) или (12), в зависимости от того, какой режим течения рассматривается. Для гиперзвукового режима это прямо следует из уравнения (12), поскольку скорость в него входит явно (см. [[2]] и [[4]]). Однако в случае квазистатического режима уравнение (11) не содержит скорость, поэтому использование его в качестве условия для продольного движения плазмы не столь очевидно и возможно лишь при учете уравнений (6) и (7) (см. [[7]] и раздел 2).

Определение продольного течения в каждом из указанных режимов представляет собой отдельную задачу, поэтому алгоритм ее решения будет приведен в следующих разделах. Теперь же рассмотрим как находится поперечная скорость плазмы для трехмерных конфигураций. Приведенный выше анализ показывает, что невозможно определить в двумерном случае поперечную скорость течения плазмы, не зная функцию магнитного потока A. Решение задачи о течении плазмы в поле трехмерного магнитного диполя [[5]] лишь подтверждают эту точку зрения, поскольку оно также основывается на использовании аналогичной функции, легко определяемой для осесимметричных конфигураций поля. В то же время, для трехмерных конфигураций общего вида такой функции потока не существует – это хорошо известный факт из векторного анализа, поэтому поперечную скорость плазмы в общем случае можно определить только через магнитный вектор-потенциал $\mathbf{A}$.

Действительно, с учетом соотношения

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{14}$$

уравнение вмороженности (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi = \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{15}$$

где потенциал Φ совпадает с точностью до множителя с электрическим потенциалом. В данном случае он не является произвольной функцией, а подчиняется уравнению [[8]]

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Phi = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{16}$$

которое есть результат скалярного умножения уравнения (15) на $\mathbf{B}$. Полученное уравнение имеет ясный физический смысл: оно требует, чтобы в плазме с идеальной проводимостью продольная компонента электрического поля равнялась нулю, так как в противном случае это приводило бы к бесконечно большим электрическим токам.

Таким образом, по известному в каждый момент времени бессиловому магнитному полю $\mathbf{B}$ уравнение (14) определяет векторный потенциал $\mathbf{A}$ с точностью до градиента от некоторого калибровочного потенциала $\int \Phi \, dt$. Вид же потенциала Φ фиксируется уравнением (16), поскольку при заданных величинах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ оно однозначно (по крайней мере локально) решается методом характеристик, роль которых в данном случае играют магнитные силовые линии. Будем в дальнейшем для краткости называть потенциал Φ калибровочным, хотя, выражаясь точно, он является на самом деле производной по времени от калибровочного потенциала. Соответственно формулу (16) можно назвать в таком случае уравнением *МГД-калибровки*. Заметим теперь, что если $\mathbf{A}$ и Φ найдены по указанной схеме, то выражение для поперечной скорости уже элементарно следует из (15):

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{B} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right) / B^2 \tag{17}$$

Таков, на наш взгляд, наиболее оптимальный алгоритм нахождения поперечной скорости плазмы в общем трехмерном случае. Самым трудным шагом в этом алгоритме является, очевидно, определение вектор-потенциала $\mathbf{A}$ по заданному бессиловому полю $\mathbf{B}$, так как известный из векторного анализа способ вычисления $\mathbf{A}$ через объемный интеграл Био-Савара слишком трудоемок для практического применения. Однако, как показывают предварительные исследования, для *потенциальных* магнитных полей достаточно общего вида существует очень эффективный способ вычисления $\mathbf{A}$, поэтому предлагаемый здесь метод определения поперечной компоненты скорости должен, по-видимому, стать в скором времени весьма ценным инструментом для исследования МГД-течений в активных областях на Солнце.

2 Квазистатический режим течения плазмы

Метод расчета продольных квазистатических течений плазмы для случая двумерных конфигураций сильного магнитного поля был впервые предложен в [[7]]. Здесь изложение этого метода дается таким образом, чтобы он был применим также для течений в трехмерных магнитных полях.

Предположим снова, что бессиловое магнитное поле $\mathbf{B}$ и соответствующие ему магнитный вектор-потенциал $\mathbf{A}$ и калибровочный потенциал Φ известны в каждый момент времени и требуется найти продольную скорость плазмы $\mathbf{v}_{||}$ в квазистатическом режиме течения. Удобно представить ее в данном случае в виде

$$\mathbf{v}_{||} = a\mathbf{B}, \tag{18}$$

где $a \equiv a(\mathbf{r}, t)$ есть некоторая функция, которую нужно найти. Уравнение для этой функции получается как условие совместности системы, составленной из уравнений (4), (2), (6) и (7).

В самом деле, уравнение энергии (7) с учетом (6) можно переписать как

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{19}$$

Тогда, если подставить в это уравнение скорость в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_\perp, \tag{20}$$

а также воспользоваться определением (18) и уравнением (2), то с учетом (4) легко получается искомое уравнение

$$\mathbf{B} \cdot \nabla a = -\frac{1}{\gamma p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla p \right) - \nabla \cdot \mathbf{v}_\perp, \tag{21}$$

где $\mathbf{v}_\perp$ выражается формулой (17), а давление p удовлетворяет уравнению (4). Таким образом, правую часть полученного уравнения можно считать определенной, а его левая часть представляет собой производную от a вдоль векторного поля $\mathbf{B}$, поэтому рассматриваемое уравнение может быть решено методом характеристик. Принципиально важно здесь, что давление p и потенциал Φ, а также их градиенты, входящие в правую часть (21), определяются при заданных $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ тем же самым методом, что и величина a. Поэтому они могут быть найдены одновременно с ней в результате совместного интегрирования вдоль силовых линий соответствующих уравнений с помощью стандартных численных методов решения ОДУ.

Несколько сложнее обстоит дело с вычислением плотности плазмы ρ, поскольку ее можно рассчитать лишь после того, как найдены p и $\mathbf{v}$. Действительно, уравнение непрерывности (6) после простых преобразований, использующих (20), (18) и (21), принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\rho}{\gamma p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla p \right). \tag{22}$$

Это уравнение при известных $\mathbf{v}_{\parallel}$, $\mathbf{v}_{\perp}$ и p тоже имеет характеристическую форму, однако, его характеристиками являются не магнитные силовые линии, а траектории движения жидких частиц в четырехмерном пространстве с координатами (t, x, y, z) (в специальной теории относительности они называются мировыми линиями). Таким образом, последний шаг данного алгоритма, а именно определение плотности плазмы, снова сводится к применению метода характеристик, т.е. к решению следующего ОДУ:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\gamma p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla p \right). \tag{23}$$

В гидродинамике применение этого метода к решению подобной задачи соответствует просто решению ее в лагранжевом представлении.

Объем данной работы не позволяет явно продемонстрировать как действует описанный метод, поэтому укажем лишь на пример его успешного применения к решению некоторой конкретной задачи, где он доказал свою высокую эффективность. Речь идет об исследовании медленного стационарного процесса магнитного пересоединения в окрестности трехмерной нулевой точки потенциального магнитного поля $\mathbf{B} = (x, y, -2z)$. Это исследование было выполнено в работе [[9]] для случая несжимаемой резистивной жидкости, течение которой происходит в квазистатическом режиме. Как было показано выше на примере идеальной плазмы, все величины в этом режиме находятся последовательным применением метода характеристик. Оказывается, что это замечательное свойство переносится без существенных изменений на случай квазистатических стационарных течений несжимаемой жидкости с конечной проводимостью. Благодаря этому, а также вследствие простоты исследуемого магнитного поля, указанная задача решается аналитически в общем виде [[9]].

Несколько неожиданным результатом решения этой задачи, а также аналогичной двумерной задачи [[10]] является то, что помимо электрического сопротивления плазмы, необходимо учитывать также эффект вязкости в указанных условиях. Это связано с тем, что одного лишь сопротивления жидкости оказывается недостаточно для того, чтобы квазистатическое стационарное пересоединение магнитного поля вблизи нулевых точек описывалось гладкими решениями. В то же время, комбинированный эффект сопротивления и вязкости обеспечивает необходимую гладкость решений, однако, для своего описания требует уже существенно другого подхода, обсуждение которого выходит за рамки данного обзора.

3 Гиперзвуковой режим течения плазмы

Как уже отмечалось, тот факт, что расчет течения плазмы в гиперзвуковом режиме сводится к решению ОДУ был установлен в работе [[2]] при исследовании частного течения плазмы в окрестности нулевой точки двумерного магнитного поля. Эта идея получила дальнейшее развитие в [[4]], где был разработан соответствующий метод расчета для произвольных двумерных магнитных конфигураций.

Затем в [[11]] был предложен другой метод, основанный на использовании так называемых "вмороженных" координат, широко применяемых ранее для решения задач магнитосферной физики [[12]]. По замыслу этот метод предназначался для расчета течений в произвольных трехмерных конфигурациях магнитного поля. Однако любая попытка его применения к реальной несимметричной конфигурации магнитного поля обречена на неудачу. Причина этого в том, что указанный метод невозможно применить, не имея явной формулы для радиуса-вектора, определяющего положение точек на произвольной фиксированной силовой линии магнитного поля. Вычисление же этой формулы фактически равносильно определению потенциалов Эйлера для данного магнитного поля в аналитической форме, что возможно лишь в случае магнитных конфигураций, обладающих достаточно высокой степенью симметрии. Иначе говоря, несмотря на свое изящество, метод, предложенный в [[11]], имеет лишь кажущуюся общность и на практике позволяет рассчитывать гиперзвуковые течения для конфигураций, не слишком сильно отличающихся от двумерных, т.е. примерно такого же типа, что и в первоначальном методе [[4]].

Наиболее ценным, на наш взляд, в методе [[11]] является то, что при его создании была отчетливо сформулирована идея об эффективной одномерности течения плазмы в заданном вмороженном магнитном поле. Она получила свое выражение в следующей очень красивой механической аналогии: лагранжева частица плазмы движется по силовой линии точно так же, как легкая бусинка по жесткой, но деформируемой струне.

Эта аналогия позволила в дальнейшем понять, каков же на самом деле наиболее оптимальный метод расчета гиперзвуковых течений в двумерном случае (см. [[7]]). Ниже будет показано, что такой метод легко обобщается также на случай течений в произвольных трехмерных магнитных конфигурациях.

В дальнейшем удобно использовать следующее обозначение

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{24}$$

для так называемой субстанциональной производной по времени. Применим эту производную к двумерному уравнению вмороженности (10), в результате чего получим уравнение, которое совместно с (12) позволяет выразить ускорение плазмы в явном виде:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2(\mathbf{v}\cdot\nabla)\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\nabla A\right)\frac{\nabla A}{(\nabla A)^2}. \tag{25}$$

Припишем теперь к этому уравнению определение гидродинамической скорости

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{v}. \tag{26}$$

Тогда получим систему уравнений, которая в лагранжевом представлении принимает вид системы ОДУ (при условии, что функция магнитного потока $A(\mathbf{r}, t)$ считается известной), – в этом собственно и заключается суть первоначального метода расчета двумерных гиперзвуковых течений плазмы, предложенного в [[4]].

Несовершенство этого метода в том, что при решении системы (25)–(26) интегрируется полная скорость течения плазмы, в то время как частично она уже известна в виде поперечной компоненты (13) и все что нужно определить на самом деле – это продольную компоненту скорости. Задавшись этой целью, представим последнюю в виде

$$\mathbf{v}_{||} \equiv \chi \mathbf{B}/B^2, \tag{27}$$

где $\chi \equiv \chi(\mathbf{r}, t)$ есть новая величина, подлежащая определению и известная в магнитной гидродинамике как объемная плотность кросс-спиральности. Она связана с полной скоростью $\mathbf{v}$ соотношением

$$\chi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}, \tag{28}$$

из которого после применения к нему производной (24) получим с учетом (5)

$$\frac{D\chi}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{B}}{Dt}.$$

Разлагая теперь в правой части этого выражения скорость на поперечную и продольную компоненты и используя определение (27), находим

$$\frac{D\chi}{Dt} = \left(\frac{\chi}{B^2}\mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp\right) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\frac{\chi}{B^2}\mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp\right) \cdot \nabla \mathbf{B}\right]. \tag{29}$$

Это уравнение при заданном бессиловом поле $\mathbf{B}$ и определенной по нему согласно (17) поперечной скорости $\mathbf{v}_\perp$ описывает эволюцию величины χ. Оно может быть решено с помощью метода характеристик, или, что то же самое, его решение может быть получено при переходе к лагранжевому представлению в результате интегрирования следующей системы ОДУ:

$$\frac{d\chi}{dt} = \left(\frac{\chi}{B^2}\mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp\right) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\frac{\chi}{B^2}\mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp\right) \cdot \nabla \mathbf{B}\right], \tag{30}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\chi}{B^2}\mathbf{B} + \mathbf{v}_\perp. \tag{31}$$

В двумерном случае эти уравнения сильно упрощаются, в частности, вследствие того, что любое потенциальное магнитное поле представляется здесь в виде некоторой аналитической комплекснозначной функции

$$\mathcal{B}(\zeta, t) = B_{\mathrm{y}} + \mathrm{i}\, B_{\mathrm{x}}, \tag{32}$$

зависящей от комплексной пространственной переменной $\zeta = x + \mathrm{i}y$. С учетом этого обстоятельства система (30)–(31) приобретает весьма элегантный вид, а именно [[13]]

$$\frac{d\chi}{dt} = \mathrm{Im}\left\{\mathcal{V}\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \mathcal{V}\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \zeta}\right)\right\} \tag{33}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathcal{V}, \tag{34}$$

где комплексная скорость

$$\mathcal{V} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{i}\chi\right)/\mathcal{B}. \tag{35}$$

В работе [[13]] было показано также, что вместе с течением плазмы может быть рассчитана и ее плотность ρ, если систему (33)–(35) дополнить следующей парой ОДУ:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\,\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{\mathcal{B}}\Big(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + 2\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta} - \mathcal{H}\Big)\Big], \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \mathcal{V}\Big(\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial t\,\partial\zeta} - \frac{1}{\mathcal{B}}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta}\Big) - \mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t}\,\mathrm{Im}\,\Big[\frac{1}{\mathcal{B}}\Big(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + 2\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta} - \mathcal{H}\Big)\Big] + \\ &+ \mathcal{V}^2\Big[\frac{\partial^2\mathcal{B}}{\partial\zeta^2} - \frac{2}{\mathcal{B}}\Big(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta}\Big)^2\Big] + \mathcal{H}\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{B}}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta} + \\ &+ \mathcal{H}\,\mathrm{Re}\,\Big[\frac{1}{\mathcal{B}}\Big(\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} + 2\mathcal{V}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta} - \mathcal{H}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь комплексная величина $\mathcal{H}$ играет вспомогательную роль, а именно, она необходима для того, чтобы можно было вычислить плотность ρ в каждой движущейся согласно (33)–(35) лагранжевой частице. Действительная и мнимая части величины $\mathcal{H}$ определяют значения соответственно y- и x-компоненты $\nabla\chi$ в этих частицах. Добавим к этому, что новый метод расчета плотности плазмы (36)–(37) может быть легко обобщен на трехмерный случай путем аналогичного расширения системы ОДУ (30)–(31), однако, ввиду громоздкости получающихся выражений он здесь не приводится и будет рассмотрен в другой работе.

Отметим также, что согласно (7) величина p/ρ^γ есть интеграл движения лагранжевых частиц, равный своему начальному значению p_0/ρ_0^γ. Отсюда элементарно находится давление плазмы p в каждой такой частице, если плотность ρ уже вычислена в соответствии с приведенной выше схемой. Таким образом, система ОДУ (33)–(37) полностью определяет все физические параметры плазмы двумерных гиперзвуковых течений в сильном магнитном поле.

Необходимо отметить, что метод, предложенный в [[11]], позволяет в двумерном случае делать, казалось бы, то же самое, однако, для своего применения требует вычисления явных формул, описывающих форму магнитных силовых линий, что, как правило, возможно лишь для весьма ограниченного класса конфигураций даже в двумерном случае. В то же время, приведенный выше метод свободен от подобных ограничений и имеет, по-видимому, законченный оптимальный вид.

В заключение отметим, что в двумерном случае можно выделить довольно широкий специальный класс точных решений приведенных выше уравнений. Этот класс решений описывает так называемые *гармонические гиперзвуковые* течения в сильном магнитном поле. Такие решения впервые были получены из геометрических соображений в работе [[14]], где каждое течение представлялось как непрерывная последовательность конформных преобразований $\mathcal{Z}(\zeta_0, t)$ плоскости. Было показано, что такие течения существуют для специального типа эволюции магнитных конфигураций и очень компактно определяются одним линейным уравнением вида

$$\frac{\partial^2\mathcal{Z}}{\partial t^2} = \frac{\kappa(t)}{\mathcal{B}_0(\zeta_0)}\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\zeta_0}. \tag{38}$$

Здесь $\kappa(t)$ есть некоторая произвольная вещественная функция, а неизвестная величина $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(\zeta_0, t)$ определяет в момент времени t комплексную лагранжеву координату жидкой частицы, находившейся в начальный момент времени в точке ζ_0 в магнитном поле, задаваемом комплексной функцией $\mathcal{B}_0(\zeta_0)$ (см. (32)).

Для данного уравнения с различными функциями $\kappa(t)$ и $\mathcal{B}_0(\zeta_0)$ удается найти в явном виде много аналитических решений, описывающих нестационарные гиперзвуковые течения плазмы в эволюционирующем магнитном поле. В частности, в работах [[13]-[15]] были найдены решения, представляющие нестационарный процесс формирования токового слоя в различных конфигурациях, содержащих в начальный момент времени нулевую точку магнитного поля. При другом выборе начальных конфигураций подобные решения могут оказаться полезными также для моделирования различных нестационарных МГД-течений в атмосфере Солнца.

4 Общий метод расчета двумерных магнитных конфигураций с токовыми слоями

Из выражения (13) видно, что $\mathbf{v}_\perp$ обращается в бесконечность в нулевых точках магнитного поля, где $|\nabla A| = 0$, если индукционное электрическое поле в них $-\partial A/\partial t \neq 0$. Такие нулевые точки называют *особыми*, и они представляют большой интерес для магнитной гидродинамики [[2]]. В принципе нулевая точка может быть и не особой, если производная $\partial A/\partial t$ равна нулю в этой точке. Указанное условие может легко выполниться в отдельный момент времени, однако, выполнение его на конечном временном интервале требует очень специальной эволюции граничных условий для уравнения (9). Поэтому в случае общего положения следует ожидать, что все нулевые точки изменяющегося во времени магнитного поля будут особыми.

В работе [[2]] Сыроватский показал, что указанная особенность в скорости $\mathbf{v}_\perp$ может разрешаться за счет образования в окрестности нулевой точки тока, имеющего форму тонкого слоя. В приближении сильного поля и идеальной проводимости токовый слой имеет нулевую толщину и его формирование выглядит как процесс непрерывной деформации всей конфигурации магнитного поля, при котором особоя точка вытягивается в одномерный сегмент, представляющий собой тангенциальный разрыв магнитного поля, т.е. токовый слой. Развитие этого процесса происходит так, что величина магнитного потока A на самом токовом слое остается постоянной и следовательно $\partial A/\partial t = 0$, а вместе с этим и $\mathbf{v}_\perp = 0$, т.е. тем самым особенность поля скоростей устраняется.

Таким образом, физически правильные решения уравнения (9) должны в общем случае содержать токовые слои вместо нулевых точек, причем форма и размер слоев зависят от граничных условий и должны определяться самосогласованно. Для достаточно симметричных конфигураций форма слоев будет плоской и в этих случаях можно построить много аналитических решений, применяя метод конформных отображений на комплексной плоскости [[4]].

Однако в общем случае несимметричных конфигураций этот подход трудно осуществим и для решения указанной задачи необходимо использовать совершенно иной метод, предложенный в работе [[16]]. С помощью него была, в частности, решена следующая задача: пусть на фотосферной границе $y = 0$ задана в каждый момент времени t нормальная компонента магнитного поля $B_{\mathrm{y}}(x, 0, t)$ такая, что соответствующее ему в начальный момент времени $t = 0$ чисто потенциальное магнитное поле

$$\mathcal{B}_{\mathrm{pot}}(\zeta, t) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\mathrm{y}}(\xi, 0, t)}{\xi - \zeta}\, d\xi \tag{39}$$

убывает на бесконечности дипольным образом ($\mathcal{B}_{\mathrm{pot}}(\zeta, 0) \sim 1/\zeta^2$) и имеет N нулевых точек в короне (полуплоскость $y > 0$) и ни одной такой точки на фотосфере. Тогда магнитное поле в момент времени t, содержащее N токовых слоев в короне и удовлетворяющее указанным граничным условиям, определяется следующей формулой:

$$\mathcal{B}(\zeta, t, \mathbf{r}_{\mathrm{e}}) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi} Q_{\mathrm{hp}}(\zeta, \mathbf{r}_{\mathrm{e}}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_{\mathrm{y}}(\xi, 0, t)\, d\xi}{(\xi - \zeta)\, Q_{\mathrm{hp}}(\xi, \mathbf{r}_{\mathrm{e}})}. \tag{40}$$

Здесь функция

$$Q_{\mathrm{hp}}(\zeta, \mathbf{r}_{\mathrm{e}}) = \prod_{k=1}^{N} \sqrt{[(z - x_{1k})^2 + y_{1k}^2][(z - x_{2k})^2 + y_{2k}^2]} \tag{41}$$

содержит $2N$ точек ветвления $\zeta_{1k} = x_{1k} + i\, y_{1k}$ и $\zeta_{2k} = x_{2k} + i\, y_{2k}$, представляющих собой концы нейтральных токовых слоев. Набор $4N$ действительных координат x_{1k}, x_{2k}, y_{1k} и y_{2k}, $k = 1, \ldots, N$, в этой формуле обозначен для краткости вектором $\mathbf{r}_{\mathrm{e}}$.

Положение концов $\mathbf{r}_{\mathrm{e}}$ токовых слоев не является произвольным, а должно удовлетворять $4N$ уравнениям. Первый набор из $2N + 1$ уравнений следует из условия правильной асимптотики поля (40) на бесконечности (она должна быть дипольной) и записывается в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^m B_y(\xi, 0, t)}{Q_{\mathrm{hp}}(\xi, \mathbf{r}_{\mathrm{e}})} d\xi = 0, \qquad m = 0, \ldots, 2N. \tag{42}$$

Второй набор из $2N - 1$ уравнений для $\mathbf{r}_{\mathrm{e}}$ получается из условия вмороженности магнитного поля и состоит из двух частей. Первая часть включает N уравнений

$$\mathrm{Re}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{\zeta_{1k}} \mathcal{B}(\zeta, t, \mathbf{r}_{\mathrm{e}})\, d\zeta \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \int\limits_{-\infty}^{\zeta_k} \mathcal{B}_{\mathrm{pot}}(\zeta, 0)\, d\zeta \right\}, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{43}$$

которые выражают собой неизменность величины магнитного потока в одной из концевых точек каждого токового слоя, "зарождающихся" в нулевых точках ζ_k исходной потенциальной конфигурации. Остальные $N - 1$ уравнений

$$\mathrm{Re}\left\{ \int\limits_{\zeta_{1k}}^{\zeta_{2k}} \mathcal{B}(\zeta, t, \mathbf{r}_{\mathrm{e}})\, d\zeta \right\} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N - 1, \tag{44}$$

определяют пары концевых точек для каждого из $N-1$ токовых слоев, в то время как для N-го слоя такая пара выделяется автоматически – как последняя из оставшихся "неспаренных" концевых точек. Этот набор уравнений необходим, поскольку без него все точки ветвления ζ_{1k} и ζ_{2k} неразличимы.

Выражение для функции магнитного потока определяется следующей формулой

$$A(x, y, t, \mathbf{r}_{\mathrm{e}}) = -\mathrm{Re}\left\{ \int\limits_{\zeta_{11}}^{\zeta} \mathcal{B}(\zeta, t, \mathbf{r}_{\mathrm{e}})\, d\zeta + \int\limits_{-\infty}^{\zeta_1} \mathcal{B}_{\mathrm{pot}}(\zeta, 0)\, d\zeta \right\}, \tag{45}$$

где ζ_1 есть комплексная координата нулевой точки в начальный момент времени, из которой образуется первый токовый слой. Форма каждого из токовых слоев определяется здесь как соответствующая силовая линия поля (40) или, эквивалентно, как линия уровня функции магнитного потока (45), соединяющая указанные выше парные точки ветвления.

Самым трудным шагом в приведенном алгоритме решения рассматриваемой задачи является, очевидно, решение уравнений (42)–(44) для концевых точек токовых слоев. Тем не менее, в сравнительно несложных ситуациях, когда, например, распределение нормальной компоненты магнитного поля на фотосфере можно представить в виде точечных источников, указанная проблема решается относительно просто [[17]].

Однако даже в самом общем случае нахождение концевых точек $\mathbf{r}_\mathrm{e}$ токовых слоев в любой наперед заданный момент времени t можно свести к более простой и достаточно стандартной задаче, если представить зависимость $\mathbf{r}_\mathrm{e}$ от времени как динамический процесс, управляемый некоторой системой ОДУ. Последняя получается из (42)–(44) простым дифференцированием по t в предположении, что $\mathbf{r}_\mathrm{e} \equiv \mathbf{r}_\mathrm{e}(t)$. После некоторых преобразований ее можно записать в следующем виде:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^m B_\mathrm{y}(\xi,0,t)}{Q_\mathrm{hp}(\xi,\mathbf{r}_\mathrm{e})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{e}} \left(\ln Q_\mathrm{hp}(\xi,\mathbf{r}_\mathrm{e})\right)\, d\xi \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}_\mathrm{e}}{dt} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^m}{Q_\mathrm{hp}(\xi,\mathbf{r}_\mathrm{e})} \frac{\partial B_\mathrm{y}}{\partial t}(\xi,0,t)\, d\xi, \qquad m = 0,\ldots,2N, \tag{46}$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \left(\int_{-\infty}^{z_{\lambda k}} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mathbf{r}_\mathrm{e}}(\zeta,t,\mathbf{r}_\mathrm{e})\, d\zeta \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}_\mathrm{e}}{dt} \right\} = -\mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{z_{\lambda k}} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}(\zeta,t,\mathbf{r}_\mathrm{e})\, d\zeta \right\},$$

$$\lambda = 1,2, \quad k = 1,\ldots,N+1-\lambda. \tag{47}$$

В качестве начальных данных для приведенной системы ОДУ следовало бы взять координаты соответствующих нулевых точек исходного поля $\mathcal{B}_\mathrm{pot}(\zeta,0)$, но такие точки являются особыми для данной системы, поскольку каждая из них "раздваивается" с течением времени в соответствующие точки ветвления. Поэтому, чтобы определить в каком направлении нужно отступить от указанных точек, чтобы начать интегрирование этой системы ОДУ, необходим предварительный анализ структуры ее решений вблизи начальных точек. Подобный анализ еще не проделан в общем случае, однако, при рассмотрении конкретных примеров он не вызывает серьезных затруднений (см. [[18]]), так что с поправкой на сделанную оговорку нахождение концевых точек токовых слоев сводится к решению сформулированной выше задачи Коши для системы (46)–(47), что с точки зрения численных расчетов представляется достаточно стандартной задачей.

Отметим в заключение, что рассмотренный метод расчета магнитных конфигураций с нейтральными токовыми слоями может быть также обобщен на случай ненейтральных слоев с горизонтальной компонентой магнитного поля, которые находят интересное применение для моделирования равновесных конфигураций солнечных протуберанцев [[18]].

5 Заключение

В данной работе было показано, как развивались в последние годы методы исследования МГД-течений солнечной плазмы в приближении сильного вмороженного магнитного поля, основы которого и его первые успешные применения к астрофизике были даны в работах С.И. Сыроватского и его коллег [[1]-[6]]. К числу новых интересных достижений в этой области можно, по-видимому, отнести следующие.

Наиболее важным для дальнейшего развития всего направления является то, что в самом общем трехмерном случае течение плазмы, ее плотность и давление могут быть рассчитаны путем последовательного применения метода характеристик как в квазистатическом, так и в гиперзвуковом режимах течения плазмы. Для поперечного движения плазмы, вне зависимости от рассматриваемого режима, характеристиками служат силовые линии магнитного поля. То же самое справедливо для квазистатического продольного движения при условии, что влияние гравитации пренебрежимо мало и выполнен энергобаланс идеальной плазмы. Однако для плотности плазмы в квазистатическом режиме, а также для всех величин в гиперзвуковом режиме, характеристиками являются траектории движения лагранжевых частиц.

Что касается двумерного случая, то здесь следует отметить, во-первых, общий метод расчета магнитных полей с несколькими токовыми слоями [[16]], во-вторых, широкий класс точных аналитических решений, определяющих гармонические гиперзвуковые течения (см. [[13]-[15]]), и, в-третьих, значительно усовершенствованный метод расчета гиперзвуковых течений (см. [[7]] и [[13]]), предложенный ранее в [[4]].

Все это вместе взятое позволяет надеяться, что в скором времени мы будем свидетелями и участниками нового интересного этапа развития теории МГД-течений плазмы в солнечной атмосфере.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант номер 96-02-18139а.

References

[1] *Сыроватский С.И.* // Астрон. ж. 1966. Т. 43. С. 340.

[2] *Сыроватский С.И.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1727.

[3] *Сыроватский С.И.* // Тр. ФИАН СССР. Т. 110. – М.: Наука, 1979 – С. 5.

[4] *Сомов Б.В., Сыроватский С.И.* // Тр. ФИАН СССР. Т. 74. – М.: Наука, 1974 – С. 14.

[5] *Сомов Б.В., Сыроватский С.И.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 621.

[6] *Боброва Н.А., Сыроватский С.И.* // Письма в Астрон. ж. 1979. Т. 3. С. 143.

[7] *Titov V.S.* // Geometry in partial differential equations. – Singapore: World Scientific, 1994. – P. 446.

[8] *Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 265.

[9] *Priest E.R., Titov V.S.* // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 1996, V. 355, in press.

[10] *Priest E.R, Titov V.S., Vekstein G.E., Rickard G.J.* // J. Geophys. Res. 1994. V. 99, No A11, P. 21467.

[11] *Горбачев В.С., Кельнер С.Р.* // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 89.

[12] *Пудовкин М.И., Семенов В.С.* // Теория пересоединения и взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли. – М.: Наука, 1985 – 126 С.

[13] *Priest E.R., Titov V.S., Rickard G.J.* // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1995. V. 351. P. 1.

[14] *Титов В.С.* // Физика солнечной плазмы. – М.: Наука, 1989. – С. 21.

[15] *Titov V.S., Priest E.R.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1993. V. 72. P. 249.

[16] *Titov V.S* // Sol. Phys. 1992. V. 139. P. 401.

[17] *Parnel C.E., Priest E.R., Titov V.S.* // Sol. Phys. 1994. V. 153. P. 217.

[18] *Cartledge N.P., Titov V.S., Priest E.R.* // Sol. Phys. 1996. V. 166. P. 287.

Институт программных систем РАН,
Переславль-Залесский

NEW METHODS FOR INVESTIGATING MHD FLOWS OF SOLAR PLASMA IN STRONG FIELD APPROXIMATION

V.S. TITOV

The new theoretical methods for investigating MHD flows of solar plasma in strong frozen-in magnetic field approximation are reviewed. It is shown that in both quasistatic or hypersonic regimes of plasma flow all its physical parameters may be calculated by the method of characteristics. Depending on the regime or on the determined parameter, these characteristics are magnetic field lines or the trajectories of fluid particles. The general method for calculating 2D magnetic field with several current sheets by a given normal component of magnetic field on the photosphere is also considered.